BIBLIOTECA

MANUALELOR ŞTIINŢIFICE

INGRIJITĂ DE D-L

OCTAV ONICESCU

PROFESOR UNIVERSITAR

EXERCIŢII DE MECANICĂ

(STATICA)

DE

ERNEST ABASON
ASISTENT LA UNIVERSITATE ŞI LA
ŞCOALA POLITEHNICĂ DIN BUCUREŞTI

CVLTVRA NAŢIONALĂ

1924

ERNEST ABASON

EXERCIŢII DE MECANICĂ

TIPĂRIT LA CVLTVRA NAŢIONALĂ
1924

INTRODUCERE

Prezenta culegere de probleme de mecanică este o încercare de a răspunde cu un moment mai de vreme, lipsei, atât de des exprimată, a unui manual elementar de mecanică.

In acest scop am grupat problemele propuse pe capitole, precedând fiecare grup de probleme cu un rezumat al principalelor rezultate necesare pentru rezolvarea lor și prin exemple în acelaș gen cu problemele propuse.

Pentru expunerea diferitelor capitole am căutat să păstrez o ordine logică, noțiunile să apară ca o *necesitate* a studiului și m'am ferit de definiții nejustificate imediat sau de convenții artificiale.

In general am încercat a aplicà ideile desvoltate la cursul și seminariile de mecanică dela Facultatea de Științe din București de către d-l profesor *D. Pompeiu*, — idei sintetizate în formula: *«Mecanica este o știință fizică, pentru studiul căreia matematicile sunt numai un auxiliar»*.

In special problema de echilibru am precedat-o de noțiuni precise asupra libertăților și legăturilor unui corp solid — arătând că soluțiunea ei presupune în mod natural un *examen cinematic* preliminar — condițiunile de echilibru exprimând de fapt că libertățile sistemului sunt împedecate.

Un capitol special l'am rezervat unui număr de probleme pentru a căror rezolvare ecuațiunile mecanicei raționale nefiind suficiente, ne conduc până pe pragul mecanicei aplicate și am subliniat astfel aproximația cu care mecanica rațională rezolvă problemele fizice.

Acest grup de probleme precum și acela relativ la unități de măsură le-am precedat de o expunere mai detailată, dată fiind importanța acestor chestiuni.

Am căutat deasemenea să precizez legătura dintre noțiunile de *cuplu* și *moment*, aceasta din urmă fiind atât de des întrebuințată încât se pierde aproape originea ei fizică: *măsura efectului unui cuplu.*

Cam acestea au fost ideile conducătoare la alcătuirea prezentei lucrări, care în afară de problemele propuse, conține de fapt rezumatul unui curs de mecanică pe care-l cred potrivit unor persoane cari au cunoştinţe generale de mecanică, obţinute mai mult pe cale intuitivă sub forma unei colecţii de observaţii şi experienţe asupra fenomenelor fizice.

Aduc cu această ocazie viile mele mulţumiri d-lui *Octav Onicescu* care m'a invitat să fac această lucrare şi m'a ajutat cu sfatul la alcătuirea ei.

Ţin să exprim aici şi recunoştinţa mea pritenului meu, pictorul *Jiquidi*, pentru figurile pe care le-a desemnat în peniţă, anume pentru acest manual.

Noemvrie 1923.

ERNEST ABASON

CAPITOLUL I

GENERALITĂŢI. DEFINIŢIUNI

§ 1. Schimbările de *poziţie* în spaţiu şi de *formă* a corpurilor materiale sunt fenomene mecanice.

Mecanica raţională se ocupă cu studiul acestor fenomene, pornind dela câteva propoziţii simplificatoare asupra corpurilor şi anume:

1. Corpurile sunt *rigide*, adică nu se pot deformà oricât de mari ar fi acţiunile la cari le supunem.

2. Corpurile sunt *perfect lucii* şi prin urmare se neglijează *frecările* cari nasc la contactul a două corpuri.

3. Pe lângă corpurile cu una, două sau trei dimensiuni se mai consideră părticele foarte mici de materie, a căror poziţie este perfect caracterizată de un punct geometric; acestea se zic puncte materiale şi sunt înzestrate cu câte un coeficient numeric numit massa punctului material.

§ 2. In ştiinţa fizică întâlnim *mărimi aritmetice*, caracterizate prin valoarea absolută; *mărimi algebrice*, definite prin valoarea absolută şi sens, şi *mărimi geometrice* sau *vectoriale*, caracterizate prin valoare absolută direcţiune şi sens.

Acestea din urmă se reprezintă geometriceşte printr'un segment OA numit *vector* a cărui lungime reprezintă, la o scară oarecare, valoarea aritmetică, OA este direcţiunea iar sensul e dela O spre A. In mecanica raţională se întâlnesc toate aceste trei feluri de mărimi.

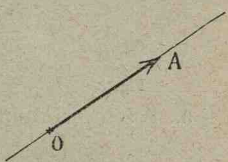

Fig. 1

EXERCIŢII

1. Să se caute exemple de fenomene mecanice.
2. Să se caute exemple de fenomene fizice şi chimice din cari să reiasă ipotezele simplificatoare şi să se caute elementele cari iau parte la desfăşurarea fenomenului şi cari totuş au fost lăsate de o parte într'un prim studiu.
3. Să se caute exemple de fenomene mecanice în cari să se pună în evidenţă *frecarea*, ca element ce împiedecă mişcarea.
4. Să se caute exemple de fenomene fizice şi chimice în cari să se deosebească partea de studiu calitativ de aceea de studiu cantitativ.

CAPITOLUL II

OPERAȚII CU VECTORI

§ 1. Suma a doi vectori concurenți $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ este vectorul $\overline{OR}$, diagonala paralelogramului construit pe $\overline{OA}$ și $\overline{OB}$ căreia i se zice și *rezultanta vectorilor.* Acest lucru se exprimă prin relațiunea geometrică

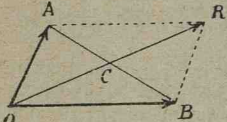

Fig. 2

$$(OA) + (OB) = (OR),$$

care se citește astfel: *suma proiecțiilor pe o axă oarecare a vectorilor $\overline{OA}$ și $\overline{OB}$ este egală cu proiecția pe aceeaș axă a lui $\overline{OR}$.*

Observare. Pentru a aflà pe $\overline{OR}$ nu este nevoie de a construì paralelogramul; ducem prin B un vector BR *egal, paralel* și *de acelaș sens* (adică cu un cuvânt *echipolent*) cu OA, sau unim O cu mijlocul C al lui AB și prelungim OC cu $CR = OC$.

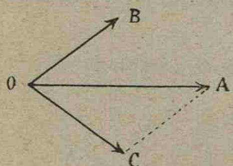

Fig. 3

§ 2. Diferența a doi vectori $(\overline{OA}-\overline{OB})$ este vectorul $\overline{OC}$ ce se obține ducând prin A un vector *egal, paralel* și *de sens contrar* cu $\overline{OB}$. Se scrie:

$$(OA)-(OB)=(OC).$$

§ 3. Suma mai multor vectori concurenți $\overline{OA}_1$, $\overline{OA}_2$, $\overline{OA}_3$...$\overline{OA}_n$ este vectorul $\overline{OR}$ ce se obține ducând $\overline{A_1 R_1}$ egal și paralel cu $\overline{OA}_2$, $\overline{R_1 R_2}$ egal și paralel cu $\overline{OA}_3$... $\overline{R_{n-1} R}$ egal și paralel cu $\overline{OA}_n$; poligonul

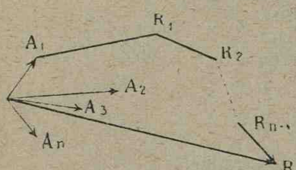

Fig. 4

$$OA_1\, R_1\, R_2 \ldots R_{n-1}\, R$$

se numește *poligonul vectorilor.*

Avem relațiunea geometrică:

$$(OA_1) + (OA_2) + \ldots + (OA_n) = (OR),$$

adică: *suma proiecțiilor pe o axă oarecare a lui $\overline{OA}_1$, $\overline{OA}_2$...$\overline{OA}_n$ este egală cu proiecția pe aceeaș axă a lui $\overline{OR}$.*

* * *

Insemnând cu $(X_1 Y_1)$, $(X_2 Y_2) \ldots (X_n Y_n)$ proiecțiile pe două axe perpendiculare, $ox.oy$, a vectorilor $\overline{OA}_1$, $\overline{OA}_2 \ldots \overline{OA}_n$, proiecțiile rezultantei $\overline{OR}$ pe aceleași axe sunt date de relațiile:

$$(1) \quad \begin{cases} X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n = \sum_{i=1}^{i=n} X_i , \\ Y = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n = \sum_{i=1}^{i=n} Y_i . \end{cases}$$

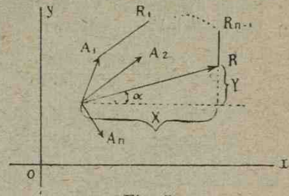

Fig. 5

Mărimea rezultantei are expresia

$$(2) \qquad R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{(\Sigma X_i)^2 + (\Sigma Y_i)^2}$$

iar unghiul ei cu axa *pozitivă* ox este dat de relațiunea:

$$(3) \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{Y}{X} = \frac{\sum_{i-1}^{i=n} X_i}{\sum_{i=1}^{i=n} Y_i} .$$

* * *

Dacă se dau vectorii $\overline{OA}_1$, $\overline{OA}_2 \ldots \overline{OA}_n$ și unghiurile:

$$(OA_1, OA_2),\ (OA_1, OA_3) \ldots (OA_{n-1}, OA_n),$$

mărimea rezultantei este dată de relația:

$$(4) \qquad R^2 = \sum_{i=1}^{i=n} \overline{OA}_i^2 + 2 \sum_{i \neq k}^{i=1,2\ldots n} \overline{OA}_i \overline{OA}_k \cos(\overline{OA}_i , \overline{OA}_k).$$

Pentru a află unghiul rezultantei cu vectorul OA_l spre exemplu, proiectăm poligonul vectorilor $OA_1\, OA_2 \ldots A_n$ pe direcțiunea $\overline{OA}_l$ și obținem:

$$\overline{OA}_1 \cdot \cos(\overline{OA}_1\, \overline{OA}_l) + \overline{OA}_2 \cdot \cos(\overline{OA}_2 \cdot \overline{OA}_l)$$
$$+ \ldots + \overline{OA}_n \cos(\overline{OA}_n, \overline{OA}_l) = \overline{OR} \cdot \cos(\overline{OR} \cdot \overline{OA}_l)$$

în care toate elementele sunt cunoscute, în afară de unghiul $(\overline{OR}, \overline{OA}_l)$.

* * *

EXEMPLE

Chestiunea I

Să se afle suma vectorilor cari unesc un vârf al unui paralelipiped cu toate celelalte vârfuri.

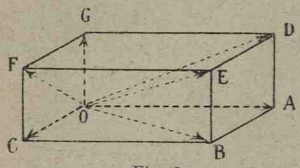

Fig. 6

Răspuns. Suma vectorilor $\overline{OA}$ și $\overline{OG}$ este vectorul $\overline{OD}$:

$$(OA)+(OG)=(OD);$$

avem apoi:

$$(OD)+(OC)=(OE)$$

prin urmare suma vectorilor $\overline{OA}$, $\overline{OC}$, $\overline{OG}$, este vectorul OE. De altă parte vectorii $\overline{OD}$, $\overline{OB}$ și $\overline{OF}$ se pot considerà respectiv ca fiind suma vectorilor

$$(OA)+(OB)\ ,\ (OC)+(OA)\ ,\ (OG)+(OC)$$

deci:

$$(OD)+(OB)+(OF)=2\left[(OA)+(OB)+(OG)\right]=2\ (OE);$$

prin urmare suma vectorilor dați este:

$$\left[(OA)+(OB)+(OC)\right]+\left[(OD)+(OB)+(OF)\right]+(OE)=4\ (OE)\ ,$$

adică un vector reprezentat printr'un segment de patru ori diagonala OE a paralelipipedului și având ca direcție această diagonală.

Chestiunea II

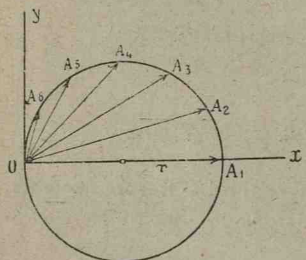

Fig. 7

Se divide un semicerc în șase părți egale prin punctele

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ A_5,\ A_6,\ O.$$

Se cere rezultanta vectorilor

$$OA_1,\ OA_2,\ OA_3,\ OA_4,\ OA_5,\ OA_6.$$

Răspuns. Proiecțiile pe axele Ox, Oy ale vectorilor dați, sunt

(OA_1)	$X_1 = 2r,$	$Y_1 = 0$
(OA_2)	$X_2 = OA_2 \cos 15^0 = 2r \cos 15^0,$	$Y_2 = 2r \cos 15^0 \sin 15^0$
(OA_3)	$X_3 = 2r \cos^2 30^0,$	$Y_3 = 2r \cos 30^0 \sin 30^0$
(OA_4)	$X_4 = 2r \cos^2 45^0,$	$Y_4 = 2r \cos 45^0 \sin 45^0$
(OA_5)	$X_5 = 2r \cos^2 60^0,$	$Y_5 = 2r \cos 60^0 \sin 60^0$
$(OA\ )$	$X_6 = 2r \cos^2 75^0,$	$Y_6 = 2r \cos 75^0 \sin 75^0$

Aplicând formulele (1), (2), (3), Cap. II, § 3, obținem proiecția rezultantei

$$X = \sum_{i=1}^{i=6} X_i = 2r(1+\cos^2 15^0+\cos^2 30+\cos^2 45+\cos^2 60^0+\cos^2 75^0) = 7r,$$

$$Y = \sum_{i=1}^{i=6} Y_i = r(\sin 30^0+\sin 60^0+\sin 90^0+\sin 120^0+\sin 150^0) = r(2+\sqrt{3}),$$

prin urmare

$$R=\sqrt{X^2+Y^2}=r\sqrt{2(7+2\sqrt{3})}\,;$$

$$\operatorname{tg} a=\frac{Y}{X}=\frac{2+\sqrt{3}}{7}=0.533 \qquad a=28^0 2' 42''.$$

EXERCIȚII

1. O fiind punctul de întâlnire al medianelor într'un triunghiu ABC, se cere rezultanta vectorilor

$$\overline{0A},\ \overline{0B},\ \overline{0C}.$$

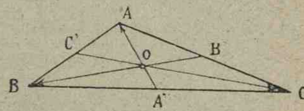

Fig. 8

2. Se dă un triunghiu echilateral ABC având centrul în 0; să se arate că rezultanta vectorilor, având originea într'un punct oarecare P al planului și extremitățile în A, B, C, este un vector având direcția $\overline{PO}$ și este egal cu $3\overline{PO}$.

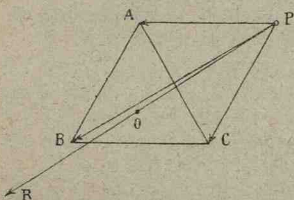

Fig. 9

3. Să se arate că rezultanta vectorilor având originea într'un punct oarecare P al planului și extremitățile în vârfurile

$$A,\ B,\ C,\ D$$

ale unui dreptunghiu, este îndreptată după direcția $\overline{PO}$ și este egală cu $4\overline{PO}$.

Să se generalizeze.

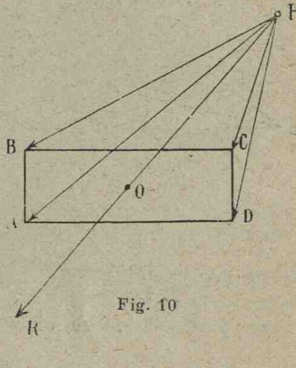

Fig. 10

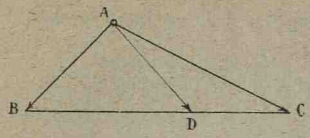

Fig. 11

4. Se cere rezultanta vectorilor

$$\overline{AB},\ \overline{AC},\ \overline{AD},$$

D fiind un punct oarecare situat pe latura BC.

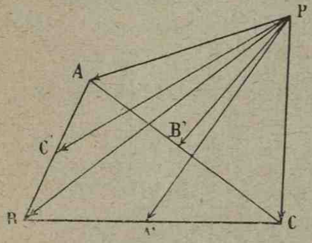

Fig. 12

5. Să se arate că rezultanta vectorilor

$$\overline{PA},\ \overline{PB},\ \overline{PC}$$

de o parte și a vectorilor

$$\overline{PA'},\ \overline{PB'},\ \overline{PC'},$$

de altă parte (A', B', C' sunt mijlocurile laturilor triunghiului ABC) este una și aceeaș.

Să se generalizeze.

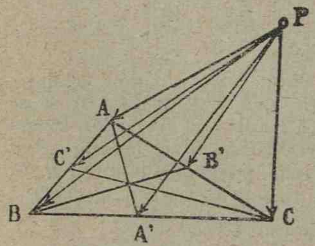

Fig. 13

6. Păstrând notațiile din exercițiul precedent, se cere să se construiască vectorii, care reprezintă diferențele de vectori

$$(PA)-(PA'),\ (PB)-(PB'),\ (PC)-(PC').$$

Să se găsească suma acestor trei vectori astfel obținuți.

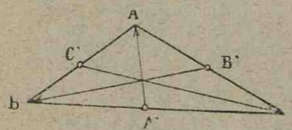

Fig. 14

7. Să se găsească suma vectorilor

$$\overline{A'A},\ \overline{B'B}\ \text{și}\ \overline{C'C};$$

A', B', C' fiind mijlocurile laturilor triunghiului ABC.

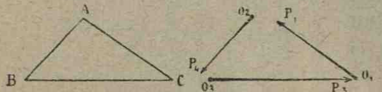

Fig. 15

8. Se cere suma a trei vectori $\overline{O_1P_1}$, $\overline{O_2P_2}$, $\overline{O_3P_3}$, proporționali și paraleli, cu laturile unui triunghiu, care ar fi parcurs în acelaș sens.

Cazuri particulare. Schimbarea unităților de lungime.

9. Se cere să se afle în mărime și direcție, rezultanta vectorilor

$$\overline{OA} = a, \ \overline{OB} = 2a, \ \overline{OC} = 3a, \ \overline{OD} = a$$

având direcțiile și sensurile din figura 16.

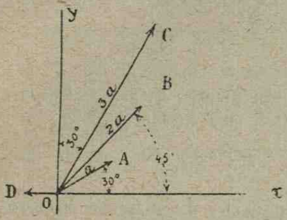

Fig. 16

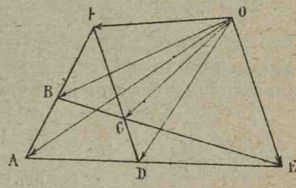

Fig. 17

10. Se cere rezultanta vectorilor, care au origina într'un punct oarecare O și extremitățile în vârfurile unui patrulater complet. (Fig. 17).

11. Să se arate că în tetraedrul oarecare $OABC$ suma vectorilor $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ este aceeași cu suma vectorilor $\overline{OD}$, $\overline{OE}$, $\overline{OF}$, D, E, F fiind mijlocurile muchilor AB, AC, CB.

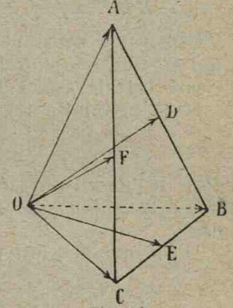

Fig. 18

CAPITOLUL III

NOȚIUNI GENERALE DE CINEMATICĂ

§ 1. Obiectul cinematicei este studiul mișcării corpurilor, studiu în care ținem seama de drumul (*traectoria*) descris de corp și de *timpul* în care se săvârșește acel drum.

Intr'o problemă de cinematică trebuie să cunoaștem traectoria corpului și relația dintre drum (spațiu: s) și timp (t), zisă *ecuația orară*, *ecuația mișcării* sau *legea spațiilor.*

Curba care reprezintă grafic ecuația

$$s = f(t)$$

dă *diagrama* mișcării.

§ 2. Cea mai simplă mișcare este aceea în care traectoria este o linie dreaptă, iar ecuația mișcării de forma:

$$s = s_0 + it \tag{1}$$

adică relația dintre spațiu și timp este de gradul întâiu în raport cu amândouă variabilele. Ecuația (1) scrisă sub forma (1)'

$$\frac{s - s_0}{t} = i,$$

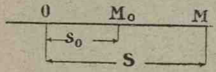

Fig. 19

arată că într'o astfel de mișcare *raportul dintre drumul descris și timpul corespunzător este constant*, sau că: *spațiile sunt proporționale cu timpurile în cari au fost descrise.*

Cantitatea constantă i, care reprezintă raportul dintre spațiu și timp se numește *iuțeală*; se demonstrează și reciproc, că mișcarea în care iuțeala este constantă, este o mișcare uniformă.

Dacă în relația (1) dăm lui t valoarea zero, obținem:

$$s = s_0$$

adică la momentul inițial (dela care se socotește timpul), depărtarea dela originea de măsură a spațiului este s_0; s_0 se numește spațiul inițial.

Diagrama mișcării uniforme este o linie dreaptă.

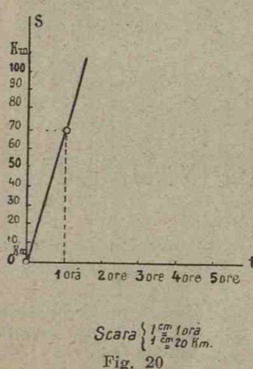

Fig. 20

EXEMPLE

1. Să se deseneze diagrama mișcării unui tren care are o mișcare uniformă, iuțeala sa fiind 70 km/oră.

Incepând a măsura timpul din momentul când pornește trenul, avem $s_0 = 0$; legea mișcării este deci: $s = 70t$. Reprezentarea grafică a acestei relații este o linie dreaptă care trece prin origine, iar $\mathrm{tg}\alpha = 70$.

Depe această diagramă putem obține pentru fiecare valoare a timpului, spațiul corespunzător, prin urmare poziția mobilului pe traectorie.

§ 3. Mişcarea în care legea spaţiilor este:

(2) $$s=s_0+i_0t+\frac{a}{2}t^2,$$

adică spaţiul este legat de timp printr'o relaţie de gradul al doilea, se numeşte mişcare uniform variată.

In acest caz, raportul dintre spaţiu şi timp $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, nu mai este constant. Acest raport se numeşte *iuţeală medie* corespunzătoare intervalului de timp Δt; el este de fapt viteza pe care ar avea-o corpul dacă în acest interval de timp ar aveà o mişcare uniformă. La limită raportul $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ are expresiunea:

(2)' $$\lim_{\Delta t=o}\frac{\Delta S}{\Delta t}=i_0+at=i.$$

Această cantitate, prin analogie cu cantitatea i, dela mişcarea uniformă, se numeşte iuţeală la momentul t; în cazul mişcării uniform variată, iuţeala variază proporţional cu timpul:

$$\frac{i-i_0}{t}=a.$$

Raportul constant a dintre variaţia iuţelii şi timpul în care s'a săvârşit această variaţie, se numeşte *acceleraţie*; se demonstrează şi reciproc că dacă într'o mişcare acest raport este constant, mişcarea este uniform variată. Dacă $a > o$ mişcarea este uniform accelerată, dacă $a < o$ mişcarea este uniform întârziată.

In relaţiunea (2), făcând $t=o$, obţinem $s=s_0$, adică s_0 este spaţiul iniţial; prin aceiaş operaţie aplicată relaţiei (2)' găsim că i_0 este iuţeala iniţială.

Diagrama mişcării uniform variată, este o parabolă cu axa paralelă cu axa spaţiilor.

Observare. Atât în cazul mişcării uniforme cât şi a mişcării uniform variate, *expresia iuţelii se obţine, derivând expresia spaţiului în raport cu timpul.* Această observaţie este valabilă oricare ar fi legea de mişcare. Reprezentarea grafică a iuţelii când variază timpul, se numeşte diagrama iuţelii.

EXEMPLE

1. Un tren parcurge un drum de 25 km. astfel: porneşte cu iuţeală nulă şi parcurge 1000 metri în mod uniform accelerat; apoi trenul are o mişcare uniformă cu iuţeală de 70 km/oră pe o distanţă de 24,5 km., iar pe restul drumului de 500 m. trenul îşi micşorează

viteza proporțional cu timpul și ajunge la destinație cu iuțeală nulă. Să se deseneze diagrama mișcării trenului.

Răspuns. Ecuația mișcării în prima porțiune de drum este de forma:

$$s=\frac{1}{2}at^2; \qquad (s_0=o\,,\, i_0=o)$$

deoarece atât spațiul cât și iuțeala inițială este nulă, expresia iuțelii este:

$$i=at$$

și cum după 1 km. ea ajunge la valoarea 70 km/oră, putem scrie:

$$1 \text{ km.}=\frac{1}{2}at^2, \quad 70 \text{ km/oră}=at;$$

deci durata acestui parcurs este:

$$t=\frac{1}{35} \text{ oră} = 1'\,42''\,,9.$$

Ecuația mișcării uniforme va fi (păstrând ca origine a spațiilor tot punctul de plecare și aceeaș origină pentru măsura timpului):

$$s=1+70\left(t-\frac{1}{35}\right);$$

dacă facem aci $s=24{,}5$, obținem durata acelui de al doilea parcurs:

$$t-\frac{1}{35}=\frac{24{,}5}{70} \text{ ore}=21'.$$

In fine ecuația mișcării uniform întârziate de pe ultimul parcurs este: (luăm ca origine a spațiilor punctul de sosire al trenului, căci ecuația mișcării este mai simplă).

$$s=\frac{1}{2}at^2, \quad i=at;$$

deci:

$$0{,}5 \text{ km.}=\frac{1}{2}at^2;\ 70 \text{ km/oră}=at$$

prin urmare:

$$t=\frac{1}{70} \text{ oră}=51'',4.$$

Durata totală a parcursului va fi deci 23′ 33″,13; diagrama mișcării în prima și ultima porțiune este formată din arce de parabolă *OA* și *BC*, iar în porțiunea mijlocie dintr'o linie dreaptă *AB*.

Observare importantă. Atât la mişcarea trenurilor cât şi în general la orice maşină se deosebesc trei faze: 1. *pornirea (demarajul), care este uniform accelerată*; 2. *mişcarea de regim (care este uniformă)* şi 3. *oprirea, uniform întârziată.*

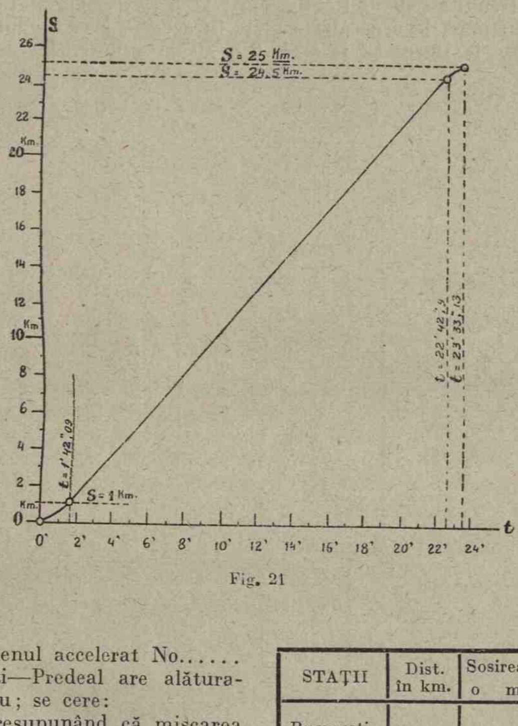

Fig. 21

2. Trenul accelerat No...... Bucureşti—Predeal are alăturatul orariu; se cere:

STAŢII	Dist. în km.	Sosirea o m	Plecarea o m
Bucureşti .			5 00
Chitila . . .	9,500	5 12	5 14
Ploeşti . . .	47,900	6 07	6 16
Câmpina . .	35,300	6 40	6 45
Sinaia. . . .	30,000	7 51	7 06
Predeal. . .	19,000	8 46	

1. Presupunând că mişcarea trenului este uniformă între două staţii consecutive, să se reprezinte diagrama trenului pe distanţa Bucureşti—Predeal.

2. Presupunând că se cere ca din Sinaia să pornească la orele $5^0,50'$ un tren special şi direct spre Bucureşti cu o iuţeală de 75 km/oră, să se spună ce modificare trebuie adusă orariului primului tren, pentru

ca ele să nu se ciocnească și la ce oră sosește trenul special în București.

Răspuns. Pe o hârtie de desen, de preferință pe hârtie milimetrică, purtăm în abscise orele, iar în ordonate kilometri. Diagrama trenului accelerat este trasată plin, iar a trenului special în linie-punct. Reiese lesne că trenul accelerat trebuie oprit la Brazi, prima stație înainte de Ploești, până la ora când sosește în această gară trenul special, care ajunge la București la orele 6 și 40 de minute.

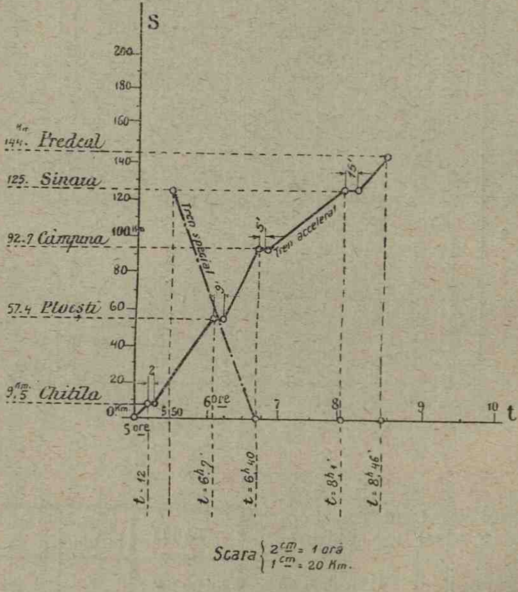

Fig. 22

Observare. De fapt, din diagrama alăturată reiese că cele două trenuri se întâlnesc în gara Ploești; ca măsură de prevedere însă, acceleratul va fi oprit în stația Brazi.

§ 3. *Mişcarea circulară.* Când traectoria unui corp este un cerc, mişcarea se numeşte circulară; ea poate fi uniformă, uniform variată, sau variată, după cum legea spaţiilor are respectiv una din formele de mai jos:

$$s = s_0 + it,$$
$$s = s_0 + i_0 t + \frac{1}{2} at^2,$$
$$s = f(t),$$

$f(t)$ fiind o funcţiune oarecare de timp.

Ne vom mărginì la *mişcarea circulară uniformă*; fie 0 originea spaţiilor; avem

$$s = s_0 + vt;$$

pentru

$$t = 0, \quad s = s_0 = OM_0;$$

M_0 este poziţia iniţială a mobilului.

Cantitatea

$$i = \frac{s - s_0}{t}$$

se numeşte iuţeala mobilului în mişcarea circulară; ea este constantă.

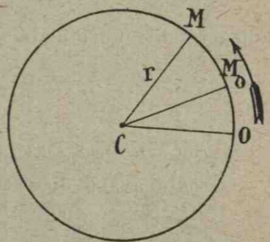

Fig. 23

Unghiul descris de raza OM în unitatea de timp se numeşte *iuţeală unghiulară* şi se însemnează cu ω; ea se măsoară în *radianţi pe secundă.*

Intre iuţeala i zisă şi *iuţeala liniară a mobilului* şi *iuţeala* ω există relaţia

$$i = r\omega;$$

însemnând cu θ, unghiul descris de OM în timpul t, avem

$$\theta = \omega t.$$

O relaţie frecventă în aplicaţii este următoarea: fie n, numărul de rotaţii pe minut al unei roţi ce se învârteşte uniform, ω iuţeala unghiulară, avem

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} \frac{\text{radianţi}}{\text{secunde}};$$

dacă T este durata unei revoluţii, ω are expresia:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Două roţi de raze R şi R' angrenate ca în figurile alăturate, au iuţelile unghiulare ω şi ω'; între ele există totdeauna relaţia

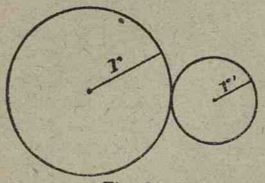

Fig. 24

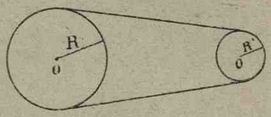

Fig. 25

$$\frac{\omega}{\omega'}=\frac{R'}{R}$$

adică iuţelile unghiulare sunt invers proporţionale cu razele.

EXEMPLE

Chestiunea I-a

O roată având diametru de 1 m. 20 cm., face 50 învârturi pe minut în mod uniform; se cere iuţeala lineară a unui punct M de pe periferia roţii, şi iuţeala unghiulară a unei spiţe OM, precum şi spaţiul descris de punctul M în timp de $^1/_2$ oră.

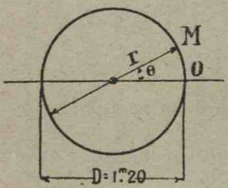

Fig. 26

Iuţeala unghiulară a roţii are expresia:

$$\omega=\frac{2\pi n}{60}=\frac{2\pi\times 50}{60}=5{,}21\ \frac{\text{rad.}}{\text{sec.}}$$

aceasta însemnează că într'o secundă o spiţă a roţei descrie un unghiu de 5.21 radianţi.

Iuţeala liniară a roţii este

$$i=r\omega=0{,}60\ \text{m.}\times 5.21\ \frac{\text{rad.}}{\text{sec.}},$$

$$i=31{,}26\ \frac{\text{metri}}{\text{sec.}}.$$

Spaţiul descris de M într'o jumătate de oră va fi

$$s=it=31{,}26\frac{\text{metri}}{\text{sec.}}\times 1800\ \text{sec.}$$

$$s=56268\ \text{metri.}$$

Chestiunea II-a

Presupunând că mişcarea pământului în jurul soarelui este circulară şi uniformă, se cere iuţeala unghiulară a pământului; precum şi iuţeala sa liniară (distanţa dela pământ la soare este de 23.280 raze pământeşti, raza pământului este de 6600 km).

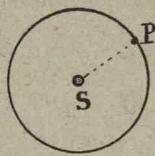

Fig. 27

Iuţeala unghiulară ω este unghiul descris de raza SP în timp de o secundă; pământul descrie orbita în 365 zile[1]), deci

$$\omega = \frac{2\pi}{365 \times 24 \times 3600 \text{ sec.}} = 1{,}99 \times 10^{-7} \frac{\text{rad}}{\text{sec.}}$$

$$v = r\omega = 23.280 \times 6600\text{km.}1{,}99 \times 10^{-7} \frac{\text{km.}}{\text{sec.}} = 15.365 \frac{\text{km.}}{\text{sec.}}$$

Chestiunea III-a

Pentru ridicarea unei greutăţi se întrebuinţează un troliu care efectuează trei învârtituri pe minut. Diametrul arborelui pe care se înfăşoară frânghia fiind 30 cm. Se cere iuţeala de ridicare a greutăţii.

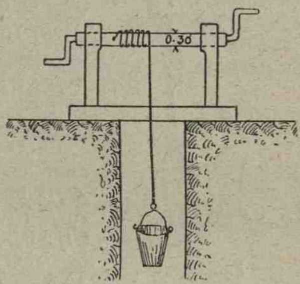

Fig. 28

Soluţiune

Intr'un minut greutatea se înfăşoară pe arbore de trei ori, deci greutatea se ridică cu

$$3 \times 2\pi \times \frac{0{,}30}{2} = 0{,}9\pi \frac{\text{metri}}{\text{minut}} = 4{,}7\text{cm/sec.}$$

care este iuţeala de ridicare a greutăţii.

EXERCIŢII

1. Iuţeala luminii fiind 300.000 kilometri pe secundă, se cere distanţa parcursă de lumină într'un an. (Această distanţă se numeşte un *an-lumină*).

2. Un aeroplan porneşte în linie dreaptă în mod uniform accelerat şi atinge după 40 secunde iuţeala de 30 km/oră; în acest moment se înalţă şi descrie cu mişcare o uniformă o distanţă de 3,5 km.; apoi descinde în mod uniform întârziat şi atinge pământul după 1′ 2″. Să se reprezinte diagrama acestei mişcări.

---

[1]) In realitate în 365,25 zile solare medii.

3. Un «jongleur» aruncă vertical în sus două mingi la interval de 0,3 secunde cu iuţeală de 4 metri pe secundă; la ce înălţime de mâna jongleurului se vor întâlnì mingile?

Fig. 29

4. O minge de cauciuc cade vertical dela o înălţime de 2,50 metri. Ştiind că această mişcare este uniform accelerată, se cere:

a) Iuţeala cu care mingea loveşte pământul; iuţeala iniţială de aruncare fiind 1,50 m/sec.

b) Admiţând că mingea pierde prin atingerea cu pământul 20% din iuţeala sa, să se determine înălţimea până la care se va ridica din nou mingea, precum şi duratele acestor două parcursuri.

(Examenul de admitere în Şcoala de Poduri şi Şosele, an. 1916).

5. Un mobil M descrie un cerc O cu o mişcare uniformă având o iuţeală de 3 metri/minut; se cere iuţeala unghiulară a razei OM precum şi spaţiul descris de acel punct în timp de o oră.

6. O pârghie cotită AOB în care $AO = 0{,}70$ m., $OB = 0{,}30$ m., iar $AOB = 125^0$, se poate mişcà într'un plan vertical în jurul unei axe orizontale proiectată în O; presupunând că pârghiei precedente i se dă o mişcare de rotaţie în jurul axei O, făcând câte 12 rotaţii pe minut, să se calculeze iuţeala unghiulară şi iuţelile liniare ale extremităţilor A şi B.

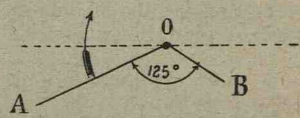

Fig. 30

(Examenul de admitere în Şcoala de Poduri şi Şosele, an. 1913).

7. O bicicletă care are o mişcare uniformă realizează 15 km. pe oră; ştiind că raza roţilor este de 35 cm., se cere:

1. Numărul de învârtituri pe minut a roţii.

2. Iuţeala liniară a unui punct de pe periferia roţii.

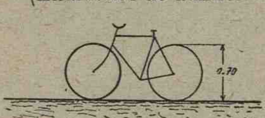

Fig. 31

8. Volanul unui motor Diesel execută 180 rotaţii pe minut, diametrul său fiind 3,10 m; se cere:

1. Iuţeala unghiulară a volanului.

2. Iuţeala liniară a unui punct situat la 50 cm. depărtare de axul volanului.

3. Spaţiul descris de un punct de pe periferia volanului în timp de 3 secunde.

9. Care este iuțeala observatorului din București, în mișcarea de rotație a pământului în jurul axei sale; latitudinea Bucureștiului e de 44° iar raza pământului 6600 km.

10. Doi curieri pornesc din acelaș loc la interval de o oră pe un drum rectilin cu iuțeli respectiv de 6 km. pe oră și 11 km. pe oră; după ce timp și la ce distanță de punctul de plecare se vor întâlnì?

11. La o alergare de cai, dela un moment dat, primii doi cai aleargă în mod uniform, cel dinainte cu 40 km. pe oră, cel din urmă cu 46 km. pe oră iar distanța care-i separă este de 500 metri; după cât timp, următor acelui moment, și la ce distanță de poziția primului cal, acesta va fi întrecut?

Care trebuie să fie iuțeala calului din urmă pentru ca primul să fie întrecut după 3 minute? (Să se dea și o soluțiune grafică).

12. In problema precedentă, presupunând că cei doi cai au aceeaș iuțeală de 40 km. pe oră, se cere care este creșterea vitezei în unitatea de timp în mișcarea uniform accelerată ce trebuie să o facă calul din urmă pentru a-l ajunge pe primul după 1 kilometru de mers?

13. Pe ce paralel pământesc trebuie să meargă un aeroplan cu iuțeala constantă de 400 km. pe oră pentru ca pilotul să vadă soarele răsărind de două ori în 12 ore?

(Enunțată de D. Traian Lalescu).

14. Care este ecuațiunea mișcării uniform variate a unui mobil care la momentele t_1, t_2, t_3, se găsește la distanțele l_1, l_2, l_3, de originea spațiului. Discuție.

15. Două mobile situate la distanța d pornesc la interval de t minute unul spre celalt cu mișcări uniform accelerate pe dreapta care unește pozițiunile lor inițiale. Să se scrie ecuațiunile mișcărilor celor două mobile și să se afle ora și locul unde se întâlnesc. Discuție.

16. Pe placa unui motor electric se găsește înscris că numărul de rotații efectuat pe minut este de 1500; se cere iuțeala unghiulară a acelui motor.

17. O greutate G este atârnată de o funie, înșirată la rândul ei pe un scripete; se cere iuțeala de ridicare a greutății știind că scripetele face 20 tururi pe minut în mod uniform, iar diametrul lui este de 30 cm.

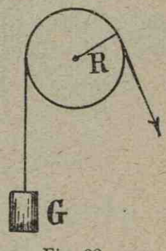

Fig. 32

18. Pentru scoaterea unei probe de pământ se face un sondaj până la o adâncime de 150 metri, ridicarea probei se face cu dispozitivul din figura 33; se cere timpul în care proba va ajunge la suprafața pământului, știind că roata R cu diametrul de 1,10 m. este acționată

de un motor și face 15 învârtituri pe minut, iar roata R' pe care se înfășoară funia are diametrul 0,60 m.

19. O roată de rază $R = 30$ cm. face 1200 tururi pe minut;

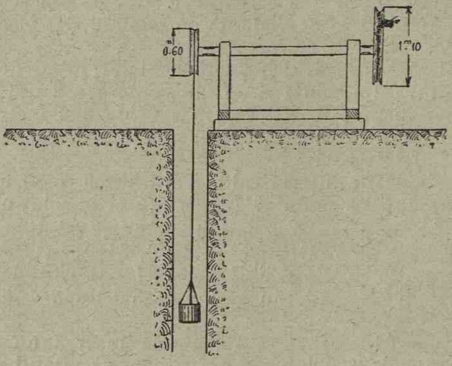

Fig. 33

se cere raza R' a celei de a doua roți, știind că ea face 2000 tururi pe minut.

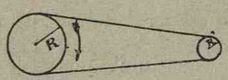

Fig. 34

20. Două mașini sunt cuplate printr'o curea; știind că mașina M are roata R de diametru egal cu 75 cm. și face 800 ture pe minut, se întreabă ce roată R' trebuie să punem celei de a doua, știind că aceasta trebuie să facă 1500 învârtituri pe minut.

21. O persoană învârtește pe deget un lanț; pentru ce lanțul se înșiră pe deget mai repede când din lungimea lui a rămas o mică parte neînșirată?

(Seminar de Mecanică, Facultatea de Științe din București).

CAPITOLUL IV

S T A T I C A

§ 1. *Principiul inerției.* Un corp va rămâne necontenit în repaus cât timp nu intervine nici o acțiune exterioară; dacă corpul se găsește în mișcare, iar acțiunile cari o produceau încetează de a mai lucrà asupra corpului, acesta continuă să aibă o mișcare *rectilinie și uniformă.*

Mărimea mecanică care determină schimbarea stării de repaus sau de mișcare a unui corp se numește *forță.*

In statică se presupune că înainte ca vreo forță să lucreze asupra unui corp, *acesta se găsește în repaus.*

§ 2. Problemele de statică se prezintă în două chipuri:

1. Un corp în repaus, este supus acțiunii mai multor forțe cunoscute în mărime, direcțiune și sens și se cere să cercetăm dacă corpul va continuà să fie în repaus (echilibru).

2. Fiind dat un corp sub acțiunea unor forțe a căror mărime, direcție și sens variază odată cu poziția corpului, se cere:

a) relațiile cari trebuie să existe între forțe pentru ca corpul să fie în echilibru;

b) să găsim poziția pentru care corpul va fi în echilibru; aceasta se numește *poziție de echilibru.*

§ 3. Un corp poate fi acționat de mai multe forțe ale căror direcții să fie situate în acelaș plan (sistem de forțe în plan); în caz contr avem de a face cu un *sistem de forțe în spațiu.* In fiecare din aceste cazuri se pot deosebì trei subcazuri; forțele sunt: *a*) *concurente*, *b*) *paralelele*, *c*) *distribuite oricum*

Două sau mai multe sisteme de forțe se zic *echivalente* când acționând asupra aceluiaș corp, în aceleași condiții, produc efecte identice; un *sistem de forțe este nul* când aplicat unui corp nu îi modifică starea de repaus sau de mișcare.

Inlocuirea unui sistem de forțe oarecare printr'un alt *sistem echivalent* și cât mai simplu posibil se numește *reducerea* sau *compunerea forțelor.*

CAPITOLUL V

REDUCEREA FORȚELOR CONCURENTE

§ 1. Forțele se compun (sau se adună), ca și vectorii, adică pe baza *regulei paralelogramului*, regulă care nu se poate demonstrà ci rezultă din experiență.

Pentru aflarea rezultantei mai multor forțe concurente vom întrebuință: 1⁰ construcția grafică a *poligonului vectorilor a lui Varignon*, numit în acest caz *poligonul forțelor*; sau 2⁰ vom aplică după caz formulele (1), (2), (3), (4), Cap. II.

§ 2⁰ Rezultă de aci că condițiunea ca un sistem de forțe să formeze un *sistem nul*, se poate exprimă astfel; 1⁰ poligonul forțelor să fie închis sau 2⁰ suma proiectiilor pe două axe oarecari a forțelor date să fie nulă sau 3⁰ expresiunea

$$R^2 = \sum_{i=1}^{i=n} F_i^2 + 2 \sum_{i=k}^{i=1,2...n} F_i F_k . \cos(F_i F_k) \quad \text{să fie nulă}$$

§ 3. Descompunerea unei forțe $\overline{OF}$, după două direcții ox, oy se poate face: 1⁰ *grafic*, construind paralelogramul $OPFQ$; forțele $\overline{OP}$ și $\overline{OQ}$ se numesc *componentele lui* $\overline{OF}$ după aceste direcțiuni; 2⁰ prin calcul trigonometric, rezolvând triunghiul OPF, în care cunoaștem o latură $(\overline{OF})$ și două unghiuri

$$(\sphericalangle FPO = \pi - \alpha, \sphericalangle FOP = \beta);$$

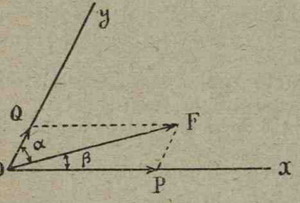

Fig. 35

3⁰ Prin proiectarea conturului OPF pe două axe convenabil alese și aplicând formula (1) cap. II, § 3.

Descompunerea unei forțe $\overline{OF}$, după trei direcții $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ situate în acelaș plan se poate realiză într'o infinitate de moduri; dacă direcțiile OA, OB, OC sunt în spațiu descompunerea e posibilă într'un mod unic. O forță se poate descompune într'un singur mod după trei direcții neconcurente situate în acelaș plan.

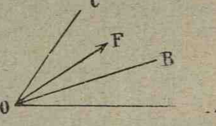

Fig. 36

EXEMPLE

Chestiunea I-a

Se dau forțele F_1, F_2 cari fac între ele unghiul α și se cere rezultanta lor în mărime și direcție.

Aplicație numerică.

$F_1 = 8{,}3$ kg., $F_2 = 5{,}2$ kg., $\alpha = 32^0$.

Avem:

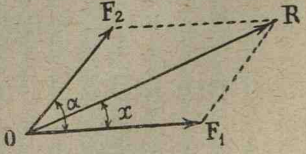

Fig. 37

(1) $$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos\alpha;$$

unghiul x, al lui OR cu OF_1 rezultă din triunghiul OF_1R astfel:

$$\frac{\sin x}{F_2}=\frac{\sin(\alpha-x)}{F_1},$$

$$\left(\frac{F_1}{F_2}+\cos\alpha\right)\sin x=\sin\alpha.\cos x.$$

(2) $$\operatorname{tg} x=\frac{F_2\sin\alpha}{F_1+F_2\cos\alpha}$$

Se mai poate procedà și în felul următor: proiectăm conturul poligonal OF_1R pe direcția forței F_1:

$$R.\cos x=F_1+F_2\cos\alpha,$$

(3) $$\cos x=\frac{F_1+F_2\cos\alpha}{\sqrt{F_1^2+F_2^2+2F_1F_2\cos\alpha}}.$$

Aplicație numerică.

$$F_1=8{,}3\text{ kg},\ F_2=5{,}2\text{ kg},\ \alpha=32^0.$$

$$R^2=8{,}3^2+5{,}2^2+2\times8{,}3\times5{,}2\times0{,}848=169{,}13,$$

$$R=\sqrt{169{,}13}\cong13\text{ kg}.$$

$$x=12^0\,13'.$$

Chestiunea II-a

Se dau forțele F_1, F_2, F_3, având direcțiile și sensurile din figură și se cere să se găsească rezultanta lor în mărime și direcție.

Aplicație numerică.

$F_1=1500$ kg, $F_2=2800$ kg,
$F_3=3750$ kg, $d=1{,}725$ m, $h=3.54$

1. *Grafic.* In cazul figurei 1m. este reprezentat prin 2 cm. iar 1000 kg. prin 1 cm; construim poligonul forțelor $\overline{OF_1F'_2R}$ și obținem rezultanta $\overline{OR}$, a cărei intensitate o măsurăm la scara forțelor; găsim $\overline{OR}=5{,}91$ cm. $=5910$ kg.

2. *Prin proiecții pe două axe.* Proectând forțele date pe orizontală și verticală obținem că proiecțiile rezultantei sunt:

$$X=(F_2+F_3)\sin\alpha.\qquad\left(\operatorname{tg}\alpha=\frac{2d}{h}\right)$$
$$Y=F_1+(F_2-F_3)\cos\alpha,$$

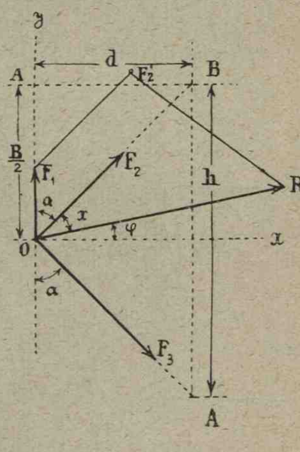

Fig. 38

$$(4) \qquad R = \sqrt{(F_2 + F_3)^2 \sin^2\alpha + \left[F_1 + (F_2 - F_3) \cos\alpha\right]^2}$$

$$(5) \qquad \operatorname{tg} \varphi = \frac{F_1 + (F_2 - F_3) \cos\alpha}{(F_2 + F_3) \sin\alpha};$$

Avem prin urmare mărimea rezultantei și unghiul φ pe care îl face cu orizontala.

3. Putem aplicà formula (4), cap. II, § 3

$$(6) \qquad R^2 = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + 2F_1(F_2 - F_3) \cos\alpha - 2F_2F_3 \cos2\alpha$$

care e de fapt identică cu expresia obținută prin proiecție. Dacă voim să aflăm unghiul rezultantei, cu forța F_2 spre exemplu, proiectăm conturul poligonal $OF_1F'_2R$ pe direcția lui F_2 și găsim:

$$R \cos x = F_1 \cos\alpha + F_2 + F_3 \cos2\alpha,$$

apoi

$$\cos x = \frac{F_1 \cos\alpha + F_2 + F_3 \cos2\alpha}{(F_2 + F_3)^2 \sin^2\alpha + \left[F_1 + (F_2 - F_3) \cos\alpha\right]^2}$$

Aplicație numerică. Avem

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2d}{h} = \frac{2 \times 1{,}725 \text{ m.}}{3{,}45 \text{ m,}} = 1\,.$$

$$\alpha = 45^0;$$

prin urmare

$$R = \sqrt{(2800 + 3750)^2 \frac{\sqrt{2}}{2} + \left[[1500 + (2800 - 3750) \frac{\sqrt{2}}{2} \right]^2}$$

$$R = 5912{,}09 \text{ kg.}$$

apoi

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1500 - 950 \frac{\sqrt{2}}{2}}{6550 \frac{\sqrt{2}}{2}} = 0{,}179$$

$$\varphi = 10^0\, 10'$$

Chestiunea III-a

Un stâlp de înălţime h este acţionat de forţa G, verticală şi de o forţă F înclinată faţă de orizontala BH cu unghiul α.

Se cere să se găsească distanţa $AC=d$; C fiind punctul în care rezultanta forţelor date întâlneşte orizontala lui A.

Aplicaţie numerică:

$G=3560$ kg., $F=1210$ kg.,
$\alpha=27^0\,30'$, $h=4,20$ m.

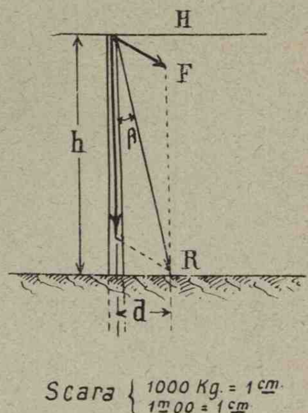

Fig. 39

Soluţiune

Avem

$$R^2=G^2+F^2+2GF.\sin\alpha;$$

proiectând conturul OGR pe verticală obţinem

$$R\cos\beta=G+F\ \sin\alpha,$$

$$\cos\beta=\frac{G+F\ \sin\alpha}{\sqrt{G^2+F^2+2GF.\sin\alpha}},$$

$$d=h.\mathrm{tg}.\beta=h\frac{F\ \cos\alpha}{G+F\ \sin\alpha}.$$

Aplicaţie numerică.

$$d=4,20\ \text{m}.\frac{1210\times0.887}{3560+1210\times0,462}=1,10\ \text{m}.$$

Chestiunea IV-a

Un stâlp vertical AB, întărit prin stâlpul oblic CE este acţionat, în punctul D, de forţa verticală P. Se cere să se descompună forţa P după direcţiile AD şi DC respectiv în două componente Q şi R; iar forţa R în două componente T şi S respectiv după direcţiile CA şi CE.

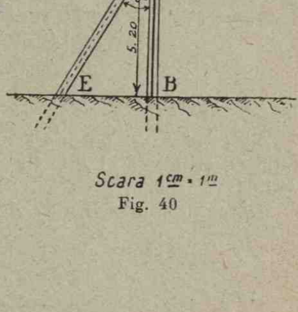

Fig. 40

Aplicaţie numerică. Date:

$AB=5,20$ m.

$AD=AC=1,50$ m.

$\measuredangle\ ECD=30^0$; $P=1000$ kg.

1. *Grafic.* Reprezentând la scară: 1 cm. = 1 m și 1 cm. = 1000 kg. obținem epura alăturată.

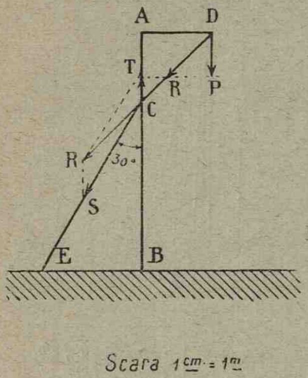

Fig. 41

Construind paralelogramul de forțe $RDQP$ și $RTCS$, găsim

$$DQ = 1 \text{ cm.},$$
$$DR = 1{,}43 \text{ cm.},$$
$$CS = 2{,}1 \text{ cm.},$$
$$CT = 2{,}85 \text{ cm.};$$

prin urmare

$$Q = 1000 \text{ kg.},$$
$$R = 1430 \text{ kg.},$$
$$S = 2010 \text{ kg.},$$
$$T = 2850 \text{ kg.}$$

1. Rezultă din sensul pe care îl au forțele Q, R, S, T că bara AD este întinsă; bara CD comprimată, stâlpul CS comprimat, iar asupra stâlpului AB se exercită o acțiune de smulgere.

2. Avem:

$$Q = P \operatorname{tg} 45^0 = 1000 \text{ kg.},$$

$$R = \frac{P}{\cos 45^0} = \frac{1000}{\sqrt{2}} = 1426 \text{ kg.};$$

din triunghiul TCR avem relațiile:

$$\frac{T}{\sin 15^0} = \frac{S}{\sin 45^0} = \frac{R}{\sin 30^0},$$

deci

$$T = 2R \sin 15^0 = 2 \times 1426 = 2852 \text{ kg.},$$
$$S = R\sqrt{2} = 2011 \text{ kg.}$$

Chestiunea V-a

Să se găsească tensiunile din firele OA și OB precum și poziția inelului O, știind că el este în echilibru. (Theoretische Mechanik de Dr. Julius Weisbach).

Date: lungimea firului AOB egală cu 3 metri $BC = 2$ metri.

Soluțiune

Fie OE perpendiculară pe verticala punctului B; OE bisectează unghiul BOD; avem:

$$CD=\sqrt{9^2-6{,}5^2}=6{,}225 \text{ m.}$$

$$BD=CD-CB=6{,}225 \text{ m}-2 \text{ m.}=4{,}225 \text{ m.}$$

$$DO=BO=\frac{DE}{DC}DA=\frac{4{,}225\times 9}{2\times 6{,}225}=3{,}054 \text{ m.}$$

deci

(1) $AO=9-3{,}054=5{,}946$ m.

$$\cos\alpha=\frac{BE}{BO}=\frac{2{,}1125}{3{,}054}=0{,}6917\ ,$$

(2) $\alpha=46^0\,14'$.

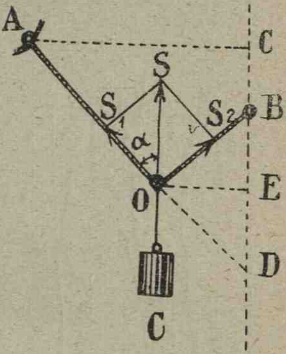

Fig. 42

Relațiile (1) și (2) ne definesc pozițiunea inelului. Tensiunile vor fi:

$$T_1=T_2=\frac{G}{2\cos\alpha}=\frac{170}{2\times 0{,}6917}=122{,}9 \text{ kg.}$$

Chestiunea VI-a

Unghiurile α și β fiind de 10^0, greutatea omului de 80 kg., se cere să se calculeze tensiunea ce se desvoltă în firul vertical. (Theoretische Mechanik de Dr. Julius Weisbach). Fig. 43.

Soluțiune

Avem

$$R=G\operatorname{cotg}\alpha$$

$$P=G\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta=(\operatorname{cotg}10^0)^2.G$$

sau

$$P=(5{,}67)^2\times 80 \text{ kg.}=2576 \text{ kg.!}$$

Dispozitivul din figura de mai sus constituie *un mecanism* care permite cu o greutate relativ mică, de 80 kg., să desvoltăm în firul vertical o forță foarte mare și să deschidem astfel lada. Este mijlocul utilizat pe vremuri de bandiți pentru a deschide lăzile. In figura 43 s'a rezolvat aceiași problemă pe cale grafică.

EXERCIŢII

1. Să se demonstreze că rezultanta a trei forţe este nulă dacă avem relaţiile:

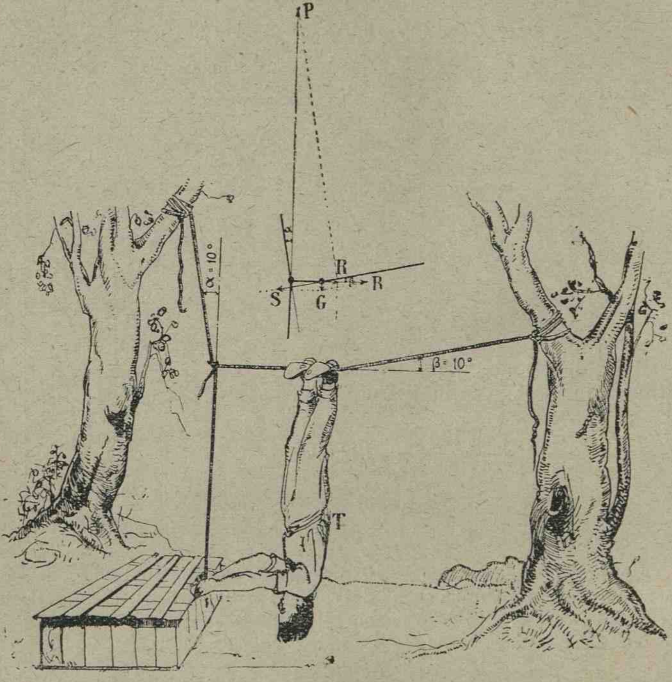

Fig. 43

$$\frac{F_1}{\sin(F_2F_3)}=\frac{F_2}{\sin(F_3F_1)}=\frac{F_3}{\sin(F_1F_2)}. \quad \left(\begin{array}{c}\text{relaţiunile lui}\\ \textit{Stevin}\end{array}\right)$$

$$(F_2F_3)+(F_3, F_1)+(F_1, F_2)=360^0.$$

2. Se dă un triunghiu în care

$$BC=30 \text{ cm.},$$
$$AB=BC,$$
$$A=30^0.$$

2. Se cere poziția punctului M, pentru care rezultanta forțelor $\overline{MA}$, $\overline{MB}$, $\overline{MC}$ este nulă. Se va luà ca necunoscută

$$\sphericalangle BMC = x.$$

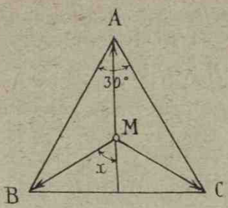

Fig. 44

3. O forță de 6 tone (verticală) împreună cu două forțe necunoscute, care lucrează pe direcțiile OA, OB au o rezultantă nulă. Se cere să se găsească aceste două forțe din urmă.

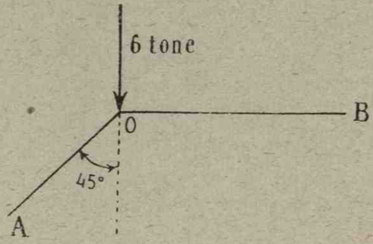

Fig. 45

4. $OABCDE$ fiind un exagon regulat, se cere rezultanta forțelor:

$$\overline{OA},\ \overline{OB},\ \overline{OC},\ \overline{OD},\ \overline{OE}.$$

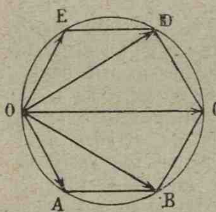

Fig. 46

5. Se cere rezultanta forțelor

$$\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}, \overline{OD},$$

când se cunoaște

$\overline{OA} = a$, $\sphericalangle xOA = \alpha$, $AB = b$, $AD = c$.

Aplicație numerică:

$a = 2$, $\alpha = 37^{0}20'$, $b = 1$, $c = 3$.

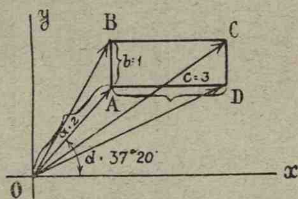

Fig. 47

6. Se cere rezultanta forțelor

$$\overline{OF}_1,\ \overline{OF}_2,\ \overline{OF}_3,$$

intensitățile lor fiind respectiv:

$$2a,\ a,\ a,$$

și având direcțiile și sensurile din figură.

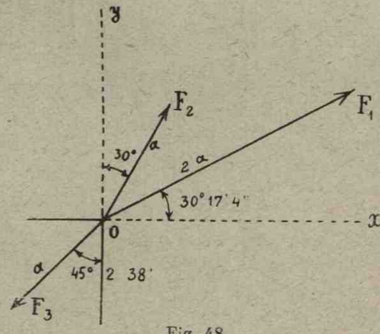

Fig. 48

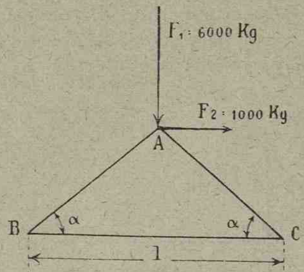

Fig. 49

7. Forțele F_1, F_2 și alte două forțe ce lucrează pe direcțiunile

$$BA, \; CA,$$

au o rezultantă nulă. Să se găsească aceste două forțe din urmă.

Se cunoaște

$$BC = l, \; \sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB = \alpha.$$

Aplicație numerică:

$$F_1 = 6000 \text{ kg.}, \; F_2 = 1000 \text{ kg.}, \; \alpha = 28^{\circ}37'4''.$$

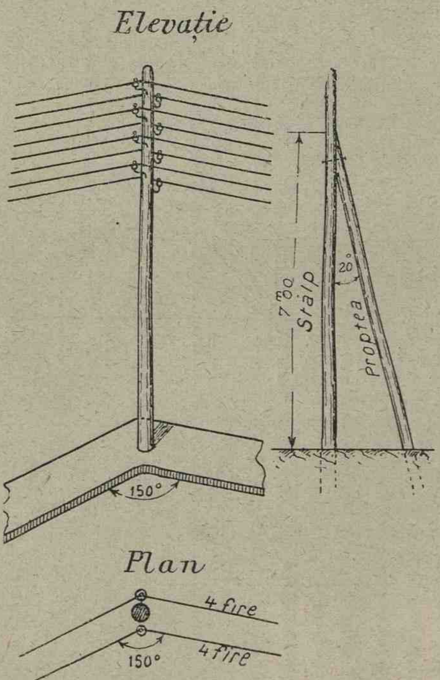

Fig. 50

8. Un stâlp susține opt fire de telegraf, cari trag în sens orizontal cu câte 60 kg.

Stâlpul este la un colț de stradă, axele străzilor fac între ele un unghiu de 150°.

Firele sunt fixate pe stâlp la o înălțime medie de 7 m.

Pentru ca stâlpul să nu se rupă, se sprijinește cu o proptea de lemn, care face cu verticala un unghiu de 20°.

Să se găsească com presiunea care se produce în proptea.

(Concursul Gazetei Matematice, 1923).

9. Un glob electric de 55 kg. este suspendat în mijlocul unei străzi cu ajutorul a trei cable; unul din cable este fixat de zidul unei clădiri la o înălțime de 8 metri; celelalte două, egale în lungime și dispuse simetric față de primul cablu, sunt fixate pe zidul clădirii din față, la o înălțime de 6,50 m.; distanța între punctele de suspensiune ale acestor două cable este de 2,50 m., lățimea străzii este de 9 metri, iar punctul de suspensiune al globului la 5 metri deasupra străzii.

Se cere să se calculeze tensiunile desvoltate în acele fire.

(Examenul de admitere în Școala de Poduri și Șosele în anul 1919).

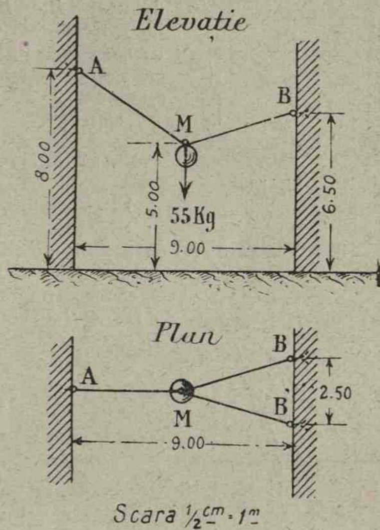

Fig. 51

10. Pentru a trece de pe malul (*A*) pe malul (*B*) se construește un pod suspendat în chipul următor: se face o podea *CD* din grinzi și scânduri care se suspendă prin vergelele de fier *v*, de o frânghie

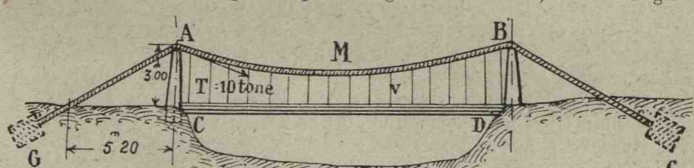

Fig. 52

A'MB' care se petrece după stâlpii *AA'* și *BB'* și se fixează în pământ prin contragreutățile *G*. Știind că în punctul *A'* frânghia este întinsă cu forța $T = 10$ tone care face un unghiu de $27^0\,31'$ cu orizontala, se cere: 1. forța cu care este apăsat stâlpul *AA'*; 2. forța cu care este întinsă frânghia *AG*.

11. Un felinar de greutate P este atârnat în punctul B unde se întâlnesc două bare de fier AB, CB, care fac între ele un unghiu α; care sunt forțele cu care sunt acționate aceste bare?

Aplicație.

$P = 28{,}420$ kg., $\alpha = 30^0 4'$.

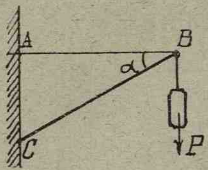

Fig. 53

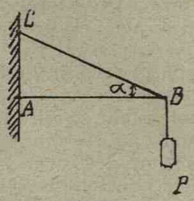

Fig. 54

12. Variantă. (Fig. 54).

13. O macară formată din două bare de lemn AB, $A'B$ și o bară de fier BC, susține o greutate G.

Să se afle, cu ce forțe sunt apăsate barele AB, $A'B$ și cu ce forță este întinsă bara BC?

Aplicație.

$G = 2{,}500$ tone,

$Q = 1{,}10$ m.,

$\alpha = 35^0 27'$.

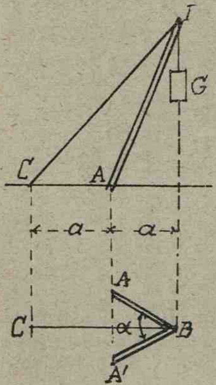

Fig. 55

14. In cilindrul unei mașini cu vapori, orizontală, se exercită o presiune constantă P; această presiune se transmite cu ajutorul unui piston (fig. 128) la o bielă AB de lungime l și la un suport orizontal B.

Biela este legată cu o manivelă OB de lungime r, punctul O fiind pe direcția tijei pistonului.

Să se calculeze maximum presiunei transmisă în bielă și în suport.

Aplicație. Presiunea vaporului este de 10 atmosfere (kgrame pe cm.²), diametrul pistonului 0,60, $l/r = 4$.

(Examen parțial. Școala de Poduri și Șosele anul 1912).

CAPITOLUL VI

REDUCEREA FORȚELOR PARALELE

1. Rezultanta a două forțe paralele F_1 și F_2 aplicate în A și B este egală în mărime cu suma forțelor F_1 și F_2, ca direcție e paralelă cu forțele date și are acelaș sens ca și acestea.

Direcția rezultantei întâlnește segmentul AB care unește punctele de aplicație ale forțelor date în punctul C definit de relațiunea:

(1) $$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}=\frac{F_2}{F_1}$$

Ducând prin C perpendiculara $A'CB'$ pe direcțiunea forțelor F_1 și F_2, relația (1) se poate înlocuì cu următoarea:

(2) $$F_1 d_1 = F_2 d_2;$$

d_1 și d_2 se numesc respectiv brațele de pârghie ale forțelor F_1 și F_2 în raport cu punctul C.

In mod grafic C se găsește, ducând AF'_2 egal, paralel și de acelaș sens cu BF_2; BF'_1 egal paralel și de sens contrar cu AF_1; dreapta $F'_1F'_2$ taie segmentul AB în punctul C.

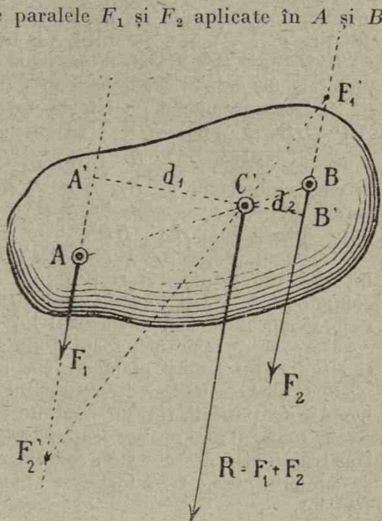

Fig. 56

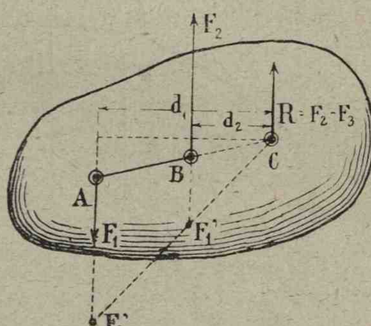

Fig. 57

2. In cazul a două forțe paralele și de sensuri contrare F_1 și F_2, rezultanta este egală cu diferența forțelor F_1 și F_2, este paralelă cu direcțiunea acestor forțe și are sensul celei mai mari în valoare absolută; punctul de aplicațiune C este dat de relațiunea

(1') $$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}=-\frac{F_2}{F_1};$$

și în acest caz avem egalitatea:

(2') $$F_1 d_1 = F_2 d_2.$$

In mod grafic punctul de aplicațiune al rezultantei se obține luând pe direcțiunile lui F_1, F_2 respectiv $AF'_2 = BF_2$, $BF'_1 = AF_1$; dreapta $F'_1F'_2$ taie segmentul AB în punctul C.

Observare. Rezultatele de mai sus presupun că distanța AB dintre punctele de aplicație ale forțelor date este *invariabilă.*

3. Descompunerea unei forțe dată R după două direcțiuni date AA', BB' (Fig. 56) se rezolvă cu ajutorul relațiunilor:

$$R = F_1 + F_2\ ,\ F_1 d_1 = F_2 d_2$$

în care cunoaștem pe R_1, d_1 și d_2 și deci putem a află pe F_1 și F_2 care sunt de acelaș sens cu R și se numesc *componentele* forței R după direcțiunile AA', BB'.

In cazul când direcțiunile AA', BB' sunt situate de aceiași parte față de direcțiunea lui R (Fig. 57) avem: $R = F_1 - F_2$. $F_1 d_1 = F_2 d_2$; componentele F_1 și F_2 sunt de sensuri contrare, cea mai mare în valoare absolută fiind de sensul lui R.

Descompunerea unei forțe după trei direcțiuni paralele cu forța și situate în acelaș plan cu ea, se poate face *într'o infinitate de moduri*; dacă cele trei direcțiuni nu sunt în acelaș plan, descompunerea este posibilă într'un mod unic.

4. In cazul mai multor forțe paralele și de sensuri oarecari se aplică construcțiunile de mai sus: se află rezultanta a două forțe, această se compune cu o a treia forță, etc. până ce se obține rezultanta tuturor forțelor.

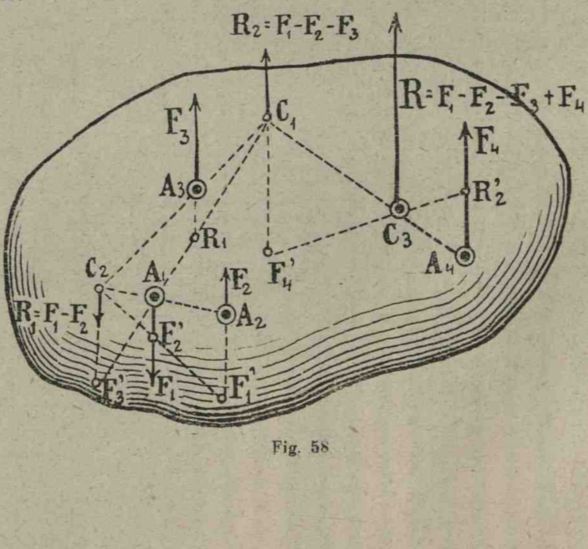

Fig. 58

Spre exemplu în cazul a patru forțe, mărimea rezultantei este

$$R=F_1+F_4-(F_2+F_3)$$

direcțiunea ei este paralelă cu a forțelor date, iar sensul ei este acelaș cu sensul forțelor cari au o sumă mai mare în valoare absolută.

5. Insemnând cu (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \ldots (x_n, y_n)$ distanțele punctelor de aplicație, respectiv ale forțelor $F_1, F_2 \ldots F_n$ (ale căror puncte de aplicație sunt în acelaș plan) față cu două axe pependiculare oarecari ox, oy, rezultanta acestor forțe are expresiunea:

(3) $R=\sum\limits_{i=1}^{i=n} F_i$ (sumă algebrică),

direcțiunea ei este paralelă cu a forțelor date iar sensul ei este acelaș cu sensul forțelor cari au o sumă mai mare în valoare absolută; punctul de aplicație C al rezultantei este definit prin distanțele lui la axele oy și ox:

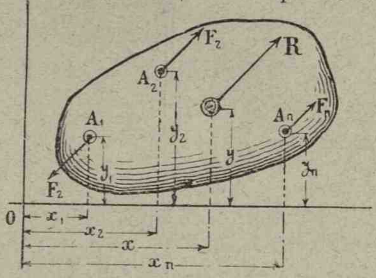

Fig. 59

(4) $$x=\frac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} F_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{i=n} F_i}, \quad y=\frac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} F_1 y_i}{\sum\limits_{i=1}^{i=n} F_i} \quad \text{(sume algebrice).}$$

2. *Observare.* In cele de mai sus se presupune că $\sum\limits_{i=1}^{i=n} F_i \neq 0$.

3. *Observare*[1]). Din construcțiunile geometrice date mai sus pentru găsirea punctului de aplicație al rezultantei, ca și din formulele (4) rezultă că: *poziția acestui punct nu depinde de direcția comună a forțelor.* Deasemeni mai rezultă că *putem îmmulți sau împărți toate forțele cu un acelaș număr fără ca punctul de aplicație al rezultantei să se schimbe.* Punctul de aplicație al rezultantei unui sistem de forțe paralele se numește și *centrul forțelor paralele.*

6. Se poate aflà rezultanta mai multor forțe paralele în mărime, direcțiune și sens și astfel; fie spre exemplu forțele F_1, F_2, F_3, F_4. Construim poligonul forțelor A, A_1, A_2, A_3, A_4, care în cazul forțelor paralele se reduce la o linie dreaptă; AA_4 reprezintă mărimea rezultantei; pentru a-i aflà pozițiunea, luăm un *punct oarecare O numit pol* și ducem razele OA, OA_1, OA_2, OA_3, OA_4 iar dintr'un punct oare-

[1]) Această observare are o deosebită importanță în aplicațiuni.

care M ducem $MB_1 \parallel OA$; apoi $B_1B_2 \parallel OA_2$; $B_2B_3 \parallel OA_3$; $B_3B_4 \parallel OA_3$; $B_4N \parallel OA_4$; direcțiunile primei raze MB, și a ultimei B_4N se taie în P, punct care se găsește pe direcțiunea rezultantei R

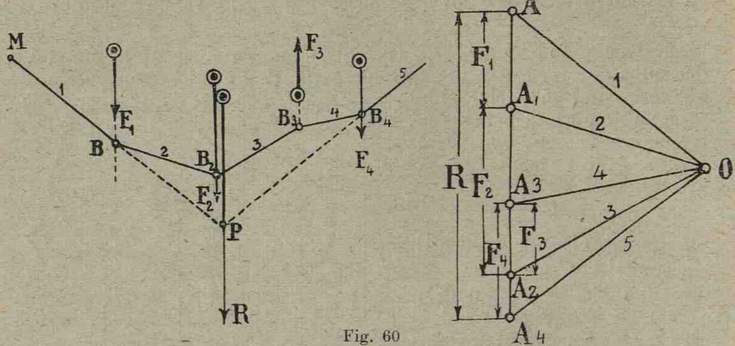

Fig. 60

care e astfel complet determinată.

Poligonul $MB_1B_2B_3B_4$ se numește *poligon funicular*, deoarece are forma unei funii atârnate în punctele M și N și întinsă de forțele F_1, F_2, F_3, F_4.

EXEMPLE

Chestiunea I-a

Să se afle rezultanta forțelor paralele P și Q în cazurile următoare:

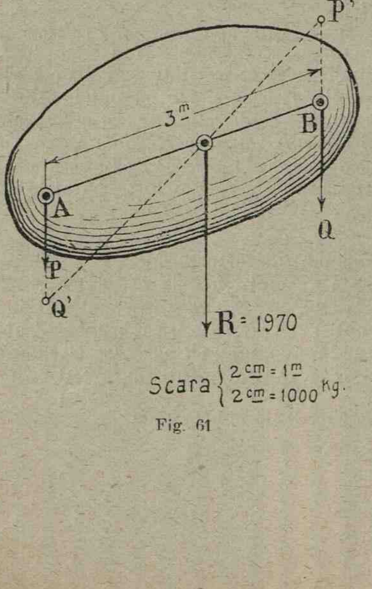

Fig. 61

Soluțiuni

1. Rezultanta este:

$$R = P + Q = 840 \text{ kg} + 1130 \text{ kg.} = 1970 \text{ kg.}.$$

aplicată în punctul C

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{1130}{840} = 1{,}35.$$

Dacă ni se cere distanța punctului C de A, spre exemplu, scriem:

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CA} + \overline{CB}} = \frac{1130}{1970}$$

$$\overline{CA} = 3\frac{1130}{1970} = 1{,}72 \text{ m}.$$

2. Forțele P și Q fiind de sensuri contrarii, avem:

$R = 104\text{ kg.} - 4{,}10\text{ kg.} = 6{,}30\text{kg},$

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{4{,}1}{10.4},$$

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB} - \overline{CA}} = \frac{4{,}1}{6.3},$$

$$\overline{CA} = 2{,}5\text{ m.}\,\frac{4{,}1}{6{,}3} \cong 1{,}66\text{ m.}$$

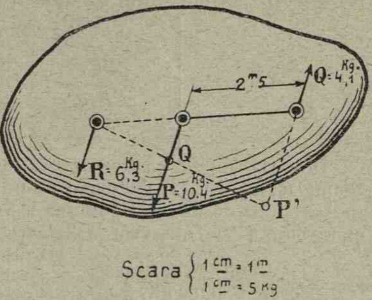

Fig. 62

Chestiunea II-a

Se cere rezultanta forțelor paralele F_1, F_2, F_3 aplicate în A_1, A_2, A_3 având sensurile din figură iar mărimile lor fiind respectiv proporționale cu ariile $ABCD$, $DEFG$, HFG.

Date

$BC = a$, $CD = b$, $EF = c$, $ED = d$

$$HH' = \frac{1}{4}EF, \quad A_3H' = \frac{1}{3}HH'$$

Soluțiune

Avem prin ipoteză:

$$\frac{F_1}{ab} = \frac{F_2}{cd} = \frac{F_3}{cd/8} = K$$

putem aplicà cu folos formulele (3) și (4) cap. VI.

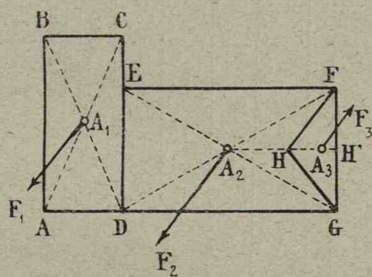

Fig. 63

Avem, luând AG și AB drept axe ox și oy:

$$A_1\left(x_1 = \frac{a}{2},\ y = \frac{b}{2}\right),$$

$$A_2\left(x_2 = a + \frac{c}{2},\ y = \frac{d}{2}\right),$$

$$A_3\left(x_3 = a + \frac{11}{12}c,\ y = \frac{d}{2}\right);$$

prin urmare,

(1) $$R = \Sigma F_1 = \frac{K}{8}\left(8ab + 9cd\right)$$

iar x-ul și y-ul punctului de aplicație al rezultantei va fi:

$$(2) \quad \begin{cases} x = \dfrac{\Sigma F_1 x_1}{\Sigma F_1} = \dfrac{48\,a^2b + 84\,acd + 47\,c^2d}{12\,(8\,ab + 9\,cd)} \\ y = \dfrac{\Sigma F_1 y_1}{\Sigma F_1} = \dfrac{8\,ab^2 + 7\,cd^2}{2\,(8ab + 9cd)} \end{cases}$$

Din (1) reiese că rezultanta o cunoaștem cu aproximația unui factor K, iar din (2) deducem că punctul de aplicație al forțelor este independent de direcția comună a forțelor și de factorul K.; precum și trebuià (Vezi observarea 3, cap. VI).

Chestiunea III-a

Se dau forțele din figură, proporționale cu ariile dreptunghiurilor în ale căror centre sunt aplicate și se cere rezultanta lor în mărime, direcție și poziție.

Soluțiune

Acì convine să utilizăm poligonul funicular.

Pe o dreaptă oarecare verticală AB, purtăm forțele F_1, F_2 ... F_6 la o scară convenabil aleasă. In exemplul nostru forțele F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6 sunt proporționale respectiv cu numerele: 0,24; 0,18; 0,15; 0,10; 0,045; 0,03

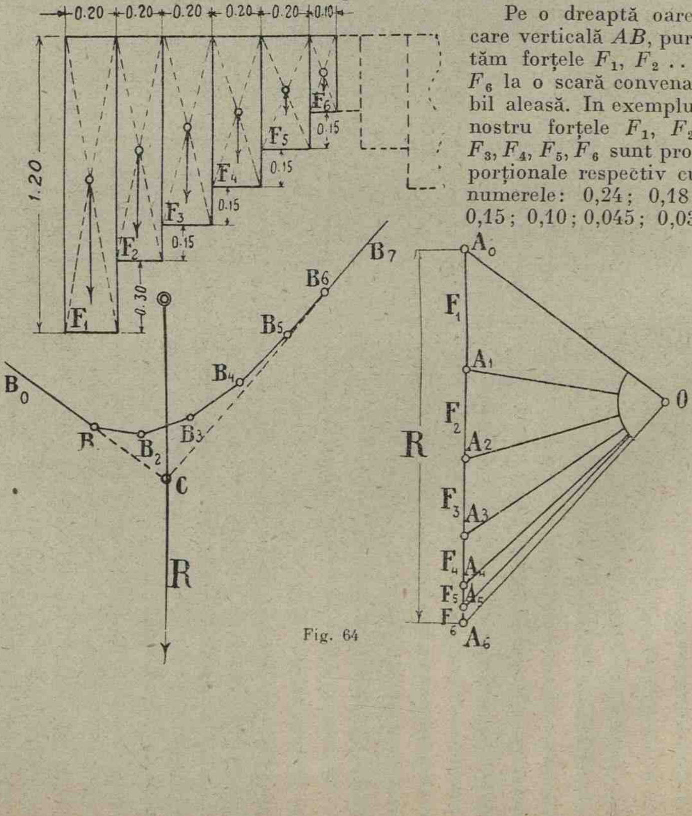

Fig. 64

iar rezultanta ΣF_1 va fi proporţională (în acelaş raport ca forţele $F_1 \dots F_6$) cu numărul $0.715 = 0,24 + 0,18 + 0.15 + 0,10 + 0,045 + 0,03$. Convine să alegem drept scară a forţelor:

$$0,1 = 1 \text{ cm}.$$

forţa F_1 va fi reprezentată deci prin 2,4 cm.; F_2 prin 1,8 cm. etc. Alegând apoi un pol oarecare O, vom trasà poligonul funicular $B_0B_1 B_2B_3B_4B_5B_6B_7$, în care

$$B_0B_1 \parallel OA_0,\ B_1B_2 \parallel OA_1, \dots B_6B_7 \parallel OA_6.$$

Laturile extreme B_0B_1 şi B_6B_7 ale poligonului funicular se taie în C, punct prin care trece rezultanta forţelor date.

Alegerea punctului B_0 de unde începem poligonul funicular, *este arbitrară.*

Notă. Această chestiune se prezintă în aplicaţiuni la calculul grafic al bolţilor. Figura de mai sus ar reprezentà o boltă cu trepte, aşà cum se executau primele boli în antichitate, iar făşiile dreptunghiulare sunt blocurile de cărămidă sau de piatră cari apasă bolta.

Chestiunea IV-a

Doi lucrători duc o sarcină verticală $P = 100$ kg. pusă pe o grindă de lemn orizontală AB; ştiind că $AB = 2,60$ m., $AM = 1,60$ m., se cere să se găsească sarcinile cari revin de fiecare lucrător.

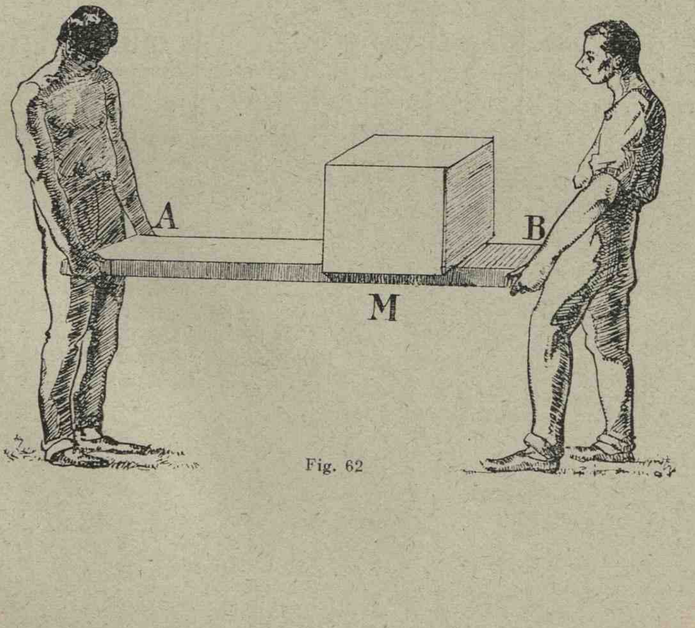

Fig. 62

Soluțiune

Chestiunea revine la a descompune forța P după direcțiunile verticale AD_1 și BD_2; avem

$$\frac{P_1}{1{,}80\ \text{m.}} = \frac{P_2}{1{,}60\ \text{m}} = \frac{100\ \text{kg.}}{2{,}60\ \text{m.}}$$

deci

$$P_1 = \frac{100}{2{,}60}\,100\ \text{kg.} = 38{,}5\ \text{kg.} \qquad P_2 = \frac{1{,}60}{2{,}60}\,100\ \text{kg.} = 61{,}5\ \text{kg.}.$$

EXERCIȚII

1. Să se găsească în mărime și pozițiune rezultanta forțelor de mai jos pe cale *geometrică* și *numerică*.

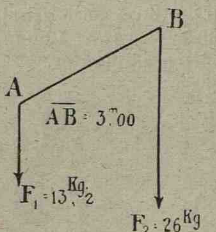

Fig. 66

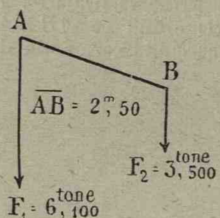

Fig. 67

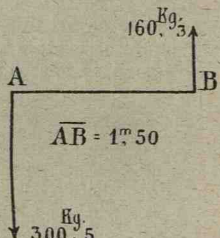

Fig. 68

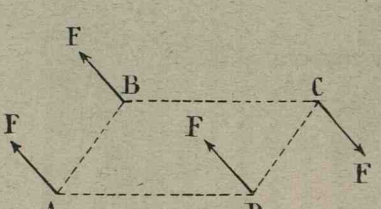

Fig. 69

2. Să se afle rezultanta forțelor paralele în cazurile următoare: (figura A, B, C, D, este indeformabilă).

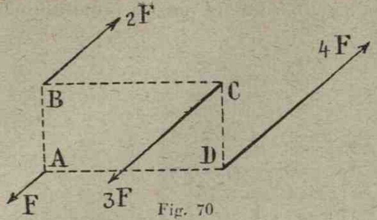

Fig. 70

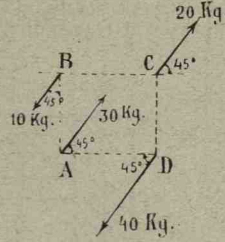

Fig. 71

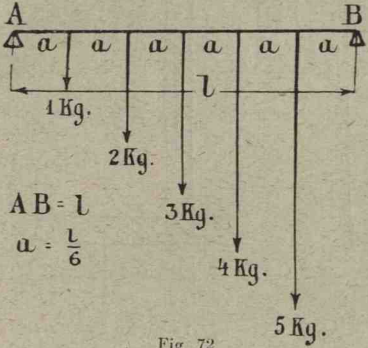

Fig. 72

3. Se cere rezultanta forțelor în mărime și poziție. Să se generalizeze.

(*Indicație.* Convine pentru rezolvare, metoda algebrică).

4. Se dau figurile următoare în cari forțele figurate sunt proporționale cu ariile dreptunghiurilor în al căror centru sunt aplicate

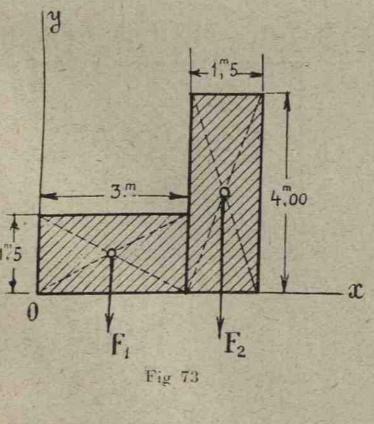

Fig 73

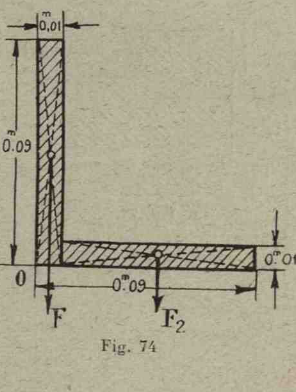

Fig. 74

şi se cere să se afle faţă de două axe coordonate poziţia punctului de aplicaţie al rezultantei.

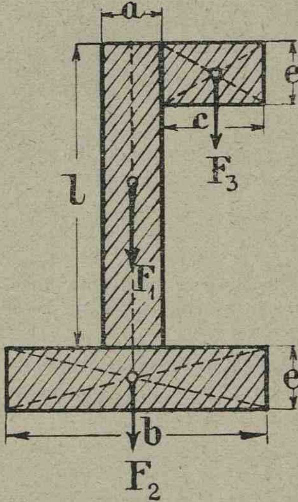

Fig. 75

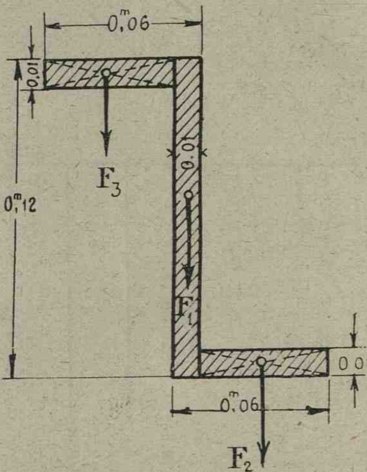

Fig. 76

5. Aceeaş chestiune.

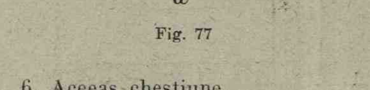

Fig. 77

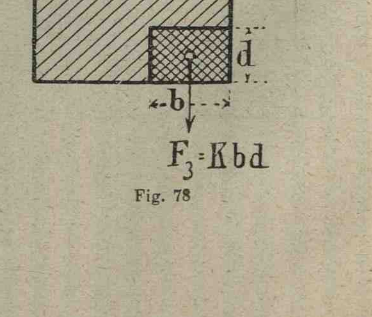

Fig. 78

6. Aceeaş chestiune.

7. Să se descompună forța de *3 tone* după direcțiunile $A_1A'_1$ și $A_2A'_2$.

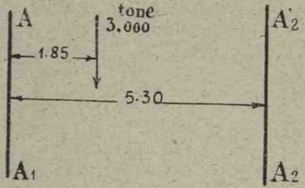

Fig. 79

8. Se dă forța P și direcțiunile A_1, A_2. Să se afle componentele lui P în funcțiune de P, a, l. Să se studieze variațiunea acestor componente, când P variază ca poziție între A_1 și A_2.

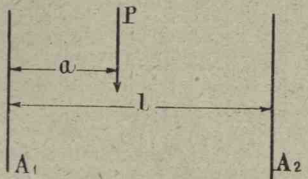

Fig. 80

9. Să se descompună forța de 10 tone după direcțiunile Δ_1 și Δ_2.;

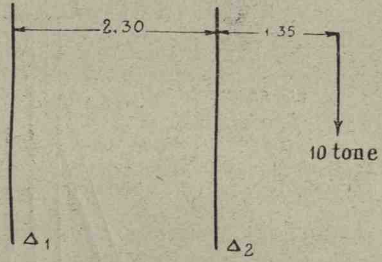

Fig 81

10. Să se descompună o forță P după trei direcțiuni Δ_1, Δ_2, Δ_3, paralele cu forța P, știind că componentele după direcțiunile Δ_2, Δ_3 sunt egale. Să se generalizeze.

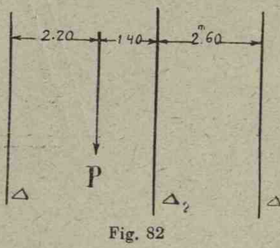

Fig. 82

11. Pe un trapez *ABCD* se suspendă o persoană de 40 kg. greutate, presupunând că greutatea sa se repartizează egal pe cele două mâini, se cere să se calculeze tensiunile în corzile *AC* și *BD*.

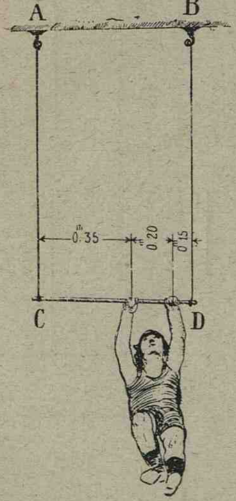

Fig. 83

12. Un leagăn este suspendat prin două vergele metalice *CC'* și *DD'* de un schelet de lemn de forma din figură. Știind că greutatea copilului din el este de 30 kg. și sete aplicată la 30 cm. de bara *DD'*, se cere să se afle: 1. *forțele cu cari sunt acționate barele CC', DD'*; 2. *presiunile ce se transmit stâlpilor AA' și BB'*.

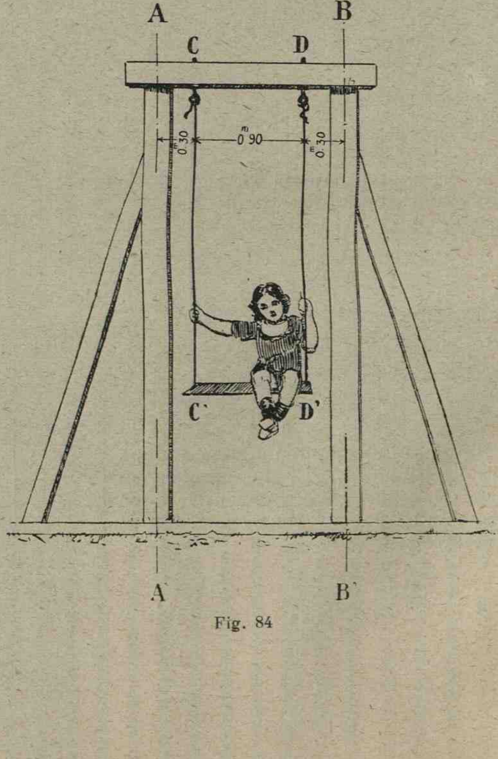

Fig. 84

13. Să se descompună în mod grafic o forță dată P paralelă cu muchiile unei prisme după trei din muchiile acesteia; se va examinà cazul când direcțiunea forței P este interioară sau exterioară prismei.

14. O placă reazimă pe un plan orizontal în trei puncte A, B, C, și e acționată de o forță verticală P cunoscută, a cărei direcțiune înțeapă planul ABC, în punctul M interior triunghiului ABC.

Să se demonstreze că P_A, P_B, P_C, fiind presiunile transmise de placă în punctele A, B, C, avem relațiunile *(Euler)*:

$$\frac{P_A}{\text{aria } BMC} = \frac{P_B}{\text{aria } CMA} = \frac{P_C}{\text{aria } AMB} = \frac{P}{\text{aria } ABC}$$

Să se examineze cazul când M este exterior triunghiului ABC.

15. Să se afle presiunile transmise pe podeà de picioarele unui scăunaș de cismar, presupunând că sarcina la care este supus este verticală și trece prin punctul de întâlnire a înălțimilor triunghiului format de extremitățile picioarelor.

16*). Să se afle în mărime și poziție rezultanta presiunilor exercitată de apa unui rezervor pe unul din pereții lui, cunoscând că înălțimea bazinului plin cu apă este h iar densitatea apei egală cu unitatea. Se va reprezentà grafic funcțiunea care reprezintă presiunea la diferite înălțimi luând ca axă a lungimilor o paralelă cu linia peretelui presupus vertical iar ca axă a presiunilor o perpendiculară pe aceasta și situată în planul de bază al peretelui.

Se va însemnà cu x distanța dela partea superioară a peretelui la o secțiune orizontală oarecare.

17*). Să se afle rezultanta presiunilor exercitate pe un perete vertical știind că intensitatea acestor presiuni în diferitele puncte ale peretului variază liniar cu distanța acelui punct la suprafața superioară a peretului și că presiunea în punctele extreme ale zidului sunt p_1 și p_2.

Indicație. Presiunea la distanța x dela suprafața peretului de *înălțime h* este:

$$p_x = \frac{p_2 - p_1}{h} x + p_1.$$

18*). Aceeaș chestiune, presiunile variază ca ordonatele unei parabole; presiunile în punctele extreme sunt p_1 și p_2.

Indicație. Insemnând cu h înălțimea peretului cu x distanța unui punct în care presiunea este p_2 de partea superioară a peretelui, avem

$$p_x = x^2 + \frac{p_2 - p_1 - h}{h} x + p_1$$

*) Necesită cunoștinți de calcul diferențial și integral.

CAPITOLUL VII

CUPLE

Definițiuni. 1. Două forțe AF și BF', egale, paralele, de sensuri contrare, având însă direcțiuni diferite, constituesc un *cuplu.*

Un cuplu aplicat unui corp solid are ca efect *producerea* sau *împiedicarea* unei rotațiuni. Distanța d dintre direcțiunile celor două forțe, se numește *brațul cuplului*, planul (AF, BF') *planul cuplului*, iar sensul de rotațiune pe care cuplul tinde să-l imprime corpului se numește *sensul cuplului.*

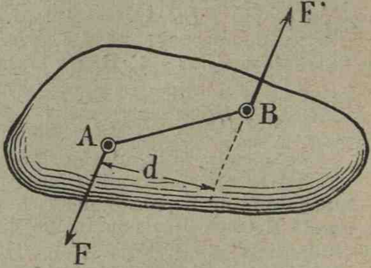

Fig. 85

2. Un corp (C) care are un punct fix în O și este acționat de o forță AF a cărei direcțiune nu trece prin O, este supus de fapt la acțiunea unui *cuplu* (AF, PF') și la aceia a unei forțe $OF''=AF$. Cuplul tinde să imprime corpului o mișcare de rotațiune (în sensul săgeței s) iar forța OF'' apasă asupra punctului fix O, și este anihilată prin fixitatea acestui punct.

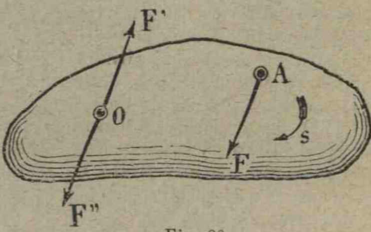

Fig. 86

Se numește *pârghie* orice corp care poate oscilà în jurul unui punct sau unui ax fix.

3. *Experiența* dovedește că efectul cuplului datorit forței P, aplicată pârghiei cotite AOB este echilibrat de efectul unui cuplu de sens contrar, datorit unei forțe Q, cu condițiunea ca *produsul forței Q prin brațul de pârghie* q să fie egal cu *produsul forței P prin brațul de pârghie* p, adică:

$$Pp=Qq.$$

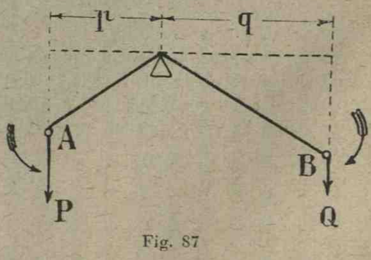

Fig. 87

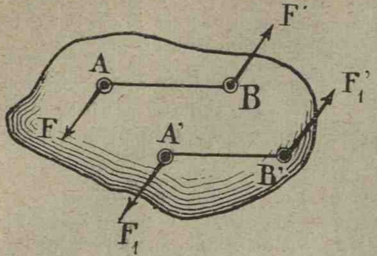

Fig 88.

4. Un cuplu (F,F') poate fi mutat, în acelaș plan sau în plane paralele cu el în $(F_1F'_1)$ (fig. 88) poate fi rotit în planul său (fig. 89) sau poate fi înlocuit cu un alt cuplu $(F_1F'_1)$ situat în acelaș plan cu cuplul (F,F') având acelaș sens cu acesta și *produsul forței* F_1 *prin brațul* d_1 fiind egal cu *produsul forței* F *prin brațul* d (fig. 90).

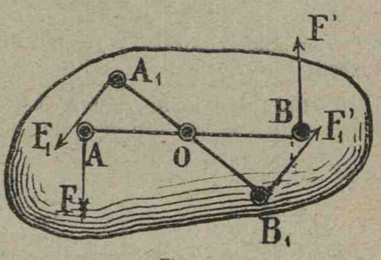

Fig. 89

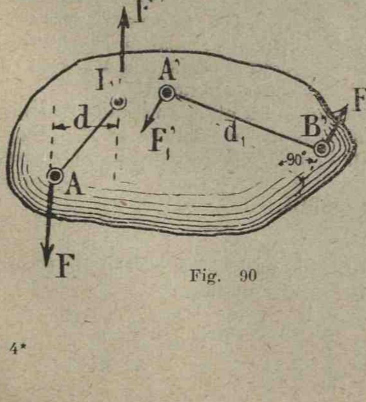

Fig. 90

Cuplul este deci un element mecanic care nu poate fi înlocuit numai cu o forță; ceeace caracterizează în genere efectul cuplului este: 1. *produsul forței prin brațul său*, produs numit *momentul cuplului*; 2. *sensul cuplului* și 3. *planul cuplului*.

5. Forțele F_1, F_2, F_3, F_4 situate în acelaș plan și acționând corpul (C) care are un punct sau o axă fixă în O, dau naștere la cuple având ca momente

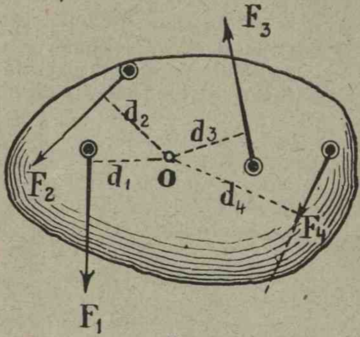

Fig. 91

$$F_1d_1,\ F_2d_2,\ F_3d_3,\ F_4d_4.$$

Aceste cuple se pot înlocuì cu un singur cuplu situat în acelaș plan cu forțele

$$F_1,\ F_2,\ F_3,\ F_4$$

și având ca moment suma algebrică a momentelor cuplelor. Adică:

$$M = -F_1d_1 - F_2d_2 - F_3d_3 + F_4d_4$$

Se admite prin convenție semnul plus, momentului unui cuplu care tinde să rotească corpul în sensul de mișcare al acelor unui ceasornic, și semnul minus pentru momentele cuplelor de sens contrar.

6. Dacă mai multe cuple, *situate în planuri diferite* acționează un corp (C), fiecare din ele tinde să imprime corpului o rotațiune în jurul unui ax perpendicular pe planul cuplului respectiv; prin urmare două cuple în plane diferite se deosebesc prin: 1. *mărimea momentului*; 2. *sensul cuplului*; 3. planul cuplului sau direcția perpendiculară pe acest plan, zisă și *axa cuplului.*

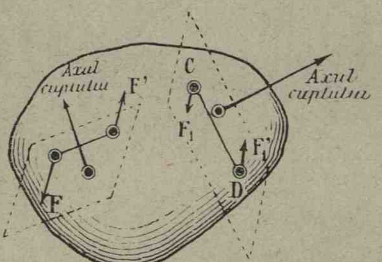

Fig 92

Un cuplu poate fi caracterizat deci, în general, prin trei elemente; mărime, sens, direcție, adică cuplul este o *mărime vectorială.*

Observare. Pentru cuplele situate în acelaș plan, unul din elemente (direcțiunea axului cuplului) este comun iar cuplele se deosebesc prin mărime și sens, adică pot fi considerate ca mărimi algebrice.

EXEMPLE

Chestiunea I-a

Un corp (C) este acționat de forțele paralele $P=50$ kg., $Q=20$ kg., $R=30$ kg. Se cere să se afle rezultanta lor.

Soluţiune

Compunând forţa P şi Q obţinem rezultanta $R'=P-Q=30$ kg. care împreună cu R ne dă un cuplu (R,R'). Putem însă procedà şi altfel, compunând Q şi R în forţa $P'=Q+R=50$ kg., care împreună cu P ne dă cuplul (PP') sau înfine forţa R cu P ne dă pe

$$Q'=P-R=20 \text{ kg},,$$

care împreună cu Q ne dă cuplul (QQ').

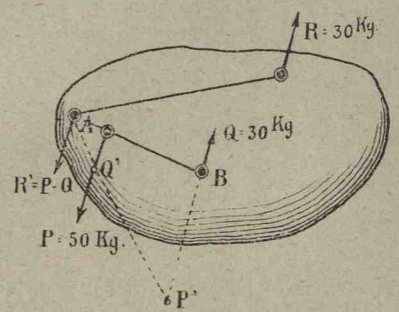

Fig. 93

După cele ce ştim dela adunarea vectorilor (sau a forţelor), cele trei rezultante trebuie să fie identice, adică cuplele (PP'), (QQ'), (RR') produc acelaş efect; adică sunt situate în acelaş plan sau în plane paralele (în acest caz) au acelaş sens şi acelaş moment.

Mai rezultă că oricum am face reducerea forţelor date, totdeauna obţinem acelaş cuplu. *Cuplul nu poate fi deci înlocuit cu o singură forţă.*

Chestiunea II-a

O grindă de fier reazimă pe un zid Z, care are grosimea $d=0,56$ m.; ea este acţionată în punctul A, de o forţă $P=1000$ kg.

Se cere forţa verticală Q care trebuie aplicată d'asupra grinzii în mijlocul distanţei OO' pentru ca grinda să nu se răstoarne.

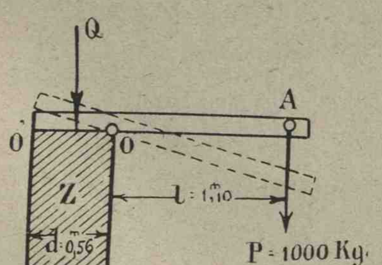

Fig. 94

Soluţiune

Grinda de fier sub acţiunea lui P, tinde să se rotească în jurul punctului O; forţa P dă naştere unui moment pozitiv $Pl=1000$ kg. $\times 1,10$ m. $=1100$ kg. m. şi unei forţe P care apasă în punctul O asupra zidului.

Forța Q la rândul ei dă naștere unui moment negativ:

$$Q\frac{d}{2}=Q\times 0{,}28\text{ m.};$$

pentru ca grinda să nu se răstoarne trebue să avem egalitate între cele două momente (cuple). Adică:

$$Q\times 0{,}28=1100\text{ kg/m.}$$

$$Q=\frac{1100\text{ kg/m.}}{0{,}28}=3928\text{ kg.}$$

Notă. Această problemă se pune foarte des unui constructor; spre exemplu OA ar fi un balcon, iar Q contragreutatea formată din greutatea zidăriei de deasupra rostului OO'.

Chestiunea III-a

Se dă cuplul BP, DP' și se cere să se înlocuească cu un cuplu echivalent, care să aibe ca braț pe AC.

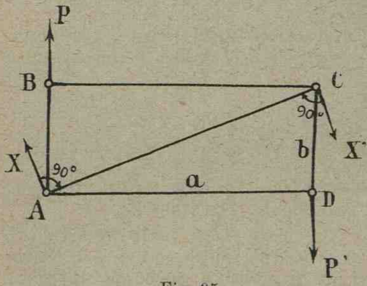

Fig. 95

Aplicație numerică

$a=4{,}5$ m. $b=2{,}4$ m.
$P=10{,}2$ kg.

Soluțiune

Necunoscuta problemei este intensitatea forței X perpendiculară pe AC. Cuplele (PP') și (XX') fiind echivalente momentele lor sunt egale:

$$a\,P=\sqrt{a^2+b^2}X$$

$$X=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\text{P}$$

Sensul lui (X, X') rezultă din sensul cuplului (PP').

Aplicație numerică.

$$X=\frac{4.5}{\sqrt{4{,}5^2+2{,}4^2}}10{,}2\text{kg.}\approx 9\text{kg.}$$

Chestiunea IV-a

Pârghia cotită AOB e acționată de forțele P, Q, R, S; știind că pârghia rămâne în echilibru în pozițiunea din figură sub acțiunea acestor forțe, se cere să se afle S, când cunoaștem pe P, Q, R, p, q, r, s.

Aplicațiune numerică.

$P=80$ kg., $Q=40$ kg., $R=60$ kg.,

$OA=0{,}50$m., $OB=0{,}30$m., $OC=0{,}15$m., $OD=0{,}20$m.

Soluțiune

Forțele P, Q, R, S dau naștere la câte un cuplu de moment; $-Pp, +Qq, +Rr, +Ss$ și la o presiune asupra lui O egală cu

$$P+Q+R-S.$$

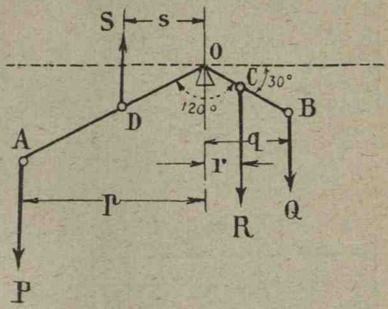

Fig. 96

Cuplele de mai sus se pot înlocuì cu unul al cărui moment trebuie să fie zero.

$$M=-Pp+Qq+Rr+Ss=o,$$

$$S=\frac{Pp-Qq-Rr}{s}$$

Aplicație numerică:

$$Ss=+80\times0{,}5\cos 30^0-40\times0{,}3\cos 30^0-60\times0{,}15\cos 30^0$$

$$Ss=40\frac{\sqrt{3}}{2}-12\frac{\sqrt{3}}{2}-9\frac{\sqrt{3}}{2}=19\frac{\sqrt{3}}{2}=16{,}435 \text{ kg.}$$

$$S=\frac{16{,}435 \text{ kg.}}{0{,}20 \text{ m.}}=82{,}17 \text{ kg.}$$

EXERCIȚII

1. Să se afle forțele sau brațele de pârghie, necunoscute din figurile următoare, știind că pârghiile AOB sunt în echilibru și că se neglijează greutatea proprie a pârghiilor.

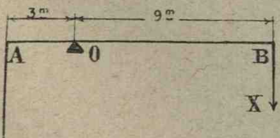

Fig. 97

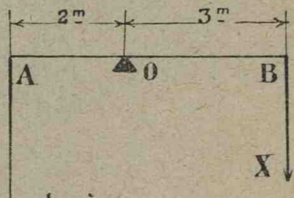

Fig. 98

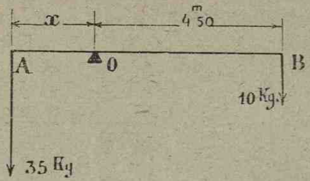

Fig. 99

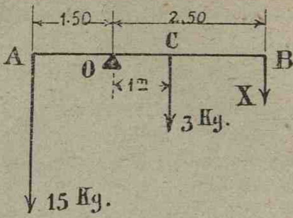

Fig. 100

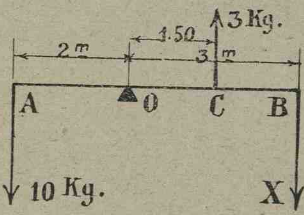

Fig. 101

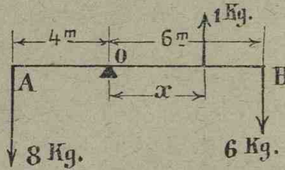

Fig. 102

2. *a*) Să se afle forța X, știind că cele două cuple sunt echivalente.

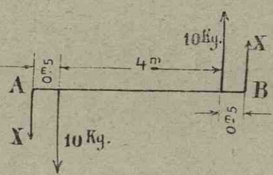

Fig. 103

b) Să se afle brațul x, știind că cele două cuple sunt echivalente.

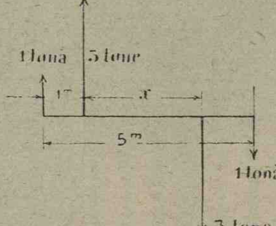

Fig. 104

3. Se dă pârghia AOB cotită, $AO = 2{,}50$ m., $OB = 3$ m., $AOB = 150^0$. Se atârnă în A și în B respectiv 20 kg., 12 kg. Se cere unghiul x știind că pârghia e în echilibru.

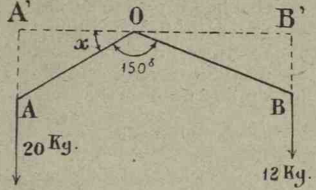

Fig. 105

4. *a)* Să se facă reducerea cuplelor din figură.

b) Să se determine forța cuplului rezultant așà încât brațul lui să fie dublul diagonalei patratului din figură.

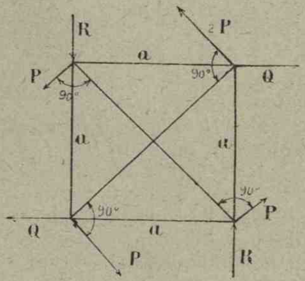

Fig. 106

5. Care trebuie să fie x pentru ca forțele din figură să formeze un sistem nul?

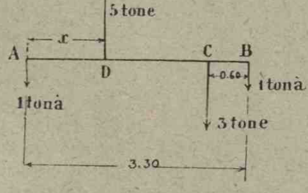

Fig. 107

6. *a)* Să se înlocuească cuplele din figură cu un singur cuplu având ca braț de pârghie latura *CD*.

b) Să se înlocuească cuplele din figură cu un singur cuplu, știind că una din forțele cuplului rezultant este de 2 kg. și aplicată în punctul *D* pe direcțiunea *DC*.

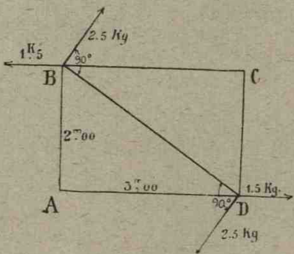

Fig. 105

7. *ABCD* fiind o figură rigidă să se înlocuească cuplul (2t,5—2,5) aplicat în punctele *B* și *C* cu un cuplu echivalent (*X*, — *X*) aplicat în *A* și *C*. (Fig. 106).

Notă. La această din urmă problemă revin chestiunile în cari trebuie să schimbăm un cuplu aplicat unui corp pe un braț de pârghie anumit cu un cuplu echivalent aplicat însă pe un alt braț.

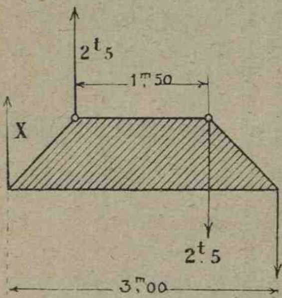

Fig. 106

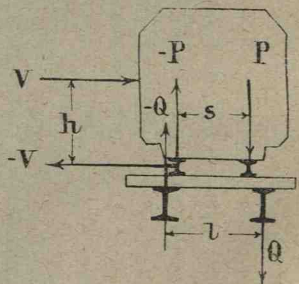

Fig. 107

Spre exemplu cuplul (*V*, — *V*) datorit vântului care apasă pe un vagon de drum de fier, îl înlocuim cu cuplul echivalent (*P*,—*P*) ce apasă pe șine, încărcând pe una și descărcând pe cealaltă sau în cuplul (*Q*,—*Q*) aplicat grinzilor cari țin traversele și șinele (pe un pod).

CAPITOLUL VIII

MOMENTE

1. Dacă un corp (C) având un punct fix O, este acționat de o forță AF, a cărei direcțiune nu trece prin punctul O, am văzut că ea dă naștere unui cuplu al cărei moment este $F \times d$, adică *produsul forței prin distanța ei la punctul O.*

Dacă asupra lui (C) ar lucră mai multe forțe situate în acelaș plan, efectele cuplelor la cari ele dau naștere, se măsoară tot prin produsul forțelor prin distanțele respective la punctul O, iar *suma algebrică a acestor două produse*, măsoară efectul *cuplului rezultant.*

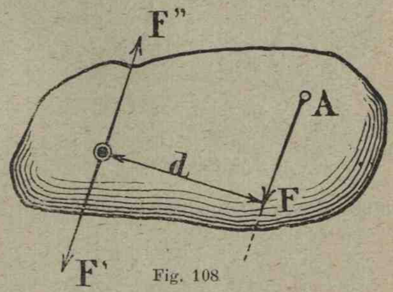

Fig. 108

La reducerea forțelor paralele, pe cari le putem totdeauna presupune paralele cu una din axele ox sau oy, am stabilit că distanțele centrului forțelor paralele la aceste axe sunt date de relațiunile:

$$x = \frac{\Sigma F_i x_i}{\Sigma F_i}, \quad y = \frac{\Sigma F_i\, y_i}{\Sigma F_i}$$

în cari apar tot produsele forțelor prin distanțele lor de originea O, care poate fi aleasă într'un punct oarecare al planului.

Deoarece în atâtea chestiuni intervine produsul unei forțe prin distanța ei la un punct O, se obișnuește să se studieze această chestiune independent de cuple.

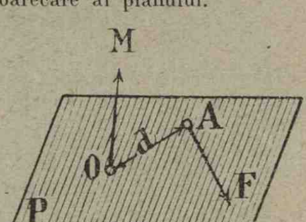

Fig. 109

Definițiune. Se numește momentul unei forțe AF, în raport cu un punct O, un vector OM, *perpendicular* pe planul OAF, *egal în mărime* cu produsul $F \times d$ (dublul ariei OAF) iar *sensul* se alege în așà fel încât un observator așezat dealungul lui OM, cu picioarele în O, să vadă un mobil care ar plecà din A spre F mergând dela stânga spre dreapta sa; se notează:

$$\mathfrak{M}_0 F = F \times d,$$

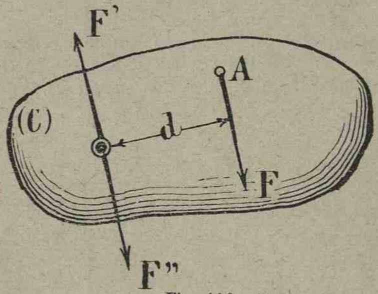

Fig. 110

d se numește *brațul momentului*.

Observare importantă. Să se observe că momentul unei forțe F în raport cu O, este de fapt *momentul cuplului* (F,F') la care ar dà naștere forța F când ar acționà un corp (C) care are un punct fix O.

In aplicațiune adeseori cuplul (F, F') se subînțelege și se consideră numai momentul lui; așà se și explică, în parte, pentru ce se tratează în manuale «despre momente» la un capitol special.

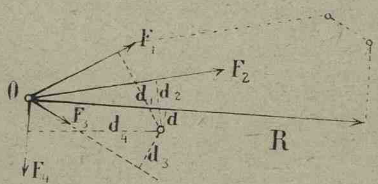

Fig. 111

Teorema lui Varignon. Fiind date mai multe forțe concurente F_1, F_2, F_3, F_4.... situate în acelaș plan suma algebrică a momentelor forțelor în raport cu un punct oarecare O din acest plan, este egală cu momentul rezultantei R, în raport cu acelaș punct adică:

$$F_1 d_1 + F_2 d_2 - F_3 d_3 - F_4 d_4 \ldots = Rd.$$

Observare. Teorema este adevărată și pentru forțe paralele cari sunt un caz particular al forțelor concurente.

EXEMPLE

Chestiunea I-a

Să se stabilească cu ajutorul teoremei lui *Varignon* formulele cari dau pozițiunea centrului unui sistem de forțe paralele.

Soluţiune

Fie forţele paralele A_1F_1, $A_2F_2 \ldots$; am văzut la cap. VI că putem schimbà direcţiunea tuturor forţelor paralele fără ca centrul forţelor să se schimbe. Atunci să rotim toate forţele până când devin paralele cu oy şi să aplicăm teorema lui Varignon; însemnând cu x distanţa centrului C al forţelor la axa oy, luând momentele în raport cu O avem:

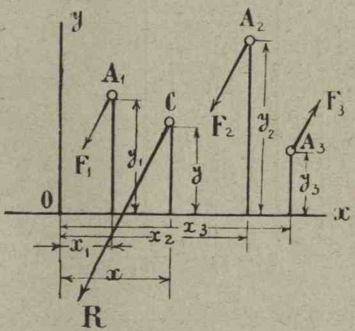

Fig. 112

$$F_1x_1 + F_2x_2 + F_3x_3 + \ldots = Rx$$

sau

$$x = \frac{\Sigma F_i\, x_i}{\Sigma F_i},$$

Analog se stabileşte formula

$$y = \frac{\Sigma F_i\, y_i}{\Sigma F_i}.$$

Chestiunea II-a

Un bloc paralelipipedic $ABCD$, reazimă pe un plan orizontal şi e acţionat de forţa verticală G care trece prin mijlocul bazei precum şi de forţa orizontală H situată în acelaş plan cu C; cunoscând pe G, H şi a, se cere să se determine h aşà fel încât rezultanta forţelor H şi G să treacă prin punctul D.

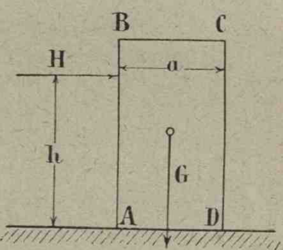

Fig. 113

Soluţiune

1. Presupunând problema rezolvată să mutăm punctele de apli-

cație ale forțelor H și G pe direcțiunile lor până în M, rezultanta R trecând prin D, avem din triunghiurile asemenea $MM'D$ și MGR:

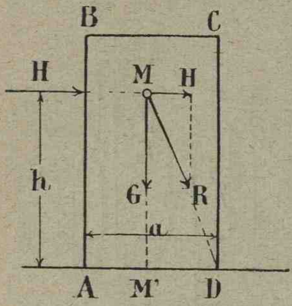

Fig. 114

$$\frac{H}{\frac{a}{2}}=\frac{G}{h},$$

deci

$$h=\frac{aG}{2H}.$$

2. *Altfel.* Luând momentele în raport cu D, găsim (teorema lui Varignon):

$$Hh-\frac{Ga}{2}=R\times o.$$

deci

$$h=\frac{ab}{2H}$$

Observare. Momentul Hh datorit forței H, care tinde să răstoarne corpul se numește *moment de răsturnare* iar momentul Ga datorit forței G care ajută la stabilitatea corpului, se numește *moment de stabilitate.*

In practică, la construcțiuni, raportul între momentul de stabilitate și cel de răsturnare se ia de obiceiu egal cu 2,5; acest raport se numește *coeficient de stabilitate.*

Chestiunea III-a

Pe o grindă răzimată în punctele A și B acționează sarcinile verticale P_1, P_2, P_3 situate în distanțele a_1, a_2, a_3 de reazimul din stânga A. Se cer presiunile în punctele A și B.

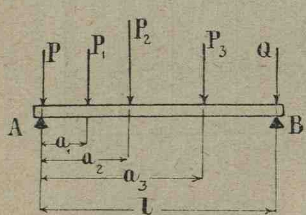

Fig. 115

Aplicațiune numerică: $P_4 = 1$ tonă, $P_2 = 1{,}8$ t., $P_3 = 0{,}7$ t., $l = 4{,}20$ m., $a_1 = 1$ m., $a_2 = 1{,}40$ m., $a_3 = 3{,}70$ m.

Soluțiune

Chestiunea revine la a compune forțele paralele P_1, P_2, P_3, iar rezultanta lor să o descompunem apoi după direcțiunile verticalelor punctelor A și B. Cu ajutorul momentelor putem ajunge mai repede la soluția problemei. Fie R rezultanta forțelor P_1, P_2, P_3, x distanța ei de reazimul A; avem aplicând *teorema lui Varignon* în raport cu punctul A

$$P_1a_1+P_2a_2+P_3a_3=Rx$$

$$x=\frac{P_1a_1+P_2a_2+P_3a_3}{P_1+P_2+P_3}$$

și apoi P și Q presiunile în A și B, rezultanta lor este $R = P_1 + P_2 + P_3$ luând momentele componentelor P și Q în raport cu punctul A și al rezultantei lor R, avem:

$$(P_1+P_2+P_3)x=Ql$$

deci

(1) $$Q=\frac{(P_1+P_2+P_3)}{l}x=\frac{P_1a_1+P_2a_2+P_3a_3}{l},$$

(2) $$P=R-Q=\frac{P_1(l_1-a_1)+P_2(l-a_2)+P_3(l-a_3)}{l}$$

Observare. Expresiunea lui P se puteà obține ca și pentru Q, luând însă momentele în raport cu punctul B. Aplicând în (1) și (2) valorile numerice din enunț, găsim:

$$P=1{,}746 \text{ t.} \qquad Q=1{,}754 \text{ t.}$$

Chestiunea IV-a

Un cărucior cu patru roate reazimă pe două șine; se cere să se afle presiunile P_1, P_2 pe cari șinele le transmit în punctele A și B, cunoscând că greutatea G se repartizează egal pe cele patru roate. Se va însemnà distanța între A și B cu l, între osiile căruciorului cu d, iar distanța roții din stânga de punctul A, cu a.

Aplicațiune numerică: $G = 500$ kg., $l = 3{,}50$ m., $d = 0{,}90$ m., $a = 0{,}80$ m.

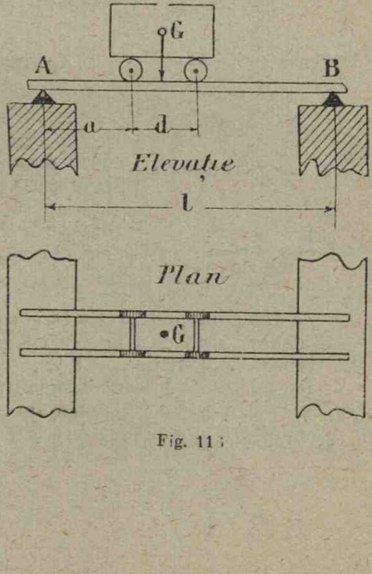

Fig. 11

Soluțiune

Greutatea G, repartizându-se egal pe cele 4 roți, pe o osie revine 250 kg., iar pe o roată 125 kg. Luând momentele în raport cu A și B și ținând seamă de soluțiunea chestiunii III avem:

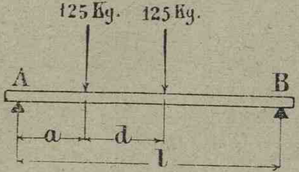

Fig. 117

$$Pa + P(a+d) = P_2\, l$$

$$P(l-a) + P(l-a-d) = P_1 - l$$

prin urmare

$$P_1 = \frac{2l-2a-d}{l} P \text{ și } P_2 = \frac{2a+d}{l} P$$

aplicând datele numerice găsim:

$$P_1 = 160{,}750 \text{ kg.}$$
$$P_2 = 89{,}250 \text{ kg.}$$

EXERCIȚII

1. Se dă linia dreaptă D și punctul O, distanța între punct și dreaptă fiind d; se cere să se reprezinte grafic variația momentului unei forțe constante F, care lucrează pe direcția dreptei, în raport cu O, când forța se deplasează în lungul dreptei.

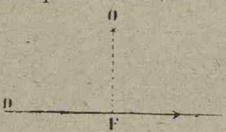

Fig. 118

Aplicațiune numerică $F=10$ t. $d=1{,}50$ m.

2. Direcțiunea unei forțe de 3 kg. face cu o dreaptă D un unghiu $\alpha=30^0$. Să se studieze variațiunea momentului forței F în raport cu un punct O, care descrie dreapta $D.$, și să se reprezinte grafic această variațiune.

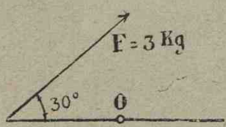

Fig. 119

3. Se dau două puncte O și O' și se cere să se determine pozițiunea și sensul unei forțe de 8 kg. știind că momentele ei față cu O și O' sunt respectiv, $+12$ kg., -8 kg.

4. Să se găsească locul extremităților forțelor situate în acelaș plan, cari au ca origină un punct dat A și ale căror momente în raport cu un punct O, din planul forțelor, e constant.

5. Să se demonstreze că suma momentelor a trei forțe dirijate după laturile unui triunghiu oarecare, și proporționale cu lungimile acestor trei laturi, în raport cu un punct oarecare O din planul triunghiului e constantă.

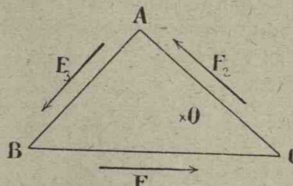

Fig. 120

6. Să se afle cu ajutorul momentelor componentele forței P după direcțiile D_1 și D_2.

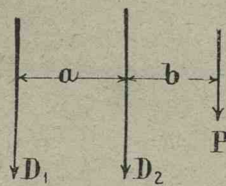

Fig. 121

7. Se dau forțele paralele din figură și se cere să se găsească distanța dela forța rezultantă la: 1) forța $F_1 = 5$ kg.; 2) forța $F_4 = 6$ kg.; 3) forța $F_5 = 5$ kg.

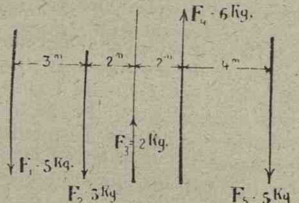

Fig. 122

8. Să se reprezinte grafic variația presiunilor pe punctele A și B, datorită sarcinei P când variază x.

Aplicație. $l = 4{,}20$ m., $P = 1{,}200$ t.

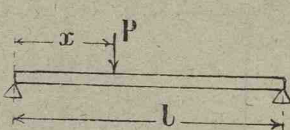

Fig. 123

9. Doi oameni duc o traversă de 70 kg. pe o grindă răzimată în A și B; știind că distanța dintre ei este de 80 cm., că omul din stânga

are o greutate proprie de 70 kg., iar celalt de 85 kg., se cere să se afle distanța x pentru care presiunea pe punctul A este dublă decât aceea de pe punctul B.

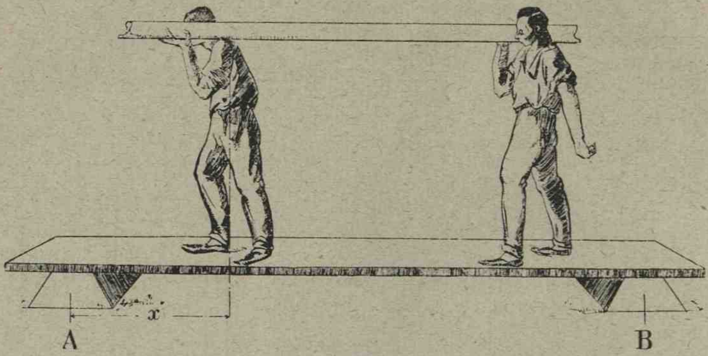

Fig. 124

(Indicațiuni: se ve presupune că sarcina traversei se împarte egal pe cei doi oameni, iar greutățile acestora se transmit grinzii în două puncte M și N).

10. Un stâlp de 5 m. înălțime este acționat de greutatea sa G și de o forță necunoscută F care face cu orizontala unghiul $\alpha = 30^0$. Să se găsească aceasta forță știind că rezultanta trece prin punctul B ($AB = 1{,}50$ m.).

(Se vor luà momentele în raport cu punctul B).

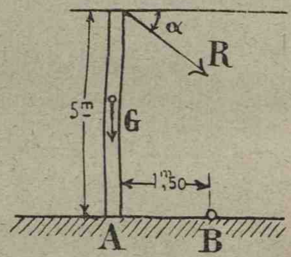

Fig. 125

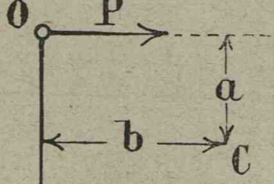

Fig. 126

11. Se cunoaște forța Q și se cere să se determine forța P așà fel ca rezultanta forțelor P și Q să treacă prin punctul C depărtat de direcțiunile acestor forțe, respectiv cu a și b.

(Indicație: Se vor luà momentele în raport cu C).

12. Un bloc paralelipipedic având înălţimea h şi dimensiunile bazei 1 m. şi x, este acţionat de forţa verticală $G = hx\delta$ şi de o forţă orizontală H aplicată la o distanţă de bază egală cu o treime din înălţimea paralelipipedului. Să se determine x, aşà fel încât rezultanta forţelor G şi H să treacă prin punctul E $(ED=\frac{1}{3}AD)$.

Aplicaţie numerică: $h = 2{,}30$ m., $H=2{,}645$ t., $\delta=2{,}4$.

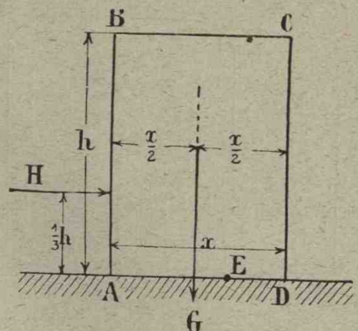

Fig. 127

13. Se cere să se descompună forţa P după direcţiunile bielei AB şi a verticalei punctului B, apoi să se afle momentul componentei Q, în raport cu punctul O. Se cunoaşte r, l, a.

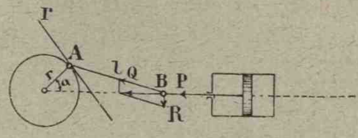

Fig. 128

Indicaţie: (Se va descompune forţa Q după direcţiunea manivelei OA şi a tangentei AT la cerc în M şi se va aplicà teorema lui Varignon).

14. O construcţiune ca aceea din figură este acţionată de forţele G, H, V, cunoscute în mărime, direcţiune şi sens şi se cere să se afle distanţa rezultantei forţelor de mai sus faţă de punctul D.

Indicaţiuni. Se va aflà mai întâiu distanţa forţei V de punctul D; ea e egală cu

$$\left(a+\frac{d}{2}\right)\sec\alpha+(a+d)+h\cos(\alpha+\beta)$$

în care $\operatorname{tg}\beta=\frac{h}{a+d}$.

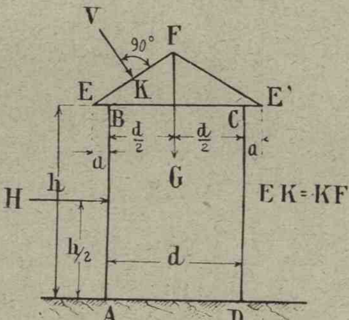

Fig. 129

Se va aplicà apoi teorema lui *Varignon* în raport cu punctul D.

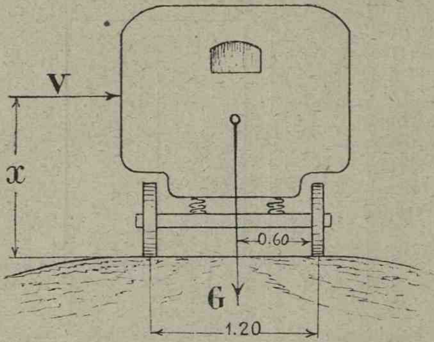

Fig. 130

15. Un vehicul de greutate $G = 300$ kg. este acționat de forța orizontală $V = 150$ kg.; care este distanța x cea mai mare, pentru ca vehiculul să nu se răstoarne?

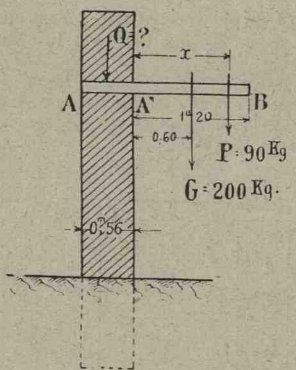

Fig. 131

16. Pe o grindă $AA'B$ prinsă în. tr'un zid de lățime egală cu 0,56 m. se plimbă un om a cărui greutate este de 90. kg. Care este greutatea Q a blocului de zidărie ce trebuie să apese grinda pe porțiunea AA', pentru ca coeficientul de stabilitate al grinzii să fie 3? (Greutatea G a grinzii, aplicată la mijlocul distanței $A'B$ se va socotì de 200 kg.).

Indicație: Punctul în jurul căruia se poate produce răsturnarea este A', momentul de stabilitate este $Q \times \frac{0,56 \text{ m.}}{2}$ iar momentul de răsturnare $G\frac{1,20}{2} + Px$; se va considerà cazul în care acest din urmă moment este maximum.

17. O construcție din lemn ca aceia din figura alăturată este acționată de forțele cunoscute P, G, F, F'; se cere să se determine distanța d între picióarele construcției așà fel ca momentul de stabilitate să fie de două ori mai mare decât momentul de răsturnare.

Indicațiune: Se vor luà momentele în raport cu punctul A.

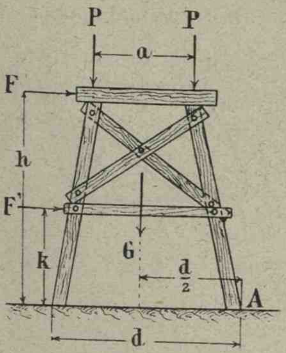

Fig. 132

18. O supapă de siguranță are 80 mm. diametru; presiunea vaporilor este de 5 kg. pe fiecare centimetru pătrat; greutatea proprie a pârghiei OB este de 5 kg. și aplicată în mijlocul ei. Se cere care este contragreutatea necesară P, pentru ca îndată ce presiunilor vaporilor trece de 5 kg pe cm², supapa să se deschidă.

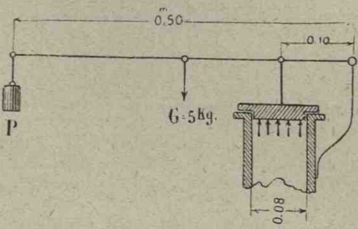

Fig. 133

CAPITOLUL IX

CENTRE DE GREUTATE

Definițiuni. Fiecare părticică a unui corp material este acționată de gravitate: forță îndreptată spre centrul pământului; din cauza marei depărtări al acestui centru față de suprafața pământului, se obișnuește a se consideră toate aceste forțe ca fiind paralele, pentru puncte apropiate de pe pământ. Rezultanta forțelor cari acționează un corp, în virtutea gravității se numește *greutatea* acelui corp, iar punctul de aplicație al acesteia e *centrul de greutate* al corpului.

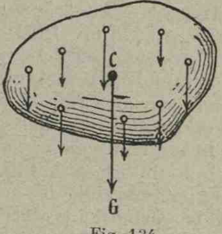

Fig. 134

Dacă ducem drepte paralele cu o direcțiune dată, linia sau suprafața MN care unește mijloacele coardelor AA', $A_1A'_1$, etc. mărginite de conturul corpului se numește *diametru*.

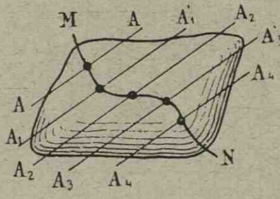

Fig. 135

Centrul de greutate al unui corp se află pe unul oarecare din diametrele lui, rezultă deaci că dacă putem află cu înlesnire două din diametrele acelui corp, centrul de greutate se află la întretăierea lor. Spre exemplu, centrul de greutate al unui dreptunghiu este centrul geometric al dreptunghiului, dreptele MN și PQ fiind două diametre.

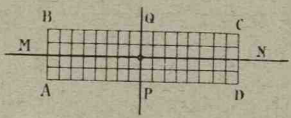

Fig 136

Fiind dat un corp, să detașăm dintr'însul o părticică foarte mică de materie Δm, al cărei volum fie Δv; raportul $\frac{\Delta m}{\Delta v}$ se numește prin definiție *densitatea medie* a părticelei de materie considerată. Dacă părticica de materie ne-o închipuim redusă la un punct M

$$\lim_{\Delta v = o} \frac{\Delta m}{\Delta v} = \delta_M$$

se numește densitatea în punctul M.

Un corp este *omogen* dacă densitatea în toate punctele lui este aceiaș; mai puțin precis am puteà spune că un corp este omogen când materia este deopotrivă de îngrămădită în toate părțile lui.

Observare. In realitate cele mai multe corpuri nu sunt omogene; considerându-le omogene adăugăm de fapt încă o *ipoteză simplificatoare* la cele date la cap. I.

Unități de măsură pentru greutatea corpurilor. Se știe din fizică că unitatea de măsură pentru greutăți este greutatea unui dm^c de apă distilată la $+ 4^0$ centigrade; această greutate se numește kilogram; un kg. are 1000 grame, iar 1000 kg. fac o tonă.

Pentru a găsi densitatea unui corp când îi cunoaștem greutatea și volumul, dividem greutatea corpului exprimată în *grame, kilograme* sau *tone* respectiv cu volumul lui exprimat în *centimetricubi, decimetricubi* sau *mmtricubi*. Pentru corpurile la cari cele trei dimensiuni sunt comparabile, densitatea se exprimă în unități de greutate pe unități de volum; la corpurile la cari numai două dimensiuni sunt comparabile în unități de greutate pe unități de suprafață iar la corpurile la cari două dimensiuni sunt reduse în raport cu a treia, în unități de greutate pe unități de lungime.

EXEMPLE

Densitatea unui bloc de piatră se exprimă în kg/m³ sau tone/m³, (spre exemplu la piatră densitatea este 2400 kg/m³ sau 2,4 tone/m³); greutatea unei table de o anume grosime se exprimă în kg/m² iar a unei vergele de fier de o secțiune anumită în kg/metru de lungime.

Observare. In toate cele ce urmează vom presupune corpurile omogene, în afară de cazurile în cari vom face mențiune specială.

POZIȚIA CENTRELOR DE GREUTATE PENTRU LINIILE, SUPRAFEȚELE ȘI VOLUMELE CELE MAI UZUALE

A. CENTRE DE GREUTATE ALE LINIILOR MATERIALE

1. *Segment de dreaptă AB.* Centrul de greutate este în mijlocul segmentului.

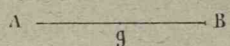

Fig. 137

2. *Perimetrul unui triunghiu ABC.* Fie $A'B'C'$ mijloacele laturilor; centrul de greutate G este la întâlnirea bisectrițelor triunghiului $A'B'C'$; distanța lui de latura a este:

$$d_a = \frac{ha}{2} \cdot \frac{b+c}{a+b+c},$$

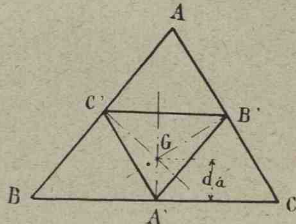

Fig. 138

a, b, c, h având semnificațiile obișnuite dintr'un triunghiu.

3. *Perimetrul unui paralelogram.* G este la intersecția diagonalelor.

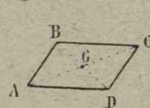

Fig. 139

4. *Arc de cerc.* Avem

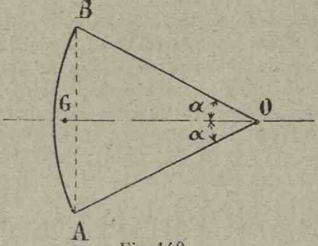

Fig. 140

$$OG = r\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

Cazuri particulare.

a) semicerc $\qquad OG = \frac{2r}{\pi} = 0{,}6366\,r$

b) sfert de cerc $\qquad OG = \frac{252}{\pi}r = 0{,}9003\,r$

c) a șasea parte dintr'un cerc $\qquad OG = \frac{3r}{\pi} = 0{,}9549\,r$

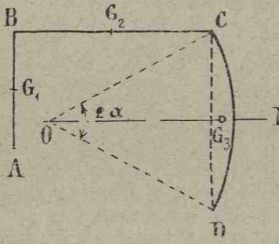

Fig. 141

5. *Pentru liniile materiale, oarecari.* Aflăm centrele de greutate pentru porțiunile, precum AB, BC, CMD și compunem forțe le proporționale cu aceste linii și aplicate în G_1, G_2, G_3. Centrul de greutate căutat va fi centrul forțelor paralele de mai sus.

B. CENTRE DE GREUTATE ALE SUPRAFEȚELOR MATERIALE

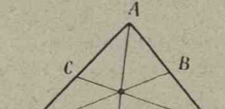

Fig. 142

1. *Triunghiu.* G este situat la intersecția medianelor AA', BB' CC'.

2. *Paralelogram.* G este la intersecția diagonalelor.

3. *Trapez.* Grafic se obține luând DD' egal cu b și BB' egal cu B și luând intersecția dreptei $B'D'$ cu MN care unește mijloacele bazelor. Distanțele lui G, de bazele B și C sunt respectiv

$$d=\frac{h}{3}\cdot\frac{B+2b}{B+b}\quad,\quad d'=\frac{h}{3}\cdot\frac{2B+b}{B+b}.$$

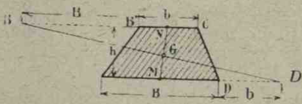

Fig. 143

4. *Patrulater oarecare.* Aflăm centrele de greutate G_1, G_2 a triunghiurilor ABC, ACD spre exemplu, unim G_1 cu G_2 și luăm pe această dreaptă $G_2O' = G_1O$, O fiind punctul unde G_1G_2 taie diagonala AC.

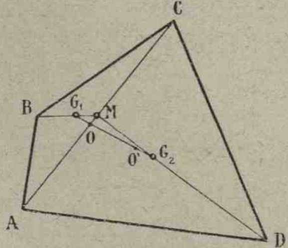

Fig. 144

5. *Sector de cerc.*

$$OG=\frac{2}{3}\,r\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

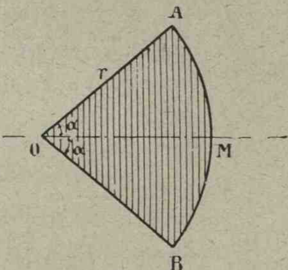

Fig. 145

Cazuri particulare.

a) semicerc $\qquad OG=\dfrac{4r}{3\pi}=0{,}4244\,r$

b) sfert de cerc $\qquad OG=\dfrac{4\sqrt{2}}{3\pi}=0{,}6002\,r$

c) a șasa parte din cerc $\qquad OG=\dfrac{2r}{\pi}=0{,}6366\,r$

6. *Segment de cerc.*

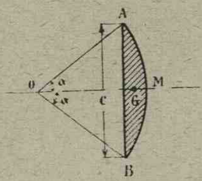

Fig. 146

$$OG=\frac{c^3}{12\,S}=\frac{2}{3}\cdot\frac{r^3\sin^3\alpha}{S}=\frac{4}{3}\cdot\frac{r\sin^3\alpha}{\text{arc}\,2\alpha-\sin 2\alpha}$$

în care

$$S=\frac{1}{2}r^2(\text{arc}\ 2\alpha-\sin 2\alpha)$$

este aria segmentului de cerc.

C. CENTRE DE GREUTATE ALE CORPURILOR MATERIALE

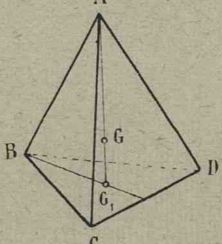

Fig. 147

1. *Tetraedru.* Centrul de greutate G se găsește la $\frac{1}{4}$ pe dreapta AG_1 care unește un vârf A cu centrul de greutate al bazei BCD și anume la $\frac{1}{4}$ dela bază.

2. *Piramidă oarecare.* Ca și la tetraedru.

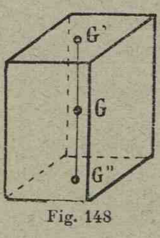

Fig. 148

3. *Prismă.* Centrul de greutate G se găsește la mijlocul segmentului care unește centrele de greutate ale bazelor.

4. *Con.*

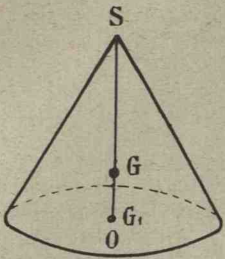

Fig. 149

$$GO = \frac{1}{4} SO.$$

5. *Cilindru.*

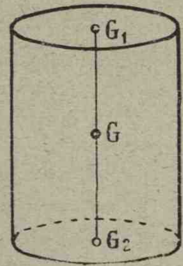

Fig. 150

$$GG_1 = GG_2.$$

EXEMPLE

Chestiunea I-a

Să se afle centrul de greutate al liniei materiale $ABCD$, de secțiune circulară ω; porțiunile AB și CD fiind de fier, iar BC de aramă.

Aplicație. $B = 0{,}70$ m., $l' = 1{,}70$ m., $\omega = 6$ mm^2.

Soluțiune

Insemnând cu δ și δ' densitățile fierului și aramei, greutatea porțiunilor AB și CD aplicate în M și P se compun într'una singură aplicată în Q, mijlocul segmentului MP; ea are intensitatea $2l\omega\delta$; această greutate compusă cu greutatea $l'\omega'\delta'$ aplicată în N ne dă greutatea totală $(2l\delta + l'\delta')\omega$ aplicată în punctul G, centrul de greutate căutat, definit de raportul

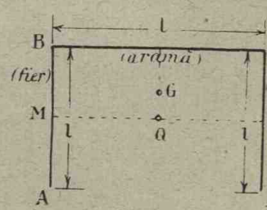

Fig. 151

$$\frac{GQ}{GN} = \frac{l'\omega\delta'}{2\,l\omega\delta} = \frac{l'\delta'}{2l\delta};$$

Observare importantă. Rezultă deaci că dacă linia $ABCD$ ar fi omogenă ($\delta' = \delta$) poziția centrului de greutate este independentă de valoarea densității, pe care pentru simplificarea calculelor o putem presupune egală cu unitatea; *acest lucru îl vom aplica în mod curent în cele ce urmează când corpurile sunt omogene.*

Aplicație. Avem:

$$2l\omega\delta = 2 \times 70 \text{ cm.} \times 0{,}06 \text{ cm}^2 \times 7{,}8 = 65{,}4 \text{ grame},$$
$$l'\omega\delta = 110 \text{ cm.} \times 0{,}06 \text{ dm}^2 \times 8{,}7 = 57{,}4 \text{ grame}.$$

Greutatea vergelei $ABCD$ este 122,8 grame,

$$\frac{GQ}{GN} = \frac{57{,}4}{65{,}4} \backsimeq 0{,}88.$$

Chestiunea II-a

Se cere greutatea și centrul de greutate al unei plăci de fier omogenă, având forma din figură. $OE = \frac{1}{4}a$)

Aplicație. $a = 40$ cm., $b = 0{,}35$ m., $e = 5$ mm.

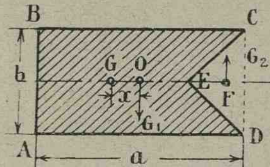

Fig. 152

Soluțiune

Vom presupune întâiu placa ca și cum ar fi plină și pe porțiunea CDE; greutatea ei totală este $G_1 = abe\delta$, aplicată în O; această forță trebuie compusă cu forța G_2 de sens contrar care reprezintă greutatea porțiunii triunghiulare CDE: $G_2 = e\frac{ab}{8}\delta$ aplicată în F la o treime din mediana vârfului E.

Greutatea plăcii este evident:

$$G = G_1 - G_2 = \left(ab - \frac{ab}{8}\right) e\delta = \frac{7}{8} abe\delta;$$

pentru a aflà depărtarea centrului de greutate căutat în raport cu O spre exemplu, vom luà momentele în raport cu acest punct:

$$G \times o - \left(\frac{ab}{8}\delta e\right) \times \frac{5}{12} a = \frac{7}{8} abe\delta,$$
$$x = -GO = \frac{5}{84} a.$$

adică G e situat *la stânga* punctului O cum reiese dealtfel și direct prin compunerea forțelor paralele G_1 și G_2.

Aplicație.

$$G = \frac{7}{8} 4 \text{dm.} \times 3{,}5 \text{ dm.} \times 0{,}05 \times 7.8 = 4.777 \text{ kg}$$

$$x = -\frac{5}{84} 40 = -2.4 \text{ cm.}$$

Chestiunea III-a

Se cere poziția centrului de greutate al unei plăci omogene de grosime e și având forma din figură.

Soluțiune

1. Vom defini poziția centrului de greutate în raport cu axele ox și oy. Despărțim placa în dreptunghiurile de arii (ad), (bd'), (cd'') în centrele acestor dreptunghiuri sunt aplicate respectiv forțele $ade\delta$; $bd'e\delta$; $cd''e\delta$; δ fiind densitatea plăcii.

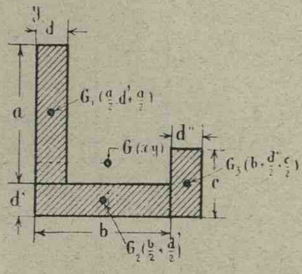

Fig. 153

Aplicând formulele care dau pozițiunile centrului forțelor paralele (cap. VI) și observând dela început că $e\delta$ va apare în factor comun și la numitorul și la numărătorul acestor formule, putem scrie

$$x=\frac{\Sigma F_1 x_1}{\Sigma F_1}=\frac{ad\,\frac{a}{2}+bd'\,\frac{b}{2}+cd''\left(b+\frac{c}{2}\right)}{ad+bd'+cd''}$$

sau

$$x=\frac{a^2d+b^2d'+cd''(2\,b+c)}{2\,(ad+bd'+cd')},$$

iar

$$y=\frac{\Sigma F_1 y_1}{\Sigma F_1}=\frac{ad\left(d+\frac{a}{2}\right)+bd'\frac{d'}{2}+cd''\frac{c}{2}}{ad+bd'+cd''},$$

sau

$$y=\frac{ad\,(2\,d+a)\;+bd'^2+c^2d''}{2\,(ad+bd'+cd'')}.$$

2. Aceeaș chestiune se poate trată lesne cu ajutorul poligonului funicular, astfel:

In poligonul forțelor $A_0A_1A_2A_3$, forțele G_1, G_2, G_3 sunt egale sau proporționale cu ariile dreptunghiurilor din figură.

Construim apoi cu un pol oarecare O, poligonul funicular a_0, a_1, a_2, a_3, a_4; rezultanta forțelor G_1, G_2, G_3 va trece prin punctul i, intersecțiunea laturilor extreme ale acestui poligon: a_0, a_1 și a_3, a_4, și va fi paralelă cu direcțiunea forțelor; *prin urmare centrul de greutate se va găsi undeva pe dreapta ii'.*

Folosind proprietatea că *centrul forțelor paralele nu se schimbă*, dacă schimbăm direcțiunea tuturor forțelor, să rotim forțele G_1, G_2, G_3 de 90^0 spre exemplu la stânga.

Construind un nou poligon de forțe A_0. A'_1, A'_2, A'_3 și un nou poligon funicular b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, alegând acelaș pol O, găsim că *centrul*

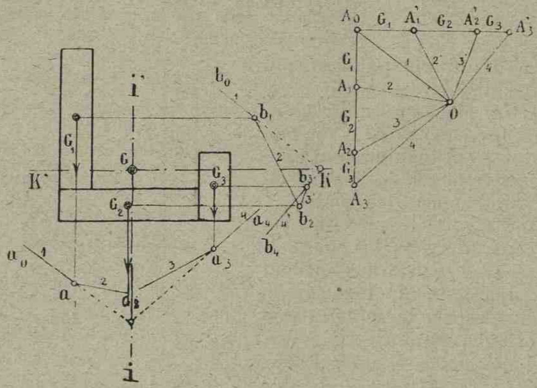

Fig. 154

de greutate trebuie să fie situat undeva pe dreapta KK', deci centrul de greutate căutat este în G, la intersecția dreptelor KK' și ii'.

Observare. Această metodă grafică este foarte mult întrebuințată în practică, mai ales pentru figuri complicate. Spre exemplu pentru

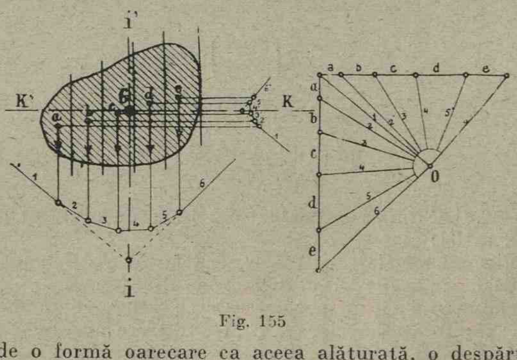

Fig. 155

o figură de o formă oarecare ca aceea alăturată, o despărțim prin drepte paralele, destul de apropiate, în porțiuni pe cari să le putem asimilà cu dreptunghiuri, trapeze sau triunghiuri. Aflând ariile loı și centrele de greutate *a*, *b*, *c*, *d*... ale acestor porțiuni, putem aplicà apoi metoda grafică de mai sus, care se poate cetì lesne în epura alăturată.

EXERCIȚII

1. O vergea de fier, cu secțiunea circulară de rază 8 mm., are lungimea de 6,45 m. Luând densitatea fierului egală cu 7,8 se cere greutatea unui metru liniar din această vergea precum și greutatea întregei vergele.

2. Care este greutatea plăcii de fier alăturate știind că grosimea ei este de 5 mm., $a = 40$ cm.; iar densitatea fierului e 7,8.

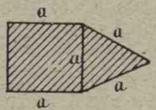

Fig. 156

3. Să se afle greutatea unui bloc de piatră de formă paralelipipedică, știind că cele trei dimensiuni sunt 0,70 m., 1,20 m., și 4,50 m.; iar densitatea pietrei este 2,2.

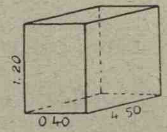

Fig. 157

4. Un basin în formă de cilindru având dimensiunile din figură se umple cu apă. Care e greutatea care apasă pe fundul rezervorului și pe un centimetru pătrat din peretele rezervorului, al cărui centru este situat la 2,95 m. dela fund.

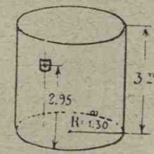

Fig. 158

5. *Centre de greutate ale liniilor.* Să se găsească greutatea și centrele de greutate ale vergelelor făcute din fier ($\delta = 7{,}8$), având ca secțiune un pătrat cu latura de 3 mm. și având una din formele următoare: (fig. 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165).

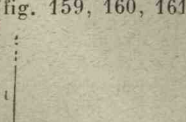

Fig. 159

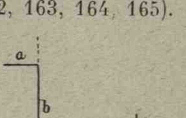

Fig. 160

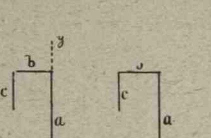

Fig. 161

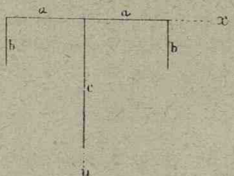

Fig. 162

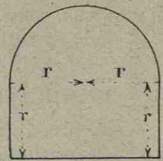

Fig. 163

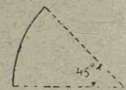

Fig. 164

6. Să se afle centrul de greutate al barei

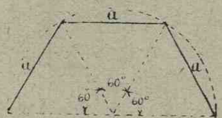

Fig. 165

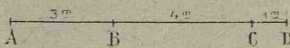

Fig. 166

$AB = 3$ m (fier 7,8), $BC = 4$ m. (aramă 8,7), $CD = 1$ m. (plumb 11) secțiunea ei fiind un cerc cu raza 15 mm.

7. *Centre de greutate ale suprafețelor.* Să se afle greutățile și centrele de greutate ale plăcilor din figurile de mai jos; *e* reprezintă grosimea plăcii, iar δ densitatea.

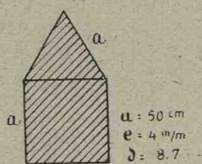

Fig. 167

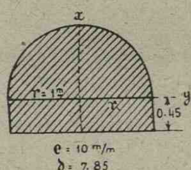

Fig. 168

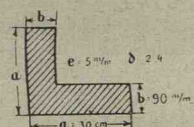

Fig. 169

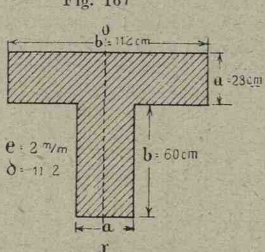

Fig. 170

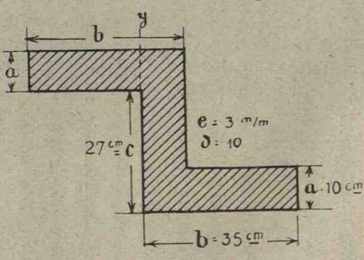

Fig. 171

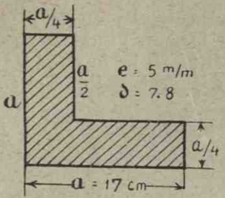

Fig. 172

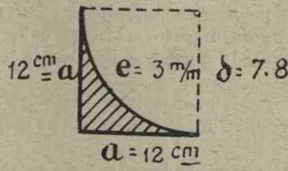

Fig. 173

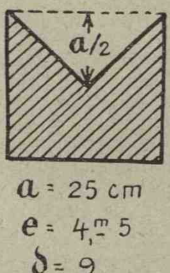

Fig. 174

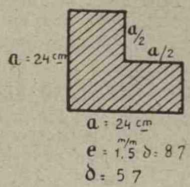

Fig. 175

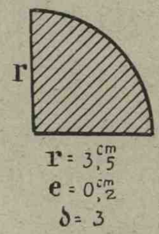

Fig. 176

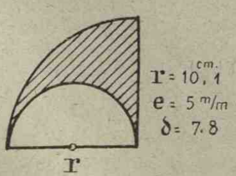

Fig. 177

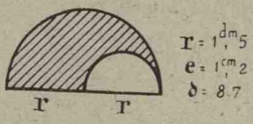

Fig. 178

8*) Să se afle centrul de greutate al suprafeței unui dreptunghiu *ABCD neomogen* cunoscând că densitatea într'un punct oarecare al dreptunghiului este proporțională cu distanța sa la baza AB și că densitatea în punctele liniei AB este δ_1 iar în acelea ale liniei CD, δ_2.

9*) Aceiaș chestiune presupunând că densitatea într'un punct este proporțională cu patratul distanței lui de bază AB.

10*) Un rezervor cilindric este culcat dealungul unei generatoare și umplut cu apă până la jumătate. Se cere rezultanta presiunilor apei pe capacul cilindrului precum și punctul de aplicație al acestei rezultante.

Aplicație. Diametrul cilindrului este $D=0{,}60$ m. densitatea apei ,000 kg. pe m^3.

Indicație. Se va folosì principiul lui Pascal relativ la presiunea n interiorul lichidelor, pentru un element și se va aplicà teorema lui Varignon.

11*) Pe o grindă de lungime l răzimată în două puncte A, B apasă o sarcină continuă, intensitatea într'un punct oarecare M fiind reprezentată de ordonata unui trapez $ABCD$. Știind că presiunea în A este p_1 iar în B p_2 se cere rezultanta presiunilor, punctul ei de aplicație precum și valoarea reacțiunilor pe cele două reazime.

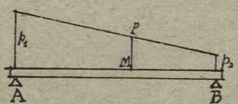

Fig. 179

12*. Să se afle centrul de greutate al perimetrului și ariei unei bucle de sinusoidă limitată la baza sa.

13*. Aceiaș chestiune pentru o cicloidă care are ecuațiunile:

$$x=a\,(\varphi-\sin\varphi)$$
$$y=a\,(1+\cos\varphi)$$

a fiind raza cercului generator.

---

*) Necesită cunoștințe de calcul diferențial și integral.

CAPITOLUL X

LEGĂTURI, LIBERTĂŢI, REACŢIUNI, REAZIM SIMPLU, ARTICULAŢII, INCASTRARE, PRINCIPIUL ACŢIUNEI ŞI REACŢIUNEI

Din punctul de vedere al posibilităţilor de mişcare, corpurile din natură se despart în două categorii:

1. Unele se pot mişcà în orice direcţiune şi rotì în jurul oricărui ax, fără a fi împiedicate de vreo cauză exterioară, ele se numesc *corpuri libere*.

Spre exemplu: o piatră pe care o aruncăm, aparatele de sburat, corpurile cereşti...

2. Altele, acestea formează categoria cea mai numeroasă, sunt împiedicate de a executà anume mişcări, din pricina contactului pe care sunt silite să-l aibe cu alte corpuri; spre exemplu:

a) o bilă de biliard se poate rotì sau deplasà în orice direcţiune, în afară de direcţiunea perpendiculară pe masă şi dirijată spre interiorul acesteia.

b) Uşa se poate rotì în jurul ţâţânilor, nu poate însă aveà o translaţie în nici o direcţiune.

c) Un săltar poate aveà o singură mişcare de translaţie, etc. Astfel de corpuri se numesc *corpuri cu legături*.

Mişcările neîmpiedicate ale unui corp se numesc *«libertăţi»* iar condiţiunile cari restrâng unele din mişcările lui se numesc *«legături»*.

In primul exemplu, bila de biliard are toate libertăţile de mişcare ale unui *corp liber*, afară de aceia după care bila ar tinde să traverseze masa de biliard; în cazul unei uşi, singura *libertate* a acestui corp este o *rotaţie* în jurul unui ax (axul ţâţânilor); în cazul săltarului, toate mişcările sunt împiedicate, afară de una.

Observare. Când un corp, prin legăturile pe cari i le-am impus nu poate aveà nici un fel de mişcare, el se găseşte în echilibru, oricare ar fi forţele ce-l acţionează; un astfel de corp se zice că are *legături complecte.* Spre exemplu: o foaie de hârtie prinsă cu două ace pe o masă plană.

Din cele studiate până acì ştim că elementele cari pot *produce* sau împiedicà o mişcare sunt: *forţa (pentru translaţie)* şi *cuplul (pentru rotaţie)*.

Legăturile unui corp împiedicându-i anume mişcări de translaţie sau rotaţie este natural să le asimilăm cu forţe sau cuple, deoarece au aceleaşi efecte ca acestea.

Aceste *forţe* sau *cuple* cu cari se obişnueşte să înlocuim *legăturile* se numesc *reacţiuni.*

O legătură se va înlocuì cu o forță, cu un cuplu sau cu amândouă aceste elemente mecanice după cum ea împiedică o translație, o rotație sau în acelaș timp, o rotație și o translație.

Despre reacțiuni. 1. Un corp greu așezat pe o masă plană P se găsește în echilibru; dacă nu ar fi masa, corpul ar căděa fiind acționat de greutatea sa G; acest fenomen neavând loc, lucrurile se petrec ca și cum masa (*legătura*) opune o forță (*de reacțiune*) R egală și direct opusă cu G. Prin urmare *la acțiunea greutății* G, *masa răspunde cu o reacțiune egală și de sens contrar.*

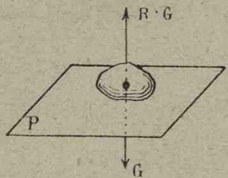

Fig. 180

2. O grindă reazimă în două puncte A, B; aceste legături permit barei orice mișcări afară de o translație în direcțiune perpendiculară pe AB; astfel de legături se numesc *reazime simple*; greutatea G a grinzii se transmite în punctele A și B iar acestea răspund cu *reacțiuni* egale și de sens contrar:

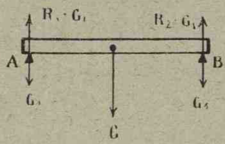

Fig. 181

$$R_1 = G_1 = \frac{G}{2}.$$

Reazimile simple sunt deci echivalente cu o forță de direcție cunoscută.
Pentru bila de biliard, masa reprezintă un reazim simplu.

3. Fie o bară OA prinsă cu un cuiu în punctul O, de un perete vertical; experiența ne arată că dacă acționăm bara cu o forță F,

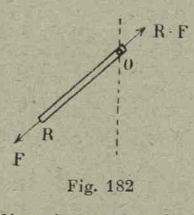

Fig. 182

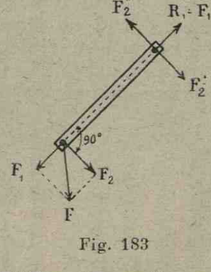

Fig. 183

după direcțiunea barei, bara este în echilibru; lucrurile se petrec deci ca și cum punctul *O răspunde acțiunii* lui F, opunând o *reacțiune* $R = F$ *egală și de sens contrar.* O forță F ce ar acționà bara într'o direcție oarecare, se poate descompune în două componente: F_1 după direcțiunea barei și F_2 perpendiculară pe bară; acțiunea lui F_1 este anulată de reacțiunea $R_1 = F_1$, iar acțiunea lui F_2 dă naștere la o forță F'_2 deasemenea anulată de fixitatea lui O și la un *cuplu* (F_2, F''_2) căruia legătura lui O *nu-i opune nicio reacțiune*; prin urmare bara se va rotì.

O astfel de *legătură* care împiedică orice mișcare de translație, dar permite rotațiunea, se numește *articulație*. (Această noțiune o avem încă dela studiul scheletului omului, care este compus dintr'o sumă de articulațiuni).

Ea este echivalentă cu o forță de direcțiune oarecare.

4. Fie acum o bară AB prinsă într'un zid așà încât să nu poată aveà nici o translație, nici o rotație. Bara se găsește în echilibru, oricari ar fi forțele ce ar acționà-o; ea este un exemplu de *corp cu legături complete.*

Oricărei forțe, de *orice direcțiune* ce s'ar transmite *legăturii din A*, aceasta răspunde printr'o reacțiune egală și de sens contrar; acelaș lucru pentru un cuplu care ar tinde să rotească bara.

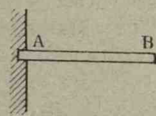

Fig. 184

O astfel de legătură care împiedică translația și rotația se numește *încastrare* sau *înțepenire*; eae chivalează cu *o forță de reacțiune și cu un cuplu de reacțiune.*

Principiul acțiunii și reacțiunii.

Pe baza observațiilor, *Newton* a formulat următorul *principiu al egalității acțiunii și reacțiunii*:

Dacă un corp acționează într'un mod oarecare asupra unui alt corp, acesta la rândul lui acționează asupra primului, opunându-i *elemente mecanice* de acelaș fel cu acțiunile, — egale și de sens contrar cu acestea.

EXERCIȚII

1. Să se caute exemple de corpuri cu legături:
   a) care să se poată rotì,
   b) să aibă posibilă o translație într'o singură direcție,
   c) să se poată translà în două direcțiuni și rotì,
   d) să aibe legături complete.
2. Să se caute exemple de corpuri:
   a) simplu răzimate,
   b) articulate,
   c) încastrate.

3. Cari sunt libertățile și legăturile unui punct material:
 a) silit să se miște într'un plan orizontal,
 b) silit să rămâie pe suprafața unei sfere,
 c) silit să rămâie pe un cerc situat într'un plan vertical.
4. Cari sunt libertățile și legăturile unui corp solid:
 a) silit să rămâie pe un plan orizontal,
 b) care are un punct fix,
 c) o axă fixă, dealungul căreia poate lunecà.

CAPITOLUL XI

ECHILIBRUL PUNCTULUI MATERIAL

A. *Teoremă.* Un punct material liber, a cărui *iuțeală inițială este nulă,*se găsește în echilibru când rezultanta forțelor ce-l acționează este nulă.

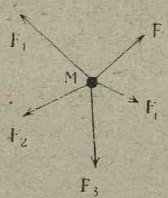

Fig. 185

Intr'adevăr rezultanta forțelor F_1. F_2....F fiind nulă, după principiul inerției, punctul M ar aveà în general o mișcare rectilinie și uniformă: cum punctul material are la început o iuțeală nulă, adică se găsește în repaus, el va continuà să rămâie în repaus (echilibru).

* * *

Cum exprimăm că un punct material se găsește în echilibru sub acțiunea unor forțe date?

1. Punem condițiunea ca poligonul forțelor să fie închis (sau)
2. scriem că rezultanta tuturor forțelor este nulă:

$$R^2 = \sum_1^n F_i^2 + 2 \sum_{i \neq \gamma} F_i F_\gamma \cos (F_i . F_\gamma)$$

(sau) 3. exprimăm că suma proiecțiilor forțelor pe două axe oarecari este nulă, adică:

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n = O\ ,$$
$$Y = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n = O\ .$$

Observări. 1. Uneori poate fi convenabil să exprimăm că una din forțe este egală ca mărime și direct opusă cu rezultanta celorlalte forțe.

2. In cazul particular a trei forţe cari acţionează un punct material putem exprimà echilibrul scriind relaţiile sinusului:

$$\frac{F_1}{\sin(F_2.F_3)}=\frac{F_2}{\sin(F_3.F_1)}=\frac{F_3}{\sin(F_1.F_2)}$$
$$[\sphericalangle(F_2,F_3)+\sphericalangle(F_3,F_1)+\sphericalangle(F_1,F_2)=360^0].$$

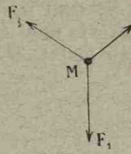

Fig. 186

(Acestea sunt realaţiunile lui *Stewin*).

APLICAŢIUNI

Exemplul I

Se cere poziţia de echilibru a unui punct material (fără greutate), acţionat de două centre atractive proporţional cu distanţa şi aşà fel că la unitatea de distanţă, acţiunea lui O este reprezentată prin numărul 2 iar a lui O' prin numărul 3.

Soluţiune

Avem

$$F=K\,.\,\overline{MO}$$
$$F'=K'.\,\overline{MO'},$$

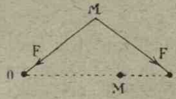

Fig. 187

deoarece

$$MO=1\,,\qquad F=K=2\,.$$
$$MO'=1\,,\qquad F'=K'=3\,.$$

prin urmare

$$F=2\,\overline{MO}\,,$$
$$F'=2\,\overline{MO'}.$$

Pentru ca să avem echilibru trebuie ca forţele să fie egale şi direct opuse; prin urmare M să fie să se găsească pe dreapta OO', *între O şi O'* într'o poziţiune aşà fel ca să avem:

$$2\,\overline{MO}=3\,\overline{MO'}$$

$$\frac{\overline{MO}}{\overline{MO'}}=\frac{3}{2}\,.$$

Relaţiunea precedentă defineşte perfect poziţiunea de echilibru.

Exemplul II

Se cere poziția de echilibru a unui punct material M atras de vârfurile unui triunghiu isoscel ABC, cu forțele P de către vârful A și cu forțele Q de B și C. (Vârful triunghiului isoscel este A).

Soluțiune

Din cauza simetriei, poziția de echilibru se va găsì pe bisectoarea unghiului A; vom definì poziția de echilibru prin $\sphericalangle BMO = x$.

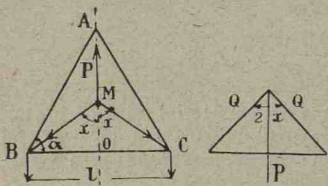

Fig. 188

1. Exprimând că forțele P, Q, Q, formează un triunghiu, găsim în mod grafic unghiul $2x$ care definește poziția de echilibru; chestiunea revine la a construì un triunghiu *abc* când se cunosc cele trei laturi.

2. Să exprimăm că P este egală cu rezultanta forțelor Q, Q:

$$P^2 = Q^2 + Q^2 + 2\,Q^2 \cos 2x = 2\,Q^2(1 + \cos 2x).$$

$$P^2 = 4\,Q^2 \cos^2 x$$

$$\cos x = \frac{P}{2\,Q},$$

relațiune din care aflăm pe x.

3. Să luăm ca axe Ox, Oy, baza BC și înălțimea; AO; avem: proecțiile pe axa Ox:

$$P + Q \sin x - Q \sin x = O$$

relațiune satisfăcută dela sine, din cauza simetriei forțelor Q, Q în raport cu AO;
proecțiile pe axa Oy:

$$P - Q \cos x - Q \cos x = O\,,$$

deci

$$\cos x = \frac{P}{2\,Q}$$

relațiune găsită mai sus pe altă cale.

Observare importantă. Din exemplele tratate mai sus reiese că condițiunile de echilibru ale unui punct material ce se mișcă liber într'un plan sunt in general în *număr de două* anume două *ecuațiuni de proecții*; punând în legătură acest lucru cu *libertățile de mișcare* ale punctului material, putem interpretà acest rezultat astfel: *fiecare ecuație de echilibru exprimă condiția ca una din libertățile punctului să* *fie împiedicată* şi cum avem două condiţiuni de echilibru, putem spune că punctul material (silit să se mişte într'un plan) are două libertăţi [1].

B. *Echilibrul punctului material cu legături.*—Ca şi la un corp solid, un punct material are o legătură când unele din libertăţile lui de mişcare sunt îngrădite prin contactul ce impunem să-l aibe cu anume linii sau suprafeţe.

Spre exemplu: 1. O bobiţă de fier M, atârnată de extremitatea unui fir OM, nu se poate mişcà decât pe sfera de centru O şi raza OM, sau în interiorul acestei sfere.

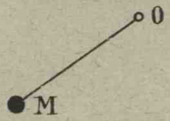

Fig. 189

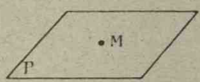

Fig. 190

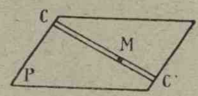

Fig. 191

2. O bilă M ale cărei dimensiuni le presupunem foarte mici, aşà că să o putem asimilà cu un punct material, este silită să se mişte pe planul P din care nu poate ieşì.

3. Intr'un plan P, o bilă mai poate fi îngrădită, — impunându-i condiţiunea să nu iasă din şanţul CC'.

Teoremă. Condiţia necesară şi suficientă pentru ca un punct material cu legături să fie în echilibru, este ca rezultanta forţelor ce-l acţionează să fie perpendiculară pe suprafaţa sau linia pe care acel punct este silit să rămâie şi în aşà fel îndreptată însă ca punctul să nu poate ieşì de pe aceà suprafaţă sau linie.

APLICAŢIUNI

Exemplul I

Un punct M se poate mişca pe un plan orizontal H; două cazuri se pot ivì:

1. Rezultanta P a forţelor ce acţionează punctul M este perpendiculară pe plan; în acest caz punctul e în echilibru sub acţiunea lui P şi a reacţiunii $R = P$ desvoltată de plan.

2. Dacă rezultanta forţelor ce acţionează în M este inclinată pe plan, acţiunea ei se poate înlocuì cu acţiunea a două forţe: una verticală (P) echilibrată de reacţiunea $R = P$ a planului şi alta orizontală F care tinde să imprime punctului o mişcare dealungul planului; dacă planul este perfect luciu, punctul nu va fi

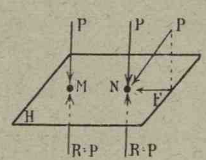

Fig. 193

1) Obişnuit rezultatul acesta se stabileşte pe cale cinematică, ceeace presupune însă că acest studiu precede statica.

în echilibru iar dacă planul este rugos, forța F poate fi echilibrată în parte sau în total de *forța de frecare* ce se desvoltă când M tinde să se deplaseze pe plan.

Exemplul II

Un punct greu situat pe un plan inclinat Q nu poate fi în echilibru.

Intr'adevăr singura forță ce-l acționează fiind greutatea sa P, *care nu este normală pe plan.* Reacțiunea $R = N$ a planului are expresiunea:

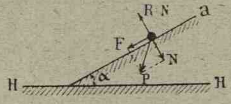

Fig. 194

$$R = P \cos \alpha$$

iar forța care antrenează punctul M este:

$$F = P \sin \alpha < P,$$

ceeace ne explică pentru ce în fizică se utilizează planul inclinat pentru studiul căderii corpurilor; iuțeala de cădere este astfel micșorată și prin urmare fenomenul poate fi mai lesne observat.

In cazul când planul este rugos, forța F poate fi în parte sau în total echilibrată.

Exemplul III

Un punct greu este silit să se miște pe un cerc situat într'un plan vertical.

Reacțiunea cercului fiind perpendiculară (normală) pe cerc e îndreptată după raza OM; descompunând forța P, după raza OM și tangenta MT la cerc, avem

$$R = N = P \cos \alpha,$$

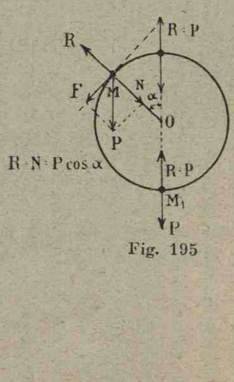

Fig. 195

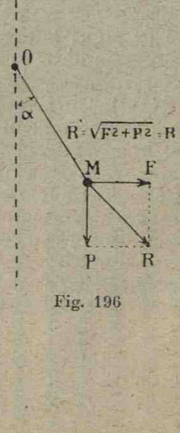

Fig. 196

iar forța tangențială care antrenează punctul

$$F = P \sin \alpha.$$

Pozițiile de echilibru sunt M_1 și M_2 unde P este normală la cerc.

Exemplul IV

Un punct greu M este legat cu un fir OM de punctul fix O și acționat de forța orizontală F; se cere pozițiunea de echilibru. (Fig. 196).

Pentru echilibru trebuie ca rezultanta lui P și F să fie după direcția firului, deci:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F}{P},$$

în care α este *unghiul de echilibru*, iar reacțiunea firului are expresia:

$$R' = R = \sqrt{F^2 + P^2}.$$

CAPITOLUL XII

ECHILIBRUL CORPURILOR ACȚIONATE DE FORȚE SITUATE IN ACELAȘ PLAN

C. *Teoremă.* Condițiunea necesară și suficientă pentru ca un corp — *a cărui iuțeală inițială este nulă* — acționat de forțe oarecari, însă situate în acelaș plan — să fie în echilibru este ca *rezultanta* sau *momentul* la care se reduc acele forțe, să fie nul.

Exprimăm acest lucru scriind că

1. Suma proiecțiunilor forțelor pe *două axe oarecari* este nulă și
2. Suma momentelor acelor forțe în raport cu un punct oarecare din plan este nulă.

In total, *trei condițiuni sau ecuațiuni.*

Observare. Din prima condițiune aflăm obișnuit reacțiunile; ecuațiunea de momente dă în general poziția de echilibru.

Interpretarea cinematică a acestor condițiuni este foarte intuitivă și conduce lesne în aplicațiuni la soluționarea problemelor de echilibru; într'adevăr un corp acționat de forțe oarecari situate în acelaș plan, este, după cum am văzut la reducerea forțelor în cazul general, acționat de o forță sau de un *cuplu* prin urmare el poate luà o *mișcare de translație* sau o *mișcare de rotațiune.*

Condițiunile de echilibru exprimă de fapt că aceste mișcări nu au loc, întrucât elementele mecanice cari le produc sunt nule.

EXEMPLE

Chestiunea I-a

Se cere presiunea pe stâlp și unghiul α pe care o cumpănă de puț îl va face cu orizontala în pozițiunea de echilibru.

Soluțiune

Ecuația de proiecțiune pe axa orizontală este de sine satisfăcută, corpul neavând nici o tendință de deplasare în sens orizontal. Depla-

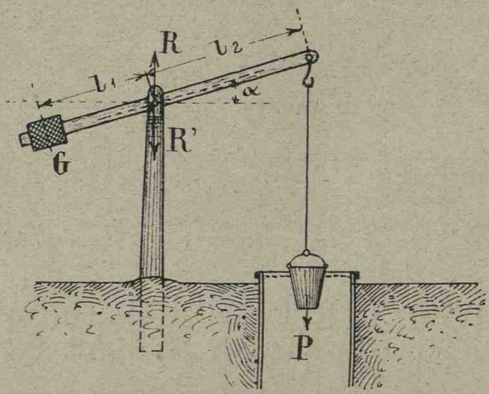

Fig. 197

sarea în sens vertical ar puteà aveà loc din cauza forțelor G, R, P; pentru a nu aveà această deplasare trebuie ca:

$$G+P=R$$

R fiind reacțiunea stâlpului, îndreptată de jos în sus; presiunea R' pe stâlp este deci egală cu ea și de sens contrar.

Cumpăna mai poate luà o mișcarea de rotație în jurul punctului O; scriind că ecuația de momente în raport cu acest punct este satisfăcută, avem condițiunea ca rotația să nu se producă:

$$P\frac{l_2}{\cos\alpha}-G\frac{l_1}{\cos\alpha}=O;$$

sau

$$Pl_2=Gl_1$$

adică dacă această relație este satisfăcută, cumpăna va sta în echilibru, în orișice poziție am așeza-o.

Chestiunea II-a

O placă triunghiulară este acționată de forțele cunoscute P și Q și de forțele necunoscute R_1, R_2, H; se cere să se determine aceste forțe în așà fel ca placa să fie în echilibru.

Soluțiune

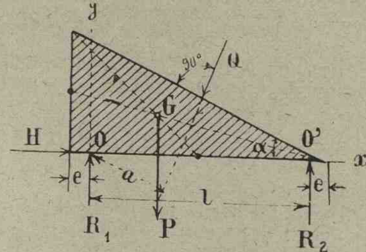

Fig. 198

Placa fiind acționată de forțe oarecari, poate lua o mișcare de translație sau o mișcare de rotație; pentru ca aceste mișcări să nu aibă loc, avem condițiunile:

1. ecuația de proiecție pe axa Ox:

$$H=Q\sin\alpha;$$

2. ecuația de proiecție pe axa Oy:

$$R_1+R_2-P-Q\cos\alpha=0;$$

3. ecuația de momente, în raport cu punctul O:

$$R_2 l=Qa+P\frac{1}{3}l$$

din care deducem

$$R_2=\frac{3\,Qa+Pl}{3\,l,}.$$

$$R_1=\frac{2\,Pl+3\,a\,(l\cos\alpha-a)}{3\,l}.$$

Observare. Dacă presupunem că placa s'ar răzimà în O și O', forțele R_1 și R_2 reprezintă reacțiunile în aceste puncte, G greutatea plăcii, iar H o forță orizontală pe care o aplicăm plăcii pentru a împiedicà alunecarea ei în sens orizontal, alunecare datorită componentei orizontale a lui Q.

Chestiunea III-a

Problema scării. O scară AB (fig. 220) de greutate $G=50$ kgr., reazimă pe două plane perfect lustruite Ox și Oy; Care este intensitatea unei forțe orizontale F ce trebuie aplicată în A pentru ca scara să rămână în echilibru în pozițiunea $x=30^0$.

Răspuns. Fie N și N' reacțiunile respectiv verticală și orizontală ce nasc în punctele A și B. Pentru ca scara să nu se deplaseze în sens orizontal trebuie să avem:

(1) $$F-N'=O;$$

deplasarea în sens vertical nu are loc dacă

(2) $$G-N=O.$$

în fine nici o rotire a scării în jurul lui D nu se va produce dacă ecuația de momente

(2) $$G\frac{\overline{AB}}{2}\sin 30^0+N'.\overline{AB}\cos 30^0-N\overline{AB}\sin 30^0=O$$

va fi satisfăcută.

Ducând valorile lui N' și N scoase din (1) și (2) în ecuațiunea (3) avem, după toate reducerile:

$$F=\frac{G}{2\sqrt{3}}=\frac{30}{2\times 1.73}=8.672 \text{ kg.}$$

iar reacțiunile

$$N=50 \text{ kgr.}$$

$$N'=8.671 \text{ kgr.}$$

EXERCIȚII

A. B.

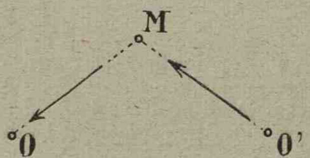

Fig. 199

1. Se cere poziția de echilibru al unui punct material M atras de punctul O proporțional cu distanța și respins de O' după aceeaș. lege

2. Aceeaș chestiune presupunând că M este atras de O și respins de O' după *legea lui Newton*:

$$F=\frac{K}{\overline{MO}^2}.$$

3. O bobiță de soc grea este suspendată de punctul fix O și respins de linia materială OO' proporțional cu distanța lui M de această linie. Se cere poziția de echilibru. (Fig. 200).

Indicație. Forța F are expresiunea $Kl.\sin x$, K fiind un coeficient de proporționalitate.

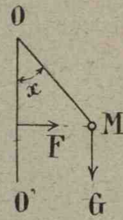

Fig. 200

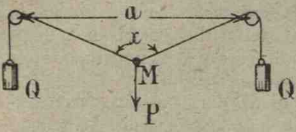

Fig. 201

4. Se cere unghiul x pentru care punctul M se găsește în echilibru.

5. Variantă. (Fig. 202).

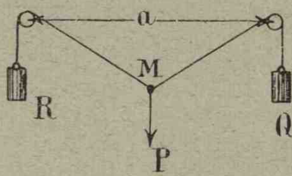

Fig. 202

6. O minge de greutate G, prevăzută cu un inel, este atârnată printr'un *fir continuu* de punctul fix O cealaltă extremitate a sa fiind trecută după un mic scripete și poartă greutatea P. Se cere poziția de echilibru.

Să se examineze cazul când firele OM, $O'M$ ar fi *lipite* în M de mingie și inelul nu ar existà.

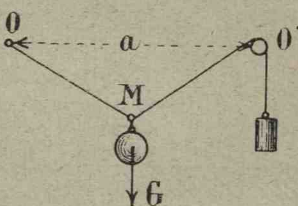

Fig. 203

7. Un punct material greu este silit să se miște pe un plan inclinat; ce forță orizontală F trebuie să acționeze punctul pentru ca el să se găsească în echilibru? (Planul este presupus perfect luciu). (Fig. 204).

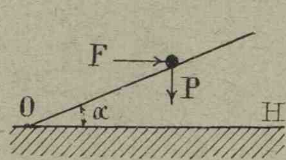

Fig. 204

8. Pe o masă orizontală sunt practicate trei deschideri (orificii) în punctele A, B, C. Prin aceste trei deschideri sunt trecute trei fire înnodate împreună în M. De capătul firului care trece prin A, este atârnată o sferă de fier de 5 cm. diametru, iar la capetele firelor cari trec prin B și C sunt atârnate câte o sferă de aramă de 8 cm. diametru fiecare. Firele sunt presupuse destul de lungi ca cele trei sfere să atârne dedesubtul mesei. Știind că

cele trei puncte A, B, C formează un triunghiu isoscel în care unghiul $A = 40^0$, baza $BC = 35$ cm. se cere poziția de echilibru știind că firele sunt inextensibile. Deschizăturile din A, B, C sunt foarte mici și perfect lustruite. Se va luà densitatea fierului egală cu 7, 8 și a aramei 8, 7. Să se generalizeze pentru cazul a n orificii.

(Examen de admitere în Școala de poduri și șosele. Anul 1915).

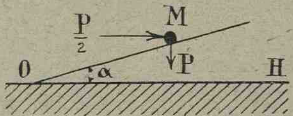

Fig. 205

9. Pe o dreaptă se dau mai multe puncte de abscise $x_1, x_2 \ldots x_n$ cari resping un punct material invers proporțional cu distanța; să se găsească pozițiunea de echilibru a lui M și să se arate că dacă $x_1, x_2 \ldots x_n$ sunt rădăcinile unei ecuațiuni algebrice $f(x)$, abscisele punctelor de echilibru sunt rădăcinile derivatei $f'(x)$. Să se deducă deacì teorema lui *Rolle.*

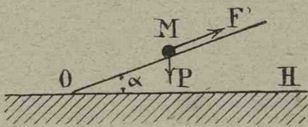

Fig. 206

10*). Se cere pozițiunea de echilibru a unui punct material liber atras de punctele unei semisfere proporțional cu distanța.

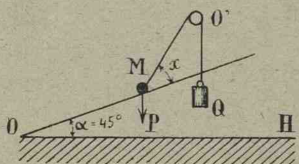

Fig. 207

11. Se cere pozițiunea de echilibru a unui punct material M, de greutate neglijabilă silit să se miște pe un cerc și atras de vârfurile unui triunghiu dreptunghiu și isoscel înscris în cerc, proporțional cu distanța.

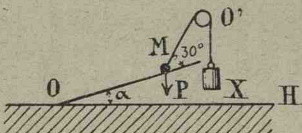

Fig. 208

12. Care trebuie să fie unghiul a al unui plan inclinat cu orizontala, pentru ca punctul M din figura 205 să fie în echilibru.

13. Se cere forța F cu care trebuie acționat punctul M, pentru ca să fie în echilibru. (Fig. 206).

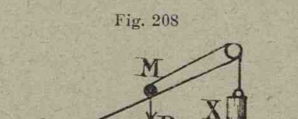

Fig. 209

14. Se cere unghiul x pentru care punctul M de greutate P, sus-

*) Necesită cunoștințe de calcul diferențial și integral.

pendat cu un fir ce se înfășoară pe un mic scripete O' și are la extremitatea sa o greutate Q, să fie în echilibru. Să se afle și reacțiune a desvoltată în fir, în pozițiunea de echilibru. (Fig. 207).

15. Un punct material greu este silit să rămâie pe un plan inclinat; el este legat cu un fir ce se trece peste un mic scripete O. Ce greutate X să atârnăm la extremitatea acestui fir pentru ca să avem echilibru? Discuție. (Fig. 208).

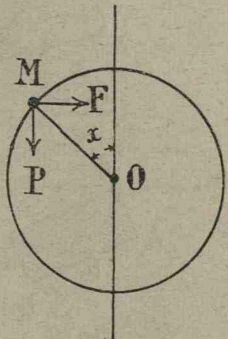

Fig. 210

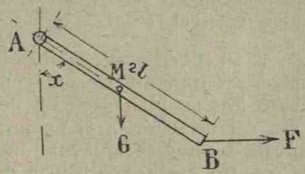

Fig. 211

16. Cât trebuie să fie greuṭatea X pentru ca punctul M să fie în echilibru în poziția din figura 209?

17. Un punct material greu nu poate părăsì periferia unui cerc situat într'un plan vertical; el este supus și la acțiunea unei forțe orizontale F; se cere unghiul x pentru care punctul se găsește în echilibru. (Fig. 210).

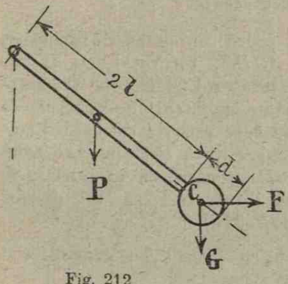

Fig. 212

C

1. O bară grea AB este articulată în A și acționată în B de o forță orizontală dată F; se cere unghiul x pentru care bara va fi în echilibru. (Fig. 211).

2. Variantă. (Fig. 212).

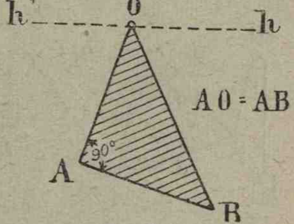

Fig. 213

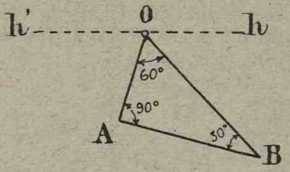

Fig. 214

3. Se cere poziția de echilibru a unei plăci omogene în formă de triunghiu dreptunghiu și isoscel, atârnat de un punct fix O, într'un plan vertical. (Fig. 213).

(Examenul de admitere în Școala Națională de poduri și șosele, anul 1915).

4. Se cere poziția de echilibru a unui echer plin și omogen suspendat de un punct fix O, într'un plan vertical. (Fig. 214).

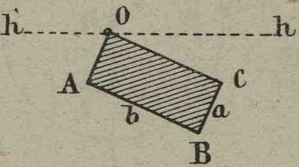

Fig. 215

5. *a*) Poziția de echilibru a unei plăci dreptunghiulare, omogene atârnată într'un plan vertical de unul din vârfurile sale. *b*) Ce forță verticală trebuie să aplicăm în A sau C pentru ca în pozițiunea de echilibru, diagonala AC să fie orizontală? (Fig. 215).

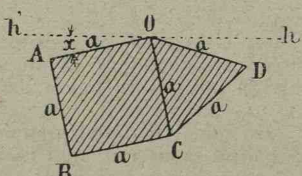

Fig. 216

6. O palcă omogenă în formă de pătrat $AOBC$, terminat cu triunghiul echilateral OCD este atârnată tr'un plan vertical de vârful O.

a) Se cere poziția de echilibru.

b) Ce greutate P trebuie să atârnăm în D pentru ca în poziția de echilibru latura OA să fie orizontală? (Fig. 216).

Aplicație numerică: placa este de cupru ($\delta = 8{,}7$), grosimea ei este de 2,5 cm., $AB = 1{,}25$ m.

(Examenul de admitere în Școala Națională de poduri și șosele, anul 1915).

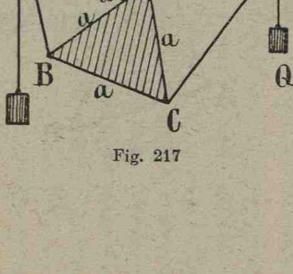

Fig. 217

7. Se cere poziția de echilibru a unei plăci de fier omogenă în formă de triunghiu echilateral, suspendată de unul din vârfuri în punctul A iar celelalte două vârfuri legate fiecare cu câte un fir, petrecute pe scripeții D și E iar la extremitățile firelor se atârnă greutățile cunoscute P și Q. (Fig. 217).

Aplicațiune. $a = 35$ cm., grosimea plăcii 5 mm., $P = 15,2$ kg., $Q = 10,7$ kg., densitatea plăcii $= 7,8$.
(Examen parțial. Anul preparator al Școalei Naționale de poduri și șosele, anul 1915).

8. Se cer presiunile transmise de grindă pe punctele de reazim A și B.

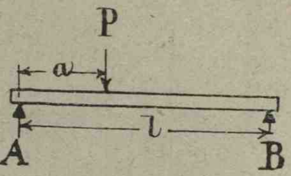

Fig. 218

9. Variantă. (Fig. 219).

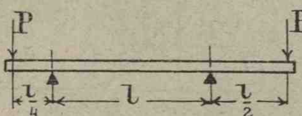

Fig. 219

10. O bară AB de greutate $G=30$ kgr. reazimă pe două plane Ox și Oy; în punctul A se aplică o forță orizontală $F=10$ kgr; se cere unghiul x pentru care bara rămâne în echilibru.

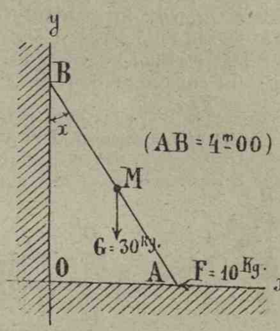

Fig. 220

11. Variantă. Să se examineze cazul în care scara ar fi articulată în punctul B (prinsă în zid cu o șarnieră). Să se dea și o soluțiune grafică.

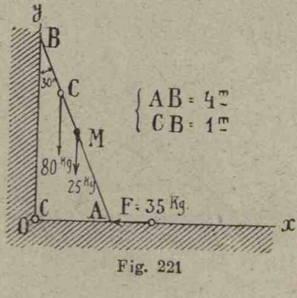

Fig. 221

12. Variantă. P,G, cunoscute; se cere unghiul x. (Fig. 222).

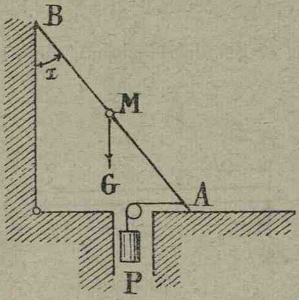

Fig. 222

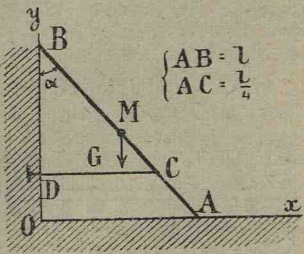

Fig. 223

13. O scară grea și omogenă AB reazimă pe două plane perpendiculare Ox, Oy; în punctul C scara este legată cu o sârmă CD prinsă în peretele vertical cu care scara face unghiul concurent α. (Fig. 223).

Se cere forța cu care e întinsă sârma.
Aplicație numerică. $l = 5$ m., $OB = 4{,}25$ m., $G = 120$ kg.

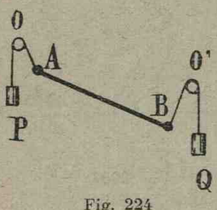

Fig. 224

14. O bară omogenă AB de greutate G este suspendată prin două fire de greutăți neglijabile; știind că sistemul este în echilibru, se cere:
1. Unghiurile AO și BO cu verticala și unghiul ce fac cele două fire între ele.
2. Unghiul barei AB cu verticala.

(Mécanique theorique et pratique, par Edmond Gabriel).

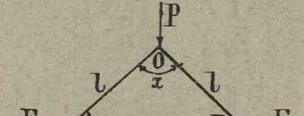

Fig. 225

15. Două bare OA, OB de lungimi egale cu l, articulate în O, reazimă cu extremitățile A, B pe un plan orizontal; în O e aplicată o forță verticală P, iar în A și B două forțe egale cu F; se cere unghiul x pentru care avem echilibru.

16. Variantă. (Fig. 226).

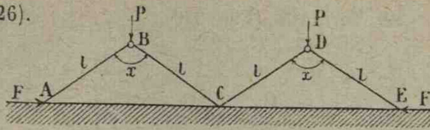

Fig. 226

17. Un turn ca acela din figură reazimă pe un teren orizontal; el este acţionat de forţele G datorite greutăţii, şi P datorite vântului.

Să se găsească care trebuie să fie baza $AB = x$ a turnului pentru ca să nu se răstoarne.

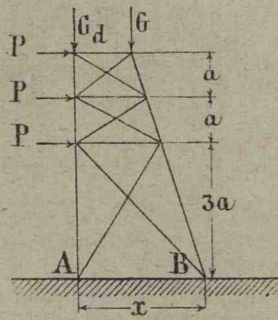

Fig. 227

18. Construcţiunea din figura 228 reazimă pe teren în punctele A şi B. Se cer forţele cu care este întinsă ancora AT şi apăsat punctul B. Ce forţă să aplicăm în M pentru ca ambele puncte să fie apăsate?

19. Variantă. (Fig. 229).

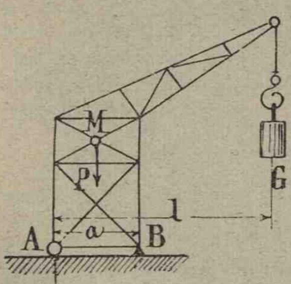

Fig. 228

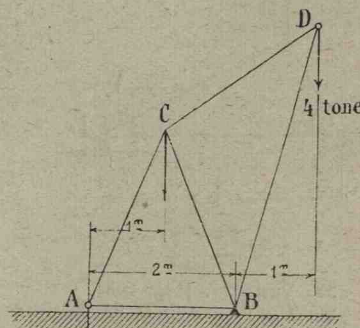

Fig. 229

20. Variantă. (Fig. 230).

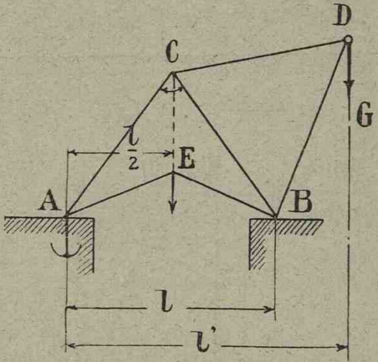

Fig. 230

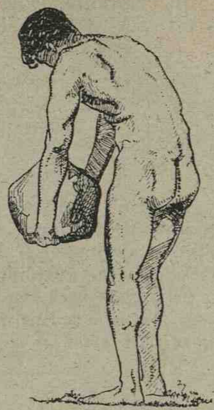

Fig. 231

21. Să se compare omul din figura 231, care ridică o greutate, cu macaralele dela problemele 18, 19 și 20.

22. O construcțiune ABC ca în figura 232 este articulată în A și reazimă în punctul B pe o suprafață netedă MN. Se cer reacțiunile din A și B.

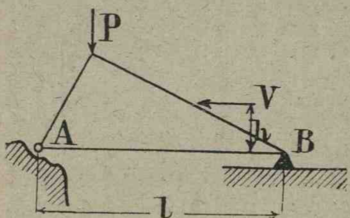

Fig. 232

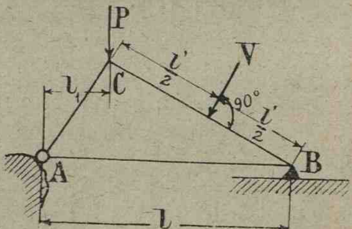

Fig. 233

23. Variantă. (Fig. 233).

24. Un turn $ABCD$ de secțiune trapezoidală reazimă pe un teren orizontal și este ancorat în punctul A; se cere:

a) Relațiunea dintre greutatea G, a turnului și forța F pentru care ancora nu e întinsă (nu lucrează).

b) In cazul când F și G au mărimi oarecari să se afle cu ce forță e întinsă ancora și cu ce forță este apăsat punctul D.

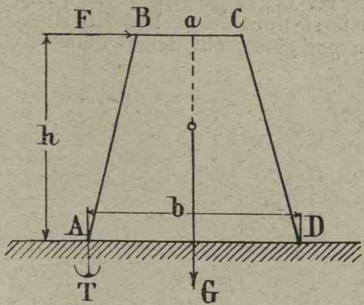

Fig. 234

25. Un zid (densitatea materialului 2,4) cu secțiune dreptunghiulară $ABCD$ servește drept perete pentru un bazin cu apă; se cere să se afle grosimea x a zidului pentru ca acesta să nu se răstoarne. Rezultanta presiunilor datorite apei este orizontală și aplicată la $^1/_3$ din înălțimea apei socotită dela fund. (Fig. 235).

Indicație. Răsturnarea zidului s'ar puteà face în jurul muchiei proiectate în B, se va socotì 1 m. lungime de zid și se va

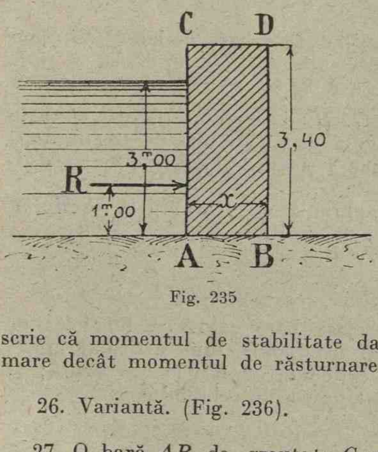

Fig. 235

Fig. 236

scrie că momentul de stabilitate datorit greutății zidului este mai mare decât momentul de răsturnare datorit lui T.

26. Variantă. (Fig. 236).

27. O bară AB de greutate G articulată în A, este susținută cu un cablu BC; cunoscând unghiurile α și β pe care bara și cablul le fac respectiv cu orizontala, se cere tensiunea din cablu precum și reacțiunea articulației din A, în mărime, direcțiune și sens. (Se cere rezolvare grafică și analitică).

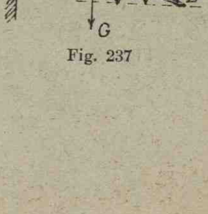

Fig. 237

28. Un chipeng de pivniţă AB are o balamă proectată în A şi este susţinut cu un lanţ EC situat în planul median al chipengului în poziţiunea din figură. Cunoscând greutatea P a chipengului, un-

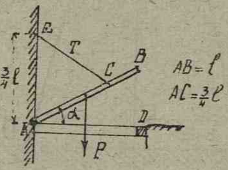

Fig. 238

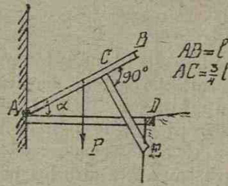

Fig. 239

ghiul α precum şi distanţa $AC=\frac{3}{4}AB$ să se afle tensiunea desvoltată în lanţ precum şi reacţiunea balamalei.

Aplicaţie. $P=130$ kgr., $AB=1.80$ m., $\alpha=32^0$.

29. Variantă: Chipengul e susţinut de o bară de lemn CE, perpendiculară ca direcţie pe AB.

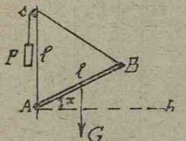

Fig. 240

30. O bară AB, de greutate G articulată în A, este susţinută de un fir metalic trecut după un scripete mic s şi are la extremitatea sa atârnată o greutate G.

Se cere unghiul x de echilibru şi reacţiunile din A în această poziţiune.

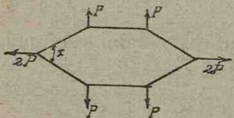

Fig. 241

31. Şase bare egale ca lungime, de greutăţi neglijabile sunt articulate între ele şi acţionate de forţele din figură; se cere poziţiunea de echilibru.

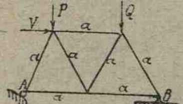

Fig. 142

32. Construcţiunea din figura alăturată este articulată în A şi simplu răzimată în B; se cere reacţiunile din A şi B.

33. Se cere condițiunea de echilibru a unui tablou suspendat de un perete vertical cu un fir *abc* de lungime *l* prins de două puncte ale tabloului.

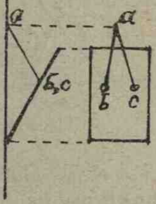

Fig. 243

34. O placă dreptunghiulară omogenă $ABCD$, de greutate P, poate oscilà într'un plan vertical în jurul vârfului A. Vârfurile opuse B și D sunt legate cu câte un fir, trecute pe câte un scripet foarte mic E și F, situate pe orizontala A, de o parte și de alta a lui A la distanțele

$$AE=AB, \ AF=AD.$$

De firul trecut pe scripetele E este atârnată o greutate P, iar de cel trecut pe scripetele F greutatea $2P$. Se cere: *a)* condițiunea pentru echilibrul plăcii. *b)* Să se determine raportul dintre dimensiile plăcii, astfel ca ea să fie în echilibru, când centrul ei de greutate *e* pe verticala lui A.

(Propusă de d-l A. G. Ioachimescu. Gazeta Matematică, anul XVIII-lea No. 10).

35. Intr'un circ, un acrobat de greutate G, ia următoarea poziție; se proptește cu capul pe o tijă verticală fixă într'un punct A, își așează corpul pe dungă înclinat cu un unghiu α pe orizont și se atârnă cu o mână de un punct al tijei situat deasupra capului.

Se cere valoarea reacțiunilor, neglijând frecările și admițând că toate forțele lucrează în acelaș plan vertical, normal pe planul de simetrie al corpului; se va însemna cu a distanța dela creștet la centrul de greutate al corpului.

(Propusă de d-l Șt. N. Mirea în Gazeta Matematică anul XVIII, No. 10).

36. Se cere pozițiunea de echilibru a unei bare AB de greutate G ce razimă pe două plane P_1, P_2 perfect lustruite și care fac respectiv unghiurile α și β cu orizontul.

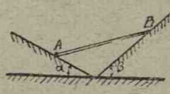

Fig. 244

37. O bară AB de greutate G razimă cu o extremitate în interiorul unui cilindru perfect lustruit și de buza cilindrului. Se cere pozițiunea de echilibru a vergelei și a ansamblului precum și reacțiunile. Raza cilindrului e R, înălțimea sa h iar lungimea barei l.

Indicație. Se va scrie separat echilibrul barei și al cilindrului, introducând forțele de legătură necesare.

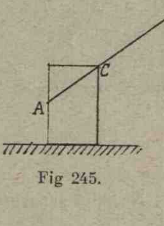

Fig 245.

38. Două bare AB și CD de lungimi respectiv egale cu l și l' sunt articulate în punctele A și C situate pe aceiaș orizontală și razimă una pe alta. Se cere pozițiunea de echilibru a sistemului format de cele două bare.

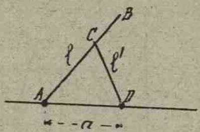

Fig. 246

(Examen de Mecanică, Facultatea de Științe București, 1923).

39. Două bare rigide egale AB și CD se așează vertical, articulând capetele lor A și C pe solul presupus orizontal. Capătul B al barei AB se leagă printr'un fir flexibil și inextensibil de un punct E al barei CD. Asupra punctului B lucrează o forță orizontală dată F în planul barelor, iar asupra capătului D lucrează o forță orizontală X necunoscută, în acelaș plan.

Să se determine:

1. Sensul în care trebuie să lucreze F pentru ca sistemul să fie în echilibru.

2. Valoarea forței X, a tensiunei T a firului, precum și ale reacțiunilor solului în cazul echilibrului.

(Propusă de d-l V. Vălcovici în Revista Matematică din Timișoara, anul IV-lea No. 2).

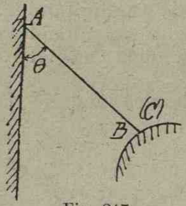

Fig. 247

40*) O bară grea AB care se poate mișca într'un plan vertical, are o extremitate A pe un perete vertical; care este curba (c) pe care trebuie să se miște B așà fel ca bara să fie în echilibru ori care este unghiul ei cu vertiala p. (Echilibru indiferent).

R. Curba (c) e o clipsă.

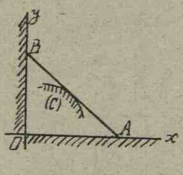

Fig. 248

41*) O bară grea AB razimă pe un plan perfect lustruite oy și pe o curbă necunoscută (c); se cere să se determine această curbă știind că bara este în echilibru indiferent.

R. Curba căutată este o asteroidă având ca axe de simetrie ox, oy.

*) Necesită cunoștiinți de calcul diferențial și integral.

42*) Un triunghiu *ABC deformabil* însă păstrând o arie constantă S este acționat în vârfurile lui de trei forțe F_1, F_2, F_3 situate în planul triunghiului.

Care sunt condițiunile ce trebuie să impunem forțelor F_1, F_2, Fz ca să avem echilibru.

(Seminar de Mecanică. Facultatea de Științe, București).

CAPITOLUL XIII

SISTEME STATIC DETERMINATE ȘI STATIC NEDETERMINATE. ECUAȚIUNILE MECANICEI RAȚIONALE ȘI ECUAȚIUNILE ELASTICITĂȚII. LEGEA LUI HOOKE

1. Am arătat că pentru a află pozițiunea de echilibru și reacțiunile unui *corp cu legături* acționat de *forțe situate în acelaș plan* putem scrie *cel mult* trei ecuațiuni: două din ele (ecuațiunile de proiecții) exprimă că orice mișcare de translație paralelă cu planul forțelor este împiedecată, iar a treia ecuațiune (de momente) exprimă că o rotațiune în jurul unui ax perpendicular pe planul forțelor nu e posibilă.

Rezultă că în asemenea condițiuni, — cu cunoștințele de pân'acì — nu putem rezolvà probleme ce conțin mai mult de trei necunoscute, deoarece avem numai trei ecuațiuni. (Vezi Capitolul XIII, chestiunea II-a și chestiunea III-a).

In cazul particular când toate forțele sunt paralele, ecuațiunile de mai sus se reduc la două: o ecuațiune de proiecții pe orice direcțiune neperpendiculară pe direcțiunea comună a forțelor și o ecuațiune de momente. (Cap. XIII chestiunea I-a).

Dacă corpul poate fi asimilat din punct de vedere practic cu un punct material (cazul unui nod de frânghie solicitat în mai multe direcțiuni) putem scrie tot două ecuațiuni (de proiecție) — ecuațiunea de momente fiind dela sine satisfăcută. (Cap. XII. Observare).

2. *Exemple de sisteme static nedeterminate.*

---

*) Se poate utiliza cu folos teorema lucrului virtual.

a) O greutate G atârnată cu trei frânghii de lungimi l_1, l_2, l_3 *situate în acelaş plan vertical* de un plafon. Nodul M este în echilibru şi se cer tensiunile T_1, T_2, T_3 ce se desvoltă în frânghii.

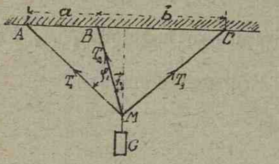

Fig. 249

Răspuns. Problema revine să descompunem o forţă dată G după trei direcţiuni situate în acelaş plan: problemă nedeterminată. (Cap. V).

Altfel. Nodul M este în echilibru sub acţiunea *forţei date* G şi a *forţelor de legătură* T_1, T_2, T_3 (reacţiunile desvoltate de frânghii. Putem scrie *două* ecuaţiuni de proiecţii, spre exemplu pe orizontală şi verticală:

$$(1)\qquad \begin{cases} T_1 \sin \varphi_1 + T_2 \sin \varphi_2 - T_3 \sin \varphi_3 = 0 \\ T_1 \cos \varphi_1 + T_2 \cos \varphi_2 + T_3 \cos \varphi_3 = G\ ^{1)} \end{cases}$$

şi avem *trei* necunoscute: T_1, T_2, T_3!

b) O grindă MN de greutate G atârnată prin trei bare de fier AA', BB', CC' de un plafon e acţionată de o sarcină verticală P situată la distanţa A de bara AA'; se cere tensiunile T_1, T_2, T_3 desvoltate în cele trei bare.

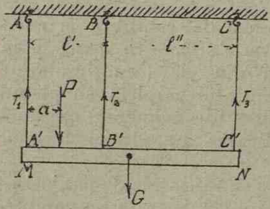

Fig. 250

Răspuns. Forţele paralele G şi P se pot compune într'o rezultantă R; chestiunea revine să descompunem pe R după trei direcţiuni paralele şi situate în acelaş plan cu R: problemă nedeterminată (Cap. VI).

Altfel. Grinda MN este în echilibru sub acţiunea forţelor date P, G şi a forţelor de legătură T_1, T_2, T_3; forţele fiind paralele putem scrie *două* ecuaţiuni; ecuaţiunea de proiecţie pe verticală:

$$(2)\qquad P + G = T_1 + T_2 + T_3$$

şi ecuaţiunea de momente, în raport cu A' spre exemplu:

$$(3)\qquad Pa + G\frac{l' + l''}{2} - T_2 l' - T_3 (l' + l'') = 0$$

iar numărul necunoscutelor este **trei:** T_1, T_2, T_3!

---

1) Unghiurile φ_1, φ_2, φ_3 sunt determinate odată ce cunoaştem l_1, l_2, l_3, a, b.

c) Fie o grindă AB, înțepenită la ambele extremități și acționată de o sarcină verticală P. Se cer reacțiunile din A și B.

Răspuns. Se știe (Cap. XI § 4) că o legătură de incastrare desvoltă o forță de reacțiune și un cuplu (moment) de reacțiune. Putem scrie două ecuațiuni, una de proiecție:

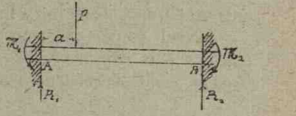

Fig. 251

(4) $$P = R_1 + R_2$$

și una de momente (în raport cu A).

(5) $$-M_1 + P.a - R_2.l + M_2 = o;$$

avem așadar *două* ecuațiuni și *patru* necunoscute de aflat: R_1, R_2, M_1, M_2!

* * *

Definițiuni. Problemele de mai sus, în care *ecuațiunile Mecanicei raționale* nu sunt suficiente pentru determinarea reacțiunilor, se numesc static nedeterminate; corpurile care prezintă asemenea legături se zic *sisteme static nedeterminate* spre deosebire de celelalte numite *static determinate.*

Notă. In exemplele *a)* și *b)* diferența dintre numărul ecuațiunilor mecanicei raționale și al forțelor de legătură necunoscute este unu, în exemplul *c)* această diferență este egală cu doi. Sistemele dela *a)* și *b)* se zic *simplu static nedeterminate*, acela dela *c): dublu static nedeterminat.* Se înțelege dela sine ce va fi un sistem de p ori static nedeterminat sau având gradul p de nedeterminare.

3. *Ecuațiunile elasticității. Legea lui Hooke.*

Exemplele foarte simple de mai sus arată clar că există cazuri când ecuațiunile mecanicei raționale nu sunt suficiente; în practică (și chiar din punct de vedere teoretic) interesează determinarea reacțiunilor pentru a puteà ștì solicitările la care sunt supuse diferitele piese ale unui corp acționat de un sistem de forțe date și deci a puteà să le dimensionăm în consecință.

Aceste exemple ne-au condus deci până la marginile Mecanicei raționale și la întrebarea:

Cum se rezolvă problemele static nedeterminate?

Mecanica este o știință fizică, de observație și experiență și pentru ușurarea studiului ei, ne-am impus la început (Cap. I, § 1) câteva *ipoteze simplificatoare* iar rezultatele obținute astfel conduc în *foarte multe cazuri* la concluziuni ce se potrivesc cu realitatea (experiența). Când aceste rezultate nu sunt suficiente, cum este cazul în exemplele *a)*, *b)*, *c)* procedăm la *revizuirea* ipotezelor și anume renunțăm la ipoteza după care corpurile naturale ar fi *rigide* (cum le-am presupus pân'acì) și deacì înainte vom ține seama că sub acțiunea forțelor ele se *deformează* adică sunt *elastice*.

Astfel experiența arată că un corp supus la o acțiune de *întindere* sau *compresiune* îndreptată după axul corpului, suferă o *lungire* sau o *contractare* dată de relațiunea:

$$\lambda = \frac{P.l}{E.s} \tag{6}$$

în care P este forța axială, l lungimea corpului s secțiunea sa perpendiculară pe ax, iar E un coeficient depinzând de natura materialului din care e făcut acel corp [1];

Relațiunea (6) se numește relația sau *legea lui Hooke*.

Experiențele au condus și la alte ecuațiuni precum este (6), care leagă *forțele* (sau cuplele) cu *deformările*: lungiri, scurtări, încovoieri, răsuciri; ele se numesc *ecuațiunile elasticității* și servesc împreună cu ecuațiunile mecanicei raționale la rezolvarea problemelor static nedeterminate.

4. Cu aceste cunoștințe noui să reluăm exemplele *a)* și *b)* dela § 2 ale acestui capitol.

a) Sub acțiunea greutății G, frânghiile AM, BM, CM sunt întinse respectiv cu forțele T_1, T_2, T_3 (forțele T figurate, sunt reacțiunile frânghiilor, egale și de sens contrar cu acțiunile). Legea lui Hooke ne dă [2]:

$$(7)\qquad \left\{ \begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{T_1 l_1}{E_1 s_1} \\ \lambda_2 &= \frac{T_2 l_2}{E_2 s_2} \\ \lambda_3 &= \frac{T_3 l_3}{E_3 s_3} \end{aligned} \right.$$

Pentru a găsì o relațiune între L_1, L_2, L_3 deci între T_1, T_2, T_3 vom exprimà că *după deformare* cele trei frânghii au un punct comun în M adică: cercurile descrise din A, B, C ca centre cu raze respectiv egale cu

$$l_1 + \lambda_1,\ l_2 + \lambda_2,\ l_3 + \lambda_3$$

---

[1]) Coeficientul E se numește și *modul de elasticitate*.

[2]) l_1, l_2, l_3, S_1, S_2, S_3 și E_1, E_2, E_3 sunt respectiv lungimile, secțiunile și modulele de elasticitate a celor trei frânghii presupuse din materialele diferite.

trec prin acelaș punct M; fie:

$$(8) \qquad F(T_1, T_2, T_3) = 0$$

aceà relațiune. Ecuațiunile (1) și (8) în număr de trei sunt acum suficiente pentru aflarea lui T_1, T_2, T_3.

*

b) Pentru a nu complicà problema, să presupunem că barele AA', BB', CC' se deformează sub acțiunea greutăților P și G, grinda MN rămâne însă rigidă. După deformare punctele A', B', C' vor venì în A'', B'', C'' situate tot în linie dreaptă; să exprimăm acest lucru; fie $\lambda_1 = A'A''$, $\lambda_2 = B'B''$, $\lambda_3 = C'C''$ lungirile celor trei bare, avem din triunghiurile asemenea $C''a\,A''$ și $C''b\,B''$:

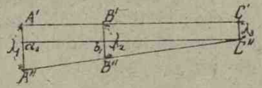

Fig. 252

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} = \frac{l' + l''}{l'}$$

și cum

$$\lambda_1 = \frac{T_1 l_1}{E_1 s_1}, \ \lambda_2 = \frac{T_2 l_2}{E_2 s_2}, \ \lambda_3 = \frac{T_3 l_3}{E_3 s_3}$$

relațiunea precedentă se transformă într'o relațiune în T_1, T_2, T_3:

$$(9) \qquad f(T_1, T_2, T_2) = 0.$$

Ecuațiunile (2), (3) și (9) rezolvă complet problema.

* * *

5. Exemplele de mai sus învederează până la evidență *caracterul de experiență* al științei Mecanicei, metoda de studiu este aceea a *aproximațiilor succesive*, proprie studiului oricărui fenomen fizic. In problemele de care ne-am ocupat în această lucrare, *mecanica rațională* furnizà rezultate cu o primă aproximație, pentru aproximații de ordin superior trebuie să recurgem la rezultatele stabilite în *Elasticitate*.

EXERCIŢII

Care este gradul de nedeterminare a următoarelor sisteme?

1. Trei bare de fier, *situate în acelaş plan vertical* şi fixate în B, C, D pe un plan rigid sunt acţionate de o sarcină cunoscută P aplicată în punctul A de articulaţiune a barelor.

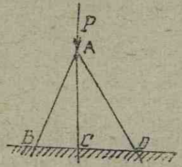

Fig. 253

2. O scară AB, articulată în B (fig. 223) simplu răzimată în A şi prinsă de peretele vertical cu ancora CD.

3. Cadrul unei biciclete (fig. 31) presupunând că greutatea biciclistului se repartizează astfel: 2/3 pe şea iar 1/3 pe pedale. (Se mai presupune că barele ce compun cadrul sunt articulate în punctele lor de întâlnire.

4. O masă cu patru picioare răzimată pe un plan orizontal.

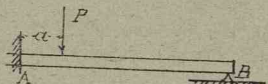

Fig. 254

5. O grindă AB încastrată în A şi simplu răzimată în punctul B, grinda fiind sub acţiunea unor sarcini verticale.

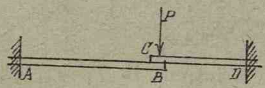

Fig. 255

6. Două grinzi, AB încastrată în A, CD încastrată în C; extremităţile lor libere B şi D sunt în atingere. Sistemul e acţionat de o sarcină P.

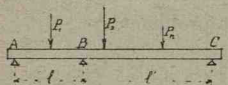

Fig. 256

7. O grindă ABC răzimată în trei puncte şi acţionată de sarcinile P_1, $P_2 \ldots P_n$.

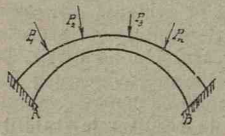

Fig. 257

8. O boltă (de fereastră), încastrată la ambele extremităţi şi acţionată de sarcini oarecari.

7. Două arcuri AB, BC articulate la extremități în A și C și articulate între ele în B.

8. Un arc AB articulat la ambele extremități.

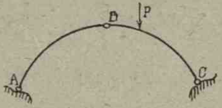

Fig. 258

9. Construcțiunea din fig. 132 care razimă pe un teren orizontal, în cazul când se cer forțele care acționează cele șase bare presupuse articulate în punctele lor de intersecție.

10. Să se afle reacțiunile desvoltate de articulațiunile A și B ale unei bare AB acționată de o forță P aplicată pe direcțiunea ei și având punctul de aplicațiune în C.

Indicație: Se va exprimà că lungirea lui BC e egală cu contractarea lui AC.

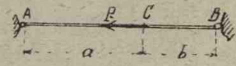

Fig. 259

11. O greutate P este atârnată prin trei bare de fier omogene și de aceeaș lungime și secțiune, fixate într'un plafon. Se cere tensiunile desvoltate în cele trei bare.

Aplicație: P=3.800 tone, l_1=3,80 m., α=60^0, diametrul barelor 20 m/m, modulul de elasticitate egal cu 2.200.000 $\frac{kg}{cm^2}$.

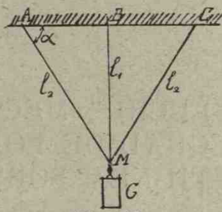

Fig. 260

12. Pentru a face reparațiuni la clădiri înalte și când din diferite motive nu se pot ridicà schele, se întrebuințează dispozitivul din figura alăturată: se suspendă cu cable sau frânghii un balcon de lemn destul de rigid ca să poată susține oamenii și materialele necesare reparațiunilor; frânghiile le presupunem trecute după niște scripeți având astfel posibilitatea să mutăm balconul la diferite înălțimi.

Se cer tensiunile în cele trei cable știind că pe fiecare metru liniar, balconul are o greutate (uniform distribuită) de p kgr. Pentru o anume pozițiune, capetele de sus a cablelor sunt presupuse fixe.

Aplicație: p=100 kgr/metru, a=1,40 m., b=2.00 secțiunea cablelor egală cu 4 cm^2.

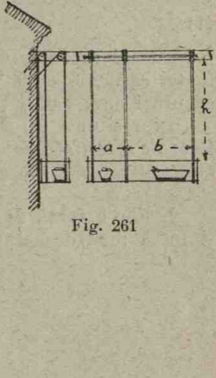

Fig. 261

13. O bară rigidă de greutate G razimă în trei puncte A, B, C pe trei resoarte care se comprimă respectiv cu lungimile l_1, l_2, l_3 când sunt apăsate cu câte 1 kgr.

Se cer presiunile transmise de bară celor trei resoarte.

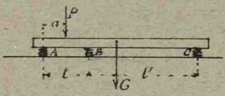

Fig.262

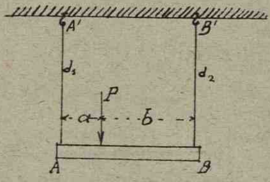

Fig. 263

14. O grindă de greutate G este atârnată de un plafon orizontal prin două bare de aceleași lungimi și de diametre d_1 și d_2. Care trebuie să fie pozițiunea unei sarcini P pentru ca după deformarea barelor AA', BB' grinda AB să rămâie tot orizontală.

(Wittenbauer, vol. II).

CAPITOLUL XIV

LUCRU MECANIC, PUTERE MECANICĂ, GRAD DE FOLOSINȚĂ, FORȚĂ VIE, ECUAȚIUNEA FORȚELOR VII, OMOGENEITATE, UNITĂȚI DE MĂSURĂ

1. Când ridicăm o greutate P la o înălțime h executăm o muncă mecanică care este cu atât mai mare cât P și h sunt mai mari. Munca sau lucrul mecanic se măsoară prin produsul dintre greutatea P și înălțimea h:

$$L = P \times h. \tag{1}$$

Lucrul mecanic datorit gravitației este *pozitiv* când direcțiunea forței coincide cu a deplasării punctului ei de aplicație (cazul unei greutăți care cade) și *negativ* în caz contrar (ridicarea unei greutăți).

Expresiunea (1) a lucrului mecanic este aceeaș și în cazul unei *forțe de direcție oarecare*, P al cărui punct de aplicație se deplasează cu cantitatea h *pe direcțiunea forței.*

2. Fie o forță P al cărei punct de aplicație se deplasează din A în A'; să descompunem forța P după direcțiunea AA' și după

direcțiunea perpendiculară pe AA'; Lucrul mecanic datorit lui P_2 este nul, deoarece deplasarea lui A pe direcțiunea lui P_2 este nulă iar lucrul mecanic al componenței P_1 este:

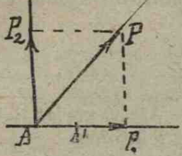

Fig. 264

$$L = P_1 \times \overline{AA'} = P \, . \, \overline{AA'} \cos\alpha.$$

Aceasta este prin definițiune expresia lucrului mecanic al forței P corespunzător deplasării AA', adică: lucrul mecanic datorit unei forțe este egal cu produsul dintre aceà forță prin deplasarea punctului său de aplicație și prin cosinusul unghiului format de direcțiunea forței și a deplasării.

3. Doi oameni ridică *aceiaș* greutate P la *aceiaș* înălțime h; unul însă săvârșește acest lucru mecanic mai repede, celălalt mai încet.

In practică interesează nu numai *lucrul mecanic* săvârșit de o mașină, cât mai ales *timpul* în care el este săvârșit.

Pentru compararea a două mașini se compară lucrurile mecanice săvârșite într'o unitate de timp (secunda).

Definițiune. Lucrul mecanic săvârșit în unitatea de timp se numește *putere sau tărie mecanică.*

Astfel, puterea mecanică a unui om care ridică o greutate P la înălțimea h în timpul T este:

$$\mathfrak{T} = \frac{P \times h}{T}.$$

Dacă h este efectuat în unitatea de timp (adică h e iuțeala punctului de aplicație al forței) avem:

$$\mathfrak{T} = P.i.$$

4. *Putere cheltuită, putere utilă. Grad de folosință sau randement.*

Nu toată puterea cheltuită pentru săvârșirea unui lucru mecanic se transformă în putere utilă. Așà de exemplu la o mașină cu vapori numai 23% din ce cheltuim se recuperează sub formă de putere mecanică utilă, restul se pierde în mașină și în organele de transmisiune ale mișcării.

Raportul dintre puterea utilă și puterea cheltuită se numește *grad de folosință* și se notează cu

$$\eta = \frac{P_u}{P_c}$$

raport care este totdeauna subunitar, nu numai în mașini dar în orice activitate omenească!

Idealul este ca η să tindă către 1.

5. *Forță vie.* Un corp de massă M aflat în repaus, sub acțiunea unei forțe F ajunge să aibe o iuțeală i; lucrul mecanic cheltuit în acest scop este proporțional cu massa M și cu patratul iuțelii i și anume

$$L=\frac{1}{2}Mi^2.$$

Mai general dacă iuțeala unui corp de massă M a variat dela i_0 la i, lucrul mecanic corespunzător este dat de relațiunea

$$\text{(1)} \qquad L=\frac{1}{2}Mi^2-\frac{1}{2}Mi_0^2=\frac{1}{2}M\ (i^2-i_0^2).$$

Cantitatea Mi^2 se numește *forță vie*, iar $\frac{1}{2}Mi^2$ *energie cinetică* (de mișcare).

Ecuațiunea (1) exprimă că *semivariațiunea forței vii este egală cu lucrul mecanic* cheltuit pentru realizarea acestei variațiuni; ea se numește și *ecuațiunea forțelor vii.*

Așa spre exemplu o piatră de greutate G și massă M cade dela înălțimea h fără iuțeală inițială; avem că lucrul mecanic efectuat este egal cu

$$L=G\,h \quad (g \text{ e accelerația gravitației} = 9{,}81 \text{ metri/sec.}^2).$$

Iuțeala cu care ajunge piatra la pământ este:

$$i=\sqrt{2gh}$$

iar jumătate din forța vie câștigată de corp va fi:

$$\frac{1}{2}Mi^2=\frac{1}{2}M.\ 2gh=Gh=L.$$

Ceeace se cheltuește în lucru mecanic se regăsește în energie cinetică; acesta este înțelesul ecuațiunii forțelor vii, care exprimă de fapt principiul conservării energiei într'un caz particular.

Energie potențială și energie actuală. O piatră de greutate G la marginea unei râpe de înălțime h posedă o *energie potențială* egală cu Gh; ea devine *actuală* în momentul căderii.

6. *Omogeneitate.* Orice relațiune care leagă între ele mărimi geometrice, mecanice sau fizice trebue să fie *omogenă*, adică diferitele cantități legate prin semnul plus sau minus trebuie să reprezinte mărimi *de acelaș fel.*

Astfel dacă a, b, c, d reprezintă *măsurile* unor lungimi, o egalitate de forma

$$a^3=2b^2c+d$$

nu poate avea loc, — în baza principiului omogeneității — decât dacă numărul c reprezintă o lungime, iar d măsura unui volum. Se înțelege deacì lesne importanța deosebită a acestui principiu care ne dă putința unui control foarte simplu asupra formulelor pe care le scrim.

Unități de măsură. Ecuațiuni de definiție. Ecuațiuni de dimensie. Pentru măsurarea unei mărimi geometrice, mecanice sau fizice, este suficient să ne fixăm trei unități de măsură zise *fundamentale*, cu ajutorul cărora se pot definì și celelalte unități numite *unități derivate*.

Două sisteme de unități sunt utilizate astăzi cu deosebire:

1) *Sistemul technic*[1]) în care unitățile fundamentale sunt:

a) metrul (pentru lungimi): a 40.000.000 parte din lungimea unui meridian pământesc.

b) secunda (pentru timp): a 86.400 parte din durata unei zile solare medii.

c) Kgramul-forță (pentru forțe): forța care acționează în virtutea gravitației un decimetru cub de apă distilată la $+4^0$ Celsius.

2) *Sistemul C, G, S*[2]), care are ca unități fundamentale:

a) centimetrul (pentru lungimi): $\frac{1}{100}$ metru;

b) secunda (pentru timp);

c) gramul-massă (pentru massă): massa unui cm^3 de apă distilată la $+4^0$ celsius.

Să trecem acum în revistă diferitele mărimi geometrice și mecanice.

1. *Lungimile;* să presupunem că o lungime măsurată cu metrul e reprezentată prin numărul a; să luăm în loc de metru ca unitate centimetrul: aceeaș lungime va aveà ca măsură numărul $100\,a$!

In general dacă raportul dintre vechea unitate de măsură și noua ar fi λ, măsura acelei lungimi din a va devenì λa.

2. *Aria;* este egală cu produsul a două lungimi a, b

$$S=a\times b \tag{1}$$

la o schimbare a unității de măsură ca mai sus, vom aveà:

$$S_1=\lambda a.\lambda.b=\lambda^2.ab=\lambda^2.S \tag{1'}$$

---

[1]) numit și sistemnl din mecanică, practic...

[2]) sau teoretic.

3. *Volumul*: este egal produsul a trei lungimi a, b, c

(2) $$V=a\times b\times c$$

și schimbând unitatea de măsură pentru lungimi

(2') $$v_{,}=\lambda a.\lambda b.\lambda c=\lambda^3.abc=\lambda^3.v.$$

4. *Iuțeala*: este un spațiu către un timp

(3) $$i=\frac{T}{S};$$

dacă schimbăm pe lângă unitatea de lungime și unitatea de timp, așa fel ca raportul dintre vechea și noua unitate să fie $\overline{c}$ numărul care va mătură iuțeala va fi:

(3') $$i=\frac{\lambda.S}{\overline{c}.T}=\lambda.\overline{c}^{-1}.i$$

5. *Accelerațiunea:* este raportul dintre o iuțeală și un timp sau un spațiu către un timp, îmmulțit cu un timp:

(4) $$a=\frac{i}{T}=\frac{S}{T\times T}=\frac{S}{T^2}$$

după schimbarea unităților vom avea:

(4') $$a=\frac{\lambda S}{\overline{c}.T.\overline{c}T}=\lambda\overline{c}^{-2}.\frac{S}{T^2}=\lambda\overline{c}^{-2}a.$$

Din exemplele de mai sus reiese că fiecare mărime are *o ecuație de definiție*, cum sunt ecuațiile (1), (2), (3), (4) respectiv pentru suprafețe, volume, iuțeli, accelerațiuni... și că numerele care măsoară aceste mărimi suferă anume modificări indicate de ecuațiunile (1'), (2'), (3'), (4') când schimbăm unitățile fundamentale. Modul cum se produce această schimbare, adică dependența unei anume unități de măsură față de unitățile fundamentale, se exprimă prin *ecuațiile de dimensii.*

Astfel în cele patru exemple de mai sus, ecuațiunile de dimensiuni sunt:

1) pentru suprafețe:

$$(s)=(L^2)$$

2) pentru volume:

$$(v)=(L^3)$$

3) pentru iuţeli:

$$(I)=[LT^{-1}]$$

4) pentru accelerațiuni:

$$(a)=[L.T^{-2}]$$

(Aceste ecuaţiuni de dimensii este exprimarea în mod simbolic a dependenţei de care se vorbeşte mai sus).

Se înţelege acum lesne pentru ce se impune să specificăm totdeauna unităţile de măsură după ce am scris numărul care exprimă m ăsura unei mărimi oarecari.

Forţa necesară pentru a imprimà unui corp de massă M o accelerațiune a, este:

$$F=M.a$$

relaţiune care ca şi *regula paralelogramului* constitue unul din principiile mecanıcei; ea este în acelaş timp ecuaţiunea de definiţie a forţei; ecuaţia de dimensii va fi deci în sistemul $C.G.S$

$$[F]=[M.L.T^{-2}].$$

Unitatea de forţă în sistemul $C.G.S$ este *forţa care imprimă unui gram-massă o acceleraţiune de un centimetru pe secundă la patrat;* ea poartă numele de **dynă.**

In sistemul tehnic, unitatea de măsură este *kgramul-forţă.* Relaţiunea dintre kgram-forţă şi dynă este:

$$1 \text{ kgram-forţă} = 981.000 \text{ dyne.}$$

Massa, unitate fundamentală în sistemul $C.G.S$ are în sistemul tehnic dimensiunile: $[M]=[FL^{-1}T^2]$. Unitatea de massă este în acest sistem massa unui corp care cântăreşte 9,81 kgrame.

Momentul unei forţe în raport cu un punct are ca definiţiune (Cap. VIII).

$$\mathfrak{M}=F\times d$$

ecuaţiunea de dimensii este:

$$[\mathfrak{M}]=[F.L]=[ML^2T^{-2}].$$

Se măsoară în sistemnl $C.S.S$ în *dyne centimetri* iar în sistemul tehnic în *kgrame metri.*

Lucrul mecanic are în general expresiunea

$$L=P.l\cos\alpha$$

și deoarece liniile trigonometrice sunt rapoarte între două lungimi, deci nu depind de unitatea aleasă pentru măsurarea lungimilor avem:

$$[\mathfrak{L}] = [ML^2\, T^{-2}].$$

adică *lucrul mecanic* și *momentul unei forțe* cu aceleași dimensiuni.

Lucrul mecanic se exprimă în sistemul *C.G.S* în *dyne centimetri* sau *ergi* iar în sistemul tehnic în *kilogrammetri*.

Avem relațiunea:

$$1 \text{ kgrammetru} = 9.81 \times 10^7 \text{ ergi}.$$

Ergul fiind o unitate prea mică, se utilizează un multiplu al său, joulul:

$$1 \text{ joule} = 10^7 \text{ ergi}$$

prin urmare:

$$1 \text{ kgrammetru} = 9.81 \text{ jouli}$$

Puterea mecanică definită de relațiunea

$$\mathfrak{P} = \frac{\mathfrak{L}}{T}$$

are ca ecuațiune de dimensii

$$[\mathfrak{P}] = [M.L^2.\, T^{-3}].$$

In sistemul *C.G.S* se măsoară în *ergi pe secundă* sau în *jouli pe secundă* numit și *watt.*

$$1 \text{ watt} = 10^7 \frac{\text{ergi}}{\text{sec.}}$$

Un hectowatt și un kilowatt sunt respectivi egali cu 100 watți și 1000 watți.

In sistemul tehnic unitatea de măsură pentru putere este kgrametrul pe secundă.

Puterea mașinilor se exprimă însă sau în kilowațți (în special la mașinile electrice) și în *cai putere* (mașinile de forță motrice: motoare cu abur, gaz).

$$1 \text{ cal putere}^{1)} = 75 \frac{\text{kgrametri}}{\text{secundă}}.$$

---

[1]) Se notează prescurtat HP (horse power).

O relațiune foarte necesară în aplicațiuni este următoarea:

$$1 \text{ cal putere} = 0.736 \text{ kilowațți}$$

sau

$$1 \text{ kilowatt} = 1.36 \text{ cai putere (HP)}.$$

Observare. Unități practice de lucru mecanic mai sunt; *calul-oră* și *kilowattora*;

$$1 \text{ caloră} = 75 \frac{\text{kgrammetri}}{\text{secundă}} \times 3600 \text{ secunde}$$
$$= 270.000 \text{ kgrametrii}$$

$$1 \text{ kilowattoră} = \frac{1000 \text{ jouli}}{\text{secundă}} \; 36\,0 \text{ secunde}$$
$$= 9{,}81 \times 3600 \times 1000 \text{ kgrametri}$$
$$= 353{,}16 \times 10^5 \text{ kgrammetri}.$$

* * *

EXEMPLE

Chestiunea I-a

Se cere lucrul mecanic și puterea desvoltată de un om pentru a ridicà o greutate de 50 kgr. la înălțimea de 5 metri în timp de două minute.

Răspuns:

$$\mathfrak{L} = 50 \text{ kgr.} \times 5 \text{ metri} = 250 \text{ kgm.}$$

sau în unități *C.G.S.*

$$\mathfrak{L} = 25 \times 9{,}81 \times 10^8 \text{ ergi.}$$

Puterea mecanică are expresiunea:

$$\mathfrak{p} = \frac{250 \text{ kgm.}}{2 \times 60 \text{ sec.}} = 2.833 \frac{\text{kgm.}}{\text{sec.}}$$

Chestiunea II-a

Care este puterea unei pompe care ridică $10 m^3$ de apă la înălțimea de 12 metri pe fiecare oră?

Răspuns:

$$\mathfrak{p} = \frac{10 \text{ m}^3 \times 1000 \text{ kg/m}^3 \times 12 \text{ metri}}{3600 \text{ secunde}} = 33{,}333 \text{ kgm. sec.}$$

sau în cai putere:

$$\mathfrak{p} = \frac{33.333}{75}\text{HP} = 0.444 \text{ HP.}$$

Chestiunea III-a

Un troliu de 30 cm. diametru (fig. 28) pentru ridicarea materialelor, este prevăzut cu două găleţi: când una din ele coboară goală, cealăltă se ridică încărcată cu material.

Ştiind că greutatea unei găleţi goale este de 2 kgr. şi plină 18 kgr., iar troliul face cinci învârtituri pe minut se cere:

1. Puterea mecanică desvoltată pentru a face să funcţioneze sistemul format de cele două găleţi.

2. Lucrul mecanic desvoltat timp de o jumătate de oră.

Se va neglijà greutatea proprie a frânghiilor de care sunt atârnate găleţile; în diferitele frecări ce intervin se va presupune că se pierde 20%$_0$ din puterea desvoltată.

Răspuns: Găleata care coboară execută un lucru mecanic pozitiv, aceea care se ridică un lucru mecanic negativ. Prin urmare puterea mecanică efectuată de găleţi va fi:

$$\mathfrak{p} = \frac{(L_1 - L_2)}{T} = \frac{0.15\pi(18 - 2) \text{ kgrm.}}{60 \text{ sec.}} = 1{,}256 \frac{\text{kgm.}}{\text{sec.}}$$

iar *puterea necesară:*

$$\mathfrak{p}_n = \frac{1.256}{0.8} = 1.57 \frac{\text{kgm.}}{\text{sec.}} = 0{,}0209 \text{ HP.}$$

Lucrul mecanic efectuat într'o jumătate oră va fi:

$$L = 1.256 \frac{\text{kgm.}}{\text{sec.}} \times 1800 \text{ sec.} = 2260{,}8 \text{ kgm.}$$

Chestiunea IV-a

Un vagon de tramvaiu tras de doi cai, ieşind de pe linie, fiecare cal este nevoit să desvolte timp de două minute câte o forţă de 80 kgr. într'o direcţiune care face cu direcţiunea de mers a tramvaiului un unghiu de 20^0; în acest interval de timp tramvaiul a parcurs o distanţă de 9 metri.

Care este puterea mecanică desvoltată de fiecare cal?

Răspuns:

$$\mathfrak{p} = \frac{80 \text{ kgr.} \times 9 \text{ m. } \cos 20^0}{120 \text{ secunde}} = \frac{80 \times 9 \times 0.940}{120} = 5.64 \frac{\text{kgm}}{\text{sec.}}$$

Chestiunea V-a

Un motor electric este cuplat cu un dinam cu ajutorul unei curele; puterea absorbită de motor este de 1,5 kilowatți, puterea debitată de dinam 1,2 kilowatți.

Se cere gradul de folosință al dinamului știind că pierderile în motor reprezintă $15^0/_0$ din puterea absorbită iar pierderile prin transmisiunea cu curea sunt $3^0/_0$ din puterea la arborele motorului.

Răspuns: Rezultă imediat că gradul de folosință al motorului este 0.85; prin urmare puterea disponibilă la arborele lui este:

$$1{,}5 \times 0.85 \text{ kw.} = 1{,}275 \text{ kw.}$$

In curea se mai pierde:

$$\frac{3}{100} 1.275 \text{ kw.} = 0.0038 \text{ kw.} \cong 0{,}04 \text{ kw.}$$

deci puterea transmisă dinamului va fi:

$$1.275 - 0.004 = 1.271 \text{ km.}$$

iar gradul său de folosință:

$$\eta = \frac{1.003}{1.271} \cong 0.79.$$

Notă. Aflarea pierderilor în motor se numește și *tararea motorului,* și este un mijloc de a aflà randamentul dinamurilor când cunoaștem puterea ce o debitează, precum și puterea absorbită de motorul corespunzător.

Chestiunea VI-a

Care ar fi forța vie cu care ar ajunge un proectil de 1000 grame massă căruia i-am da drumul, fără iuțeală inițială într'un puț de 20 metri adâncime?

Răspuns: Iuțeala în momentul când proectilul ajunge în fundul puțului va fi:

$$i = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9.81 \times 20} \frac{\text{metri}}{\text{sec.}}$$

deci forţa vie va fi:

$$\frac{1}{2}Mi^2=\frac{1000 \text{ grame massă}}{2}(2\times 9.81 \times 20\times 100)^2\frac{\text{cm.}^2}{\text{sec.}^2}$$

$$=769{,}84\times 10^9\frac{\text{grame massă cm.}^2}{\text{sec.}^2}$$

$$=769.84\times 10^9 \text{ ergi.}$$

sau:

$$\frac{1}{2}Mi^2=76984 \text{ jouli.}$$

Chestiunea VII-a

Ce reprezintă coeficienţii 2, 3, 1 în ecuaţiunea:

$$S=2t^2+3t+1$$

ştiind că timpul e exprimat în secunde iar spaţiul în metri?

Răspuns: Relaţiunea trebuind să fie omogenă, 1 reprezintă metri, 3 reprezintă $\frac{\text{metri}}{\text{secundă}}$, deci e o iuţeală, iar 2 reprezintă $\frac{\text{metri}}{\text{sec}\times\text{sec}}$, adică o acceleraţie.

Chestiunea VIII-a

In ce unităţi se măsoară modulul de elasticitate din formula lui Hooke?

Răspuns: Avem:

$$\varepsilon=\frac{P.l}{E\Omega}$$

deci:

$$E=\frac{Pl}{\varepsilon\Omega}$$

ecuaţiunea de dimensii a lui E va fi deci:

$$(E)=\left(\frac{F.L}{L.L^2}\right)=(F.L^{-2})=(ML^{-1}T^{-2})$$

adică modulul de elasticitate se exprimă în unităţi de forţă către o suprafaţă, spre exemplu în $\frac{\text{Kgr.}}{\text{cm}^2}$.

EXERCIŢII

1. Care este lucrul mecanic efectuat de o locomotivă care desvoltă o forţă de 350 kgr. pentru a trage un convoiu de vagoane pe distanţă de 5 km.?

2. Să se exprime în unităţi tehnice şi *C.G.S* puterea unei căderi de apă care are un debit de 8m³ pe secundă şi o înălţime de cădere de 10 m.

3. Un ciocan cu aburi de 500 kgr. greutate dă 50 lovituri pe minut dela o înălţime de 0.75 metri. Care e puterea mecanică desvoltată?

(Cursul de mecanică al d-lui Tr. Lalescu la Inst. Electrotechnic).

4. In problema (Cap. XIII No. 8) să se calculeze lucrul mecanic total corespunzător celor trei greutăţi şi deplasării punctului *M* din *A* până în poziţia de echilibru.

(Examen de admitere în Şcoala de poduri şi şosele 1915)

5. In problema (Cap. XIII. C. 6) să se calculeze lucrul mecanic corespunzător forţei *P* şi deplasării plăcii, dela prima poziţie de echilibru la cea de-a doua.

Aplicaţia numerică.

(Examen de admitere în Şcoala de poduri şi şosele, anul 1914).

6. O maşină cu aburi are diametrul cilindrului de 300 mm. şi o lungime de 540 mm.; presiunea exercitată pe piston fiind de 3 kg./cm.², care este puterea maşinii ştiind că manivela pusă în mişcare de coada pistonului (prin intermediul unei biele) face 60 rotaţiuni pe minut.

Lucrul mecanic desvoltat într'o jumătate oră.

Se vor exprimà rezultatele în ambele sisteme de unităţi.

7. Care este gradul de folosinţă al unei maşini cu aburi care pune în mişcare o pompă ce ridică 1300 m³ apă la o înălţime de 12 metri, timp de 6 ore?

8. Un cal desvoltă o forţă constantă de 40 kgr. şi aleargă cu o iuţeală de 15 km. pe oră. Care este puterea acelui cal? Lucrul mecanic desvoltat într'o oră ?

9. Pentru a trage o căruţă pe o şoseà orizontală este nevoie să învingem o rezistenţă de 200 kgr. Care este puterea desvoltată de patru cai ştiind că iuţeala căruţii este de 12 km. pe oră?

10. Câți oameni sunt necesari să împingă (în mers curent) un vagon de cale ferată cântărind 8000 kgr., știind că rezistența de învins este de 10 kgr. pentru fiecare tonă de greutate iar un om poate desvoltà o forță de 20 kgr.?

11. Să se arate că dacă o rampă are h milimetri pe metru, rezistența ce trebuie să o învingem când tragem o greutate pe aceà rampă este de 1 kgr. pentru fiecare tonă de greutate.

Să se calculeze apoi puterea desvoltată pentru a trage un convoiu de două camioane pe o rampă de 3 mm. pe metru, știind că greutatea camioanelor este respectiv 800 kgr. și 400 kgr. iuțeala de mers este de 10 km. pe oră iar rezistența de învins din cauza rostogolirii de 40 kgr. de tonă.

(Indicație: Se va scrie că forța necesară trebuie să învingă rezistența la rostogolire a vehiculeler și componenta greutății după direcțiunea rampei).

12. Rezistența pe care aerul o opune unui vehicul care merge cu o iuțeală I și are o secțiune S (perpendiculară pe direcțiunea vântului) este dată de formula

$$K = 0{,}0056\ SI^2$$

(se presupune că nu avem vânt)

Să se găsească care este puterea absorbită de această rezistență unui vehicul care are un $S = 1.40$ m^2 și o iuțeală de 25 km. pe oră. (*Indicație:* se va aplicà formula pentru putere $\mathfrak{P} = R.i$).

13. O mingie de cauciuc de rază $r = 0.035$ m. și grosime 3 mm. cade vertical liber în aer dela o înălțime de 2,50 m. Se cere, lucrul mecanic efectuat de gravitate și corespunzător parcursurilor de cădere și ridicare din nou a mingii știind că prin atingerea cu pământul, mingia pierde 20 % din iuțeala sa, că iuțeala inițială de aruncare este de 1,50 metri pe secundă.

Densitatea cauciucului 1,3.

(A se vedeà și problema 4 Cap. III).

14. Să se exprime în unități tehnice și $C.G.S$ massa mingei din problema precedentă.

15. Pentru ridicarea unei greutăți de $^1/_2$ tonă se întrebuințează o macara verticală, învârtită de mai mulți oameni, care efectuează trei învârtituri pe minut.

Fiecare om poate desvoltà o forță de 10 kgr. și o exercità pe un braț orizontal la o distanță de 2,50 m. de axul macaralei; diametrul arborelui pe care se înfășoară frânghia este de 30 cm. Știind că pierderile prin frecări sunt de 25 % se cere:

a) Numărul lucrătorilor necesari pentru a efectuà ridicarea în aceste condițiuni.

b) Iuțeala de ridicare a greutății.

c) Energia cheltuită timp de o oră și jumătate.

(Examenul de admitere în Școala de poduri și șosele, anul 1919).

16. Pe o stradă sunt 50 globuri electrice, având fiecare o consumație de 350 watți, să se determine în cai vapori puterea mecanică a motorului necesar acestei instalațiuni. Gradul de folosință al motorului este de 0,80, acela al dinamului de 0,83, iar pierderile pe linii sunt de $4\%_0$.

(Examenul de admitere în Școala da poduri și șosele, anul 1919).

(Indicație: Se va scrie că puterea motorului e egală cu puterea necesară funcționării lămpilor electrice plus pierderile pe linie, plus pierderile din cele două mașini).

17. Intr'o locuință voim să instalăm 12 locuri de lămpi electrice; presupunând că pe fiecare loc de lampă vom aveà o consumație de 100 watți și că toate lămpile funcționează deodată se cere:

a) Puterea absorbită de această instalațiune electrică

b) Lucrul mecanic absorbit într'o lună, presupunând că în fiecare zi ea funcționează timp de 5 ore.

c) Costul pe lună al luminatului, prețul unei kilowattoră fiind de 10 lei.

18. Se exprimă corect o persoană care spune că în locuința sa se consumă 80 kilowatți pe lună?

19. O fântână are o adâncime de 12 m. măsurată dela nivelul ghizdurilor. Fusul pe care se înfășoară lanțul are 16 cm. diametru. Greutatea găleții goale este de 20 kgr. și poate ridicà 10 litri de apă. Lanțul cu care este legată găleata cântărește 1 kgr. pe metru și are o grosime totală de 1 cm.

Pe acelaș ax cu fusul este o roată de 1,6 m. diametru cu ajutorul căreia putem învârtì fusul.

Se cere:

a) lucrul mecanic necesar pentru a ridicà o găleată plină de apă dela suprafața apei până la nivelul ghizdurilor;

b) ce forță trebuie aplicată tangențial la obada roții pentru a echilibrà greutatea unei găleți pline cu apă care se găsește imediat d'asupra apei;

c) ce forță trebuie aplicată în aceleași condițiuni când o găleată este goală la nivelul ghizdurilor;

d) un om care are o putere de 7,5 kgm/sec. în cât timp ridică o găleată plină cu apă, dacă numai 0,75 din lucrul mecanic cheltuit de el servă la ridicarea găleții pline cu apă, restul pierzându-se prin frecări.

Pentru chestiunile de sub a, b, c se va presupune că nu avem frecări.

(Examen de admitere în Școala Politechnică din București, anul 1923).

20 *). Care este lucrul mecanic cheltuit pentru ridicarea materialului necesar zidirii unei clădiri de h metri înălțime, presupunând că greutatea materialului necesar unui metru de înălțime pe toată clădirea este p?

21. Cum trebue să modificăm coeficienții relațiunii

$$s=3t^2-t+2$$

în care timpul t e exprimat în secunde, iar spațiul s în metri, dacă adoptăm ca nouă unitate de timp, ora, iar pentru lungimi kilometrul?

22. Să se recunoască cu ajutorul ecuației de dimensii că produsul unei forțe printr'o iuțeală reprezintă o putere mecanică.

23. Să se arate că forța vie este de natura unui lucru mecanic, folosind ecuațiunile de dimensii.

24. Care sunt dimensiunile coeficientului K, din formula de atracțiune a lui *Newton:*

$$F=K\frac{M.M'}{R^2}$$

în care M, M' sunt masse, R o lungime, F o forță.

25. Cum trebuie modificată ecuațiunea forțelor vii dacă lucrul mecanic îl exprimăm în Kgrametri iar forța vie în kilovatți oră?

26. Care sunt *dimensiunile* ariei unui dreptunghiu în care una din laturi reprezintă o lungime, iar cealaltă momentul unei forțe?

27. Ce reprezintă fiecare termen din ecuațiunea de momente pentru echilibrul unui corp, dacă forțele sunt exprimate în *dyne* iar lungimile în *decimetri* ?

---

*) Necesită cunoștințe de calcul diferențial și integral.

28. Cu ce unități de măsură trebuie să evaluăm bazele și înălțimea unui trapez pentru ca aria lui să fie dată de formula:

$$S=\frac{B+5b}{2}i$$

în care B, b, i sunt respectiv lungimile bazelor și înălțimii?

29. Cum trebuie modificată formula lui *Hooke* dacă modulul de elasticitate e exprimat în kg/cm^2 iar celelalte elemente în unități *C. G. S.*?

30. In formula lui *Hooke*, forța e exprimată în tone, lungimile în metri, modulul de elasticitate în $kg/cm.^2$ Ce coeficient trebuie introdus pentru ca *lungirea* să fie dată în milimetri?

TABLA DE MATERIE

ERATĂ

Pag.	6	la fig.	4	să se pună litera O în punctul de intersecție a forțelor.
»	7	»	5	idem.
»	24	»	36	să se pună litera C.
»	30	»	41	forța DO se obține ducând prin P o paralelă la CD.
»	75	»	151	litera N la mijlocul lui BC.
»	102	»	232	să se adaoge literile M, N la planul de reazim al punctului B.
»	105	»	244	literile P_1 și P_2 la cele două plane.
»	106	»	248	la bara AB nu reazimă și pe Ox!
»	108	»	249	litera φ_3 pe locul indicat.