$y = \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{2}{\sqrt{x-2}}$

CULEGERE

DE

PROBLEME DE ALGEBRĂ

BIBLIOTECA „GAZETEI MATEMATICE“
No. VIII.

CULEGERE
DE
PROBLEME DE ALGEBRĂ

INTOCMITĂ DE

A. G. IOACHIMESCU

PARTEA I

EDIŢIA IV-a

REVĂZUTĂ ŞI MĂRITĂ

BUCUREŞTI

TIPOGRAFIA CURŢII REGALE F. GÖBL FII S. A.
19, STRADA ARISTIDE BRIAND, 19
1938

PREFAȚA

Ediția a III-a a **„Culegerii de probleme de Algebră"** *publicată în biblioteca* **„Gazetei Matematice"** *în 1926, epuizându-se complect și primindu-se numeroase cereri dela elevi și studenți, redacția „G. M." a decis publicarea unei noi ediții a acestei lucrări. Subsemnatul neputând să mă ocup personal cu publicarea unei noi ediții, fostul meu elev, prietenul și colegul meu D-l* **Ovidiu N. Țino**, *profesor la Școala Politechnică din Timișoara și redactor la „Gazeta Matematică", s'a oferit să se ocupe D-sa cu această publicație; negreșit că am primit cu bucurie propunerea D-lui profesor Țino, care și-a asociat și pe D-l profesor* **C. Ionescu-Bujor**, *unul din cei mai harnici colaboratori și astă-zi redactor la* **„Gazeta Matematică"**.

In urma discuțiilor ce am avut cu D-nii Țino și Ionescu-Bujor, s'a găsit că e preferabil ca publicarea acestei noi ediții să se facă în două părți; una cuprinzând chestiuni referindu-se la părțile elementare ale Algebrei, alta la părțile mai speciale.

D-nii Țino și Ionescu-Bujor au remaniat și îmbunătățit aproape complect lucrările anterioare, pentru care le exprim aici cele mai vii mulțumiri.

In cea ce privește aranjamentul general s'au păstrat aproape dispozițiile din edițiile anterioare. Ca și în acestea, la începutul fiecărui capitol s'a pus un număr de chestiuni destinate începătorilor; dar, în afară de acestea, chestiunile propuse sunt în genere din acelea destinate celor care doresc să se fortifice în studiul Algebrei, și chiar pentru cei care fac din matematici un studiu de specializare.

A. G. IOACHIMESCU

9 Septembrie 1937

PREFAȚA EDIȚIEI III

Ediția a doua a **„Culegerii de Probleme de Algebră"**, *tipărită în anul 1921, epuizându-se și cum între timp nu s'a mai tipărit altă lucrare similară, iar numeroasele cereri din partea elevilor și studențitor arătă că un asemenea uvragiu e necesar, redacția* **„Gazetei Matematice"** *a decis publicarea unei noi ediții.*

Imprejurările nepermițându-mi a ne ocupa singur de aproape cu revederea și îngrijirea publicărei acestei ediții, am rugat pe D-l **Tiberiu Popoviciu** *să ia această sarcină; D-l Popoviciu a acceptat cererea mea, pentru care sunt dator a-i exprima viile mele mulțumiri. D-sa, păstrând planul și nomenclatura capitolelor din edițiile anterioare, a revăzut întregul uvragiu făcând unele îndreptări, modificări și adăogiri de chestiuni interesante.*

Ca și în edițiile anterioare chestiunile propuse nu sunt simple exerciții pentru începători; la începutul fiecărui capitol se găsesc și câteva chestiuni de felul acesta, dar în genere chestiunile propuse sunt destinate celor ce vor să se fortifice în studiul algebrei, iar cele mai multe pot fi studiate cu folos de acei ce fac din matematici un studiu de specializare; în special chestiunile introduse de d-l Popoviciu în această ediție, se adresează ultimei categorii de cititori.

Revizuirea textului și corecturile au fost făcute foarte minuțios, dar într'un număr de aproape două mii probleme — din care unele necesită calcule laborioase — a mai putut totuși să scape câte o eroare de calcul sau de imprimare; pentru cele care puteau da loc la interpretări greșite s'a întocmit o „Erată" iar pe celelalte cititorul le va putea îndrepta și singur.

A. G. IOACHIMESCU.

3 Aprilie, 1926.

PREFAȚA EDIȚIEI I

Scopul acestei culegeri este de a pune la îndămîna elevilor din liceele reale și școlile speciale o colecție de probleme de **aritmetică, geometrie, algebră** *și* **trigonometrie,** *care să fie cît mai complectă și în acelaș timp conținută într'un spațiu cît mai mic.*

Mai toate colecțiile similare străine se referă numai la cîte una din părțile matematicilor enumărate mai sus, ceia ce face ca elevii, care voesc să facă un studiu mai amănunțit de matematici, sînt siliți să 'și procure o întreagă bibliotecă, al cărui cost, de cele mai multe ori, întrece mijloacele lor. Afară de aceasta, colecțiile prea mari fac ca elevii să se rătăcească în ele, începătorii neștiind să aleagă ceia ce este util, de ceia ce poate fi lăsat la o parte; astfel că întinderea lor este mai mult un inconvenient de cît un avantagiu. Colecțiile străine, dau în genere, sau numai enunțurile, sau enunțurile urmate de soluțiuni complecte pentru toate chestiunile. Și un sistem și altul prezintă inconveniente: în primul, elevul ne avînd mijlocul de control asupra soluțiunii unei probleme, se descurajează răpede și cu greu pornește mai departe; în cel de al doilea sistem, partea care rămîne elevului de executat este foarte mică și acesta ajunge de cele mai multe ori, mai ales dacă are o memorie bună, să aibă în cap o întreagă enciclopedie de probleme fără mult folos pentru studiul ulterior.

Noi am căutat să atingem scopul arătat la început și să înlăturăm inconvenientele semnalate, în modul următor:

1. Am evitat repetirea prea deasă a chestiunilor de acelaș fel; problemele de la fie-care capitol le-am ales cît mai va-

riate, atingînd chestiuni de tot felul, până la cele mai dificile ce se întîlnesc în matematicile elementare.

2. La începutul fie-cărui capitol am pus cîte-va chestiuni simple, pentru a face legătura între exemplele ce se găsesc în cursuri și problemele propriu zise.

Dintre acestea din urmă, sînt unele care prezintă reale dificultăți, și la care pot să'și încerce sagacitatea nu numai elevii, dar și aceia care fac din matematici un studiu de specializare.

3. Pentru fie-care din ramurile de matematici tratate, am făcut două părți. Intr'una am pus numai enunțurile chestiunilor împărțite pe capitole, într'a doua parte am dat răspunsurile și anume: rezultatele la cele mai simple, indicații sau schițe de soluții la cele mai dificile, în fine soluțiuni mai desvoltate la acelea care caracterizează mai bine clasa de probleme corespunzătoare.

Trebue să mai observăm că dacă în culegerile străine se ține în primul loc seamă de elevii și programele din țara lor, acelaș lucru l'am făcut și noi pentru elevii din școalele noastre, ținînd seamă de programele oficiale și de diferitele chestiuni care pot să 'i intereseze mai în special, cum sînt acelea propuse la diferite examene, concursuri, etc. In această alegere am avut în vedere experiența pe care am făcut'o timp de 6 ani cu **Gazeta Matematică**, *în biblioteca căreia scoatem această culegere — și pe care am utilizat'o în multe chestiuni.*

Prezenta culegere a fost întocmită:

Aritmetica	*de*	*I. Ionescu*
Geometria	»	*G. Țițeica*
Algebra	»	*A. G. Ioachimescu*
Trigonometria	»	*V. Cristescu.*

București 31 August, 1901

EXPLICAȚII

La început s'au pus enunțurile împărțite pe capitole numerotate cu cifre romane, iar chestiunile fiecărui capitol sunt numerotate independent cu cifre arabe.

După enunțuri vin răspunsurile și indicațiile. Cifrele romane ce se găsesc la începutul fiecărui aliniat și în capul fiecărei pagini din partea răspunsurilor, indică capitolul la care se referă indicațiile; cifrele arabe grase, ce se găsesc în corpul aliniatului și se succed în ordinea naturală, indică problemele din acest capitol.

Dacă la un răspuns se găsește o prescurtare de forma (7) înseamnă că trebue să ne referim la problema 7 din acelaș capitol, sau prescurtarea (IV. 20) înseamnă că trebue să ne referim la problema 20 din capitolul IV.

Prescurtările de forma P. S. A. P. sau P. S. A. I, înseamnă: chestiunea a fost propusă la examenele dela Școala de Poduri și Șosele, anul preparator sau anul I; deasemenea prescurtările de forma F. S. B. sau F. S. I. înseamnă chestiuni propuse la examenele dela facultățile de științe din București sau Iași, iar A. G. se referă la chestiunile propuse la examenele de admitere în școala de Artilerie și Geniu.

Problemele ale căror soluții au fost publicate în *Gazeta Matematică* au răspunsurile lor urmate de inițialele G. M. și anul respectiv, cele publicate în *Revista Matematică din Timișoara* au răspunsurile urmate de inițialele R. M. T. și anul respectiv, iar cele publicate în *Suplimentul cu exerciții al Gazetei Matematice* își închee răspunsurile cu S. E. G. M. și numărul volumului din care au fost extrase.

ERATĂ

Pagina 43 problema 34: membrul II este $\frac{(x^4+10x^2-1)(5a^4-10a^2+1}{(x^4+10x^2-5)(a^4-10a^2+5)}$ în loc de $a\,x$.

»	43	»	50	se va scrie 343 în loc de 243.
»	48	»	31	se va adăuga *reale* după cuvântul *rădăcini*.
»	49	»	42	în ultima ecuație se va scrie $+15$ în loc de -15
»	51	»	7	se adaugă la sfârșit b^4.
»	54	»	51	al doilea termen este $-2\,mx$ în loc de $-m\,x$.
»	56	»	34	în ultima ecuație membrul II este c în loc de 0.
»	57	»	47	primul termen al ultimei ecuații este $x\,u\,w$ în loc de $x\,u\,v$.
»	57	»	59	se va scrie $x+2$ în loc de $x+3$.
»	60	»	20	se va scrie DFEC în loc de DEFC.
»	62	»	34	se va scrie k^2 în loc de m^2.
»	64	»	36	exponentul ultimei paranteze este $\frac{7}{2}$ în loc de $\frac{2}{7}$
»	66	»	12	al doilea termen este $-px$ în loc de px.

TABLA DE MATERII

ALGEBRA

I. VALORI NUMERICE. EXPRESIUNI ALGEBRICE.

— Să se calculeze valorile numerice ale expresiunilor:

1. $a-\left[2a-3b-[4a-5b-6c-(7a-8b-9c-10d)]\right]$ pentru $a=1$, $b=\frac{1}{2}$, $c=3$, $d=\frac{1}{5}$.

2. $\frac{ab+cd}{bc-ad}$, pentru $a=1$, $b=2$, $c=-3$, $d=4$.

3. c^b-b^c, pentru $b=4$, $c=5$.

4. $5(a-b)\sqrt[3]{(a+x)y^2}-b\sqrt{(a+x)y}+a$, pentru $a=1$, $b=\frac{2}{3}$, $x=7$, $y=8$.

5. $(10a+20b)\sqrt{(x-b)y}-3a\sqrt[3]{(x-b)y^2}+5b$, pentru $a=\frac{5}{7}$, $b=\frac{1}{2}$, $x=5$, $y=\frac{9}{2}$.

6. $[(x^2+y^2)^2-4x^2y^2]^3$ pentru $x=500500$, $y=499500$.

7. $\sqrt[3]{(a+c-b)^2d}+\sqrt[3]{(b+d)(5d-4c)}+\sqrt[3]{(c-a)(d-b)}$, pentru $a=2$, $b=3$, $c=6$, $d=5$.

8. $(3+x\sqrt{3})^3+(5+x\sqrt{3})^3+(7+x\sqrt{3})^3+(9-x\sqrt{3})^3$ pentru $x^2=-1$.

9. $x^4-2x^3+5x^2-3x+1$, pentru $x=3$; $x=-2$; $x=1,5$; $x=-1,01$.

10. Un polinom intreg, în raport cu o literă x, îl vom nota pentru prescurtare cu $f(x)$, iar rezultatul obţinut când se înlocueşte x cu a, îl vom nota cu $f(a)$. Fie:

$$f(x)=2x^3-x^2-2x+1,$$

să se calculeze: $f(1)$, $f(-1)$, $f(\frac{1}{2})$, $f(0)$, $f(3)$, $f(-\frac{1}{2})$, $f(x+1)$, $f(x+a)$.

11. O expresiune algebrică, care depinde de mai multe litere x, y, z, o vom nota cu $f(x, y, z,\ldots)$, iar rezultatul obţinut când se înlocueşte x, y, z,... respectiv cu a, b, c,... îl vom nota cu $f(a, b, c,\ldots)$. Fie:

$$f(x, y, z)=x^3+y^3+z^3-3xyz,$$

să se calculeze: $f(1, 2, 3)$, $f(1, 0-1)$, $f(y, x, z)$, $f(z, x, y)$, şi $f(x, y, -x-y)$.

12. Să se exprime algebriceşte numărul care are a mii, b sute, c zeci şi d unimi.

13. Să se exprime, în sistemul cu baza de numeraţie B, numărul care are a unităţi de ordinul al 5-lea, b de ordinul al 4-lea, c de ordinul al 3-lea, d de ordinul al 2-lea şi e de ordinul întâi.

14. Volumul unui corp la 0^0 fiind V_0 şi el crescând, pentru unitatea de volum şi când temperatura creşte cu 1^0 cu cantitatea a, să se exprime volumul acelui corp la t^0.

15. Fie A_1, A_2, A_3, trei aliage formate din metalele B_1 şi B_2. Fie a_1, a_2, a_3 cantităţile respective din metalul B_1 care intră în cele 3 aliage; b_1, b_2, b_3, cantităţile respective din metalul B_2 cuprinse în aceleaşi aliage. Se ia din aliagiul A_1 a m_1^a parte, din aliagiul A_2 a m_2^a parte, din aliagiul A_3 a m_3^a parte; aceste părţi se topesc împreună şi formează un nou aliagiu A'; se topesc de asemenea împreună părţile rămase din fiecare aliagiu şi se obţine un nou aliagiu A''. Să se exprime greutăţile totale ale aliagelor A' şi A'' şi cantităţile respective din metalele B_1 şi B_2, care intră în fiecare din ele.

16. Aceeaşi chestiune, presupunând că în loc de a avea numai trei aliage am avea n aliage A_1, A_2, A_3,.., A_n.

17. Aceeaşi chestiune, presupunând că în loc de a avea numai două metale B_1 şi B_2, am avea p metale B_1, B_2,...B_p.

18. Două vase A şi A', ale căror capacităţi sunt v şi v', sunt pline, unul cu apă, altul cu vin. Cu ajutorul a două măsuri, de aceeaşi capacitate, se extrage din fiecare un acelaş volum de lichid u, se varsă în A ceeace s'a scos din A' şi reciproc. Se repetă de trei ori această operaţie. Să se găsească formulele, care exprimă cantităţile de vin şi apă conţinute în fiecare din cele două vase.

II. INMULŢIREA.

— Să se efectueze calculele:

1. $(x^5-x^4y+x^3y^2-x^2y^3+xy^4-y^5)(x+y)$.
2. $(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)(x-1)$.
3. $(x^n+x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1)(x-1)$.
4. $(a^2-ab+b^2)(a^2+ab-b^2)$.
5. $(a^2+4ax+4x^2)(a^2-4ax+4x^2)$.
6. $(a+b+c)(x+y+z)+(a+b-c)(x+y-z)+$
$(a-b+c)(x-y+z)+(-a+b+c)(-x+y+z)$.
7. Să se stabilească identitatea
$$(x+y)^3-3xy(x+y)\equiv x^3+y^3.$$

— Să se efectueze calculele:

8. $(1+a+a^2)(1-a+a^2)(1-a^2+a^4)(1-a^4+a^8)\times$
$(1-a^8+a^{16})+a^{16}$
9. $(1+a^2+a^4+a^6)(1+a+a^2+a^3)(1-a+a^2-a^3)+$
$a^8(1+a^2)^2$.
10. $(a+b-c+d)(a-b+c+d)+(a+b-c+d)(-a+b+c+d)$
$+(a+b+c-d)\ (a-b+c+d)+(a+b+c-d)\ (-a+b+c+d)$.
11. $(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$.
12. $(x^{2^{n-2}}+2)(x^{2^{n-2}}+1)(x^{2^{n-2}}-1)(x^{2^{n-2}}-2)$.
13. $(x^{2^n}-x^{2^{n-1}}+1)(x^{2^{n-1}}-x^{2^{n-2}}+1)(x^{2^{n-1}}+x^{2^{n-2}}+1)$.
14. $(a+b-c)(a+b)+(a-b+c)(a+c)+(-a+b+c)(b+c)$.
15. Să se verifice identitatea:
$$(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3(x+y)(x+z)(y+z).$$

— Să se efectueze calculele:

16. $(x^2-3xy+3y^2)(x^2+3xy+3y^2)(x^2+3y^2)$.
17. $[2ars+b(r^2-s^2)]^2+[2brs-a(r^2-s^2)]^2$.
18. $(x^3-3xz^2-2zy^2+xy^2)^2+(y^3-yx^2-yz^2+4xyz)^2+$
$(z^3-3zx^2-2xy^2+zy^2)^2$.
19. Fie
$$f(x,y,z,t)=x^2+y^2+z^2+t^2-xy-xz-xt-yz-yt-zt.$$
Să se calculeze:
$$f(x+y+z-t,\ x+y-z+t,\ x-y+z+t,\ -x+y+z+t).$$
20. Să se verifice identitatea
$$4(x^2+xy+y^2)^3-27(xy^2-yx^2)^2-108x^3y^3=$$
$$(x-y)^2[2x^2+5xy+2y^2]^2$$

21. Să se verifice identitatea
$$(b^2-4ac)(\beta^2-4\alpha\gamma)-(2a\gamma+2\alpha c-b\beta)^2=$$
$$4[(a\beta-b\alpha)(b\gamma-c\beta)-(a\gamma-c\alpha)^2].$$

22. Dacă $A=3x^2y^2$, $B=x(x^3+2y^3)$, $C=y(2x^3+y^3)$, să se arate că $A^3+B^3+C^3$ este un patrat perfect.

— Să se verifice identitățile:

23. $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2=$
$$(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2.$$

24. $(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+t^2)-(ax+by+cz+dt)^2=$
$$(ay-bx+ct-dz)^2+(az-cx+dy-bt)^2+(at-dx+bz-cy)^2.$$

— Să se stabilească identitățile:

25. $[(a+b)^2+(c+d)^2][(a-b)^2+(c-d)^2]-[(a+d)^2+(b+c)^2]\times$
$$[(a-d)^2+(b-c)^2]=4(a+c)(b+d)(a-c)(d-b).$$

26. $2[(a^2+b^2)(\alpha^2+\beta^2)-(a\alpha+b\beta)^2+1]=(a\beta-\alpha b+1)^2+$
$$(a\beta-\alpha b-1)^2.$$

27. $[(a^2+b^2)(\alpha^2+\beta^2)-(\alpha a+b\beta)^2+1][(a^2+c^2)(\alpha^2+\gamma^2)-$
$$(a\alpha+c\gamma)^2+1]=[(a^2+bc)(\alpha^2+\beta\gamma)-(a\alpha+c\beta)(a\alpha+b\gamma)-1]^2+$$
$$[a(\beta+\gamma)-\alpha(b+c)]^2.$$

28. $a(b-c)(x-b)(x-c)+b(c-a)(x-c)(x-a)+$
$$c(a-b)(x-a)(x-b)=(b-a)(c-b)(a-c)x.$$

29. $(b-c)(x-a)^2+(c-a)(x-b)^2+(a-b)(x-c)^2=$
$$(b-c)(x-b)(x-c)+(c-a)(x-c)(x-a)+(a-b)(x-a)(x-b).$$

30. $b(c-a)[(a+b+c)(2b-c-a)+3(ca-b^2)]+$
$$c(a-b)[(a+b+c)(2c-a-b)+3(ab-c^2)]+$$
$$a(b-c)[(a+b+c)(2a-b-c)+3(bc-a^2)]=0.$$

31. Punând $X=x^2-yz$, $Y=y^2-zx$, $Z=z^2-xy$,
$X'=x^2+yz$, $Y'=y^2+zx$, $Z'=z^2+xy$,
avem identitatea
$$XYZ=yz\,XX'+zx\,YY'+xy\,ZZ'.$$

32. Să se verifice identitatea
$$(\alpha\gamma-\beta^2)^2+(\alpha\gamma-\delta^2)^2-(\beta\delta-\alpha^2)^2-(\beta\delta-\gamma^2)^2-2(\alpha\delta-\beta\gamma)(\delta\gamma-\alpha\beta)$$
$$=[(\alpha-\gamma)^2+(\beta-\delta)^2][(\beta+\delta)^2-(\alpha-\gamma)^2].$$

— Fie $2p=a+b+c$, să se arate că vom avea:

33. $(2ap+bc)(2bp+ac)(2cp+ab)=(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2.$

34. $[(p-a)+(p-b)]^3=(p-a)^3+(p-b)^3+3c(p-a)(p-b).$

35. $(p-a)^2+(p-b)^2+(p-c)^2+p^2=a^2+b^2+c^2.$

36. $(2p-3a)^3+(2p-3b)^3+(2p-3c)^3=$
$$3(2p-3a)(2p-3b)(2p-3c).$$

37. $(q^2-a^2)(q^2-b^2)+(q^2-a^2)(q^2-c^2)+(q^2-b^2)(q^2-c^2)$
$$=4p(p-a)(p-b)(p-c),$$
unde $2q^2=a^2+b^2+c^2$.

38. Fie $ns=2(a_1+a_2+\ldots+a_n)$, să se arate că avem:
$$(s-a_1)^2+(s-a_2)^2+\ldots+(s-a_n)^2=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2.$$

39. Dacă $a+b+c=0$, vom avea și:
$$a^2-bc=b^2-ac=c^2-ab=a^2+ab+b^2=b^2+bc+c^2=c^2+ac+a^2$$
$$=\tfrac{1}{6}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]=-(ab+ac+bc)$$
$$=\tfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2).$$

40. Dacă $a+b+c=0$, avem:
$$a^4+b^4+c^4=2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2).$$
Să se găsească o relație analoagă pentru cazul când $a+b+c+d=0$.

41. Să se stabilească identitatea
$$[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]^2=2[(x-y)^4+(y-z)^4+(z-x)^4].$$

42. Să se stabilească identitatea
$$\left[\sum(x-y)^2\right]^2=2\left[\sum(x-y)^4+4(x-y)(y-z)(z-t)(t-x)\right]$$
$x, y, z, t.$

43. Fie $P=x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$. Să se arate că
$$2P=(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$$
$$2P^2=(x-y)^4+(y-z)^4+(z-x)^4$$
$$P^2=(x-y)^2(y-z)^2+(y-z)^2(z-x)^2+(z-x)^2(x-y)^2$$

44. Să se arate că:
$$2[(a+b)^2+(b+c)^2+(c+d)^2-(a+b)(b+c)-(a+b)(c+d)-$$
$$(b+c)(c+d)]^2=\tfrac{1}{2}[(b-d)^2+(c+d-a-b)^2+(a-c)^2]^2=$$
$$(b-d)^4+(c+d-a-b)^4+(a-c)^4.$$

45. Dacă avem:
$x^3+y^3+z^3=x^2+y^2+z^2=x+y+z=1$, vom avea $xyz=0$.

46. Să se stabilească identitatea
$$(a^2+b)(a+b^2)(a^2-b)+(a^2-b)(a-b^2)(a+b^2)+$$
$$(a+b^2)(a^2+b)(a-b^2)-(a^2-b)(a-b^2)(a^2+b)=2(a^2-b^2)(a^2+b^2+a^2b^2)$$

47. Să se stabilească identitatea
$$(x^2+ax+b^2)(x^2+bx+a^2)(x^2-ax+b^2)+(x^2-ax+b^2)\times$$

$$(x^2-bx+a^2)(x^2+ax+b^2)-(x^2+ax+b^2)(x^2+bx+a^2)\times$$
$$(x^2-bx+a^2)-(x^2-ax+b^2)(x^2-bx+a^2)(x^2+bx+a^2)=$$
$$=2(b^2-a^2)[a^2b^2+2x^2(a^2+b^2+x^2)].$$

48. Să se verifice identitatea

$$[a(xu+yv)+b(yu-xv)][a(xu-yv)+b(yu+xv)]+$$
$$[a(yu+xv)-b(xu-yv)][a(yu-xv)-b(xu+yv)]=$$
$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)(u^2-v^2).$$

49. Se consideră expresia

$$(avz+bwx+cvx)(awx+bwx+cuy)(avz+buz+cuy)+$$
$$(awy+bwx+cvx)(awy+buz+cuy)(avz+buz+cvz).$$

Să se pună sub forma unui produs de trei factori.

50. Fie $A_1=a_1+a_2-a_3$, $A_2=a_1-a_2+a_3$, $A_3=-a_1+a_2+a_3$; să se calculeze sumele: $A_1^2+A_2^2+A_3^2$; $A_1^3+A_2^3+A_3^3$.

51. Fie $B_1=a_1+a_2+a_3-a_4$, $B_2=a_1+a_2-a_3+a_4$, $B_3=a_1-a_2+a_3+a_4$, $B_4=-a_1+a_2+a_3+a_4$; să se calculeze suma $B_1^2+B_2^2+B_3^2+B_4^2$.

52. Fie $L_1=a_1+a_2+..+a_{n-1}-a_n$, $L_2=a_1+a_2+..-a_{n-1}+a_n,\ldots$, $L_{n-1}=a_1-a_2+\ldots+a_n$, $L_n=-a_1+a_2+\ldots+a_n$; să se calculeze suma $L_1^2+L_2^2+\ldots+L_{n-1}^2+L_n^2$.

53. Fie $M_1=-a_1-a_2-a_3$, $M_2=a_1+a_2-a_3$,
$M_3=a_1-a_2+a_3$, $M_4=-a_1+a_2+a_3$;
să se calculeze expresiunile:

$$M_1+M_2+M_3+M_4,$$
$$M_1^2+M_2^2+M_3^2+M_4^2,$$
$$M_1^3+M_2^3+M_3^3+M_4^3,$$
$$M_1^4+M_2^4+M_3^4+M_4^4,$$
$$M_1M_2M_3M_4.$$

54. Fie $N_1=a_1+a_2+a_3+a_4$, $N_2=a_1+a_2+a_3-a_4$,
$N_3=a_1+a_2-a_3+a_4$, $N_4=a_1-a_2+a_3+a_4$,
$N_5=-a_1+a_2+a_3+a_4$;
să se calculeze $2N_1^3-N_2^3-N_3^3-N_4^3-N_5^3$.

55. Fie $R_1=a_1+a_2+..+a_n$, $R_2=a_1+a_2+..+a_{n-1}-a_n,..$ $R_n=a_1-a_2+a_3+..+a_n$, $R_{n+1}=-a_1+a_2+a_3+..+a_n$; să se calculeze:

$$(n-2)\ R_1^3-R_2^3-R_3^3\ldots-R_n^3.$$

56. Să se arate că produsul a 4 numere întregi consecutive mărit cu 1 este un patrat perfect.

57. Să se pună sub forma unei sume de patrate expresiunea: $x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+\ldots+nx_n^2+2(x_1x_2+\ldots+x_1x_n)+$
$$2\,.\,2(x_2x_3+\ldots+x_2x_n)+\ldots+2(n-1)x_{n-1}x_n.$$

58. Cu ajutorul identităţii lui *Lagrange* să se pună produsul:
$$(x^2+y^2+z^2)(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2),$$
sub forma unei sume de 4 patrate.

59. Numărul $N=x^4+4y^4$ se poate descompune într'un produs de 2 factori sau într'o sumă de 4 patrate.

60. Să se arate că dacă avem $a_1+a_2+a_3=0$, vom avea şi
$$a_1^3a_2+a_2^3a_3+a_3^3a_1=a_1^3a_3+a_2^3a_1+a_3^3a_2,$$
fiecare din aceste expresiuni cu semnul schimbat fiind un patrat.

III. IMPĂRŢIREA.

— Să se dividă:

1. x^3+1 prin $x+1$.
2. $27x^3+8y^3$ prin $3x+2y$.
3. $64x^6-y^6$ prin $2x-y$.
4. a^5+b^5 prin $a+b$.
5. $x^3-x^2y+xy^2-y^3$ prin $x-y$.
6. $x^4+x^3-4x^2+5x-3$ prin x^2+2x-3.
7. $a^4+a^3b-8a^2b^2+19ab^3-15b^4$ prin $a^2+3ab-5b^2$.
8. a^6-b^6 prin $a^3+2a^2b+2ab^2+b^3$.
9. a^8-b^8 prin $a^2+ab\sqrt{2}+b^2$; câtul să se pună sub forma unui produs de 4 factori.
10. $(x^3-12x+16)(x^3-12x-16)$ prin x^2-16.
11. $(x^3-2x+1)(x^3-3x+2)$ prin x^3-3x^2+3x-1.
12. $(x^2-x-1)(2x^2+3)(x^2+x-1)(x-4)$ prin x^4-3x^2+1.
13. $(b^4+b^2c^2+c^4)a^4+4(b+c)(b^2+c^2)bca^3+(b^6-2b^5c+$
$+6b^3c^3-2bc^5+c^6)a^2+2(b+c)\,(b^4-4b^3c-4bc^3+c^4)bca+$
$b^8-14b^4c^4+c^8$
prin $(b^2+bc+c^2)a^2-(b+c)(b^2-bc+c^2)a+b^4-4b^2c^2+c^4$.

— Să se găsească câtul şi restul când se opreşte împărţirea la un termen de rang oarecare n:

14. 1 prin $1+x$.
15. 1 » $1-x$.
16. x » $x+1$.
17. x » x^2-1.
18. $1+2x$ prin $1-2x$.

— Să se determine m astfel ca polinomul:

19. $4x^2-6x+m$ să fie divizibil prin $x-3$.
20. x^4-5x^2+4x-m să fie divizibil prin $2x+1$.
21. $2x^4+4ax^3-5a^2x^2-3a^3x+m^4$ să fie divizibil prin $x-a$.
22. $x^4+ma^2x^2-5a^3x+a^4$ să fie divizibil prin $x-a$.
23. $x^3+y^3+z^3+mxyz$ să fie divizibil prin $x+y+z$

— Să se determine m şi n astfel ca polinomul:

24. x^4-3x^3+mx+n să fie divizibil prin x^2-5x+4.
25. x^4+1 » » » » x^2+mx+n.
26. x^3-3x^2+mx-3 » » » » x^2-nx+1.
27. $x^4+2x^3+5x^2-6x+m$ să fie divizibil cu x^2-x+n.
28. Să se determine m, n, p astfel ca polinomul,

$$x^4+mx^3+nx^2+px+8,$$

să fie divizibil prin $(x-1)(x+2)(x+4)$.

29. x^4+mx^2+nx+p să fie divizibil prin $(x-1)^3$.
30. Având $P(x)=x^3-3ax^2+(3a^2-b^2)x+b^2(a+b)$, să se arate că: $P(a-b)=P(a)=P(a+b)$ şi să se descompună în factori de gradul întâi polinomul

$$x^3-3ax^2+(3a^2-b^2)x-a(a^2-b^2).$$

31. Să se arate că expresia

$$(x+a)(y+b)(z+c)(u+d)-(y+z+u-a)(z+u+x-b)\times$$
$$(u+x+y-c)(x+y+z-d)$$

se divide cu $x+y+z+u$. Generalizare.

32. Să se determine A, B, C astfel ca polinomul

$$(x+1)^5+A(x+1)^3+Bx+C$$

să se dividă cu $(x-1)^3$ şi să se afle câtul.

33. Să se arate că polinomul

$P(x)\equiv(x+1)^6-6x(x+1)^4+32x^3$ se divide cu $(x-1)^4$ şi să se afle câtul.

34. Să se arate că polinomul $P_1(x) \equiv x^{12}+x^9+x^6+x^3+1$ se divide prin $P_2(x) \equiv x^4+x^3+x^2+x+1$ şi să se scrie câtul.

35. Să se arate că polinomul $(x+1)^7-x^7-1$ este divizibil cu $(x+1)(x^2+x+1)^2$.

36. Să se găsească condiţiunea ca x^m-a^m să fie divizibil prin x^n-a^n.

37. Să se determine coeficienţii a, b, c, d astfel ca polinomul $x^4-x^3+ax^2+bx+c$ divizat cu x^2+d să dea restul $+x$, iar divizat cu x^2-d să dea restul $-x$.

38. Să se descompună în produs de 2 factori cu coeficienţi întregi expresiunea: $6561x^4+2125764y^4$.

— Să se descompună în factori expresiunile următoare:

39. $a^6+a^5+a^4+2a^3+a^2+a+1$

40. $a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+8abc.$

41. $a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc.$

42. Să se arate că avem:

$$(a+b)(b+c)(c-a)+(b+c)(c+a)(a-b)+(c+a)(a+b)(b-c)+(a-b)(b-c)(c-a)=0.$$

43. Să se arate că polinomul:

$$(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c-x)^m+(x-b)(x-c)(b-c)(b+c)^m+(x-a)(x-c)(c-a)(c+a)^m+(x-a)(x-b)(a-b)(a+b)^m$$

este divizibil cu $(a-b)(b-c)(c-a)(x-a)(x-b)(x-c)$; să se calculeze câtul în cazul când $m=3$ sau $m=4$.

44. Să se arate că expresiunea:

$a^m(b-c)^n+b^m(c-a)^n+c^m(a-b)^n$, în care m este un întreg pozitiv, iar n un întreg pozitiv impar, este divizibilă cu $(a-b)(b-c)(c-a)$; să se găsească câturile în cazurile când $m=1$, $n=3$; $m=2$, $n=3$; $m=1$, $n=5$; $m=2$, $n=5$.

45. Să se descompună în factori expresiunea:

$(x+y+z)^5-(x+y-z)^5-(x-y+z)^5-(-x+y+z)^5$.

46. Polinomul $nx^{n+1}-(n+1)x^n+1$ este divizibil cu $(x-1)^2$; să se găsească legea de formaţiune a câtului.

47. Să se arate că expresiunea:

$(m-n)(x^m+1)(x^n+1)-2m(x^m+1)+2n(x^n+1)$ este divizibilă cu $(x-1)^2$. Să se calculeze câtul; m şi n sunt două numere întregi pozitive.

48. Să se arate că expresiunea $(x+y)^{2x-1}+(x+y)^{2y-1}-2$ este divizibilă cu $(x+y-1)^2$; x şi y fiind două numere întregi pozitive.

49. Să se găsească condiţiunile de divizibilitate ale expresiunei $x^p+mx^{p-q}y^q+mx^{p-2q}y^{2q}+y^p$ prin $(x+y)^2$.

50. Să se arate că polinomul:

$(x+y+z)^{2n+1}-x^{2n+1}-y^{2n+1}-z^{2n+1}$ este divizibil cu

$$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3.$$

Să se găsească câtul în cazul când $n=2$.

51. Dacă $x+y+z=0$, $x^{2n+1}+y^{2n+1}+z^{2n+1}$ este divizibil cu xyz.

52. Să se arate că expresiunea:

$x(y-z)^{6n+1}+y(z-x)^{6n+1}+z(x-y)^{6n+1}$ este divizibilă cu:

$$(x-y)(y-z)(z-x)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz),$$

să se găsească câtul când $n=1$.

53. Polinomul $f(x)$ divizat cu $x-a$ dă restul m, iar divizat cu $x-b$ restul n; care va fi restul diviziunei acelui polinom cu $(x-a)(x-b)$?

54. Să se găsească, fără a face împărţirea, restul diviziunei unui polinom întreg în x prin x^2-a^2, apoi prin x^3-a^3. Care sunt condiţiunile ca aceste împărţiri să se facă exact?

55. Să se arate că dacă un polinom întreg, simetric în raport cu x şi y, este divizibil cu $x-y$, el va fi divizibil şi cu $(x-y)^2$.

56. Dacă un polinom întreg, simetric în raport cu x, y, z este divizibil cu $(x-y)^\alpha$, $(y-z)^\beta$, $(z-x)^\gamma$, α, β, γ fiind numere întregi, fără soţ, el va fi divizibil şi cu:

$$(x-y)^{\alpha+1}(y-z)^{\beta+1}(z-x)^{\gamma+1}.$$

57. Fie $P(x)$ un polinom întreg în x, $Q(x)$ câtul diviziunei lui $P(x)-P(a)$ prin $x-a$, $Q'(x)$ câtul diviziunei lui $Q(x)-Q(a)$ prin $x-a$, etc.; presupunând $P(x)=x^6$, să se calculeze polinoamele Q, Q'.... şi să se arate că $P(x)$ poate fi pus sub forma:

$$P(x)=x^6=a^6+A_1(x-a)+A_2(x-a)^2+...+A_6(x-a)^6.$$

A_1, A_2...A_6 fiind nişte coeficienţi independenţi de x.

58. P(x) este un polinom întreg în raport cu x şi cu coeficienţii întregi. Să se arate că dacă acest polinom este divizibil cu $x-a$, a fiind un număr întreg, unul din numerile P(0), P(1), este divizibil cu 2; unul din numerile P(0), P(1), P(2) este divizibil cu 3; unul din numerile P(0), P(1),..., P$(n-1)$ este divizibil cu n. Reciproc, dacă nici unul din numerile P(0), P(1),..., P$(n-1)$ nu este divizibil cu n, polinomul dat nu se poate reduce la zero pentru nici o valoare întreagă a lui x.

IV. FRACŢIUNI.

— Să se adune fracţiunile:

1. $$\frac{a}{2a-2b}+\frac{b}{2b-2a}.$$

2. $$\frac{2}{x}-\frac{3}{2x-1}-\frac{2x-3}{4x^2-1}.$$

3. $$\frac{3}{1-2x}-\frac{7}{1+2x}+\frac{20x-4}{4x^2-1}.$$

— Să se multiplice fracţiunile:

4. $$\frac{(a-b)^2}{a+b}\times\frac{b}{x(a-b)}.$$

5. $$\frac{x^2+xy}{x^2+y^2}\times\frac{x^3-y^3}{xy(x+y)}.$$

6. $$\frac{3ax}{4by}\times\frac{a^2-x^2}{c^2-x^2}\times\frac{bc+bx}{a^2+ax}\times\frac{c-x}{a-x}.$$

— Să se efectueze calculele şi să se simplifice:

7. $$\left(\frac{a+x}{a-x}+\frac{a-x}{a+x}\right):\left(\frac{a+x}{a-x}-\frac{a-x}{a+x}\right).$$

8. $$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}}\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right).$$

9. $$\frac{3abc}{-ab+ac+bc}-\frac{\dfrac{a-1}{a}+\dfrac{b-1}{b}+\dfrac{c-1}{c}}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}}.$$

10. $$\frac{1}{x+\dfrac{1}{1+\dfrac{x+1}{3-x}}}.$$

11. $$\frac{\dfrac{1-x}{1-x+x^2}+\dfrac{1-x^2}{1-x^3}}{\dfrac{1+x}{1+x+x^2}-\dfrac{1-x^2}{1+x^3}}.$$

12. $$\frac{3\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^2-\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^3-3\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)+1}{3\left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)-3\left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)^2+\left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)^3-1}.$$

13. $$\frac{x^3}{x-1}-\frac{x^2}{x+1}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}.$$

14. $$\frac{x^{3n}}{x^n-1}-\frac{x^{2n}}{x^n+1}-\frac{1}{x^n-1}+\frac{1}{x^n+1}.$$

15. $$\frac{\dfrac{1}{a-b+c}+\dfrac{1}{a+b-c}}{1-\dfrac{b+c-a}{a+b+c}}+\frac{\dfrac{1}{a+b-c}+\dfrac{1}{b+c-a}}{1-\dfrac{a-b+c}{a+b+c}}+$$
$$+\frac{\dfrac{1}{b+c-a}+\dfrac{1}{a-b+c}}{1-\dfrac{a+b-c}{a+b+c}}$$

16. $$a\left(\frac{\dfrac{b}{c-a}+\dfrac{c}{a-b}}{\dfrac{c-a}{b}+\dfrac{a-b}{c}}\right)+b\left(\frac{\dfrac{c}{a-b}+\dfrac{a}{b-c}}{\dfrac{a-b}{c}+\dfrac{b-c}{a}}\right)+$$

$$+c\left(\frac{\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}}{\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}}\right)$$

17. $$\frac{\left[\frac{a-b}{a-1}+\frac{b-1}{a+b}-1\right]\left[\frac{b-c}{b-1}+\frac{c-1}{b+c}-1\right]\left[\frac{c-a}{c-1}+\frac{a-1}{c+a}-1\right]}{\left[\frac{a-b}{a+1}+\frac{b+1}{a+b}-1\right]\left[\frac{b-c}{b+1}+\frac{c+1}{b+c}-1\right]\left[\frac{c-a}{c+1}+\frac{a+1}{a+c}-1\right]}$$

— Să se arate că:

18. $$\frac{a}{(a+b-c)(a+c-b)}+\frac{b}{(b+a-c)(b+c-a)}-\frac{c}{(c+a-b)(c+b-a)}=\frac{1}{a+b-c}$$

19. $$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)+abc\left(a^2+b^2+c^2+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2\right)=\frac{(abc+1)(ab+c)(bc+a)(ca+b)}{abc}$$

20. $$\frac{a+1}{a-1}+\frac{a^2+1}{a^2-1}-\frac{a^3-1}{a^3+1}=\frac{(a+1)(a^2+1)(a^3-1)}{(a-1)(a^2-1)(a^3+1)}$$

21. $$\frac{x^2-1}{x^2+1}+\frac{y^2-1}{y^2+1}+\frac{z^2-1}{z^2+1}+\frac{x^2-1}{x^2+1}\cdot\frac{y^2-1}{y^2+1}\cdot\frac{z^2-1}{z^2+1}=$$
$$=\frac{4(x^2y^2z^2-1)}{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)}.$$

22. $$\left(\frac{\frac{x-a}{x-b}+\frac{x-c}{x-d}}{\frac{x-b}{x-a}+\frac{x-d}{x-c}}\right)\left(\frac{\frac{x+a}{x+b}+\frac{x+c}{x+d}}{\frac{x+b}{x+a}+\frac{x+d}{x+c}}\right)=\frac{\frac{x^2-a^2}{x^2-b^2}+\frac{x^2-c^2}{x^2-d^2}}{\frac{x^2-b^2}{x^2-a^2}+\frac{x^2-d^2}{x^2-c^2}}$$

23. $$\left[\frac{\frac{x+a}{x+b}+\frac{x+c}{x+d}}{\frac{x+b}{x+a}+\frac{x+d}{x+c}}\right]^n=\frac{\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^n+\left(\frac{x+c}{x+d}\right)^n}{\left(\frac{x+b}{x+a}\right)^n+\left(\frac{x+d}{x+c}\right)^n}$$

— Să se simplifice fracțiunile:

24. $$\frac{x^2-3x-4}{x^2-4x-5}$$

25. $$\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}.$$

26. $$\frac{x^3+3x^2+2x}{x^5+32}.$$

27. $$\frac{x^4+3x^3-7x^2-21x-36}{x^4+2x^3-10x^2-11x-12},$$

28. $$\frac{(a+b+c)^4-5(a+b+c)^2+4}{(a+b+c)^2+3(a+b+c)+2}$$

29. $$\frac{(a+b)^3+(a+b)^2+(a+b)+1}{(a+b)^3-(a+b)^2+(a+b)-1}$$

30. $$\frac{[(\alpha^2+\beta^2)^4+(\alpha^2-\beta^2)^4+(2\alpha\beta)^4]^2}{(\alpha^2+\beta^2)^8+(\alpha^2-\beta^2)^8+(2\alpha\beta)^8}$$

31. Dacă $M=(x+y)^{18}-(x+y)^{13}(x^5+y^5)-(x+y)^5(x^{13}+y^{13})+x^{18}+y^{18}+x^{13}y^5+x^5y^{13}$,

$N=5(x+y)^{18}+11x^2y^2(x+y)^{14}-5(x+y)^{11}(x^7+y^7)-11x^2y^2(x+y)^9(x^5+y^5)-5(x+y)^7(x^{11}+y^{11})-11x^2y^2(x+y)^7\times(x^7+y^7)+11x^2y^2(x+y)^2(x^7+y^7)(x^5+y^5)+5(x^{11}+y^{11})(x^7+y^7)$,

să se simplifice fracția $\frac{M}{N}$.

32. Fie $M=(x+y)^{18}-(x+y)^{13}(x^5+y^5)-(x+y)^5(x^{13}+y^{13})+x^{18}y^{18}(x^{-18}+y^{-18})+x^{13}y^5+x^5y^{13}$,

$N=(x+y)^{18}-(x+y)^{11}(x^7+y^7)-(x+y)^7(x^{11}+y^{11})+x^{18}y^{18}(x^{-18}+y^{-18})+x^{11}y^7+x^7y^{11}$,

să se simplifice fracția $\frac{M}{N}$.

33. Dacă $ab=cd$, avem:

$$\frac{a-1}{a+1}+\frac{b-1}{b+1}-\frac{c-1}{c+1}-\frac{d-1}{d-1}=\frac{(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)}{(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)}\times\left[\frac{c+1}{c-1}+\frac{d+1}{d-1}-\frac{a+1}{a-1}-\frac{b+1}{b-1}\right]$$

34. Dacă avem $\frac{a-b}{1+ab}+\frac{c-d}{1+cd}=0$, vom avea şi

$$\frac{a-d}{1+ad}=\frac{b-c}{1+bc},\quad \frac{a+c}{1-ac}=\frac{b+d}{1-bd}.$$

35. Dacă avem $A=\frac{(b-c)^2}{\beta-\gamma}$, $B=\frac{(c-a)^2}{\gamma-\alpha}$, $C=\frac{(a-b)^2}{\alpha-\beta}$,

vom avea şi

$$(Aa+Bb+Cc)^2=(A+B+C)(Aa^2+Bb^2+Cc^2).$$

— Să se adune fracţiunile:

36. $\frac{1}{a(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b(b-a)(b-c)}+\frac{1}{c(c-a)(c-b)}$.

37. $\frac{a+b}{(c-a)(c-b)}+\frac{b+c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c+a}{(b-a)(b-c)}$.

38. $\frac{ab}{(c-a)(c-b)}+\frac{bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{ca}{(b-a)(b-c)}$.

39. $\frac{ab}{c(c-a)(c-b)}+\frac{bc}{a(a-b)(a-c)}+\frac{ca}{b(b-a)(b-c)}$.

40. $\frac{a+b}{ab}(a^2+b^2-c^2)+\frac{a+c}{ac}(a^2+c^2-b^2)+\frac{b+c}{bc}(b^2+c^2-a^2)$.

41. $\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$.

42. $\frac{a^4}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^4}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^4}{(c-a)(c-b)}$.

43. $\frac{a_1^3}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)}+\frac{a_2^3}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)}$

$$+\frac{a_3^3}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)}+\frac{a_4^3}{(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)}$$

44. $\frac{a_1^{n-1}}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\dots(a_1-a_n)}+\frac{a_2^{n-1}}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\dots(a_2-a_n)}+\dots$

$$\dots+\frac{a_n^{n-1}}{(a_n-a_1)(a^n-a_2)\dots(a_n-a_{n-1})},$$

45. Să se verifice identitatea:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{a_i^m}{(a_i-a_1)(a_i-a_2)\dots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\dots(a_i-a_n)} =$$

$$\sum a_1^{\alpha_1}\, a_2^{\alpha_2}\dots a_n^{\alpha_n},$$

în care $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ iau toate valorile întregi pozitive sau nule pentru care $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n=m-n+1$.
Când $m<n-1$ suma precedentă este nulă.

46. $$\frac{x^2y^2z^2}{a^2b^2}+\frac{(x^2-a^2)(y^2-a^2)(z^2-a^2)}{a^2(a^2-b^2)}+\frac{(x^2-b^2)(y^2-b^2)(z^2-b^2)}{b^2(b^2-a^2)}.$$

47. $$\frac{a^3b^3}{(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)}+\frac{a^3c^3}{(a-b)(a-d)(c-b)(c-d)}+$$

$$\frac{a^3d^3}{(a-b)(a-c)(d-b)(d-c)}+\frac{b^3c^3}{(b-a)(b-d)(c-a)(c-d)}+$$

$$\frac{b^3d^3}{(b-a)(b-c)(d-a)(d-c)}+\frac{c^3d^3}{(c-a)(c-b)(d-a)(d-b)}.$$

— Fie $2p=a+b+c$, să se arate că avem:

48. $$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}-\frac{1}{p}=\frac{abc}{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

49. $$\frac{abc}{(p-a)(p-b)(p-c)}-\frac{a(p-a)}{(p-b)(p-c)}-\frac{b(p-b)}{(p-c)(p-a)}-\frac{c(p-c)}{(p-a)(p-b)}=2.$$

50. Dacă avem $xy+xz+yz=1$, vom avea și

$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}=\frac{4xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}.$$

51. Dacă avem $x+y+z=0$, vom avea și

$$\frac{x^2}{2x^2+yz}+\frac{y^2}{2y^2+xz}+\frac{z^2}{2z^2+xy}=1.$$

52. Fie $A=\frac{y}{z}+\frac{z}{y}$, $B=\frac{z}{x}+\frac{x}{z}$, $C=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$,

să se calculeze $A^2+B^2+C^2-ABC$.

— Să se arate că, având $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$, vom avea şi:

53. $$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}=-3.$$

54. $$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=-\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}.$$

55. $$\left(\frac{a^2-bc}{b+c}+\frac{b^2-ac}{c+a}+\frac{c^2-ab}{a+b}\right)\left(\frac{b+c}{a^2-bc}+\right.$$
$$\left.+\frac{c+a}{b^2-ac}+\frac{a+b}{c^2-ab}\right)=\frac{3}{abc}(a^3+b^3+c^3).$$

56. Să se pună fracţiunile $\frac{x-1}{3x^2-7x+2}$, $\frac{3x-5}{x^2-3x+1}$, $\frac{2x+1}{3x^2-x+6}$, sub forma: $\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}$.

Generalizare pentru fracţiunile: $\frac{5x+7}{x(x+3)(x-4)}$, $\frac{x^2+2x-3}{x^2(x+11)}$.

57. Să se verifice identitatea:

$$\frac{1}{p}\left[\frac{1}{p+1}+\frac{2}{p+2}+\dots+\frac{n}{p+n}\right]=\frac{1}{(p+n)(p+n-1)}+$$
$$\frac{2}{(p+n-1)(p+n-2)}+\dots+\frac{n}{p(p+1)}.$$

58. m fiind un număr întreg pozitiv, avem:

$$\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\dots+\frac{1}{2m}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots$$
$$\dots+\frac{1}{2m-1}-\frac{1}{2m}.$$

V. RADICALE.

— Să se efectueze calculele:

1. $$\left(x^{\frac{2}{3}}\times x^{\frac{4}{7}}\right)^{\frac{14}{13}}$$

2. $$a^{\frac{1}{3}}\,a^{-\frac{3}{4}}\,\sqrt[3]{a^4}\,a^{\frac{1}{12}}\,\sqrt[8]{a^{\frac{25}{3}}}\left(a^{-\frac{7}{4}}\right)^{\frac{7}{6}}.$$

3. $\left(a^{\frac{7}{2}}-a^3+a^{\frac{5}{2}}-a^2+a^{\frac{3}{2}}-a+a^{\frac{1}{2}}-1\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+1\right).$

4. $\left(x^{\frac{3}{2}}-xy^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}y-y^{\frac{3}{2}}\right):\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right).$

5. $\left(\sqrt[8]{x}-1\right)\left(x^{\frac{1}{8}}+1\right)\left(\sqrt[4]{x}+1\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+1\right)(x+1).$

6. $\left(\sqrt[4]{a^3b}\,\sqrt[3]{abc}\sqrt{\frac{a^2b^3c^5}{d^3}}\right):\left(\sqrt[6]{\frac{bc}{a^3}}\,\sqrt[4]{ab^2c^7}\right)$ (P. S. A. P. 95).

7. Din $\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}=\frac{D}{d}$, să se deducă:

$$\sqrt{Aa}+\sqrt{Bb}+\sqrt{Cc}+\sqrt{Dd}=\sqrt{(A+B+C+D)(a+b+c+d)}.$$

8. Din $\frac{A_1}{a_1}=\frac{A_2}{a_2}=\frac{A_3}{a_3}=\ldots=\frac{A_n}{a_n}$, să se deducă:

$$\sum\sqrt[n]{A_i a_i^{n-1}}=\sqrt[n]{(\Sigma A_i).(\Sigma a_i)^{n-1}}.$$

— Să se simplifice expresiunile:

9. $\dfrac{\left[(a^m)^{\frac{1}{r}}(a^q)^{\frac{1}{n}}\right]^{nr}}{\left[\sqrt[q]{b^n}\,\sqrt[m]{b^r}\right]^{mq}}:\left[\left(\frac{a}{b}\right)^q\right]^r.$

10. $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}-ax^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}x-x^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{5}{2}}-a^2x^{\frac{1}{2}}+3a^{\frac{3}{2}}x-3ax^{\frac{3}{2}}+a^{\frac{1}{2}}x^2-x^{\frac{5}{2}}}.$

11. $\dfrac{x^2+y+\sqrt[3]{z^2}-2x\sqrt{y}+2x\sqrt[3]{z}-2\sqrt[6]{y^3z^2}}{x^2-y-\sqrt[3]{z^2}+2\sqrt[6]{y^3z^2}}.$

(P. S. A. P. 96).

12. $\dfrac{\sqrt[4]{x^3}+\sqrt{x}\sqrt[8]{y}+\sqrt[4]{xy}+\sqrt[8]{y^3}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{y}}:\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}\sqrt[6]{y}+\sqrt[3]{y}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[8]{y}}.$

(P. S. A. P. 98).

13. $\dfrac{x-\sqrt[3]{y^2}-\sqrt{z}+2\sqrt[12]{y^4z^3}}{x+\sqrt[3]{y^2}+\sqrt{z}-2\sqrt[6]{x^3y^2}+2\sqrt[4]{x^2z}-2\sqrt[12]{y^4z^2}}:\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[4]{z}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{y}+\sqrt[4]{z}}$

(P. S. A. P. 99).

14. $\dfrac{n^3-3n+(n^2-1)\sqrt{n^2-4}-2}{n^3-3n+(n^2-1)\sqrt{n^2-4}+2}.$

15. $\dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^4+(\sqrt{y}-\sqrt{z})^4+(\sqrt{z}-\sqrt{x})^4}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2+(\sqrt{y}-\sqrt{z})^2+(\sqrt{z}-\sqrt{x})^2}\times$

$$\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z})}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}+z\sqrt{z}-3\sqrt{xyz}}.$$

16. $\sqrt{a^2+\sqrt[3]{a^4b^2}}+\sqrt{b^2+\sqrt[3]{a^2b^4}}.$

17. $\sqrt[3]{\dfrac{x^3-3x+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{2}}+\sqrt[3]{\dfrac{x^3-3x-(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{2}}.$

— Să se arate că avem:

18. $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}-b}+\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}+b}-2\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=0.$

19. $\dfrac{\sqrt[4]{a}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{c})}+\dfrac{\sqrt[4]{b}}{(\sqrt{b}-\sqrt{a})(\sqrt{b}-\sqrt{c})}+$

$$\frac{\sqrt[4]{c}}{(\sqrt{c}-\sqrt{a})(\sqrt{c}-\sqrt{b})}=\frac{1}{\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt[4]{b}+\sqrt[4]{c}\right)\left(\sqrt[4]{c}+\sqrt[4]{a}\right)}.$$

— Să se facă raţionali numitorii expresiunilor:

20. $\dfrac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}.$

21. $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}.$

22. $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}},$ caz particular $a+b=c+d.$

23. $\dfrac{15}{\sqrt{10}+\sqrt{20}-\sqrt{5}-\sqrt{80}+\sqrt{40}}.$

24. $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}+\sqrt{b}}.$

25. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt{b}}$. 26. $\dfrac{1}{\sqrt[6]{a}+\sqrt[4]{b}}$.

27. $\dfrac{1}{\sqrt[m]{a}+\sqrt[n]{b}}$. 28. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{a+b}}$.

29. Să se arate că expresiunea:

$$\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{5-\sqrt{5}}}{\sqrt{5+\sqrt{5}}-\sqrt{5-\sqrt{5}}}-\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}-\sqrt{5-\sqrt{5}}}{\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{5-\sqrt{5}}}$$

este rațională.

— Să se simplifice expresiunile:

30. $$E=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}+\frac{\sqrt{2\sqrt{3}+3}+\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2\sqrt{3}-3}}+\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}.$$

31. $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}\,.\,\sqrt{(\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)}-\sqrt{3}\,\sqrt[3]{3}.$

32. Să se arate că expresiunea:

$$2\left[x-y+\sqrt{2(x^2+y^2)}\right]\left[x+y+\sqrt{2(x^2+y^2)}\right]$$

este un patrat.

— Să se arate că:

33. $$\frac{1}{\sqrt{\sqrt{(a-b)(b-c)}+\sqrt{(b-c)(c-a)}+\sqrt{(c-a)(a-b)}}}=$$

$$\frac{\sqrt{2}\left[\sqrt{(a-b)^3}+\sqrt{(b-c)^3}+\sqrt{(c-a)^3}+\sqrt{(a-b)(b-c)(c-a)}\right]}{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}.$$

34. $$\sqrt{\frac{1}{\sqrt{a-b}}+\frac{1}{\sqrt{b-c}}+\frac{1}{\sqrt{c-a}}}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt[4]{\frac{a-b}{(b-c)(c-a)}}+\sqrt[4]{\frac{b-c}{(c-a)(a-b)}}+\sqrt[4]{\frac{c-a}{(a-b)(b-c)}}\right].$$

35. $$\frac{\sqrt[n]{\dfrac{x+a}{x+b}}+\sqrt[n]{\dfrac{x-a}{x-b}}}{\sqrt[n]{\dfrac{x+b}{x+a}}+\sqrt[n]{\dfrac{x-b}{x-a}}}+\frac{\sqrt[n]{\dfrac{x+a}{x+b}}-\sqrt[n]{\dfrac{x-a}{x-b}}}{\sqrt[n]{\dfrac{x+b}{x+a}}-\sqrt[n]{\dfrac{x-b}{x-a}}}=0.$$

— Ce devin expresiunile:

36. x^4-2ax^2+b pentru $x=\sqrt{\frac{a+\sqrt{b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{b}}{2}}$.

37. $\frac{x^\alpha+ax^\beta+b}{x^\alpha+bx^\beta+c}$ pentru $x=\sqrt[\alpha]{\frac{b^2-ac}{a-b}}$.

38. $\frac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}}$ pentru $x=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a}{b}-1}$.

39. $\frac{1+x}{1+\sqrt{1+x}}+\frac{1-x}{1-\sqrt{1-x}}$ pentru $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

40. $\frac{2a\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}$ pentru $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$.

41. $\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}$ pentru $x=\sqrt{\frac{2ab}{a^2+b^2}}$.

42. $\frac{\sqrt[n]{1+x^2}+\sqrt[n]{1-x^2}}{\sqrt[n]{1+x^2}-\sqrt[n]{1-x^2}}$ pentru $x=\sqrt{\frac{(a+b)^n-(a-b)^n}{(a+b)^n+(a-b)^n}}$.

43. $\frac{(a-x)\sqrt[3]{x-b}+(x-b)\sqrt[3]{a-x}}{\sqrt[3]{a-x}-\sqrt[3]{x-b}}$ pentru $x=\frac{ab(a^2+b^2)}{a^3+b^3}$.

44. $\frac{(a+x)\sqrt[3]{a-x}-(b+x)\sqrt[3]{b-x}}{\sqrt[3]{a-x}-\sqrt[3]{b-x}}$ pentru $x=\frac{a^4-b^4}{a^3-b^3}$.

45. $2(uv-\sqrt{u^2-1}\,\sqrt{v^2-1})$ şi $2(uv+\sqrt{u^2-1}\,\sqrt{v^2-1})$

pentru $2u=x+\frac{1}{x}$, $2v=y+\frac{1}{y}$.

46. $\frac{1-xy}{x+y}+\frac{x+y}{1-xy}$ şi $\frac{1+xy}{x-y}+\frac{x-y}{1+xy}$

pentru $x=\frac{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}+\sqrt{1+b}-\sqrt{1-b}}{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}+\sqrt{1+b}+\sqrt{1-b}}$,

$$y=\frac{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}-\sqrt{1+b}+\sqrt{1-b}}{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}+\sqrt{1+b}+\sqrt{1-b}}.$$

VI. ECUAŢIUNI DE GRADUL INTÂI CU O NECUNOSCUTĂ.

— Să se rezolve ecuaţiunile:

1. $\frac{2x-1}{3}-\frac{3x-2}{4}=\frac{5x-4}{6}-\frac{7x+6}{12}.$

2. $\frac{x-1}{3}+\frac{4x-\frac{3}{4}}{5}-\frac{7x-6}{8}=2+\frac{x-2}{2}+\frac{3x-9}{10}.$

3. $\frac{2x+5}{13}+\frac{40-x}{8}=\frac{10x-427}{19}.$

4. $\frac{x}{7}-\frac{x-5}{11}+5=x-\frac{2x}{77}-1.$

5. $(x-5)(x-2)-(x-5)(2x-5)+(x+7)(x-2)=0.$

6. $(x-3)-(3-x)(x+1)=(x-3)(1+x)+3-x.$

7. $(x-\frac{5}{2})(x+\frac{3}{2})=(x-5)(x+3)+\frac{93}{4}.$

8. $(x+\frac{5}{2})(x-\frac{3}{2})=(x+5)(x-3)-\frac{3}{4}.$

9. $(x+1)^2=[6-(1-x)]x-2.$

10. $\frac{2}{2x-5}+\frac{1}{x-3}=\frac{6}{3x-1}.$

11. $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-4}=\frac{1}{x-6}-\frac{1}{x-8}.$

12. $\frac{x-1}{x-2}-\frac{x-2}{x-3}=\frac{x-5}{x-6}-\frac{x-6}{x-7}.$

13. $\frac{4}{x+2}+\frac{7}{x+3}=\frac{37}{x^2+5x+6}.$

14. $\frac{3+2x}{1+2x}-\frac{5+2x}{7+2x}=1-\frac{4x^2-2}{7+16x+4x^2}.$

15. $\frac{6-5x}{15}-\frac{7-2x^2}{14(x-1)}=\frac{3x+1}{21}-\frac{10x-11}{30}+\frac{1}{105}.$

16. $\frac{x}{2}-\frac{4(2x-3)-3(3x-1)}{6(x-1)}=\frac{3}{2}\cdot\frac{x^2+2}{3x-2}.$

17. $$1+\frac{9x^2}{3x^2-12x}-\frac{19x-6}{3x^2-10x-8}=\frac{6x}{3x+2}.$$

18. $$\frac{m(x+a)}{x+b}+\frac{n(x+b)}{x+a}=m+n.$$

19. $$\frac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}=\frac{ax+b}{px+q}.$$

20. $$\left(\frac{x-a}{x+b}\right)^3=\frac{x-2a-b}{x+a+2b}.$$

21. $$(a+b+c)x-\frac{a^2+b^2}{a-b}=\frac{2abx}{a+b}+\frac{a+b}{a-b}c.$$

22. $$\frac{3abc}{a+b}+\frac{a^2b^2}{(a+b)^3}+\frac{(2a+b)b^2x}{a(a+b)^2}=3cx+\frac{bx}{a}.$$

23. $$\frac{ax+m+1}{ax+m-1}+\frac{ax+n}{ax+n-2}=\frac{ax+m}{ax+m-2}+\frac{ax+n+1}{ax+n-1}.$$

24. $$(2a-b-x)^3+(a-2b+x)^3=27(a-b)^3.$$

25. $$(ma-nb-px)^3+(na-mb+px)^3=(m+n)^3(a-b)^3.$$

26. $$\frac{(a-x)^2+(x-b)^2}{(a-x)^2-(x-b)^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}.$$

27. $$x\left(\frac{x-2a}{x+a}\right)^3+a\left(\frac{2x-a}{x+a}\right)^3=x^2-a^2.$$

28. $$\frac{(x+a)(x+b)}{(x-a)(x-b)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(x+a)(x+b)}=$$
$$\frac{(x+c)(x+d)}{(x-c)(x-d)}+\frac{(x-c)(x-d)}{(x+c)(x+d)}.$$

29. $$\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1.$$ (P. S. A. P. 95).

30. $$\frac{10x^2+1}{10x+13+\frac{12}{x-1}}+\sqrt{x^2-2x+1}=0.$$

31. $$\sqrt{a+x}-\sqrt{\frac{a^2}{a+x}}=\sqrt{2a+x}.$$

32. $\dfrac{x-1-\sqrt{2x+x^2}}{\sqrt{2x+x^2}}=\dfrac{\sqrt{x-2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}.$

33. $\sqrt{(2a+x)^2+b^2}+\sqrt{(2a-x)^2+b^2}=2a.$

34. $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{x}{x+\sqrt{x}}}.$

35. $\sqrt{a-x}+2\sqrt{a+x}=\sqrt{a-x+\sqrt{ax+x^2}}.$

36. $\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=b.$

37. $\sqrt[3]{a+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{x}}=\sqrt[3]{b}.$

38. $\sqrt[3]{\dfrac{1+x}{1-x}}+\sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x}}=c.$

39. $\dfrac{\sqrt[3]{(a+x)^2}+\sqrt[3]{a^2-x^2}+\sqrt[3]{(a-x)^2}}{\sqrt[3]{(a+x)^2}-\sqrt[3]{a^2-x^2}+\sqrt[3]{(a-x)^2}}=c.$

40. $\sqrt{1-a}\sqrt[4]{\dfrac{1+x}{1-x}}+\sqrt{1+a}\sqrt[4]{\dfrac{1-x}{1+x}}=2\sqrt{1-a^2}.$

41. $(\sqrt[4]{x+a}+\sqrt[4]{x-a})^3\,(\sqrt[4]{x+a}-\sqrt[4]{x-a})=2b.$

42. $\dfrac{\sqrt[n]{a^2+x^2}+\sqrt[n]{a^2-x^2}}{\sqrt[n]{a^2+x^2}-\sqrt[n]{a^2-x^2}}=\dfrac{a}{b}.$

43. $\dfrac{\sqrt[n]{a+x}}{x}+\dfrac{\sqrt[n]{a+x}}{a}=\dfrac{\sqrt[n]{x}}{c}.$

VII. ECUAȚIUNI DE GRADUL I-iu CU MAI MULTE NECUNOSCUTE.

— Să se rezolve sistemele de ecuații:

1. $\dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{6}=18,\qquad \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{4}=21.$

2. $\dfrac{x+y}{2}-\dfrac{x-y}{3}=8,\qquad \dfrac{x+y}{3}+\dfrac{x-y}{4}=11.$

3. $$\frac{2x}{3}-4+\frac{y}{2}+x=8-\frac{3y}{4}+\frac{1}{12},$$

$$\frac{y}{6}-\frac{x}{2}+2=\frac{1}{6}-2x+6.$$

4. $$\frac{\frac{2}{3}x-\frac{5}{12}y}{\frac{7}{4}}-\frac{\frac{3}{2}x-\frac{1}{3}y}{\frac{23}{2}}=2, \qquad \frac{x-y}{x+y}=\frac{1}{5}.$$

5. $$\frac{x}{b+c}+\frac{y}{a+c}=2, \qquad \frac{ax-by}{c(a-b)}=1.$$

6. $$\frac{x}{a+b}+\frac{y}{a-b}=2a, \qquad \frac{x-y}{4ab}=1.$$

7. $$\frac{x}{a+b}+\frac{y}{a^2+ab}+\frac{1}{ab(a^2-b^2)}=$$

$$\frac{x}{(a^2+ab)(ab-b^2)}+\frac{y}{ab(a-b)}+\frac{1}{ab-b^2}$$

$$\frac{x}{a^2+ab+b^2}+\frac{y}{a^3+ab(a+b)}+\frac{1}{ab(a^3-b^3)}=$$

$$\frac{x}{a^4b-ab^4}+\frac{y}{ab(a-b)}+\frac{1}{ab-b^2}.$$

8. $$\frac{p}{x}+\frac{q}{y}=a, \qquad \frac{q}{x}+\frac{p}{y}=b.$$

9. $$(ap^m+bq^m)x+(ap^{m-1}+bq^{m-1})y=ap^{m-2}+bq^{m-2},$$
$$(ap^{m+1}+bq^{m+1})x+(ap^m+bq^m)y=ap^{m-1}+bq^{m-1}.$$

10. $$\frac{ax-by}{cx-dy}=\frac{m}{n}, \qquad x^2+y^2=k^2.$$

11. $x^4+xy^3=a, \qquad y^4+yx^3=b.$

12. $(x+y)^3(x-y)^2=a, \qquad (x+y)^2(x-y)^3=b.$

13. $x^2y=(a-x)^3, \qquad y^2x=(b-y)^3.$

14. $\sqrt{y}-\sqrt{20-x}=\sqrt{y-x}, \quad 3\sqrt{20-x}=2\sqrt{y-x}.$

15. $5\sqrt{x}-3\sqrt{y}=3, \qquad 25x-9y=81.$

16. $2x-7y+4z=0,\ 3x-3y+z=0,\ 9x+5y+3z=28.$

17. $5x-6y+4z=15,\ 7x+4y-3z=19,\ 2x+y+6z=46.$

18. $\frac{x}{4}+5y-\frac{z}{6}=20, \quad 3x-y=2, \quad 4x+5z=23.$

(P. S. A. P. 95).

19. $x+y+z=0, \quad (b+c)x+(c+a)y+(a+b)z=0,$
$bcx+acy+abz=1.$

20. $x-ay+a^2z-a^3=0, \quad x-by+b^2z-b^3=0,$
$x-cy+c^2z-c^3=0.$ (P. S. A. P. 96).

21. $$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\frac{x}{b}+\frac{y}{c}+\frac{z}{a}=\frac{x}{c}+\frac{y}{a}+\frac{z}{b}=$$
$$=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

22. $$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \quad \frac{x}{a^2}+\frac{y}{b^2}+\frac{z}{c^2}=\frac{1}{\alpha},$$
$$\frac{x}{a^3}+\frac{y}{b^3}+\frac{z}{c^3}=\frac{1}{\alpha^2}.$$ (P. S. A. P. 97).

23. $$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=1, \quad \frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}=\alpha, \quad \frac{a^3}{x}+\frac{b^3}{y}+\frac{c^3}{z}=\alpha^2.$$

24. $$\frac{x^2}{\rho^2}+\frac{y^2}{\rho^2-b^2}+\frac{z^2}{\rho^2-c^2}=1, \quad \frac{x^2}{\mu^2}+\frac{y^2}{\mu^2-b^2}+\frac{z^2}{\mu^2-c^2}=1,$$
$$\frac{x^2}{\nu^2}+\frac{y^2}{\nu^2-b^2}+\frac{z^2}{\nu^2-c^2}=1.$$

25. $$\frac{x}{a-\lambda}+\frac{y}{b-\lambda}+\frac{z}{c-\lambda}=\frac{x}{a-\mu}+\frac{y}{b-\mu}+\frac{z}{c-\mu}=$$
$$\frac{x}{a-\nu}+\frac{y}{b-\nu}+\frac{z}{c-\nu}=1.$$

26. $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c},\ x^2+y^2+z^2=1.$

27. $\frac{-x+y+z}{a}=\frac{x-y+z}{b}=\frac{x+y-z}{c}, \quad xyz=m^3.$

28. $(y+z)(x+y+z)=2a, \qquad (z+x)(x+y+z)=2b,$
$$(x+y)(x+y+z)=2c.$$

29. $\dfrac{x^m}{a^{m+n}}=\dfrac{y^m}{b^{m+n}}=\dfrac{z^m}{c^{m+n}}, \qquad \left(\dfrac{x}{a}\right)^m+\left(\dfrac{y}{b}\right)^m+\left(\dfrac{z}{c}\right)^m=1$

şi să se elimine a, b, c între relaţiile de mai sus şi
$$a^n+b^n+c^n=d^n.$$

30. $y+z=axyz(x+y+z), \qquad z+x=bxyz(x+y+z),$
$$x+y=cxyz(x+y+z).$$

31. $x(x+y+z)=a-yz, \qquad y(x+y+z)=b-zx,$
$$z(x+y+z)=c-xy.$$

32. $ax^n=by^n=cz^n, \qquad \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{d},$

şi să se calculeze valoarea expresiunei $ax^{n-1}+by^{n-1}+cz^{n-1}$.

33. $x+y+axy=l, \quad y+z+ayz=m, \qquad z+x+axz=n.$

34. $x^3+y^3+z^3-3xyz=0, \qquad x-a=y-b=z-c.$

35. $\dfrac{xy+xz}{a}=\dfrac{yz+yx}{b}=\dfrac{zx+zy}{c},$
$$xy+xz+yz=(a+b+c)xyz.$$

36. $\dfrac{x(z-1)}{y-1}=a, \qquad \dfrac{x^2(z^2-1)}{y^2-1}=b, \qquad \dfrac{x^3(z^3-1)}{y^3-1}=c.$

37. $\dfrac{xyz}{z+y}=a, \qquad \dfrac{xyz}{x+z}=b, \qquad \dfrac{xyz}{x+y}=c.$

38. $\dfrac{x_1}{a_1}=\dfrac{x_2}{a_2}=\ldots=\dfrac{x_n}{a_n}, \qquad x_1^p+x_2^p+\ldots+x_n^p=k^p.$

39. $\dfrac{a}{x_1}=\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{x_2}{x_3}=\ldots=\dfrac{x_{n-1}}{x_n}=\dfrac{x_n}{b}.$

40. $ax+m(y+z+t)=\alpha, \qquad by+n(z+t+x)=\beta,$
$cz+p(t+x+y)=\gamma, \qquad dt+q(x+y+z)=\delta.$

41. $a_i x_i+m_i(x_1+x_2+\ldots+x_{i-1}+x_{i+1}+\ldots+x_n)=\alpha_i$
$i=1, 2,\ldots n.$

42. $\frac{2x}{1+x^2}=y,\ \frac{2y}{1+y^2}=z,\ \frac{2z}{1+z^2}=u,\ \frac{2u}{1+u^2}=a.$

43. $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}+\sqrt{(x-a')^2+(y-b')^2+(z-c')^2}=\sqrt{(a-a')^2+(b-b')^2+(c-c')^2},\quad Ax+By+Cz=1.$

44. $\sqrt{x^2+a^2+b^2+c^2}=\sqrt{y^2+b^2+c^2}+\sqrt{z^2+b^2+c^2},$

$$\sqrt{y^2+a^2+b^2+c^2}=\sqrt{z^2+c^2+a^2}+\sqrt{x^2+c^2+a^2},$$

$$\sqrt{z^2+a^2+b^2+c^2}=\sqrt{x^2+a^2+b^2}+\sqrt{y^2+a^2+b^2}.$$

45. Dacă
$$x+y+z=u,$$
$$ax+by+cz=v,$$
$$a^2x+b^2y+c^2z=w,$$
să se exprime în funcţiune de u, v, w expresiunea
$$x^2+y^2+z^2+kxyz.$$

VIII. INEGALITAŢI ŞI INECUAŢII.

1. Dacă 4 numere sunt aranjate în ordinea mărimii lor crescânde, suma primului şi celui de al treilea este mai mică decât suma celui de al doilea şi al patrulea.

2. a şi b fiind două numere pozitive, avem:
$$\frac{a+b}{2a}>\frac{2b}{a+b}.$$

3. a, b, m, n, fiind numere pozitive şi $a<b$, avem:
$$a<\frac{ma+nb}{m+n}<b.$$

— Să arate că avem:

4. $3(1+a^2+a^4)>(1+a+a^2)^2.$

5. $2a^4+1>2a^3+a^2.$

6. $a^2+b^2+c^2>ab+ac+bc.$

7. $(a+b-c)^2+(a-b+c)^2+(-a+b+c)^2>ab+ac+bc.$

8. $abc>(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$; a, b, c pozitivi.

9. $2(a-c)(c+\sqrt{b^2+c^2}) < a^2+b^2.$

10. $\left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}} > \sqrt{a}+\sqrt{b}.$

11. Dacă $a^2+b^2+c^2=1$, $a'^2+b'^2+c'^2=1$,

vom avea: $(aa'+bb'+cc')^2<1.$

12. Să se arate că pentru $a^2=b^2+c^2$, avem:

$$5a^4+b^2c^2 \geqslant 2a[(b+c)(2a^2-bc)+abc],$$

iar expresiunea:

$$Aa^6+Bb^6+Bc^6+3Ba^2b^2c^2$$

reprezintă un cub perfect, dacă $(A+B)$ este un cub perfect.

13. Dacă $ab+bc+ca=1$, atunci $a^2+b^2+c^2>1$.

14. a, b, c fiind cantităţi reale, avem:

$$(a+b+c)(a^3+b^3+c^3-3abc) \geqslant 0.$$

15. $(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(a'^2_1+a'^2_2+\ldots+a'^2_n)>$
$(a_1a'_1+a_2a'_2+\ldots+a_na'_n)^2.$

16. $[(q\alpha\alpha'+\beta\beta'-p\alpha\beta'-q\alpha'\beta)^2-$
$(\beta^2-2p\alpha\beta+q\alpha^2)(\beta'^2-2p\alpha'\beta'+q\alpha'^2)](p^2-q)>0.$

17. Să se arate că media aritmetică între două numere este mai mare ca media lor geometrică; iar diferenţa lor este mai mică decât patratul diferenţei celor două numere divizat cu de 8 ori numărul cel mai mic.

18. Să se arate că media aritmetică între n numere este mai mare ca media lor geometrică.

19. Dacă trei numere pozitive a, b, c sunt astfel că unul din ele este mai mic decât suma celorlalte două, avem:

$$a^2+b^2+c^2<2(ab+ac+bc).$$

— Dacă a, b, c sunt numere pozitive, să se arate că avem:

20. $a^3+b^3+c^3>3abc.$

21. $a^4+b^4+c^4>abc(a+b+c).$

22. $2(a^3+b^3+c^3)>ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)>6abc.$

23. Dacă x. y, z sunt pozitive, să se arate că:

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}\geqslant\frac{3}{2}.$$

24. Pentru n întreg şi mai mare ca 3 avem:

$$n^{n+1}>(n+1)^n.$$

25. Să se arate că $\sqrt[3]{3}>\sqrt[n]{n}$.

26. n fiind un număr întreg, avem: $(n+1)^n>2\,n^n$.

27. Să se arate că:

$$\sqrt{n^n}<1.2.3\ldots n<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

28. Să se stabilească neegalităţile:

$$(m+1)\,(m+2)\ldots(m+n)>(n+1)\,!\,m^p,$$

$$(m+1)^2\,(m+2)^3\ldots(m+n)^{n+1}>2^2.3^3\ldots(n+1)^{n+1}.m^n,$$

în care $m>0$, $p=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n+1}$.

29. Fie α şi β două numere pozitive, întregi sau fracţionare, $(\alpha<\beta)$; să se arate că se pot găsi o infinitate de numere întregi p şi q astfel încât să avem:

$$\alpha<\frac{2p+1}{2q+1}<\frac{2p+1}{2q}<\beta.$$

30. Un comerciant cântăreşte la doi clienţi cu o balanţă falşă, câte o aceiaşi greutate p de marfă. In primul caz el pune marfa în platoul A şi greutatea în platoul B, iar în cel de al doilea caz face contrariul. Se întreabă dacă el pierde sau câştigă. Falşitatea balanţei provine din inegalitatea braţelor de cumpănă.

— Să se găsească valorile lui x pentru care avem:

31. $$x-\tfrac{1}{3}>2x-\tfrac{1}{6}x+\tfrac{1}{12}.$$

32. $$2x+2-\tfrac{1}{5}>x-5>3x-\tfrac{1}{4}-8.$$

33. $$\frac{mx+n}{a+b}-\frac{px+q}{a-b}<\frac{mx-n}{a-b}-\frac{px-q}{a+b}.$$

34. $\dfrac{x+a}{\sqrt{x^2+a^2}}>\dfrac{x+b}{\sqrt{x^2+b^2}}$; radicalele sunt luate cu $+$, a şi b pozitivi şi $a>b$.

35. $\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}>0.$ 36. $\frac{1}{x+\frac{1}{x}}>\frac{1}{x-\frac{1}{x}}.$

— Să se găsească cum trebue să fie x și y, astfel încât să avem:

37. $2x+3y-1>0, \quad y-2<0.$
38. $x+y-1>0, \quad x-y+1<0.$
39. $x^2-y^2>0, \quad 2x-y-3=0.$

— Cum trebue să fie h, astfel încât să avem:

40. $x^2+y^2-2x-2y+h>0$, ori care ar fi x și y.

41. $\sum x_i^2+2\sum a_i x_i+h>0$, ori care ar fi $x_1, x_2, \ldots x_n$.

42. $x^2-2xy+2y^2-4x+6y+h>0$, ori care ar fi x și y.

43. Să se găsească relațiile de condiție, astfel încât să avem:

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f>0,$$

ori care ar fi x și y.

44. Cum trebue să fie h, astfel încât să avem:

$$x^2+8y^2+2z^2-4xy+2xz-2yz-6x+9y-9z+h>0,$$

ori care ar fi x, y, z.

45. Să se determine între ce limite trebue să rămână cuprins a, pentru ca rădăcinele a două ori care din ecuațiile $ax-y=1$, $x-ay=-1$, $x+y=a$, să rămână cuprinse între $1-e$ și $1+e$, e fiind un număr pozitiv dat.

IX. PROBLEME DE GRADUL INTÂIU.

1. Să se găsească două numere consecutive, astfel că suma lor să fie egală cu de trei ori numărul cel mai mare, mai puțin $\frac{5}{4}$ din numărul cel mic.

2. Să se împartă numărul 140 în două părți, astfel că o parte mărită cu 10 să fie egală cu a 5-a parte din cea de a doua. (A. G. 96).

3. Un aliagiu de aur, în greutate de 600 gr., are titlul 0,750; cât trebue să adăugăm dintr'un alt aliagiu cu titlul 0,900, pentru ca noul aliagiu obţinut să aibă titlul 0,820?

4. O persoană lasă o parte din averea sa pentru spitale, iar restul de împărţit între moştenitori. Prima parte este supusă la un impozit de 2%, iar cea de a doua la un impozit de 6%. Să se găsească averea şi fiecare din părţile de mai sus, ştiind că Statul a perceput 1600 lei impozit, şi că, dacă partea lăsată pentru spitale s'ar fi redus la jumătate şi restul s'ar fi împărţit între moştenitori, Statul ar fi perceput ca impozit 2000 lei.

5. Un ogar urmăreşte o vulpe, care are 60 sărituri vulpeşti înaintea lui. Peste câte sărituri ogarul va ajunge vulpea, ştiind că, pe când ogarul face 6 sărituri, vulpea face 9, dar că 3 sărituri de ale ogarului fac cât 7 ale vulpei.

6. Se împarte o sumă în părţi egale între mai multe persoane; dacă ar fi fost 3 persoane mai mult, partea fiecăreia ar fi fost cu câte un leu mai mică, iar dacă ar fi fost 2 persoane mai puţin, partea fiecărea ar fi fost cu câte un leu mai mare. Să se afle suma împărţită şi numărul persoanelor.

7. Aceiaşi chestiune ca la numărul precedent, presupunând că în loc de 3 persoane în plus ar fi fost m persoane, şi că în loc de 2 persoane mai puţin ar fi fost n persoane; în primul caz partea fiecăreia s'ar micşora cu p lei, iar în cel de al doilea caz s'ar spori cu q lei. Condiţiunile de posibilitate ale problemei.

8. Trei aliage A, B, C se compun: A din 65% Ag. şi 35% Cu., B din 70% Ag. şi 30% Cu., C din 75% Ag. şi 25% Cu. Să se determine greutăţile celor 3 aliage, ştiind că: 1) îndoitul greutăţii totale a Ag. este egală cu de 5 ori greutatea Cu. din A şi B; 2) dacă se adaugă fiecărui aliagiu câte 1 kg. Ag. şi 2 kg. Cu, greutatea totală a Ag. devine egală cu greutatea totală a Cu.; 3) dacă se topesc împreună aliagele A şi C se obţine un nou aliagiu în care Ag. şi Cu. intră în aceiaşi proporţie ca în B.

9. Doi călători merg pe un drum, unul având 100 lei şi celălalt 48 lei. Eşindu-le hoţii înainte, iau fiecăruia o parte din bani; cât s'a luat dela fiecare călător, ştiind că primul pierde de 2 ori cât cel de al doilea, şi-i mai rămân totuşi de trei ori mai mulţi bani?

10. Un număr de 6 cifre începe dela stânga cu 1; dacă se mută această cifră de la stânga la dreapta, numărul obţinut este întreitul numărului dat; care este acel număr?

11. Intr'o grădină sunt de trei ori mai mulţi peri decât meri, de 6 ori mai mulţi meri decât cireşi, şi acelaşi număr de persici, pruni şi peri. Peste tot sunt 122 arbori; câţi sunt de fiecare speţă?

12. Mai multe vrăbii se aşează pe nişte pari. Dacă pe fiecare par este numai o vrabie, vor rămâne n vrăbii în sbor, iar dacă pe fiecare par se aşează n vrăbii, rămân n pari liberi; se cere a se găsi numărul vrăbiilor şi al parilor.

13. Dintre trei ceasornice A, B, C cel din urmă singur umblă exact, pe când A înaintează, iar B rămâne îndărăt; înaintarea pe oră a lul A este $\frac{2}{5}$ din întârzierea lui B. Presupunând că la amiazi cele trei ceasornice au fost regulate şi că la 4 ore 10 min. A a fost înaintea lui C cu atâtea minute câte au lipsit lui B până la 4 ore, se cere să se calculeze neregularităţile lui A şi B (cu cât înaintează A şi cu cât rămâne îndărăt B).

(P. S. A. P. 97).

14. Cineva cumpără 2000 capete de vite de trei speţe diferite, pe care să le reprezentăm cu A, B, C. După un an, animalele din speţele A şi C, se înmulţesc respectiv cu 10 % şi 5 %, pe când numărul celor din speţa B se micşorează cu 10 %, numărul total de animale creşte astfel cu 1 %. După al doilea an, animalele din speţele A şi C se înmulţesc respectiv cu 20 % şi 35 %, pe când numărul celor din speţa B rămâne invariabil, iar numărul total se măreşte cu 20 %. Să se calculeze câte capete sunt din fiecare speţă.

(P. S. A. P. 98).

15. 700 lei se dau cu dobândă simplă în două sume diferite, cea mai mică însă cu 2% mai mult decât cea mai mare. Micşorându-se procentul sumei celei mai mici şi mărindu-se al celei mai mari, fiecare cu 1%, se obţine o dobândă totală, care întrece pe cea dintâi cu a 6-a parte din valoarea sa; dacă însă procentul sumei celei mari se măreşte cu 1%, iar al celei mici rămâne neschimbat, dobânda totală este mai mare decât cea dintâi cu a 5-a parte din valoarea sa. Să se afle cele două sume şi procentele respective.

(P. S. A. P. 99).

16. Două persoane A şi B pleacă în acelaş timp din două puncte M şi N, una din M spre N şi îndărăt, cealaltă din N spre M şi îndărăt, ambele fără oprire. Cele două persoane se întâlnesc — în mersul lor faţă în faţă — de două ori: prima dată la a km. departe de punctul N, iar c ore după aceia, la b km. de punctul M. Să se găsească distanţa MN şi iuţeala cu care merg cele două persoane.

(P. S. A. P. 900).

17. Doi călători A şi B merg pe un drum în acelaş sens, primul cu iuţeala v, iar cel de al doilea cu iuţeala v'. Călătorul A este însoţit de un câine care aleargă cu viteza V dela stăpânul său la celălalt călător şi îndărăt. Să se găsească timpul întrebuinţat de câine, într'un sens şi altul, de când a plecat dela stăpânul său până s'a întors înapoi, ştiind că în momentul plecării, cei doi călători se găseau la o distanţă d unul de altul. Discuţie.

18. Două mobile parcurg periferia unui cerc de lungime l, cu iuţelile v şi v'; la început ele sunt separate de un arc de lungime d. Se cere să se determine epocile întâlnirilor lor succesive în ipotezele următoare: cele două mobile merg în acelaş sens sau în sensuri opuse; unul pleacă cu θ secunde înainte sau în urma celuilalt. Introducând direct în chestiune cantităţile negative, să se reducă formulele găsite la una singură.

19. Un părinte împarte averea sa în modul următor: celui

mai mare dintre copii îi dă o sumă a plus a n^a parte din rest; celui de al doilea o sumă $2a$ plus a n^a parte din noul rest; celui de al treilea o sumă $3a$ plus a n^a parte din ultimul rest și așa mai departe. Să se afle care este averea împărțită și numărul copiilor, știind că părțile au fost egale.

20. n jucători convin ca jucătorul ce va pierde să îndoiască sumele celorlalți $n-1$ jucători. Ei joacă n partide și pierd fiecare câte una, iar la urmă fiecare se retrage dela joc cu aceiași sumă a. Cât avea fiecare la începutul jocului?

21. Un automobil T, a cărui viteză este v, pleacă după un alt automobil T′, a cărui viteză este v'; întârzierea este calculată astfel ca ele să ajungă în acelaș timp la destinație. După ce a parcurs $\frac{2}{3}$ din drum, automobilul T′ este obligat să-și reducă la jumătate viteza, iar cele două automobile se întâlnesc la a km. înainte de sfârșitul călătoriei. Să se găsească lungimea cursei.

22. Dintr'un punct P, luat pe prelungirea diametrului AB al unei jumătăți de cerc de rază R, se duce o tangentă PC și se învârtește figura în jurul dreptei ABP. Se cere să se determine poziția punctului P, astfel ca raportul între suprafața laterală a conului descris de PC și zona descrisă de arcul BC, să fie un raport dat m. Care este condiția de posibilitate a problemei?

23. Intr'un ceasornic acele orelor, minutelor și secundelor fiind la XII, se cere să se afle peste cât timp acul secundelor va divide pentru a n^a oră, într'un raport dat k, diferența arcelor parcurse pe cadran de minutar și orar.

24. Fiind dat un triunghiu ABC, să se găsească distanțele la cele trei laturi, ale unui punct M așezat în interiorul triunghiului, astfel ca suprafețele triunghiurilor MAB, MAC, MBC să fie proporționale cu trei numere date α, β, γ.

25. Să se calculeze laturile x, y, z ale unui triunghiu, știind că volumele determinate de triunghiu, învârtindu-se succesiv în jurul fiecărei laturi, sunt echivalente cu volumele a trei sfere de raze α, β, γ.

26. Să se calculeze laturile unui triunghiu ştiind că între înălţimile i_1, i_2, i_3 avem relaţiile:

$$\alpha\sqrt[3]{i_1} = \beta\sqrt[3]{i_2} = \gamma\sqrt[3]{i_3}, \quad i_1 i_2 i_3 = \delta^3,$$

α, β, γ, δ fiind nişte numere date.

27. Pe diagonala AC a unui pătrat ABCD se ia un punct P, astfel ca $AP=p$, $CP=q$; să se ducă prin acest punct o dreaptă care întâlnind latura AB în M şi latura CD în N, raportul între suprafeţele patrulaterelor AMND şi BMNC să fie egal cu raportul a două numere date a şi b. Discuţie.

28. Cunoscând una din laturile unghiului drept ale unui triunghiu dreptunghic circumscris unui cerc de rază R, să se afle cealaltă latură a unghiului drept şi ipotenuza.

29. Un tren merge din A în C, trecând prin B unde se opreşte 5 minute; 14 minute după ce a plecat din B, întâlneşte un tren expres ce merge în sens contrar şi a cărui viteză este îndoită de a sa. Acest tren expres plecase din C, în momentul când primul tren era la 25 km. de A; se ştie însă că trenul expres pune 2 ore pentru a străbate distanţa CB şi că după sosirea în A, dacă ar pleca imediat înapoi, ar sosi în C la trei sferturi de oră după sosirea primului tren în acest punct. Se cere să se afle cât face fiecare tren pe oră şi care sunt distanţele între A, B, C.

30. Se dă un con drept cu bază circulară, ale cărui generatoare sunt prelungite nemărginit de o parte şi de alta a vârfului. Acest con este tăiat printr'un plan fix, perpendicular pe axa lui. Să se ducă un plan paralel cu planul fix, astfel ca suprafaţa laterală a conului, cuprinsă între cele două secţiuni, să fie într'un raport determinat cu suma ariilor celor două baze. Discuţie.

31. Un vas de sticlă este umplut cu P gr. mercur la t^0. La ce temperatură T trebue încălzit pentru ca să iasă o cantitate p gr. de mercur? Se cunosc coeficienţii de dilatare ai sticlei şi mercurului.

32. Un balon de sticlă se umple cu un amestec de două lichide, având respectiv densităţile d şi d', greutatea ames-

tecului fiind P. Se extrage o cantitate de amestec şi se umple balonul cu lichidul de densitate d; prin cântărire se găseşte că greutatea noului amestec este P'. Din acest din urmă amestec se extrage aceiaşi cantitate ca mai sus şi se umple iarăşi balonul cu lichidul de densitate d'; prin cântărire se găseşte că greutatea ultimului amestec este P''. Să se determine: 1) capacitatea balonului; 2) cantitatea de lichid extrasă prin operaţiile de mai sus; 3) proporţia de amestec a celor două lichide, la început şi la sfârşit.

33. Se dau într'un plan două poligoane omotetice. Fie a, b, c,... laturile unuia; x, y, z,... distanţele între laturile omoloage, socotite pozitive când sunt de aceiaşi parte cu primul poligon şi negative când sunt pe partea opusă. Să se arate că suma: $ax+by+cz+\ldots$ rămâne constantă, când poligoanele se mişcă în plan, rămânând omotetice.

34. Intr'un triunghiu ABC se duc tangentele la cercul înscris, paralele respectiv cu laturile triunghiului; fie l, m, n lungimile acestor tangente, cuprinse respectiv între laturile triunghiului; cunoscând l, m, n să se calculeze laturile triunghiului a, b, c.

35. Se dă un cerc cu raza R. Pe un diametru AB se ia un punct C, iar pe AC şi BC ca diametre se descriu alte două cercuri. Să se găsească raza cercului tangent la cercul dat şi la cele două cercuri descrise pe AC şi BC ca diametre.

X. DISCUŢII, ELIMINĂRI, REPREZENTĂRI GRAFICE.

1. Să se găsească condiţiunea pentru ca fracţiunea $\frac{ax+b}{a'x+b'}$ să aibă aceiaş valoare oricare ar fi x.

2. Să se găsească condiţiunile pentru ca valoarea fracţiunei $\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}$ să rămână aceiaşi ori care ar fi x şi y.

3. Chestiune analoagă pentru fracţiunea:

$$\frac{a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n+b}{a'_1x_1+a'_2x_2+\ldots+a'_nx_n+b'}.$$

4. Să se determine α și β astfel ca sistemul:

$3x+\alpha y=\alpha$, $\beta x+2y=\beta$ să fie nedeterminat.

5. Să se găsească condițiunea pentru ca sistemul: $x-ly=m$, $y-lx=n$, $mx+ny=1$ să fie compatibil.

— Să se rezolve sistemele de ecuații:

6. $2x-3y+4z=7$, $3x+2y-5z=8$, $5x-y-z=15$.
7. $5x+3y-11z=13$, $4x-5y+4z=18$, $9x-2y-7z=25$.
8. Să se discute sistemul: $ax+by=c$, $bx+ay=d$.
9. Pentru ca sistemul:

$$ax+by+cz=bx+cy+az=cx+ay+bz=1,$$

să fie nedeterminat, trebue $a=b=c$.

10. Trei lucrători A, B, C execută o lucrare. A și B, lucrând împreună, termină lucrarea într'un timp de γ ori mai mic decât C singur; A și C într'un timp de β ori mai mic decât B singur, B și C într'un timp de α ori mai mic decât A singur. Ce relație trebue să avem între α, β, γ pentru ca problema să admită o infinitate de soluții?

— Să se elimine x, y, între ecuațiile:

11. $$x+\frac{1}{x}=a,\quad y+\frac{1}{y}=b,\quad xy+\frac{1}{xy}=c.$$

12. $$\frac{x+y}{x-y}=a,\quad \frac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2}=b.$$

— Să se elimine x, y, z între ecuațiunile:

13. $x^2+y^2-2axy=0$, $y^2+z^2-2byz=0$, $z^2+x^2-2cxz=0$.

14. $$\frac{x}{a}=y+z,\quad \frac{y}{b}=z+x,\quad \frac{z}{c}=x+y.$$

15. $$\frac{(x+y)(x+z)}{y-z}=a,\quad \frac{(y+z)(y+x)}{z-x}=b,\quad \frac{(z+x)(z+y)}{x-y}=c.$$

16. Să se elimine x, y, z, t între relațiile:

$$x=by+cz+dt,\qquad y=ax+cz+dt,$$
$$z=ax+by+dt,\qquad t=ax+by+cz.$$

17. Să se elimine $x_1, x_2, \dots x_n$ între relaţiile:

$$x_1 = a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n,$$
$$x_2 = a_1x_1 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$x_n = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_{n-1}x_{n-1}.$$

18. Fie $t = \frac{2}{2-w}$, $w = \frac{2}{2-z}$, $z = \frac{2}{2-y}$, $y = \frac{2}{2-x}$, să se găsească relaţia între t şi x.

19. Să se arate că având:

$$\frac{x+y+z}{abc} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}, \quad (x+y+z)(a+b+c) = ax+by+cz,$$

vom avea şi:

$$\frac{x}{1+a^2} + \frac{y}{1+b^2} + \frac{z}{1+c^2} = 0 \text{ şi } \frac{ax}{1+a^2} + \frac{by}{1+b^2} + \frac{cz}{1+c^2} = 0.$$

20. Să se arate că având:

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, \qquad ab + a'b' + a''b'' = 0,$$
$$b^2 + b'^2 + b''^2 = 1, \qquad ac + a'c' + a''c'' = 0,$$
$$c^2 + c'^2 + c''^2 = 1, \qquad bc + b'c' + b''c'' = 0,$$

vom avea şi:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1, \qquad aa' + bb' + cc' = 0,$$
$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1, \qquad aa'' + bb'' + cc'' = 0,$$
$$a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1, \qquad a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0,$$

$$a = \pm(b'c'' - c'b''), \quad a' = \pm(cb'' - bc''), \quad a'' = \pm(bc' - cb'),$$
$$b = \pm(c'a'' - a'c''), \quad b' = \pm(ac'' - ca''), \quad b'' = \pm(ca' - ac'),$$
$$c = \pm(a'b'' - b'a''), \quad c' = \pm(ba'' - ab''), \quad c'' = \pm(ab' - ba').$$

21. Să se arate că avem şi

$$a^2a'^2a''^2 + b^2b'^2b''^2 + c^2c'^2c''^2 = a^2b^2c^2 + a'^2b'^2c'^2 + a''^2b''^2c''^2.$$

22. Cum trebue să fie valorile lui a, b, c ca din egalităţile:

$$\frac{x'}{ax+by+cz} = \frac{y'}{ay+bz+cx} = \frac{z'}{az+bx+cy},$$

să se poată deduce egalităţile:

$$\frac{x}{ax'+by'+cz'} = \frac{y}{ay'+bz'+cx'} = \frac{z}{az'+bx'+cy'}.$$

23. x şi y fiind două numere date, se calculează alte două numere x' şi y' prin formulele $x'=ax+by+c$, $y'=a'x+b'y+c'$; se întrebuinţează aceste două numere x' şi y' pentru a calcula alte două numere x'' şi y'', cu ajutorul aceloraşi formule; să se determine a', b', c', astfel ca să avem $x''=x$, $y''=y$.

24. Se consideră şirul: $a+b$, $ap+bq$, ap^2+bq^2, ap^3+bq^3, ... Să se calculeze două numere x şi y, astfel că un termen oarecare al şirului precedent, să se obţină adunând produsul lui x cu termenul precedent, la produsul lui y cu anteprecedentul.

25. Se consideră şirul $u_i=ap^i+bq^i+cr^i$, $i=0, 1, 2, 3,\ldots$. Să se determine trei numere x, y, z, astfel încât să avem, ori care ar fi n, $u_n=xu_{n-1}+yu_{n-2}+zu_{n-3}$.

26. Aceiaşi chestiune pentru expresiunea: $u_i=a_1 p_1^i+a_2p_2^i+\ldots+a_kp_k^i$; să se determine k numere x_1, $x_2,\ldots x_k$, astfel ca să avem $u_n=x_1 u_{n-1}+x_2 u_{n-2}+\ldots+x_k u_{n-k}$, oricare ar fi n.

27. Să se figureze linia ce reprezintă ecuaţiunea $y=2x+3$; să se indice porţiunea din această linie ale cărei abscise sunt cuprinse între $-\frac{3}{2}$ şi 0, precum şi porţiunea ale cărei ordonate sunt cuprinse între 10 şi 20.

28. Să se figureze linia ce reprezintă ecuaţiunea $x+y-1=0$ şi să se găsească distanţa sa la originea axelor de coordonate.

29. Să se figureze linia ce reprezintă ecuaţiunea $2y-3x+6=0$ şi să se găsească segmentul format din punctele ale căror distanţe la origină sunt mai mici ca 2.

30. Ce se întâmplă cu dreptele ce reprezintă ecuaţiile $2x-3y=2\alpha$ şi $5x-4y=\alpha$, când α variază?

31. Ce se întâmplă cu punctul de întâlnire al dreptelor din exemplul precedent când α variază?

32. Pentru ce valori ale lui α coordonatele punctelor de întâlnire ale dreptelor reprezentate de $y-mx+\alpha=0$ şi $x-my+\alpha=0$ sunt pozitive?

33. Se dă un triunghiu echilateral, a cărui latură este egală cu 1; presupunând că axele de coordonate sunt una din laturile

triunghiului și înălțimea corespunzătoare, să se scrie ecuațiile ce reprezintă algebric laturile triunghiului.

34. Se dau dreptele ce reprezintă ecuațiile $x-y+\alpha=0$, $x-y+2\alpha=0$, $x+y+\alpha=0$, $x+y+2\alpha=0$; să se evalueze aria patrulaterului mărginit de aceste drepte.

XI. ECUAȚIUNI DE GRADUL AL DOILEA CU O NECUNOSCUTĂ SAU REDUCTIBILE LA GRADUL AL DOILEA.

— Să se rezolve ecuațiunile:

1. $$(x+1)(x+2)=12.$$

2. $$(x+1)(x+2)+(x+1)(x+3)+(x+2)(x+3)=26.$$

3. $$(x+1)(x+2)(x+3)+(x+1)(x+2)(x+4)+(x+1)(x+3)(x+4)+(x+2)(x+3)(x+4)=50.$$

4. $$\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x}=-2.$$

5. $$\frac{x^2+3x+6}{x^2+5x+9}=\frac{x-2}{x-3}.$$

6. $$(3a^2+b^2)(x^2-x+1)=(a^2+3b^2)(x^2+x+1).$$

7. $$a^2(a-x)^2=b^2(b-x)^2.$$

8. $$[2(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)x](b^2+c^2-ax)+(a^2+c^2-bx)(a^2+b^2-cx)=0.$$

9. $$\frac{1}{a+b+x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x}.$$

10. $$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}=0.$$

11. $$\frac{x+a}{x-a}+\frac{x+b}{x-b}+\frac{x+c}{x-c}=-3.$$

12. $$\frac{5a+b-2x}{5a-b-2x}=\frac{a+b}{a-b}\cdot\frac{2a-2b+x}{2a+2b+x}.$$

13. $$\frac{b(a-x)^3-a(b-x)^3}{(a-x)^3-(b-x)^3}=x.$$

14. $$\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}+\frac{1}{x+c}+\frac{1}{x+a+b+c}=0.$$

15. Se dă ecuaţia $y^2-1,9xy^2+0,27x^2y+1,647=0$, se cer valorile lui x pentru $y=1, 2$ şi ale lui y pentru $x=1,6$.

— Să se rezolve ecuaţiunile

16. $\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}+\sqrt{x-c}=0.$

17. $\sqrt[3]{(x-2)^2}+\sqrt[3]{(x-3)^2}=\sqrt[3]{(x-2)(x-3)}.$

18. $\sqrt[m]{(1+x)^2}-\sqrt[m]{(1-x)^2}=\sqrt[m]{1-x^2}.$

19. $(x+a+b)^5=x^5+a^5+b^5.$

20. $\alpha(x^2-px+q)^2+\beta(x^2+px+q)^2=x^2.$

21. $x(x-a)(x-2a)(x-3a)=A.$

22. $\sqrt[3]{x(a-x)^2}+\sqrt[3]{x^2(a-x)}=a.$

23. $\sqrt[4]{x(a-x)^3}+\sqrt[4]{x^3(a-x)}=a.$

24. $\sqrt[7]{x^3(a-x)^4}+\sqrt[7]{x^4(a-x)^3}=a.$

25. $2\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x^2+9}=2.$

26. $\sqrt{x^2-9}+\sqrt{x+11}=\sqrt{x^2+5x+14}.$

27. $x^2+2x-5+\sqrt{x^2+2x+8}=7.$

28. $$\frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1.$$

29. $(x-1)^3+(2x+3)^3=27x^3+8.$

30. $$\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{1}{a}.$$

31. $\sqrt[4]{a-x}+\sqrt{x-b}=\sqrt[4]{c}.$

32. $$\frac{x^2}{3}+\frac{48}{x^2}=10\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right).$$

33. $ax^4 - bx + c = x^2(2ax - a - b)$.

34. $\frac{(x^4+10x^2+1)(5a^4+10a^2+1)}{(x^4+10x^2+5)(a^4+10a^2+1)} = ax.$

35. $(x+a)(x+2a)(x-3a)(x-4a) = c^4.$

36. $\frac{x^2+2ax+ac}{x^2+2cx+ac} = \frac{ax}{(x+a)(x+c)}.$

37. $x^4 + ax^3 + bx^2 + adx + d^2 = 0.$

38. $\frac{(x+1)(x^5-1)}{(x-1)(x^5+1)} = a.$

39. $\frac{(x^2+1)(x^{10}-1)}{(x^2-1)(x^{10}+1)} = b.$

40. $x^4 - 2(a-1)x^3 - (5a-1)x^2 + 2(a^2+1)x - a = 0.$

41. $x^5 - (a-1)x^4 + ax^3 - (a^2-a+1)x^2 + (a^2-1)x - a = 0$

42. $ab(a^2-b^2)(x^2+c^2)^2 - cx(x^2-c^2)(a^2+b^2)^2 = 0.$

43. $(a-x)^4 + (x-b)^4 = c^4.$

44. $(a-x)^5 + (x-b)^5 = c^5.$

45. $\frac{(a-x)^4+(x-b)^4}{(a-x)^2+(x-b)^2} = \frac{a^4+b^4}{a^2+b^2}.$

46. $20x^5 - 81x^4 + 62x^3 + 62x^2 - 81x + 20 = 0.$

47. $\frac{x^4+1}{2x(x^2+1)} = \frac{a}{b}.$

48. $\frac{(x^2+x+1)^2}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{a}{b}.$

49. p şi q fiind numere întregi, dacă rădăcinile ecuaţiei $x^2+px+q=0$ sunt raţionale, ele sunt neapărat întregi.

50. Să se rezolve equaţiunea

$$\sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{x+243} = 7.$$

XII. ECUAŢIUNI DE GRADUL AL DOILEA. RELAŢIUNI INTRE RADACINI ŞI COEFICIENŢI. PROPRIETAŢI ALE RADACINILOR.

1. Să se determine natura şi semnele rădăcinilor ecuaţiei:

$$x^2-2mx+m^2-1=0.$$

2. Să se determine c astfel ca ecuaţiunea: $x^2-(c-1)x+c^2=0$ să aibă: *a)* rădăcini egale; *b)* rădăcini egale în valoare absolută şi de semne contrarii; *c)* o rădăcină egală cu 1; *d)* o rădăcină egală cu a; în acest caz cum trebue să fie a pentru ca valoarea lui c să fie reală; *e)* rădăcinile inverse una alteia; *f)* o rădăcină îndoita celeilalte.

3. Se dă ecuaţia $8x^2-(m-1)x+m-7=0$. Să se determine m astfel ca rădăcinile x' şi x'' să fie: *a)* reale şi egale; *b)* egale în valoare absolută şi de semne contrarii; *c)* inverse una alteia; *d)* una din rădăcini egală cu zero.

4. Pentru ce valori ale lui p ecuaţia $x^2-2(p-1)x+36=0$ are rădăcinile sale: *a)* egale; *b)* egale în valoare absolută şi de semne contrare?

(A. G. 98).

5. Se dă ecuaţia $mx^2-2(m+1)x+8=0$, se cere: *a)* să se rezolve ecuaţia; *b)* să se determine m astfel ca rădăcinile să fie egale; *c)* aşa încât să avem $\frac{x'^2+x''^2}{x'x''}>x'+x''$, x' şi x'' fiind rădăcinile ecuaţiei; *d)* ca valorile rădăcinilor să fie mai mari ca 1.

(A. G. 904).

6. Se dă ecuaţia $3m^2x^2-(m-3)x+m^2=0$.

Ce valori trebue să dăm lui m pentruca o rădăcină să fie de 3 ori mai mică decât cealaltă.

7. Fiind dată ecuaţia $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{a}{x}}=\sqrt{2b}$, în care a este un număr pozitiv dat, să se indice cum trebue să fie b, pentru

ca ecuaţia făcută raţională, să aibă: *a)* rădăcini egale; *b)* rădăcini reale şi inegale. Să se rezolve.

(P. S. A. P. 96).

8. Să se cerceteze natura şi semnul rădăcinilor ecuaţiei $x^2-2m(m-a)x+m^2(m^2-b^2)=0$, când m variază, a şi b fiind două numere pozitive date.

9. Fiind dată ecuaţia $x^2+px+q=0$, să se formeze ecuaţia ale cărei rădăcini sunt: *a)* patratele rădăcinilor acestei ecuaţii; *b)* inversele rădăcinilor ecuaţiei date.

(A. G. 900).

10. Fiind dată ecuaţia $ax^2+bx+c=0$, să se formeze ecuaţia: *a)* ale cărei rădăcini sunt egale în valoare absolută şi de semne contrarii cu rădăcinile ecuaţiei date; *b)* ale cărei rădăcini sunt inversele rădăcinilor ecuaţiei date; *c)* ale cărei rădăcini sunt egale cu rădăcinile ecuaţiei date mărite cu o aceiaşi cantitate m; *d)* ale cărei rădăcini sunt egale cu rădăcinile ecuaţiei date multiplicate cu o aceiaşi cantitate k.

11. Fiind dată ecuaţia $x^2+px+q=0$, ale cărei rădăcini sunt x' şi x'', să se formeze ecuaţia ale cărei rădăcini sunt:

$$x'+\frac{1}{x''} \text{ şi } x''+\frac{1}{x'}.$$

12. Fie x' şi x'' rădăcinile ecuaţiunii cu coeficienţi reali: $ax^2+bx+c=0$. Să se formeze ecuaţiunea în y, care admite ca rădăcini sumele: $\frac{x'}{x''}+\frac{x''}{x'}$ şi $\frac{x'}{x''}-\frac{x''}{x'}$.

Să se dea condiţiunea necesară şi suficientă ca ecuaţiunea formată să aibă rădăcinile reale.

13. Fiind dată ecuaţia $x^2-x+2=0$, să se formeze ecuaţia ale cărei rădăcini sunt valorile pe care le ia expresiunea $\frac{2x+1}{x+2}$, când se înlocueşte x succesiv cu fiecare din rădăcinile ecuaţiei date.

14. Fiind dată ecuaţia $x^2+px+q=0$, să se formeze ecuaţia ale cărei rădăcini sunt valorile pe care le ia expresiunea

$\dfrac{-x^2}{x^2+1}$, când se înlocueşte x succesiv cu fiecare din rădăcinile ecuaţiei date.

15. Se consideră ecuaţiunile: $x^2+ax+b=0$, $x^2+px+q=0$. Să se formeze ecuaţiunea care are drept rădăcini $X_1=x_1'x_2'+x_1''x_2''$, $X_2=x_1'x_2''+x_1''x_2'$ unde x_1', x_1'' sunt rădăcinile primei ecuaţiuni, iar x_2', x_2'' sunt rădăcinile ecuaţiunii a doua.

16. Fie x' şi x'' rădăcinile ecuaţiei $ax^2+bx+c=0$; să se găsească ecuaţiile de gradul al doilea, astfel că înlocuind pe x în ecuaţia dată prin valoarea dată de relaţia $y=\dfrac{x+x'}{x+x''}$, ecuaţia în y să aibă aceleaşi rădăcini ca şi ecuaţia în x.

17. Fiind dată ecuaţia $ax^2+bx+c=0$, să se calculeze suma patratelor, cuburilor, puterilor a 4^a a rădăcinilor. Să se indice un mijloc pentru a calcula suma puterilor a m^a a rădăcinilor, m fiind un număr întreg şi pozitiv.

18. Să se calculeze suma puterilor asemenea a inverselor rădăcinilor ecuaţiei $ax^2+bx+c=0$.

19. Fie x', x'' rădăcinile ecuaţiei $x^2+px+q=0$. Să se formeze ecuaţia de gradul II ale cărei rădăcini sunt

$$y'=\frac{x'-x''}{x'},\quad y''=\frac{x''-x'}{x''}.$$

Să se studieze apoi variaţia rădăcinilor ecuaţiei în y. Să se determine q aşa că

$$y'^2+py'+q=y''^2+py''+q$$

şi să se studieze variaţia rădăcinilor ecuaţiei în y, considerând că p este un parametru variabil.

20. Să se arate că ecuaţia

$$x^2-(a^2+b^2+c^2+d^2)x+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2=0,$$

are totdeauna rădăcinile sale reale, ori care ar fi a, b, c, d.

21. Să se arate că ecuaţia $x^2+px+q=0$ având rădăcinile sale reale, ecuaţia $x^2+px+q+(x+a)(2x+p)=0$ va avea de asemenea rădăcinile sale reale, ori care ar fi a.

22. Să se arate că oricare ar fi a şi b reali, iar $\alpha > 0$ ecuaţia

$$ax^2 + bx - \alpha\left[\frac{a}{\alpha+2} + \frac{b}{\alpha+1}\right] = 0$$

are rădăcini reale.

23. Ecuaţia $\frac{a^2}{x-p} + \frac{b^2}{x-q} - c = 0$, are rădăcinile sale reale, ori care ar fi c, p şi q.

24. Fiind date ecuaţiile:

$x^2 + 2x + q = 0$ şi $(1+q)(x^2+2x+q) - 2(q-1)(x^2+1) = 0$, să se arate că rădăcinile celei de a doua sunt imaginare, când rădăcinile celei dintâi sunt reale şi reciproc.

25. Ecuaţia $(x+1)[3(x+1) - 2(a^2+b^2+c^2)] + a^4 + b^4 + c^4 = 0$, are în totdeauna rădăcinile sale imaginare, afară de cazul când $a = b = c$.

26. Să se arate că ecuaţia:

$$(a^2+b^2+c^2)x^2 + 2(aa'+bb'+cc')x + a'^2 + b'^2 + c'^2 = 0,$$

are totdeauna rădăcinile imaginare, afară de cazul când $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$. Să se generalizeze.

27. Dacă ecuaţiile

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad , \quad a'x^2 + b'x + c' = 0$$

au rădăcinile reale, iar una din ecuaţiunile date are rădăcinile de acelaş semn, şi ecuaţia

$$aa'x^2 + bb'x + cc' = 0$$

are rădăcinile reale.

28. Să se arate că având $(n - n')^2 < (m - m')(m'n - n'm)$ ambele ecuaţii $x^2 + mx + n = 0$ şi $x^2 + m'x + n' = 0$, au rădăcinile lor reale.

29. Să se arate că având $b^2 - 4ac < 0$, ecuaţia: $(b^2 - 4ac)x^2 + 2(2ac' + 2a'c - bb')x + b'^2 - 4a'c' = 0$, are totdeauna rădăcinile sale reale.

30. Să se arate că ecuaţia $\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b} + \frac{1}{x+c} = \frac{3}{x}$,

are totdeauna rădăcinile sale reale.

31. Se consideră ecuaţia:

$$\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}-1\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)-\left(\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}-1\right)^2=0,$$

în care presupunem $\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}-1\right)<0$; să se arate că ecuaţia dată nu admite alte rădăcini decât $x=\alpha$, $y=\beta$.

32. Se dau ecuaţiile $x^2-p_i x+q_i=0$ $(i=1,2,3,\ldots,2n+1)$, fie x'_i şi x''_i rădăcinile ecuaţiei de rangul i; ştiind că:

$$x''_1=x'_2,\quad x''_2=x'_3,\quad \ldots\ldots,\quad x''_{2n}=x'_{2n+1},$$

să se găsească relaţia de condiţie între coeficienţi ca să avem şi $x''_{2n+1}=x'_1$. Chestiune analoagă pentru cazul când numărul ecuaţiunilor ar fi par.

33. Se dă ecuaţia $x^2+px+q=0$, să se găsească relaţia de condiţie între coeficienţi, când ei sunt proporţionali cu rădăcinile.

34. Să se determine λ şi μ astfel ca ecuaţiile: $(2\lambda+1)x^2-(3\lambda-1)x+2=0$ şi $(\mu+2)x^2-(2\mu+1)x-1=0$, să aibă aceleaşi rădăcini.

35. Dintr'un punct fix O al unei drepte AB, se iau pe această dreaptă distanţele OA' şi OB', respectiv egale cu rădăcinile ecuaţiei $2mx^2-2(a+b)x+mab=0$; să se determine m astfel ca punctele A' şi B' să fie conjugate armonic în raport cu A şi B.

36. Să se calculeze:

$$(1+\sqrt{3})^5+(1-\sqrt{3})^5;\ (a+\sqrt{b})^4+(a-\sqrt{b})^4;\ (1+i)^5+(1-i)^5;$$

$$\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,i\right)^7+\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,i\right)^7.$$

37. Să se calculeze $S_m=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\,i\right)^m+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\,i\right)^m$.

38. Să se formeze ecuaţiile, cu coeficienţi reali şi raţionali, care au: *a*) o rădăcină egală cu $2+\sqrt{3}$; *b*) o rădăcină egală cu $5-3i$; *c*) o rădăcină egală cu $\frac{1}{2}\sqrt{2}\,i+\frac{3}{2}$; *d*) o rădăcină egală cu $\frac{1+i}{1-i}$.

39. Fiind dată ecuaţiunea $x^4-1=0$, să se formeze ecuaţia ale cărei rădăcini sunt produsele două câte două ale rădăcinilor ecuaţiei date.

40. Să se găsească două ecuaţii de gradul II cu o rădăcină comună, care să fie semi-suma rădăcinilor necomune.

41. Dându-se ecuaţiunile:

$$(1+\lambda)x^2-(5\lambda+1)x+3\lambda=0,$$
$$(2\lambda-1)x^2+(1-9\lambda)x-3\lambda=0,$$

să se determine λ astfel încât: *a*) cele două ecuaţii să aibă o rădăcină comună; *b*) rădăcinile unei ecuaţii să fie egale cu un acelaş multiplu de rădăcinile celeilalte.

42. Se dau ecuaţiunile $x^2-mx-8=0$ şi $x^2+nx-15=0$; se cere să se determine m şi n, astfel ca suma unei rădăcini a ecuaţiei întâi cu o rădăcină a ecuaţiei a doua să fie 1, iar produsul celorlalte rădăcini să fie egal cu 6. Să se rezolve apoi ecuaţiile.

43. Se consideră ecuaţiunile:

$$x^2+px+q=0,\quad x^2+p'x+q'=0,\quad x^2+p''x+q''=0,$$

fiecare având o rădăcină comună cu celelalte două.

Să se stabilească relaţiunea $p''^2=q''\left(\frac{q}{q'}+\frac{q'}{q}+2\right)$.

44. Fie α şi β rădăcinile ecuaţiei $x^2+px+q=0$ (1); să se găsească relaţia de condiţie între coeficienţi, când avem $\alpha^2:\beta=k$. Relaţia de condiţie este de forma

$$(2)\quad Ak^2+Bk+C=0;$$

să se arate că ecuaţiile (1) şi (2) au în acelaş timp rădăcinile lor reale sau imaginare.

45. Fie α şi β rădăcinile ecuaţiei $x^2+px+q=0$; să se găsească relaţia de condiţie astfel încât să avem $m\alpha+n\beta=k$, m şi n fiind două numere date. Relaţia de condiţie este de gradul al doilea în raport cu k; să se arate că valorile lui k sunt reale în acelaş timp cu α şi β, afară de un caz particular.

46. Să se arate că sporind toţi coeficienţii unei ecuaţii de gradul al doilea cu o aceiaşi cantitate, putem forma o ecuaţie cu rădăcini egale. Este totdeauna posibil ca sporind cu o

aceiaşi cantitate toţi coeficienţii a două ecuaţii de gradul al doilea, să obţinem noi ecuaţii având o rădăcină comună?

47. Fie ecuaţia $x^2+px+q=0$. Punând $y=\frac{x-a}{x-b}$, să se găsească ecuaţiunea în y; să se deducă condiţia ca ecuaţia dată să aibă cel puţin o rădăcină cuprinsă între a şi b.

48. Fiind date ecuaţiile: $ax^2+bx+c=0, a'x^2+b'x+c'=0$, fie α, β rădăcinile primei ecuaţii, α', β' rădăcinile celei de a doua. Condiţiunea în care cele două ecuaţii au o rădăcină comună, se poate pune sub formele:

$$(a\alpha'^2+b\alpha'+c)\,(a\beta'^2+b\beta'+c)=0,$$
$$(a'\alpha^2+b'\alpha+c')\,(a'\beta^2+b'\beta+c')=0,$$
$$(ac'-ca')^2-(ab'-ba')\,(bc'-cb')=0,$$
$$(bb'-2ac'-2ca')^2-(b^2-4ac)\,(b'^2-4a'c')=0.$$

49. Să se găsească relaţia de condiţie între coeficienţii a două ecuaţii reciproce de gradul al patrulea, pentru ca aceste ecuaţii să aibă două rădăcini reciproce comune.

50. Fiind date ecuaţiile $ax^2+bx+c=0$, $a'x^2+b'x+c'=0$, $a''x^2+b''x+c''=0$, să se găsească condiţiunile ca ele să aibă o rădăcină comună. In ce caz vor avea ambele rădăcini comune?

51. Se dă ecuaţia:

$$A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_0=0.$$

Să se arate că ea nu poate avea mai mult de o rădăcină reală, dacă ecuaţiile:

$$A_ix^2+2A_{i+1}x+A_{i+2}=0,\ i=0,\ 1,\ldots m-2,$$

au toate rădăcinele duble.

52. a, b, c fiind numere reale date, să se arate că, având $b^2-4ac>0$, ecuaţiunea:

$$acx^5+(ab+ac+bc)x^4+(a^2+b^2+c^2+ab+bc)x^3+$$
$$(a^2+b^2+c^2+ab+bc)x^2+(ab+ac+bc)x+ac=0,$$

are toate rădăcinile sale reale. Cum sunt rădăcinile acestei ecuaţii dacă $b^2-4ac=0$?

53. Fiind dată ecuaţiunea $ax^2+bx+c=0$, cu rădăcinile x_1 şi x_2, să se găsească în ce condiţiuni ecuaţiunea:

$$a^2x^2+b^2x+c^2=0 \text{ are rădăcinile } x_1^2 \text{ şi } x_2^2.$$

54. Să se determine λ şi μ astfel ca mărind cu λ coeficienţii ecuaţiunii $ax^2+bx+c=0$, rădăcinile ei să se mărească cu μ.

Aplicaţie: $a=1$, $b=3$, $c=2$.

XIII. DESCOMPUNEREA TRINOAMELOR INTREGI IN FACTORI.—DISCUŢII ASUPRA NATURII RADACINILOR TRINOAMELOR.—INEGALITĂŢI.

— Să se descompună în factori de gradul întâiu trinoamele

1. x^2-5x+6. 2. $5x^2-x-1$. 3. x^2-2x+2.

4. $x^2-3ax+2a^2$. 5. $x^2-2ax+a^2-b^2$.

6. $x^2-2ax+a^2+b^2$. 7. $(a^2-4b^2)x^2+2(a^3+2b^3)x+a^4-$

8. x^4-13x^2+36. 9. x^4+x^2+1.

10. $x^4-2(a^2+b^2)x^2+a^4+b^4-2a^2b^2$.

11. x^6-1. 12. x^8-1. 13. x^8+1.

14. Să se indice mijlocul pentru a descompune în factori de gradul întâi expresiunile: $x^{2n}-1$ şi $ax^{2^n}+bx^{2^{n-1}}+c$.

15. Să se arate că dacă expresiunile:

$$(ax+b)^2+(a'x+b')^2 \text{ şi } (cx+b)^2+(c'x+b')^2,$$

sunt patrate perfecte, expresiunea $(ax+c)^2+(a'x+c')^2$ va fi deasemenea un patrat perfect.

16. Dacă expresiunile

$(a+\alpha x)^2+(b+\beta x)^2$ şi $(a+\alpha x)^2+(c+\gamma x)^2$ sunt patrate perfecte, expresia:

$(a+\alpha x)^2+(b+\beta x)^2+(c+\gamma x)^2$ este deasemenea un patrat perfect

17. Să se rezolve ecuaţia $\frac{a}{x}=\frac{x-1}{x-a}$ şi să se afle între ce limite trebue să rămână cuprins a ca rădăcinele ecuaţiei să fie reale. (A. G. 97).

18. Se dă trinomul ax^2+bx+c şi se cere să se determine a, b, c astfel ca trinomul să ia aceeaşi valoare pentru $x=a$, $x=b$, $x=c$; în această ipoteză să se găsească rădăcinile trinomului.

— Cum trebue să fie x pentru ca să avem:

19. $x>\frac{1}{2a-x}$. 20. $\frac{(h+1)x^2+hx+h}{x^2+x+1}<k$.

21. $3>\frac{x^2-7x+10}{x^2-2x-3}>0$. 22. $x^4-7x^2+10>0$.

23. $\frac{x^2-3x+2}{x+1}>\frac{2x^2-3x-2}{x-1}$. (P. S. A. P. 907).

24. $\frac{x^4-17x^2+60}{x(x^2-8x+15)}>0$. 25. $\frac{\sqrt{a^4+2x^4}}{3a-x}<3a+x$.

26. $\frac{p-1}{p+1}<\frac{x^2-2x+p^2}{x^2+2x+p^2}<\frac{p+1}{p-1}$, $p>1$.

27. $\frac{x^3-3x+2}{x^3-3x-2}>0$.

28. $\frac{2x^3-6x^2-6x-8}{x^2+x+1}>\frac{x^3+x^2-22x-4}{x^2+2x+1}$.

29. $0<\frac{(x+6)(x+4)(x+2)(x-1)(x-3)(x-5)}{(x-6)(x-4)(x-2)(x+1)(x+3)(x+5)}<1$.

30. Să se rezolve ecuaţia $x^2-ax+a-1=0$; x_1 şi x_2 fiind rădăcinile acestei ecuaţii, să se determine a astfel încât să avem: $\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1+x_2}>x_1x_2$. (A. G. 900.)

31. Intre ce limite trebue să rămână cuprins a, ca să avem

$$\frac{3(2a+1)x^2-2(4a+5)x+5a+9}{5x^2-6x+5}<a+2$$

oricare ar fi x?

32. Ce valori poate avea h astfel ca să avem:

$$-3<\frac{x^2-hx+1}{x^2+x+1}<3,$$

oricare ar fi x?

33. Să se arate că m fiind cuprins între 3 şi 8, expresiunea $x^2-6mx+8m^2+11m-24$ este pozitivă ori care ar fi x.

34. Să se rezolve sistemul de inegalităţi:

$$(\lambda+2)\,x^2-2(\lambda-2)x+\lambda\geqslant 0,\quad 2\lambda-x\leqslant 0,$$

când λ variază dela $-\infty$ la $+\infty$.

35. Să se arate că oricare ar fi a şi b reali, iar $\alpha>0$ ecuaţia $ax^2+bx-\alpha\left[\frac{a}{\alpha+2}+\frac{b}{\alpha+1}\right]=0$, are totdeauna o rădăcină cuprinsă între zero şi $\frac{\alpha+1}{\alpha+2}$.

36. Pentru ce valori ale lui x avem

$$2(2x+1)>-3\sqrt{-x^2-x+6}.$$

— Presupunând că m variază dela $-\infty$ la $+\infty$, să se studieze natura şi semnul rădăcinilor ecuaţiilor:

37. $$3x^2+2mx+m=0.$$

38. $$(m-2)x^2-(m-4)x+m-3=0.$$

39. $$(11-m^2)x^2-4\sqrt{30-4m^2}\,.\,x+4m=0.$$

40. $$mx^4-4mx^2+m-1=0.$$

41. $$(3m-2)x^4+(2m+1)x^2-m=0.$$

42. $$x^4+[2m(m-a)-b]x^2+m^2[(m-a)^2-b]=0,$$

a şi b fiind două numere pozitive date.

43. $$mx^8-2mx^4-a=0,\qquad a>0.$$

44. Cum trebue să fie m pentru ca rădăcinile ecuaţiei:

$$x^2-2mx+m^2-m+1=0,$$

să fie una mai mică decât 1 şi alta mai mare ca 2?

45. Cum trebue să fie m pentru ca rădăcinile ecuaţiei:

$$(m^2-1)x^2-(2m+1)x+1=0,$$

să fie: *a)* mai mici ca 0,5; *b)* una mai mare şi alta mai mică decât 1?

46. Cum trebue să fie m pentru ca rădăcinile ecuaţiei:

$$x^2-(m^2-5)x+4(m+2)=0,$$

să fie cuprinse între -1 şi $+1$?

47. Să se discute natura rădăcinilor ecuaţii:

$$x^4-2mx^3+4mx^2-2mx+1=0.$$

48. Să se găsească relaţia de condiţie între coeficienţii polinomului:

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f,$$

pentru ca acest polinom să se poată descompune în doi factori raţionali de gradul întâi.

— Fără a rezolva ecuaţiile, să se aşeze în ordinea mărimii relative, rădăcinile ecuaţiilor următoare:

49. $x^2-2x-3=0, \quad 2x-3m=0.$

50. $x^2-3x-4=0, \quad x^2-2mx-m=0.$

51. $x^2-mx+2m-1=0, \quad x^2+2(m-1)x-(2m+5)=0.$

52. Să se arate că având $4p+4q+1<0$, trinoamele $T=x^2-2px+q$ şi $T_1=x^2-2qx+p$ au rădăcinile reale. Să se arate deasemenea că vom avea $T<0$ şi $T_1<0$, pentru toate valorile lui x cuprinse între cea mai mică rădăcină a unui trinom şi cea mai mare a celuilalt.

(Concurs G. M. 908).

53. Ecuaţiile $ax^2+bx+c=0$ şi $a'x^2+b'x+c'=0$ având rădăcinile lor reale, să se indice caracterele care permit a aranja rădăcinile în ordine crescândă, fără a rezolva ecuaţiile.

54. Să se găsească valorile reale sau imaginare ale lui x astfel ca să avem $x^2-6x+10<0$.

XIV. ECUAŢII DE GRADUL AL DOILEA CU MAI MULTE NECUNOSCUTE SAU REDUCTIBILE LA GRADUL AL DOILEA.

— Să se rezolve sistemele de ecuaţii:

1. $x+y=100, \ xy=2400.$ 2. $x+y=4, \ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1.$

3. $x^2+y^2=65, \ xy=28.$ 4. $x^3-y^3=8, \ x-y=2$

5. $x^3+y^3=65, \ x+y=5.$

6. $\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}=\frac{3}{2}, \quad x^2+y^2=20.$

7. $xy(x+y)=30, \quad x^3+y^3=35.$

8. $\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=9, \quad \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{4}.$

9. $2x^2+3xy+y^2=70, \quad 6x^2+xy-y^2=50.$

(A. G. 909).

10. $x^2+y^2=2a^2, \ x+y=2b.$ 11. $x^3+y^3=a^3, \ x+y=b.$

12. $x^4+y^4=a^4, \ x+y=b.$ 13. $x^5+y^5=a^5, \ x+y=b.$

14. $x^2+4xy-2y^2=5(x+y), \quad 5x^2-xy-y^2=7(x+y).$

15. $x^4+16y^4+24x^2y^2=313, \quad x^3y+4xy^3=39.$

16. $(x^2+y^2)(x+y)=50, \quad (x^2-y^2)(x-y)=36.$

17. $y^2-4xy+20x^2+3y-264x=0,$

$5y^2-38xy+x^2-12y+1056x=0.$

18. $x(12-xy)=y(xy-3),$

$xy(y+4x-xy)=12(x+y-3).$

19. $x^3-y^2+x-1=0, \quad y^3-x^2+y-1=0.$

20. $x+y^2=ax, \quad y+x^2=by.$

21. $x^6-y^6+x^2y^4-x^4y^2=51, \quad x^8y^4+x^4y^8=272.$

22. $x^9+y^9=513, \quad x^6y^3+x^3y^6=72.$

23. $(x+y)^7-(x^7+y^7)=75.810, \quad x^2+xy+y^2=19.$

24. $x^3-y^3=x^2+xy+y^2, \quad x^5-y^5=211.$

25. $x^4+4y^4=a, \quad x^2+2xy+2y^2=b.$

26. $x^2+y^2=10a^2-18, \ xy=9-3a^2.$

Discuţie (P. S. A. P. 99).

27. $x^2+y^2+xy+x+y+m=0, \quad \dfrac{x^2}{y^2}=\dfrac{y+m}{x+m}.$

28. $\dfrac{x+y}{1+xy}=a, \quad \dfrac{x-y}{1-xy}=b.$

29. $y^2-(2x+a+b)y+(x+a)(x+b)=0, \quad \dfrac{x(x-a)(x-b)}{(x+a)(x+b)}=y.$

30. $x^2+a^2+y^2+b^2=\sqrt{2}\,[x(a+y)-b(a-y)],$

$x^2-a^2-y^2+b^2=\sqrt{2}\,[x(a-y)+b(a+y)].$

31. $(x+y)(xy+1)=18xy,$

$(x^2+y^2)(x^2y^2+1)=208x^2y^2.$

32. $\dfrac{x^5+y^5}{x^3+y^3}=\dfrac{a^5+b^5}{a^3+b^3}, \quad x^2+xy+y^2=a^2+ab+b^2.$

33. $x^2+y^2+z^2=29, \quad x+y+z=9, \quad xy=12.$

(P. S. A. P. 98).

34. $y+z+yz=a, \quad z+x+xz=b, \quad x+y+xy=0.$

35. $x^2+xy+y^2=21, \quad x^2+xz+z^2=12, \quad y^2+yz+z^2=3.$

36. $x^3+y^3+z^3=x^2+y^2+z^2=x+y+z=1.$

37. $x+y+z=x^3+y^3+z^3=0, \quad x^2+y^2+z^2=\alpha.$

38. Să se consideră ecuaţia

$$x^3-(a+b+c)x^2-(a^2+b^2+c^2-2ab-2ac-2bc)x-a^3-b^3-c^3+$$
$$+a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b=0,$$

care admite rădăcinile: -1, 0, $+1$; să de determine a, b, c.

39. $\dfrac{1}{29}\left(x+\dfrac{y}{z}\right)=\dfrac{1}{34}\left(y+\dfrac{x}{z}\right)=\dfrac{1}{6}, \quad x+y+z=15.$

40. $x+y=7, \quad u+v=3, \quad y+v^2=4, \quad x+u^2=8.$

41. $xy=uv, \quad x+y=52, \quad u+v=46, \quad x^2+y^2+u^2+v^2=2900.$

42. $x+yz+u=5, \quad y+zu+x=8,$

$z+ux+y=11, \quad u+xy+z=17.$

43. $x^2(y-z)=a, \quad y^2(z-x)=b, \quad z^2(x-y)=c.$

44. $x+y=2az, \quad x^2+y^2=2bz^2, \quad x^n+y^n+z^n=c^n.$

45. $y+x(1+z)^2=a, \quad y(1+z)^2+xz^2=b, \quad x+yz^2=c.$

46. $x^2+y^2-z(x+y)=a, \quad y^2+z^2-x(y+z)=b,$
$z^2+x^2-y(x+z)=c.$

47. $xzu+yzv=2ab \qquad zuw+yuv=2ad$
$xzw+xyv=2bc \qquad xuv+zvw=2bd$
$xyu+yzw=2ac \qquad xuv+yvw=2cd.$

48. $2x^2+y^2+z^2=a(x^2+y^2)(x^2+z^2),$
$2y^2+z^2+x^2=b(y^2+z^2)(y^2+x^2), \quad 2z^2+x^2+y^2=c(z^2+x^2)(z^2+y^2).$

49. $(x_2+x_3+\ldots+x_n)(x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n)=(n-1)a_1$
$(x_3+\ldots+x_n+x_1)(x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n)=(n-1)a_2$
$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1})(x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n)=(n-1)a_n.$

50. $x_1(x_2+x_3+\ldots.+x_n)+1.2(x_1+x_2+\ldots.+x_n)^2=9a^2$
$x_2(x_1+x_3+\ldots.+x_n)+2.3(x_1+x_2\ldots.+x_n)^2=25a^2$
$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$x_n(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1})+n(n+1)(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2=(2n+1)^2a^2.$

51. $x_1^2+x_2^2+\ldots.+x_n^2+x_1=a_1^2$
$x_1^2+x_2^2+\ldots.+x_n^2+x_2=a_2^2$
$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$x_1^2+x_2^2+\ldots.+x_n^2+x_n=a_n^2.$

52. $\sqrt{xy}+\sqrt{(1-x)(1-y)}=a,$
$\sqrt{x(1-y)}+\sqrt{y(1-x)}=b.$

53. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=z, \quad 2x+2y+p=0, \quad z^4+pz^2+q=0;$
care sunt condiţiile ca rădăcinile să fie reale?

54. $\sqrt{x+y}+2\sqrt{x-y}=\dfrac{2(x-1)}{\sqrt{x-y}}, \qquad \dfrac{x^2+y^2}{xy}=\dfrac{34}{15}.$

55. $\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=1, \qquad x-y=217.$

56. $(x^2+y^2+c^2)^{\frac{1}{3}}+(x-y+c)^{\frac{2}{3}}=2(4xy)^{\frac{1}{3}}, \quad \dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{c}.$

57. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}, \qquad \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{2a}.$

58. $\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}}=a,$
$x+y+3\sqrt[3]{bxy}=b.$

59. Să se rezolve ecuaţiunea:
$$\sqrt[3]{(x+3)(x+12)}+\sqrt{(x+1)(x+13)}=7.$$

XV. PROBLEME DE GRADUL AL DOILEA.

1. Să se împartă numărul 15 în două părţi astfel ca produsul lor să fie 54.

2. Să se împartă numărul 11 în două părţi, astfel că de 2 ori patratul primei părţi, plus de 5 ori patratul celei de a doua, să fie 277.

3. Să se găsească trei numere întregi consecutive, astfel ca raportul între produsul şi suma lor să fie egal cu un număr dat a. Cum trebue să fie a ca problema să fie posibilă?

4. Să se găsească două numere, ştiind că diferenţa patratelor lor este egală cu produsul şi cu suma acelor numere.

5. Cineva dă cu dobândă un capital de 8000 lei în două părţi: prima parte cu 10%, iar cea de a doua cu 12%; să se găsească cele două părţi ştiind că prima a produs 400 lei dobândă, iar cea de a doua, stând cu 8 luni mai mult, a produs 320 lei dobândă.

6. Să se descompună o sumă a în două părţi, astfel ca suma cuburilor divizată cu suma patratelor să fie egală cu un număr dat b.

7. Să se găsească 4 numere, care formează o proporţie, ştiind că suma mediilor este 5, suma extremilor 7 şi suma cuburilor numerelor 252.

8. Doi călători merg pe acelaşi drum, unul spre altul şi cu iuţeli constante. Primul călător care pleacă din A, făcuse, în momentul întâlnirii lor, 40 km, mai mult decât cel de al doilea, care pleacă din B, şi pune încă 9 ore până să ajungă în B; iar al doilea călător pune 25 ore ca să ajungă din punctul întâlnirii lor până în A. Să se găsească lungimea AB.

9. Două mobile pleacă dintr'un acelaş punct cu iuţeli diferite, dar constante. Ele parcurg un contur închis lung de 120 m. Să se determine iuţelile, ştiind că intervalul de timp, ce trece între două întâlniri succesive, se micşorează cu 5 ore sau se măreşte cu 16 ore, după cum se dublează viteza cea mai mare sau cea mai mică.

10. Un antreprenor se însărcinează cu facerea unui şanţ pe

preţul de 200 lei m^3. Lucrarea fiind grabnică se convine astfel: dacă se va face mai mult de 20 m. pe zi, preţul unitar să se mărească cu 20 lei, iar dacă se face mai puţin, preţul unitar să se micşoreze cu 20 lei de fiecare m^3 făcut mai puţin. Intr'o zi cuvenindu-se antreprenorului 2880 lei, iar în alta 6720 lei, să se afle cât a executat în fiecare zi.

11. Să se generalizeze chestiunea precedentă şi să se discute.

12. O persoană lasă o moştenire de a lei de împărţit între mai mulţi moştenitori; n dintre ei renunţă la moştenire şi din această cauză partea fiecăruia din ceilalţi moştenitori se măreşte cu b lei. Câţi moştenitori sunt? Discuţie.

13. Se aruncă un corp de jos în sus vertical, cu o viteză de 40 m/sec.; 5 secunde după aceia se aruncă un al doilea corp, în aceleaşi condiţiuni, însă cu o viteză de 20 m/sec. După cât timp se vor întâlni cele două corpuri? Care vor fi vitezele lor în acel moment şi de ce sens? La ce distanţă de punctul de plecare va avea loc întâlnirea?

14. Două numere sunt reprezentate, într'un sistem cu baza necunoscută, prin 504 şi 304, iar în sistemul cu baza 9 produsul lor este reprezentat prin 106100. Să se afle baza necunoscută.

15. Se dă o dreaptă AB şi se cere să se construiască un cerc, care să treacă prin A, al cărui centru este pe AB şi astfel că perpendiculara coborîtă pe AB, din punctul de contact al tangentei dusă din B la cerc, să împartă diametrul cercului în medie şi extremă raţie.

16. Să se găsească raza cercului înscris într'un triunghiu de perimetru dat $2p$, ştiind că triunghiul este divizat de cerc în medie şi extremă raţie.

17. O linie dreaptă MN este perpendiculară într'un punct M pe un plan P. Dintr'un punct A al acestui plan se vede MN sub un unghiu α; prin A se duce în planul P o dreaptă făcând cu AM unghiul ω şi se ia pe această dreaptă o lungime $AB=a$; din B se vede MN sub unghiul β. Să se calculez MN în funcţiune α, β, ω şi a.

18. Pe baza BC a unui triunghiu se iau 2 puncte P şi P′:

unul P′ între B şi C, iar celălalt P în afară de segmentul BC. Prin P se duce o secantă, care tae pe AC în D şi pe AB în E. Să se determine poziţia acestei secante astfel că suprafaţa triunghiului P′DE să fie egală cu o cantitate dată m^2.

19. Se dă un triunghiu ABC dreptunghic în A. Să se găsească pe ipotenuză un punct P, astfel ca suma patratelor perpendicularelor scoborîte din P pe cele două laturi ale unghiului drept să fie egală cu m^2. Care este cea mai mică valoare pe care poate să o ia m^2?

20. Se dă un dreptunghiu ABCD. Pe latura AB se ia o lungime $AF=x$ şi pe prelungirea lui CB aceiaşi lungime $BE=x$. Să se determine x astfel ca volumul născut de patrulaterul DEFC, când se învârteşte în jurul laturei DC, să fie egal cu volumul născut de patrulaterul ABCD, când se învârteşte în jurul aceleiaşi laturi.

(P. S. A. P. 98).

21. Pe laturile unui unghiu drept O, se iau lungimile $AO=a$, $OB=b$; să se găsească pe direcţia OA un punct M, aşa că paralela dusă din el la OB, să întâlnească pe AB într'un punct F, a cărui distanţă la punctul O să fie egală cu AB. (A. G. 908).

22. Un con echilateral este înscris într'o sferă de rază R. Să se taie cele două solide printr'un plan paralel cu baza conului, astfel că diferenţa secţiunilor să fie egală cu o cantitate dată $S=\pi a^2$. Care este cea mai mare valoare pe care poate să o aibă S?

23. Să se înscrie într'un cerc de rază R, o coardă, astfel ca suma lungimei acestei coarde şi distanţa ei la centru să fie egală cu o lungime dată l.

24. Să se găsească razele celor două baze ale unui trunchiu de con, cunoscând înălţimea, generatoare şi volumul trunchiului de con.

25. Să se afle înălţimea şi laturile paralele ale unui trapez dreptunghic, cunoscând latura oblică, aria trapezului şi volumul născut din rotaţia sa în jurul laturei oblice. Condiţiunile de posibilitate ale problemei.

26. Suma celor trei laturi ale unui triunghiu dreptunghic este de 208 m. iar suma celor două catete este cu 30 m mai mare ca ipotenuza. Să se calculeze lungimile celor trei laturi. (P. S. A. P. 905).

27. Să se circumscrie unui cerc de rază R, un triunghiu dreptunghic cu perimetrul $2p$.

28. Se dă un cerc O și un punct A, situat la distanța OA egală cu a de centrul cercului. Să se ducă prin acest punct o secantă ABC, astfel ca patratul coardei BC, mărit cu suma patratelor distanțelor BD și CE, a extremităților sale la diametrul OA, să fie egal cu de m ori patratul distanței dela centrul cercului la coarda BC.

29. Să se înscrie într'o sferă un cilindru circular drept, a cărui suprafață totală să fie egală cu o cantitate dată, $2\pi m^2$. Care este cea mai mare valoare pe care poate să o aibă m^2?

30. Un trunchiu de con are înălțimea sa medie proporțională între diametrele celor două baze. Se cere: 1) să se arate că acest trunchiu de con se poate circumscrie unei sfere; 2) înălțimea i a trunchiului de con fiind dată, să se determine razele celor două baze astfel ca suprafața totală a trunchiului de con să fie echivalentă cu aceia a unui cerc de rază a.

31. Se dă un cerc și două tangente dreptunghiulare. Să se ducă o a treia tangentă, formând cu cele dintâi două un triunghiu de suprafață dată m^2. Să se găsească cea mai mare și cea mai mică valoare pe care poate să o ia m^2.

32. Se dă un cerc O în care se duce un diametru AB. In A și B se duc tangente la cerc. Se cere să se ducă o a treia tangentă CD, C și D fiind punctele de intersecție ale acesteia cu primele două tangente, astfel ca volumul determinat de trapezul ABCD, prin învârtirea lui în jurul lui AB, să fie egal cu volumul unei sfere de rază dată.

33. Fiind dat un triunghiu echilateral ABC, se iau pe laturile AB, BC, CA respectiv segmentele $AM=x$, $BN=2x$, $CP=3x$. Să se găsească valoarea lui x pentru care triunghiul MNP este dreptunghic. Se poate reduce la o dreaptă acest triunghiu?

34. O prismă are ca secţiune dreaptă un triunghiu echilateral de latură m. Să se determine un plan, care să taie prisma după un triunghiu de suprafaţă dată m^2, şi a cărui una din laturi să aibă o lungime dată a. Să se calculeze celelalte laturi ale triunghiului.

35. Intr'un patrulater ABCD unghiurile B şi D sunt drepte. Se cunoaşte diagonala $AC=a$, perimetrul $2p$ şi suprafaţa S. Să se calculeze laturile $AB=x$, $BC=y$, $CD=x'$, $DA=y'$.

XVI. CHESTIUNI DIVERSE. REPREZENTARI GRAFICE.

— Să se elimine x şi y între ecuaţiile:

1. $x^3+y^3=a^3, \quad x^2+y^2=b^2, \quad x+y=c.$

2. $x\left(1+\dfrac{2y^2}{r^2}\right)=a, \quad y\left(1+\dfrac{2x^2}{r^2}\right)=b, \quad x^2+y^2=r^2.$

— Să se elimine x, y şi z între ecuaţiile:

3. $x+y+z=0, \quad ax^2+by^2+cz^2=0, \quad ax^4+by^4+cz^4=0.$

4. $$(x-y)(x-z)=a(x-y-z)^2,$$
$$(y-z)(y-x)=b(y-z-x)^2,$$
$$(z-x)(z-y)=c(z-x-y)^2.$$

5. $x+y+z=A, \quad x^2+y^2+z^2=B^2, \quad xy+xz+yz=C^2.$

— Să se figureze geometriceşte curbele care reprezintă variaţiunea funcţiunilor:

6. $y^2=1-x^2$. 7. $y=x^2-x$. 8. $y=\dfrac{1}{x}$.

9. $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$. 10. $y=\dfrac{2x}{1-x^2}$. 11. $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

— Să se arate care sunt punctele planului pentru care avem:

12. $x^2+y^2-4<0$. 13. $x^2+y^2-2x-2y<0$.

14. $y-x^2>0$. 15. $xy-x^2>0$.

16. $x^2+y^2-1<0$. şi $x+y-1>0$.

17. $x^2+y^2-1>0$. » $x^2+y^2-4<0$.

18. $x^2+y^2-4<0$. şi $xy-1>0$.

19. $(x^2+1)y-2x>0$ » $(x^2-1)y-2x<0$.

20. O expresiune de forma $a+bi$ $(i=\sqrt{-1})$ reprezentându-se geometriceşte prin punctul a cărui abscisă este a şi ordonată b, să se reprezinte geometriceşte $\sqrt{i}$.

21. Să se reprezinte geometriceşte expresiunea $\frac{k+i}{k-i}$; ce se întâmplă când k variază?

22. Presupunând că α variază dela $-\infty$ la $+\infty$, să se figureze geometriceşte punctul $(a+a'i)\alpha+(b+b'i)$.

23. Cunoscând punctul $a+bi=z$; să se reprezinte grafic punctul:

$$\frac{A+Bz}{C+Dz}.$$

A, B, C, D fiind numere reale.

24. Ce se întâmplă cu rădăcinile ecuaţiei $mx^2+x-1=0$, când m tinde către zero?

25. Ce devin rădăcinele ecuaţiei $mx^2-mx-1=0$, când m tinde către zero?

26. Fiind dată ecuaţia $ax^2+bx+c=0$, ale cărei rădăcini sunt x_1 şi x_2, să se arate că rădăcinele ecuaţiei $(a+\alpha)x^2+(b+\beta)x+(c+\gamma)=0$, tind, una către x_1 şi alta către x_2 când α, β, γ tind către zero.

27. Fiind date ecuaţiile: $x^2+ax-a^2=0$ şi $x^2+x-a=0$, fie α una din rădăcinele primei ecuaţii, α' una din rădăcinile celei de a doua; să se determine, fără a rezolva ecuaţiile, limita raportului $\alpha:\alpha'$, când a tinde către zero.

— m variind dela $-\infty$ la $+\infty$ să se studieze variaţiunea rădăcinelor ecuaţiilor:

28. $x^2-2x-m^2=0$, 29. $mx^2-x-m=0$.

30. $(m-1)x^2-(m-2)x+(m-3)=0$.

31. Cum trebue să fie m pentru ca una din rădăcinele ecuaţiei $mx^2+x-1=0$ să fie mai mare ca 1000, iar cealaltă să difere de 1 cu o cantitate mai mică ca $\frac{1}{1000}$?

32. Să se calculeze cu 6 zecimile exacte cea mai mică rădăcină pozitivă a ecuației $0{,}01\,x^2-x+1=0$.

33. Fie x' și x'' rădăcinile ecuației: $x^2-2(m+1)x+$ $+2(m+1)=0$, se cere să se determine m, fără a rezolva ecuația, astfel ca rădăcinele să fie cuprinse între valorile pe care le ia expresiunea $\frac{x+1}{x-2}$, când înlocuim x prin x' și x''.

34. Fie x și y rădacinile ecuației:

$$(1+a)z^2+(a-2)z+1=0.$$

Să se arate că expresiunea:

$$\frac{x-1}{y^{n-1}}\left[\frac{1}{x^n}\cdot\frac{y^n-x^n}{y-x}-\frac{2}{x+1}\cdot\frac{y^n-1}{y-1}\right]$$

nu își schimbă valoarea dacă înlocuim x cu y și y cu x.

35. Fie $P_m=a^m+a^{m-1}b+...+ab^{m-1}+b^m$.

Să se demonstreze că:

$$\frac{P_{2n+1}}{a+b}-\frac{n+1}{2n+1}P_{2n}>0$$

$$\frac{P_{2n}}{(a+b)^2}-\frac{2n+1}{4n}\,\frac{P_{2n-1}}{a-b}>0$$

oricare ar fi a și b. Să se deducă inegalitățile:

$$\frac{P_{2n}}{2n+1}>\left(\frac{a+b}{2}\right)^{2n},\quad \frac{P_{2n+1}}{(n+1)(a+b)}>\left(\frac{a+b}{2}\right)^{2n}.$$

36. Să se simplifice expresiunea:

$$\left[p+\sqrt{p^2-q^2}\right]^{\frac{7}{2}}+\left[p-\sqrt{p^2-q^2}\right]^{\frac{2}{7}};$$

să se arate că se poate pune sub forma $A\sqrt{2p+2q}$, A fiind un polinom rațional în p și q, a cărui valoare urmează să se determine.

37. A, B, C fiind numere raționale, care sunt condițiunile ca să găsim alte două numere raționale x și y, așa încât să avem:

$$\sqrt{A+\sqrt{B+\sqrt{C}}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}.$$

38. Fie a, b două numere pozitive şi $A=\frac{a+b}{2}$ media lor aritmetică, iar $H=\frac{2ab}{a+b}$ media lor armonică. Se defineşte numărul $T=\frac{ab-1+\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}}{a+b}$ ca media tangenţială a celor două numere. Să se arate că avem, oricare ar fi a şi b: $H\leqslant T\leqslant A$.

39. Să se determine valorile reale sau imaginare ale lui x pentru care expresiunea: $(1-i)x^2-2ix+1+i$, în care $i=\sqrt{1}$, este reală şi în acest caz să se afle semnul ei $(i=\sqrt{-1})$.

40. Fiind dată ecuaţia $Ax^2+Bx+C=0$, în care $A=a+a'i$ $B=b+b'i$, $C=c+c'i$; să se arate că A, B, C fiind primi între ei — adică numerile a, a', b, b', c, c', presupuse întregi, sunt prime între ele — ecuaţia precedentă nu poate avea ambele rădăcini reale. Care sunt condiţiile ca această ecuaţie să aibă o rădăcină reală şi una imaginară?

XVII. PROGRESIUNI.

1. Intr'o progresiune aritmetică a reprezintă primul termen, r raţia, n numărul termenilor şi S suma lor. Cunoscând trei oarecare din aceste cantităţi, să se deducă a patra. In cazul când se cunoaşte a, r şi S şi se cere n, care sunt condiţiile de posibilitate ale problemei şi câte soluţii poate admite; să se aplice în cazul când $r=1$, $a=-4$, $S=-9$.

2. Un ceasornic, care sună orele şi sferturile, câte sunete dă în 24 ore?

3. Suma celor dintâi n^2 numere este egală cu patratul sumei primelor n numere, plus patratul sumei primelor $n-1$ numere.

4. Să se găsească trei termeni în progresiune aritmetică a căror sumă este S şi produsul P.

5. Să se găsească cinci numere în progresie aritmetică a căror sumă este S şi produsul P. Aplicaţie: $S=15$, $P=120$.

6. Să se găsească trei numere în progresie aritmetică de

rație r, astfel ca suma lor să fie egală cu produsul lor. Caz particular $r=1$.

7. Să se găsească al n-lea termen și suma celor dintâi n termeni ai șirului: $1, \frac{n-1}{n}, \frac{n-2}{n}, \ldots$

8. Să se găsească progresiunile aritmetice în care există un raport constant între suma celor dintâi n termeni și suma celor dintâi $2n$ termeni.

9. Dacă $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{a+b}$ sunt trei termeni consecutivi ai unei progresiuni aritmetice, această proprietate aparține și numerelor a^2, b^2, c^2.

10. Dacă $\frac{a}{b+c}, \frac{b}{a+c}, \frac{c}{a+b}$ sunt trei termeni consecutivi ai unei progresiuni aritmetice, această proprietate aparține și numerelor a^2, b^2, c^2 sau avem $a+b+c=0$.

11. Când suma a doi termeni ai unei progresiuni aritmetice este un termen al progresiunei?

12. Fiind dată ecuația $x^2+px+q=0$, ale cărei rădăcini sunt α și β, să se determine p și q astfel ca α, β, p și q să fie în progresiune aritmetică.

13. Știind că a, b, c, d sunt patru numere în progresiune aritmetică, să se aleagă printre numerele $A=a+b+c+d$, $B=a+b+c-d$, $C=a+b-c+d$, $D=a-b+c+d$, $E=-a+b+c+d$, patru numere care să fie în progresiune aritmetică. Care este condițiunea ca numerele A, B, C, D, E să fie în progresiune aritmetică? Să se generalizeze.

14. Dacă se scrie progresiunea aritmetică 1. 5. 9. 13... în linii conținând succesiv 1, 3, 5,... termeni ai progresiunei,

$$\begin{array}{c} 1 \\ 5.\ 9.\ 13 \\ 17.\ 21.\ 25.\ 29.\ 33. \\ \cdots\cdots \end{array}$$

suma termenilor dintr'o linie oarecare este egală cu cubul unui număr fără soț.

15. Se împart termenii progresiunei $1.\ 1+a.\ 1+2a.\ 1+3a..$, în grupe astfel ca numărul termenilor grupelor succesive să fie: $1.\ 1+b.\ 1+2b...$; să se găsească suma termenilor din grupul de ordinul n.

16. Să se găsească o progresiune aritmetică de patru termeni ştiind că produsul termenilor de rang par este 128, iar al celor de rang impar 48.

17. Să se găsească o progresiune aritmetică cu un număr par de termeni, ştiind că suma termenilor de rang impar este 70, a celor de rang par 85 şi produsul termenilor extremi este 58.

18. Dacă laturile unui triunghiu dreptunghic sunt în progresiune aritmetică, raţia acelei progresiuni este egală cu raza cercului înscris.

19. Să se găsească numărul care adăugat la 1, 0 şi $-\frac{3}{4}$ să dea trei numere în progresiune geometrică; să se găsească raţia acelei progresiuni.

20. Trei numere sunt în progresiune geometrică. Dacă se măreşte cel de al doilea cu 8, progresiunea devine aritmetică, iar dacă în urmă se măreşte ultimul termen cu 64, ea redevine geometrică; să se găsească cele trei numere.

21. Să se găsească cinci numere în progresiune geometrică cunoscând suma lor S şi produsul P.

22. O progresiune geometrică are zece termeni, primul termen este 3, iar ultimul 1536. Se cere raţia şi suma termenilor. (P. S. A. P. 905).

23. Să se arate că dacă laturile unui triunghiu sunt în progresiune geometrică, raţia acelei progresiuni este cuprinsă între $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ şi $\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$.

24. Dacă $\frac{1}{a+b}, \frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}$ sunt în progresie geometrică, avem relaţiunea:

$$a(a+b+c)=b^2+c^2+bc.$$

— Să se calculeze sumele:

25. $$\frac{1}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^n}+\frac{1}{(a-b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{n-1}}+$$
$$+\frac{1}{(a-b)^2(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{n-2}}+\ldots+\frac{1}{(a-b)^n}.$$

26. $$\frac{\sqrt[m]{a^r}}{\sqrt[n]{b^r}}+\frac{\sqrt[m]{a^{r-1}}}{\sqrt[n]{b^{r+1}}}+\frac{\sqrt[m]{a^{r-2}}}{\sqrt[n]{b^{r+2}}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[n]{b^{2r}}}.$$

27. Să se calculeze suma celor dintâi n numere ale şirului:

$$\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\frac{3}{a^3}+\ldots+\frac{p}{a^p},\quad a>1;$$

ce se întâmplă când n creşte nemărginit?

28. Pe o tablă sunt scrise următoarele p şiruri de numere nelimitate $\frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3}\ldots\frac{1}{a^n},\ldots$

$$\frac{1}{(a-1)^2}, \frac{1}{(a-1)^3},\ldots \frac{1}{(a-1)^n},\ldots$$

$$\frac{1}{(a-2)^2}, \frac{1}{(a-2)^3},\ldots \frac{1}{(a-2)^n},\ldots$$

. . . .

$$\frac{1}{(a-p+1)^2}\ldots \frac{1}{(a-p+1)^n}\ldots$$

Care este suma tuturor numerelor din aceste şiruri.

29. Să se găsească relaţia de condiţie între m şi n pentru ca numerele, cari verifică ecuaţiile:

$$x+y+z=1,\ mx+y+z=0,\ x+y+nz=0,$$

să fie în progresie geometrică.

30. Dacă se intercalează între pătratele a două numere consecutive n^2 şi $(n+1)^2$, toate numerele intermediare cu soţ sau fără soţ, după cum n este par sau impar, suma numerelor din şirul astfel obţinut este egală cu un cub.

31. Să se calculeze suma:

$$1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(2n-1)^2-(2n)^2.$$

32. Patratul sumei celor dintâi $m-1$ numere, mărit cu patratul sumei celor dintâi m numere, poate fi pus sub forma sumei unui şir de numere întregi consecutive sau sub forma sumei a trei şiruri de numere întregi consecutive.

33. Dacă m este fără soţ, m^p poate fi considerat ca suma a m sau $2m$ numere întregi consecutive.

34. Să se calculeze suma:

$$S_n=\left(r^2+\frac{1}{r^2}\right)^2+\left(r^4+\frac{1}{r^4}\right)^2+\ldots+\left(r^{2n}+\frac{1}{r^{2n}}\right)^2.$$

35. Se dă un con ABC în care se înscrie o sferă, apoi se duce o sferă tangentă la con şi la această sferă, apoi o a treia sferă tangentă la con şi la a doua sferă, etc. Să se găsească limita către care tinde suma volumelor tuturor acestor sfere, când se repetă operaţia nemărginit. Caz particular când conul dat este echilateral.

36. Pe un drum de fer se pun în mişcare două trenuri în aceiaşi direcţie şi pe două linii paralele diferite. Primul tren face a km. în prima oră, $a+\alpha$ în a doua oră, $a+2\alpha$ în a treia, etc.; cel de al doilea tren porneşte b ore în urma celui dintâi şi face câte c km. pe oră. După câte ore se vor întâlni cele două trenuri? Aplicaţie:

$$a=1,\ \alpha=2,\ b=6,\ c=32.$$

37. Fie k, k', k'' rapoartele în care bisectoarele unghiurilor unui triunghiu împart laturile opuse ale triunghiului. Să se găsească triunghiurile în care k, k' k'' sunt în progresiune geometrică de raţie dată; printre acestea să se determine triunghiul care are un perimetru sau o suprafaţă dată.

(Concursul G. M. 910).

38. Fiind dat un cub se unesc centrele feţelor sale două câte două, se obţine un octaedru. Unind centrele feţelor octaedrului se obţine un cub, în care se poate înscrie un nou octaedru şi aşa mai departe, nemărginit. Să se găsească suma volumelor tuturor cuburilor şi octaedrelor astfel formate.

39. Un butoi conţine a litri de vin. Se scoate un litru de

vin şi se înlocueşte cu 1 litru de apă; apoi se scoate 1 litru de amestec şi se înlocueşte cu 1 litru de apă şi aşa mai departe. Care este cantitatea de vin ce mai conţine butoiul după n operaţii?

40. Pe un pahar cilindric sunt trei semne, pe cari le vom însemna cu α, β, γ, începând de jos. O persoană toarnă vin până în β, apă până în γ şi bea din amestec până în α. După aceea pune vin până în β, apă până în γ şi bea până în α; această operaţie se repetă de n ori. Se cere compoziţia amestecului după n operaţii.

41. a, b, x fiind nişte numere date, să se afle expresiunea generală a numerelor definite prin relaţia:

$$x_n = a x_{n-1} + b.$$

42. Fie $a_1, a_2, \dots a_n$, n numere în progresiune aritmetică, $b_1, b_2, \dots b_n$, n numere în progresiune geometrică. Să se calculeze suma: $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$; să se aplice în cazurile când $a_n = n$, $b_n = 1 : 2^n$ şi $a_n = n$, $b_n = x^n$.

43. Să se găsească suma celor dintâi n termeni ai şirului

$$5,\ 45,\ 445,\ 4445, \dots$$

44. Să se arate că dacă n creşte nemărginit, raportul $n : a^n$ tinde către zero când $a > 1$.

45. Se dă un cerc, în care se înscrie un patrat; în acest patrat se înscrie patratul cel mai mic, în care se înscrie iarăşi un cerc. Se repetă apoi înscrierile în aceiaşi ordine, nemărginit. Se cere suma suprafeţelor cercurilor şi patratelor, când ne oprim la cercul de ordinul $n+1$ inclusiv. Caz particular când raza primului cerc este $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ şi n creşte nemărginit.

46. Să se găsească suma celor dintâi n termeni ai şirului b, ab, aab, $aaab, \dots$, literile a şi b reprezentând unităţi de diferite ordine.

47. Insemnând cu S_n suma celor dintâi n numere ale şirului precedent, să se calculeze suma $S_1 + S_2 + \dots + S_n$.

48. Să se găsească suma tuturor fracţiunilor de forma $\frac{1}{(p+1)^{q+1}}$ în care p şi q iau toate valorile întregi, pozitive, dela 1 la $+\infty$.

XVIII. LOGARITMI, ECUAŢII EXPONENŢIALE. DOBÂNZI COMPUSE.

1. Să se găsească în baza 5, logaritmul numărului 15625.

2. Să se găsească în baza $2\sqrt{3}$ logaritmul numărului 144.

3. Care este caracteristica logaritmului lui 7 în baza 2?

4. Să se găsească două limite, care să difere între ele cu mai puţin de $\frac{1}{8}$, între care să fie cuprins log 7 în baza 10.

5. Ştiind că în baza 10, $\log 2 = 0{,}30103$ şi $\log 3 = 0{,}47712$, să se calculeze $\log 0{,}5$; $\log 5{,}4$; $\log 0{,}00216$; $\log 0{,}666\ldots$

6. Ştiind că în baza 10, $\log 2 = 0{,}30103$ şi $\log 7 = 0{,}84510$, să se calculeze $\log \left(\frac{25}{49}\right)^{\frac{1}{3}}$ în baza 100.

7. La un joc de şah se pune: pentru primul patrat 1 ban, pentru al doilea patrat 2 bani, pentru al treilea 4 bani..., pentru al şase-zeci şi patrulea 2^{63} bani; cât va conţine tot şahul?

— Să se calculeze valorile expresiunilor:

8. $$x = \sqrt[157]{\left(\frac{829}{828}\right)^{361}}$$

9. $$x = \frac{(0{,}23)^2\sqrt[3]{\frac{1}{5}}}{\sqrt{0{,}5}}$$ (A. G. 907).

10. $$x = \sqrt[10001]{\left(\frac{10001}{10000}\right)^{10000}}$$

11. $$x = \frac{\sqrt[5]{0{,}00038474\sqrt[3]{\frac{89748}{124723}}}}{\sqrt[4]{724674\sqrt[3]{0{,}0006742375}}}.$$

— Să se rezolve ecuaţiile:

12. $$3^{x^2-3x+2} = 729.$$

13. $$2^{3^x} = 512.$$

14. $$3^{2^{2^x}} = 43046721.$$

15. $$3^{\log x} = 243.$$

16. $$\frac{\log a + \log x}{\log (\alpha + x)} = 2;$$

să se găsească condiţiile ca rădăcinile să fie reale.

17. $$(10000\,x)^{[(\log x)^3 - 5 \log x]} = 1.$$

18. $$(\log 4x^2)^2 - 10 \log (18\,x) + 4 = 0,$$

baza logaritmului fiind 3.

19. $$(x-1)\,a^{x(x-1)} - x^2\,[a^{x(x-1)} - 1] - (x-1) = 0.$$

20. $$7^{2+3x} - 5^{4x+1} = 5^{4x+1} - 7^{3x}.$$

21. $$[\log (x+1)]^2 + [2 \log 2 + \log (x^2-1)] \log (x+1) - [\log (x-1) + \log (x^2-1)] \log (x-1) + (\log 2)^2 + \log 2 \log (x^2-1) = 0.$$

22. Să se arate că având: $y = 10^{\frac{1}{1-\log x}}$ şi $z = 10^{\frac{1}{1-\log y}}$, vom avea şi $x = 10^{\frac{1}{1-\log z}}$.

23. Baza unui sistem de logaritmi fiind reprezentată prin numărul $\frac{ax+b}{abx}$, să se determine x, ştiind că în această bază avem:

$$\log \left(\frac{4}{a^3 b^3 x^3}\right) + 2 \log (ax+b) = 4.$$

— Să se rezolve sistemele de ecuaţii:

24. $$3^x 5^y = 10125, \qquad x + y = 7.$$

25. $$\tfrac{2}{3}\sqrt[x]{59049} = \sqrt[y]{1296}, \qquad \frac{\sqrt[2x]{1048576}}{\left(\sqrt[-y]{4096}\right)^2} = 256.$$

26. $$2^{\log x} . 3^{\log y} = \sqrt{54}, \qquad \log x + \log y = 2.$$

27. $$x^2 + y^3 = 101, \qquad 2 \log x + 3 \log y = 2.$$

28. $$x^y = y^x, \qquad x^p = y^q.$$

29. $$x^y = y^x, \qquad p^x = q^y.$$

30. $$u^m v^n = a^x, \quad u^n v^m = a^y, \quad u^x v^y = b, \quad u^y v^x = c.$$

— Să se rezolve inegalităţile:

31. $(1{,}01)^x > 10x$. 32. $\left(\frac{100}{99}\right)^x > \frac{200000}{3}$.

33. $\left(\frac{100}{99}\right)^x > \frac{2000}{3}\,[1-(0{,}99)^{150}]$.

34. Să se găsească numerele întregi a şi b, astfel ca în baza 10, log a şi colog b să aibă aceiaşi mantisă.

35. Un sistem de logaritmi fiind definit prin două progresiuni, una aritmetică şi alta geometrică, să se găsească sistemul pentru care raţia celor două progresiuni este egală cu un acelaşi număr a.

36. Peste cât timp un capital dat cu dobândă compusă de 5% îşi îndoeşte valoarea? Care trebue să fie procentul pentru ca acelaş capital să-şi îndoiască valoarea într'un timp pe jumătate mai mic?

37. Două capitaluri sunt date cu dobândă compusă: unul de 30000 lei cu 6% şi altul cu 5%. Care trebue să fie cel de al doilea capital, pentru ca în 5 ani cele două capitaluri să se urce la aceiaşi sumă şi cât valorează atunci ambele capitaluri?

38. La cât s'ar fi urcat la începutul secolului al XX, o sumă de 1 leu, dată cu dobândă compusă de 10%, la începutul secolului al XIX?

39. Din statistica publicată în 1901, rezultă că populaţia vechiului Regat era la începutul anului 1900 de 5912000 suflete, iar creşterea populaţiei, dedusă dintr'un period de 6 ani (1895—1900), era de 82000 suflete anual. Admiţând că acest coeficient de creştere se va menţine până în anul 2000, să se afle care ar fi populaţia în acel an?

40. Un părinte depune, din ziua naşterii unui copil al său, câte 1 leu pe fiecare zi la casa de economie. Care va fi capitalul strâns până ce copilul devine major, presupunând că dobânda este de 5% şi că suma depusă se capitalizează: 1) anual; 2) la fiecare 3 luni.

41. O persoană posedă un capital A, care îi produce o dobândă anuală r pentru 1 leu; acea persoană cheltueşte

în fiecare an o sumă a; care va fi averea sa după t ani? Presupunând $A=100000$ lei, $r=0{,}08$, $a=10000$ lei, peste cât timp acea persoană se va ruina?

42. Un funcționar intră în serviciul Statului cu salariu de 1500 lei lunar, iar din 5 în 5 ani este înaintat cu câte 500 lei pe lună. Asupra salariului i se face o reținere de 10% pentru pensie. După 35 ani de serviciu ese la pensie cu salariul întreg, pe care l'a avut în ultimii 5 ani, asupra căruia i se face o reținere de 18%. Presupunând că reținerile se capitalizează din 6 în 6 luni cu $4\frac{1}{2}\%$, cât timp trebue să ia pensiune acel funcționar, spre a-și lua înapoi toate reținerile ce i s'au făcut.

43. Dacă trebue să plătim în două părți egale, o sumă împrumutată cu dobândă compusă, mijlocia celor două termene de plată este mai mare decât termenul în care ar trebui să plătim într'o singură dată, o sumă îndoită celor două plăți parțiale.

44. Cineva voește să amortizeze în n ani, un capital împrumutat cu dobândă compusă, prin anuități care să descrească proporțional cu numerile n, $n-1$, $n-2$,... 2, 1. Dobânda la un leu pe an fiind r, să se calculeze prima anuitate.

45. Prin legea din 6 Octombrie 1900 Statul Român a cedat unui sindicat de bancheri venitul net al monopolului hârtiei de țigarete, pe un timp de 12 ani și 7 luni, (1 Septembrie 1900—1 Aprilie 1912) în condițiile următoare:

1) Sindicatul de bancheri a dat Statului, pentru această cesiune și la început, o sumă de 15000000 lei.

2) Venitul brut anual al monopolului a fost garantat de 3130000 lei, din care, pentru a se afla venitul net, se deduce 32% pentru cheltuelile de fabricare și exploatare ale monopolului, care continuă a se face de Stat; acelaș coeficient de 32% se menține și în cazul când venitul brut va fi mai mare.

3) Dacă venitul net va fi mai mic decât cel garantat, Statul va plăti diferența; iar dacă va fi mai mare, plusul de beneficiu se va împărți în două între Stat și bancheri.

Să se afle dobânda pe care o luau bancherii in ipotezele următoare:

1) Că venitul brut nu întrece suma de 3130000 lei;

2) Că dela 1 Aprilie înainte, venitul brut este de 4000000 lei. Prima rată s'a plătit la 1 Aprilie 1901 şi a fost de 1241683 lei, ratele următoare la Octombrie şi Aprilie al fiecărui an, astfel încât se capitalizează din 6 în 6 luni.

RĂSPUNSURI ȘI INDICAȚII.

I. **1.** Se poate scrie: $-4a+6b+3c+10d$, rezultatul este 10. **2.** $+1$. **3.** -399. **4.** 9. **5.** 70. **6.** Avem $[(x^2+y^2)^2-4x^2y^2]^3=[(x^2+y^2+2xy)(x^2+y^2-2xy)]^3=(x+y)^6(x-y)^6$. Inlocuind pe x și y, $x+y=10^6$, $x-y=10^3$. Valoarea expresiunii este 10^{54}. (S. E. G. M. I. p. 2). **7.** 9. **8.** Desvoltând cuburile și reducând termenii asemenea obținem $1224+6\sqrt{3}x+216x^2+6\sqrt{3}x^3=1224+216x^2+6\sqrt{3}x\times(1+x^2)$. Inlocuind pe x^2 cu -1, avem valoarea numerică 1008. **9.** Se vor calcula mai întâiu primii doi termeni, punând x^3 în factor, rezultatul obținut se va grupa cu al treilea termen etc. $x^3(3-2)=x^3$, $x^2(3+5)=8x^2$, $x(8\cdot3-3)=21.x$, $21.3+1=64$. De asemenea $x^3(-2-2)=-4x^3$; $-x^2[4(-2)-5]=13x^2$, $x[13(-2)-3]=-29x$, $(-29)(-2)+1=59$, $x^3(1,5-2)=-0,5x^3$, $x^2[(-0,5)1,5+5]=4,25x^2$, $x(4,25\times1,5-3)=3,375x$, $3.375.1,5+1=6,0625$. In acelaș mod se găsește 12,23170601. **10.** Acelaș procedeu ca și în precedenta chestiune; se găsește $f(1)=0$, $f(-1)=0$, $f(\frac{1}{2})=0$, $f(0)=1$, $f(3)=40$, $f(-\frac{1}{2})=\frac{3}{2}$, $f(x+1)=2(x+1)^3-(x+1)^2-2(x+1)+1=2x^3+5x^2+2x$, $f(x+a)=2x^3+(6a-1)x^2+2(3a^2-a-1)x+2a^3-a^2-2a+1$. **11.** $f(1,2,3)=18$; $f(1,0,-1)=0$, $f(y,x,z)$ și $f(z,x,y)$ sunt egale tot cu $f(x,y,z)$. O expresiune, ca precedenta, care nu se schimbă când schimbăm între ele două *oare care* din literile de care depinde, se zice că este *simetrică*. $f(x,y,-x-y)=0$. **12.** $a10^3+b10^2+c10+d$. **13.** aB^4+

$+bB^3+cB^2+dB+e$. In general în sistemul cu baza B, un număr oare care se va exprima algebricește prin $a_1 B^{n-1}+$ $+a_2 B^{n-2}+\ldots+a_{n-1}B+a_n$, n reprezentând rangul unității de ordinul cel mai mare. **14.** $V_t=V_0(1+at)$. **15.** Greutatea aliagiului A′ este: $\frac{a_1}{m_1}+\frac{a_2}{m_2}+\frac{a_3}{m_3}+\frac{b_1}{m_1}+\frac{b_2}{m_2}+\frac{b_3}{m_3}$, iar a aliagiului A″ este: $\frac{m_1-1}{m_1}a_1+\frac{m_2-1}{m_2}a_2+\frac{m_3-1}{m_3}a_3+$ $+\frac{m_1-1}{m_1}b_1+\frac{m_2-1}{m_2}b_2+\frac{m_3-1}{m_3}b_3$. Termenii cari conțin numai pe a sau numai pe b reprezintă cantitățile respective, din metalele B_1 și B_2. **16.** Rezultatul analog cu cel de sus; sau dacă se reprezintă, pentru prescurtare, cu simbolul $\sum_{i=1}^{i=n} a_i$ suma $a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+a_n$, greutatea aliagiului A′ se poate scrie $\sum_{i=1}^{i=n}\frac{a_i}{m_i}+\sum_{i=1}^{i=n}\frac{b_i}{m_i}$, și pentru aliagiul A″: $\sum_{i=1}^{i=n}\frac{m_i-1}{m_i}a_i+$ $+\sum_{i=1}^{i=n}\frac{m_i-1}{m_i}b_i$. **17.** Greutatea aliagiului A′ este $\sum_{i=1}^{i=n}\frac{a_i}{m_i}+$ $+\sum_{i=1}^{i=n}\frac{b_i}{m_i}+\ldots+\sum_{i=1}^{i=n}\frac{l_i}{m_i}$, sau mai pe scurt $\sum_{h}\sum_{i=1}^{i=n}\frac{h_i}{m_i}$, în care se înlocuește h pe rând cu $a, b, c, \ldots l$. Greutatea aliagiului A″ se va putea scrie $\sum_{h}\sum_{i=1}^{i=n}\frac{m_i-1}{m_i}h_i$. **18.** In A se află:

apă: $\left[\frac{(v-u)^2}{v}+\frac{u^2}{v'}\right]\frac{v-u}{v}+\left[\frac{v'-u}{v'}+\frac{v-u}{v}\right]\frac{u^2}{v}$,

vin: $\left[\frac{v-u}{v}+\frac{v'-u}{v'}\right]\frac{u(v-u)}{v}+\left[\frac{(v'-u)^2}{v'}+\frac{u^2}{v}\right]\frac{u}{v'}$.

Conținutul lui A′ se exprimă prin formule analoage, înlocuind v cu v' și reciproc, apa cu vin și reciproc.

II. 1. x^6-y^6. **2.** x^7-1. **3.** $x^{n+1}-1$. **4.** Primul factor se poate scrie $a^2-(ab-b^2)$ și avem de înmulțit o sumă cu o diferenţă; rezultatul este $a^4-a^2b^2+2ab^3-b^4$. **5.** $(a^2+4x^2)^2-16a^2x^2=a^4-8a^2x^2+16x^4$. **6.** Calculăm toţi termenii cari conţin pe a, găsim $4ax$. Asemenea pentru termenii cari conţin pe b, c. Rezultatul este $4(ax+by+cz)$. **7.** Se efectuează operaţiile în primul membru. **8.** $(1+a+a^2)(1-a+a^2)=(1+a^2)^2-a^2=1+a^2+a^4$. Acest rezultat se înmulţeşte cu factorul al treilea analog, etc. Rezultatul este $(1+a^{16})^2$. (S. E. G. M. I. p. 19). **9.** Multiplicând ultimii doi factori ai primului termen, obţinem $(1+a^2)^2-(a+a^3)^2=(1+a^2)^2-a^2(1+a^2)^2=(1-a^2)(1+a^2)^2$. Expresiunea dată devine $(1+a^2)^2\times[(1-a^2)(1+a^2+a^4+a^6)+a^8]=(1+a^2)^2$. (S. E. G. M. I. p. 19). **10.** Termenii se calculează considerându-i ca produse de sumă prin diferenţă. Astfel primul termen dă $(a+d)^2-(b-c)^2$. Ceilalţi sunt de aceiaşi formă. Grupându-i ca să avem patratele sumelor şi diferenţelor cu aceleaşi litere, avem $4(a+b)(c+d)$ (S. E. G. M. I. p. 17). **11.** Intrebuinţând produsul sumei prin diferenţă, produsul dat se pune sub forma $(2ab+a^2+b^2-c^2)\times(2ab-a^2-b^2+c^2)=4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2=2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4$. **12.** Grupând termenii echidistanţi, obţinem $(x^{2^{n-1}}-1)\times(x^{2^{n-1}}-4)=x^{2^n}-5x^{2^{n-1}}+4$. **13.** Produsul ultimilor doi factori este $x^{2^n}+x^{2^{n-1}}+1$, rezultatul $x^{2^{n+1}}+x^{2^n}+1$. **14.** $(a+b)^2+(a+c)^2+(b+c)^2-c(a+b)-a(b+c)-b(c+a)=2(a^2+b^2+c^2)$. **15.** $(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3x^2y+3x^2z+3y^2x+3y^2z+3z^2x+3z^2y+6xyz$, grupând termenii convenabil, suma termenilor din partea a doua dela al patrulea înainte, se poate pune sub forma de produs $3(x+y)(x+z)(y+z)$. **16.** Avem $[(x^2+3y^2)^2-9x^2y^2](x^2+3y^2)=(x^2+3y^2)^3-9x^2y^2(x^2+3y^2)=x^6+27y^6$ vezi (7. II). **17.** $(a^2+b^2)(r^2+s^2)^2$. **18.** Să desvoltăm fiecare patrat şi rezultatul să-l ordonăm după puterile lui x, avem: $x^6+(-6z^2+2y^2+y^2+9z^2)x^4+(9z^4+y^4-6y^2z^2-2y^4+2y^2z^2+16y^2z^2-6z^4-6z^2y^2+4y^4)x^2+4z^2y^4+(y^3-yz^2)^2+(z^3+zy^2)^2=x^6+3(y^2+z^2)x^4+3(y^4+2y^2z^2+z^4)x^2+y^6+3y^4z^2+3y^2z^4+z^6=x^6+3(y^2+z^2)x^4+3(y^2+z^2)^2x^2+(y^2+z^2)^3=(x^2+y^2+z^2)^3$. **19.** Rezultatul va fi tot de gradul al doilea în x, y, z, t, toţi termenii intră în acelaş mod, astfel că e suficient a găsi termenul în x^2 şi în xy; x^2 intră de 4 ori cu semnul $+$, iar xy are coeficientul — 4; rezultatul este $4f(x,y,z,t)$. **20.** Avem: $4[(x-y)^2+3xy]^3-27x^2y^2\times(x-y)^2-108x^3y^3=4(x-y)^6+36xy(x-y)^4+81x^2y^2(x-y)^2$, etc. **21.** Se va desvolta partea întâi şi grupa termenii convenabil. **22.** Avem $27x^6y^6+x^3[(x^3+y^3)+y^3]^3+y^3[(x^3+y^3)+x^3]^3$. Desvoltând cele două cuburi şi adunând termenii cu acelaş rang, avem: $(x^3+y^3)^4+9x^3y^3(x^3+y^3)^2+x^3y^3(x^6+y^6)+27x^6y^6=(x^3+y^3)^4+9x^3y^3(x^3+y^3)^2+x^3y^3(x^3+y^3)^2+25x^6y^6=[(x^3+y^3)^2+5x^3y^3]^2$ (G. M. XXXVI, p. 68). **23.** Dezvoltând ambele părţi se ajunge la o identitate evidentă. Această formulă poartă numele de *identitatea lui Lagrange*; ea trebue reţinută întâlnindu-se des în aplicaţii. **24.** Se desvoltă ambii membrii. **25.** Considerăm identitatea lui *Lagrange* $(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2)=(\alpha x+\beta y)^2+(\alpha y-\beta x)^2$. Dacă $\alpha=a+b$, $\beta=c+d$, $x=a-b$, $y=c-d$, primul termen al membrului I devine $(a^2-b^2+c^2-d^2)^2+4(bc-ad)^2$. Dacă $\alpha=a+d$, $\beta=b+c$, $x=a-d$, $y=b-c$, al doilea termen devine $(a^2-d^2+b^2-c^2)^2+4(db-ac)^2$. Scăzând cele două expresii, se obţine membrul II (S. E. G. M. I. p. 58). **26.** Transformăm membrul I folosind identitatea lui *Lagrange* $(a^2+b^2)(\alpha^2+\beta^2)-(a\alpha+b\beta)^2=(a\beta-\alpha b)^2$, iar în membrul II desvoltăm patratele considerându-le ca patratele sumei şi diferenţei numerelor $(a\beta-\alpha b)$ şi 1. (S. E. G. M. II p. 102). **27.** Aplicând identitatea lui *Lagrange* în fiecare factor al membrului I, acesta se scrie $[(a\beta-\alpha b)^2+1][a\gamma-c\alpha)^2+1]$. Membrul II se transformă astfel: $[(a\beta-\alpha b)(a\gamma-c\alpha)-1]^2+[(a\beta-\alpha b)+(a\gamma-c\alpha)]^2$. Folosind identitatea lui *Lagrange* $(X^2+Y^2)(X'^2+Y'^2)=(XX'+YY')^2+(XY'-YX')^2$ şi notând $X=a\beta-\alpha b$, $Y=1$, $X'=1$ şi $Y'=a\gamma-c\alpha$, obţinem identitatea cerută (S. E. G. M. II p. 104). **28.** Coeficientul lui x^2 este $a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)=0$, suma termenilor fără x este $abc(b-c)+abc(c-a)+abc(a-b)=0$, iar coeficientul lui x este $a(c^2-b^2)+b(a^2-c^2)+c(b^2-a^2)=(b-a)(c-b)(a-c)$. **29.** Coeficienţii lui x^2 şi x sunt nuli în ambii membri, iar termenii lipsiţi de x au valoarea $a^2b-a^2c+b^2c-b^2a+c^2a-c^2b$ în ambii membri (S. E. G. M. I. p. 56). **30.** Primul termen devine $b(c-a)(ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2)$. Permutând circular literele a, b, c se obţin termenii următori. Punând factor comun expresiunea $ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2$, suma din paranteză este nulă (S. E. G. M. I, p. 49). **31.** Se înlocuesc X, Y, etc. prin expresiile lor, apoi se efectuează calculele în ambii membri, ajungându-se la expresiuni identice (S. E. G. M. III, p. 63). **32.** Desvoltând patratele în cei doi factori ai membrului II, apoi observând că avem o sumă de înmulţit cu o diferenţă, avem $(\beta^2+\delta^2-2\alpha\gamma)^2-(\alpha^2+\gamma^2-2\beta\delta)^2$. Desvoltăm şi aceste patrate, facem calculele şi în membrul I şi constatăm identitatea celor doi membri (G. M. XLII, p. 556). **33.** $2ap+bc=a^2+ab+ac+bc=(a+b)(a+c)$ etc, **34.** Se va avea în vedere identitatea $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$. **35.** Desvoltarea părţii întâi ne dă $4p^2-2p(a+b+c)+a^2+b^2+c^2$, suma primilor doi termeni e nulă. **36.** Se notează $2p-3a=x$, $2p-3b=y, 2p-3c=z$. Identitatea cerută devine $x^3+y^3+z^3=3xyz$, cu condiţia $x+y+z=0$. Aceasta se stabileşte pornind dela desvoltarea lui $(x+y+z)^3=0$ făcută la (15. II), având în vedere condiţia. (S. E. G. M. I. p. 18). **37.** Multiplicând ambele părţi cu 4, înlocuind pe $2q^2$ cu $a^2+b^2+c^2$, făcând calculele în partea întâia, acesta devine $2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4$, care este egal cu desvoltarea părţii a doua, după 11. II. **38.** Generalizarea chestiunei 35, procedeu analog. **39.** Din $a+b+c=0$ deducem $a^2=-ab-ac$, deci $a^2-bc=-(ab+ac+bc)$, apoi $a^2=b^2+c^2+2bc$, $a^2-bc=b^2+c^2+bc$; $a^2-bc=\frac{1}{3}[a^2-bc+b^2-ac+c^2-ab]=\frac{1}{6}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$; $-(ab+ac+bc)=\frac{1}{3}[a^2+ab+b^2+b^2+bc+c^2+c^2+ac+a^2]$; $\frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)=-\frac{4}{3}(ab+ac+bc)$. **40.** Din $a+b+c=0$ deducem $c^2-a^2-b^2=2ab$, ridicând la patrat obţinem relaţia căutată. Dacă $a+b+c+d=0$, găsim $a^4+b^4+c^4+d^4=2(a^2b^2+a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2+c^2d^2)-8abcd$. **41.** Notăm $x-y=a$, $y-z=b$, $z-x=c$. Avem de stabilit $(a^2+b^2+c^2)^2=2(a^4+b^4+c^4)$, cu condiţia $a+b+c=0$. Desvoltăm membrul I şi folosim precedenta. **42.** Notăm $x-y=a$, $y-z=b$, $z-t=c$, $t-x=d$ şi procedăm ca în exerciţiul precedent folosind generalizarea exerciţiului 40 II. **43.** Multiplicând cu 2 egalitatea dată și strângând patratele, se obține prima relație cerută. Din aceasta și din (41. II) se deduce a doua. A treia relație înmulțită cu 2 este tocmai relația 40 II deoarece $(x-y)+(y-z)+(z-x)=0$. **44.** Notăm $P=(a+b)^2+(b+c)^2+(c+d)^2-(a+b)(b+c)-(a+b)(c+d)-(b+c)\times(c+d)$ și folosim exercițiul precedent. (S. E. G. M. I p. 40). **45.** $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)=1$, de unde $x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y=0$. Dar $(x+y+z)^3=1$, adică $x^3+y^3+z^3+3(x^2y+x^2z+....)+6xyz=1$, deci $xyz=0$. **46.** Notăm $P_1=a^2+b$, $P_2=a^2-b$, $P_3=a+b^2$, $P_4=a-b^2$. Membrul I se scrie $P_1P_2P_3+P_2P_3P_4+P_1P_3P_4-P_1P_2P_4=(P_1+P_2)P_3P_4+(P_3-P_4)P_1P_2=2a^2(a^2-b^4)+2b^2(a^4-b^2)=2[a^4-a^2b^4+b^2a^4-b^4]=2[(a^2+b^2)(a^2-b^2)+a^2b^2(a^2-b^2)]$ etc. (S. E. G. M. II. p. 56), **47.** Notăm $P_1=x^2+ax+b^2$, $P_2=x^2-ax+b^2$, $P_3=x^2+bx+a^2$, $P_4=x^2-bx+a^2$. Membrul I se scrie $P_1P_2P_3+P_1P_2P_4-P_1P_3P_4-P_2P_3P_4=P_1P_2(P_3+P_4)-P_3P_4(P_1+P_2)$ $=[(x^2+b^2)^2-a^2x^2](2x^2+2a^2)-[(x^2+a^2)^2-b^2x^2](2x^2+2b^2)=$ $=2[(x^2+a^2)(x^2+b^2)^2-(x^2+a^2)^2(x^2+b^2)-a^2x^4-a^4x^2+b^2x^4+b^4x^2)]$ $=2[(x^2+a^2)(x^2+b^2)(b^2-a^2)+x^4(b^2-a^2)+x^2(b^4-a^4)]$. etc. (S. E. G. M. II. p. 161). **48.** Primul membru se scrie, efectuând înmulțirile: $u^2(ax+by)^2-v^2(ay-bx)^2-v^2(ax+by)^2+u^2(ay-bx)^2=(u^2-v^2)(a^2x^2+b^2y^2+a^2y^2+b^2x^2)$, etc, (S. E. G. M. I. p. 131). **49.** Notăm $avz=l$, $bwx=m$, $cuy=n$, $bwx+cvx=\alpha$, $awy+cuy=\beta$, $avz+buz=\gamma$. Inlocuind în expresie aceste valori, desfăcând parantezele, reducând termenii asemenea și dând factori comuni, se obține $(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+lm+mn+nl-\alpha l-\beta m-\gamma n)=[bwx+cvx+awy+cuy+avz+buz]$ $[a^2vwyz+abuwyz+acuvyz+abvwxz+b^2uwxz+bcuvxz+acvwxy+bcuwxy+c^2uvxy]=[(bw+cv)x+(cu+aw)y+(av+bu)z]$ $(avw+buw+cuv)$ $(ayz+bzx+cxy)$. (G. M. XL. p. 232). **50.** $A_1^2+A_2^2+A_3^2$ este un polinom omogen de gradul II și simetric în raport cu a_1, a_2, a_3, deci avem $A_1^2+A_2^2+A_3^2\equiv\alpha(a_1^2+a_2^2+a_3^2)+\beta(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1)$. Punând în identitate $a_2=a_3=0$, găsim $\alpha=3$, apoi cu $a_1=a_2$, $a_3=0$ obținem $\beta=-2$. Analog $A_1^3+A_2^3+A_3^3\equiv\alpha(a_1^3+a_2^3+a_3^3)+\beta(a_1^2a_2+a_1^2a_3+a_2^2a_1+a_2^2a_3+a_3^2a_1+a_3^2a_2)+\gamma a_1a_2a_3$.

Cu $a_2=a_3=0$, $\alpha=1$; cu $a_1=a_2$, $a_3=0$ avem $\beta=3$; punând $a_1=a_2=a_3$, $\gamma=-18$. **51.** Avem $\Sigma_4 B_1^2 \equiv \alpha\Sigma_4 a_1^2+\beta\Sigma_4 a_1 a_4$, unde $\Sigma_4 B_1^2$ înseamnă suma tuturor termenilor de forma B^2 cari se pot forma cu B_1, B_2, B_3, B_4; iar $\Sigma_4 a_1 a_4$ suma tuturor produselor de 2 factori formate cu a_1, a_2, a_3, a_4. Făcând $a_1=a_2=a_3=0$, rezultă $\alpha=4$; iar din $a_1=a_2=0$, $a_3=a_4$, $\beta=0$. **52.** Rezultatul este de aceiaşi formă ca mai sus; făcând $a_2=a_3=\ldots=a_n$, găsim $\alpha=n$, făcând apoi $a_3=a_4=\ldots=a_n$ şi $a_1=a_2$ găsim $\beta=2(n-4)$, deci $\Sigma_n L_1^2=n\Sigma_n a_1^2+2(n-4)\times \Sigma_n a_1 a_2$. **53.** 0; $4\Sigma a_1^2$; $-24a_1a_2a_3$; $4\Sigma a_1^4+24\Sigma a_1^2 a_2^2$; $\Sigma a_1^4-2\Sigma a_1^2 a_2^2$. **54.** $24(a_1a_2a_3+a_1a_2a_4+a_1a_3a_4+a_2a_3a_4)$. **55.** Generalizarea chestiunei precedente rezultatul este $24\Sigma_n a_1 a_2 a_3$. **56.** x fiind cel mai mic număr: $x(x+1)(x+2)(x+3)+1=(x^2+3x+1)^2$, **57.** $(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2+(x_2+x_3\ldots+x_n)^2+\ldots+(x_{n-1}+x_n)^2+x_n^2$ (G. M. V.). **58.** In identitatea lui *Lagrange* (23) se va pune $a=yz$, $b=zx$, $c=xy$, rezultatul este $(3xyz)^2+x^2(y^2-z^2)^2+y^2(z^2-x^2)^2+z^2(x^2-y^2)^2$. **59.** $N=(x^2+2xy+2y^2)(x^2-2xy+2y^2)=(x^2-y^2)^2+(y^2+xy)^2+(y^2-xy)^2+(y^2)^2$. **60.** După relaţia de condiţie avem: $a_1^3a_2=-a_1^2a_2^2-a_1^2a_2a_3$ etc; expresiile considerate sunt egale cu: $-(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)^2$.

III. **1.** x^2-x+1. **2.** $9x^2-6xy+4y^2$. **3.** $32x^5+16x^4y+8x^3y^2+4x^2y^3+2xy^4+y^5$. **4.** $a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4$. **5.** x^2+y^2. **6.** x^2-x+1. **7.** $a^2-2ab+3b^2$. **8.** $a^3-2a^2b+2ab^2-b^3$. **9.** $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^2-ab\sqrt{2}+b^2)$. **10.** x^4-8x^2+16. **11.** x^3+3x^2+x-2. **12.** $2x^3-8x^2+3x-12$. **13.** $(b^2-bc+c^2)a^2+(b+c)(b^2+bc+c^2)a+(b^4+4b^2c^2+c^4)$. **14.** Câtul este $1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^{n-1}x^{n-1}$, iar restul $(-1)^n x^n$. **15.** Câtul, $1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}$, iar restul x^n. **16.** Câtul, $1-x^{-1}+x^{-2}-\ldots+(-1)^{n-1}x^{-n+1}$, iar restul $(-1)^n x^{-n}$. **17.** Câtul, $x^{-1}+x^{-3}+x^{-5}+\ldots+x^{-2n+1}$, restul x^{-2n-1}. **18.** Câtul, $1+2^2x+2^3x^2+\ldots+2^n x^{n-1}$, restul $2^{n+1}x^n$. **19.** Restul diviziunei unui polinom $f(x)$ printr'un binom $ax+b$ fiind $f\left(-\frac{b}{a}\right)$, ca împărţirea să se facă exact trebue ca acest rest să fie nul. Se găseşte $m=-18$. **20.** $-\frac{51}{16}$.

21. $a\sqrt[4]{2}$. **22.** 3. **23.** Se va considera $(y+z)$ ca un singur termen: $m=-3$. **24.** *Metoda* I. Se divide deîmpărţitul cu împărţitorul până ce se obţine un rest de un grad mai mic ca împărţitorul, care se identifică apoi cu zero. Avem x^4- $-3x^3+mx+n=(x^2-5x+4)(x^2+2x+6)+(m+22)x+$ $+n-24$, de unde $m=-22$, $n=24$. *Metoda* II. Se descompune împărţitorul în factori şi se exprimă că deîmpărţitul este divizibil cu fiecare factor procedând ca la 19. $x^2-5x+4=$ $=(x-1)(x-4)$, trebue să avem $m+n=2$, $4m+n=-64$, de unde $m=-22$, $n=24$. *Metoda* III. Se scrie a priori forma câtului şi se determină coeficienţii identificând deîmpărţitul cu produsul împărţitorului prin cât. $x^4-3x^3+mx+n=$ $=(x^2-5x+4)(x^2+ax+b)$, găsim $a=2$, $b=6$, $m=-22$, $n=24$. **25.** Făcând împărţirea găsim: $m(m^2-2n)=0$, $n(m^2-n)-1=0$, cari dau sistemele de soluţiuni $m=0$, $n=\pm i$; $m=\pm\sqrt{2}$, $n=1$; $m=\pm\sqrt{2}i$, $n=-1$. **26.** $m=1$, $n=0$. **27.** Făcând împărţirea găsim restul $(2-4n)x+m-n\times$ $\times(8-n)$, trebue să avem $2-4n=0$, $m=n(8-n)$, de unde $n=\frac{1}{2}$, $m=\frac{15}{4}$. **28.** $m=4$, $n=-3$, $p=-10$. (G. M. I.)

29. Determinăm pe m,n,p împărţind polinomul dat cu $x-1$, câtul împărţirii deasemenea împărţindu-l cu $x-1$, ultimul cât se împarte cu $x-1$. Resturile celor 3 împărţiri se anulează. *Altă metodă:* Notăm $x-1=y$. Deîmpărţitul devine $P(y+1)=(y+1)^4+m(y+1)^2+n(y+1)+p$, iar împărţitorul este y^3. Pentruca $P(y+1)$ să se dividă cu y^3, trebue să nu conţină termeni de gradul II, I şi zero. Anulând coeficienţii acestor termeni avem $1+m+n+p=0$, $4+2m+n=0$, $6+m=0$; deci $m=-6$, $n=8$, $p=-3$. *Soluţia III.* Trebue să avem $x^4+mx^2+nx+p\equiv(x^3-3x^2+3x-1)(x+a)$. Găsim $a=3$, $m=-6$, etc. **30.** Se găseşte $P(a-b)=P(a)=$ $=P(a+b)=a^3+b^3$. Notând $Q(x)=x^3-3ax^2+(3a^2-$ $-b^2)x-a(a^2-b^2)$, observăm că avem: $Q(x)=P(x)-a^3-b^3$, deci $Q(a-b)=Q(a)=Q(a+b)=0$ şi deci $Q(x)=(x-a+b)$ $(x-a)(x-a-b)$ (S. E. G. M. II p. 17). **31.** Expresia $E(s)=$ $=s_1s_2...s_n+(-1)^{n+1}(s-s_1)(s-s_2)...(s-s_n)$ se divide cu s, deoarece

$E(0)=s_1s_2...s_n-s_1s_2...s_n=0$. Dacă $s=x+y+z+u$, $s_1=$ $=x+a$, $s_2=y+b$, $s_3=z+c$, $s_4=u+d$, se obţine cazul particular al enunţului (G. M. XLII p. 541). **32.** Se face înlocuirea $x-1=y$ în deîmpărţit şi împărţitor. Deîmpărţitul devine $y^5+10y^4+(A+40)y^3+(6A+80)y^2+(B+12A+$ $+80)y+B+C+8A+32$. Pentru a fi divizibil cu y^3 trebue $6A+80=0$, $B+12A+80=0$, $B+C+8A+32=0$, de unde $A=-\frac{40}{3}$, $B=-\frac{200}{3}$, $C=\frac{424}{3}$. Câtul împărţiri este $y^2+10y-\frac{200}{3}$, sau revenind la x, $x^2+8x-\frac{227}{3}$. (S. E. G. M. II p. 23). **33.** Se calculează $P(1+y)$ ca la exerciţiul precedent (S. E. G. M, II p. 63). **34.** Observând că împărţitorul este egal cu $\frac{x^5-1}{x-1}$, înseamnă că înmulţind polinomul deîmpărţit cu $x-1$, rezultatul să fie divibil cu (x^5-1). Dar $x^{13}-x^{12}+x^{10}-x^9+x^7-x^6+x^4-x^3+x-1=(x^{10}-1)$ $-x(x^5-1)-x^7(x^5-1)+x^3(x^{10}-1)-x^4(x^5-1)=(x^5-1)\times$ $(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1)$. Câtul este $x^8-x^7+x^5-x^4+$ $+x^3-x+1$ (S. E. G. M. III p. 40). **35.** Polinomul deîmpărţit se scrie, scoţând pe $(x+1)$ factor comun $(x+1)[(x+1)^6-(x^6-$ $-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1)]=7x(x+1)(x^4+2x^3+3x^2+2x+$ $+1)=7x(x+1)[x^2(x^2+x+1)+x(x^2+x+1)+x^2+x+$ $+1]=7x(x+1)(x^2+x+1)^2$ (S. E. G. M. I p. 39). **36.** Divizând pe x^m-a^m prin x^n-a^n, un rest oarecare este de forma $a^{pn}x^{m-pn}-a^m=a^{pn}(x^{m-pn}-a^{m-pn})$, ca acest rest să se reducă la zero trebue $m=pn$, p întreg pozitiv. **37.** Făcând împărţirile, găsim condiţiile: $b+d=1$, $c-d(a-d)=0$, $b-d=-1$, $c+d(a+d)=0$, care dau $a=b=0$, $c=-1$, $d=1$. **38.** Expresiunea se scrie $(81x^2+1458y^2)^2-81.2916x^2y^2=$ $(81x^2+1458y^2+9.54xy).(81x^2+1458y^2-9.54xy)$. (S. E. G. M. III. p. 86). **39.** Avem $a^3(a^3+a^2+a+1)+(a^3+a^2+a+1)=$ $(a^3+1)(a^3+a^2+a+1)=(a+1)^2(a^2+1)(a^2-a+1)$. (S. E. G. M. II. p. 19). **40.** Expresiunea dată se reduce la zero când facem $a=-b$, $a=-c$, $b=-c$, ea este deci divizibilă cu $(a+b)(b+c)(c+a)$, expresiunea fiind de gradul al treilea şi împărţitorul de acelaş grad, câtul va fi o cantitate k independentă de a, b, c pe care o putem obţine dând lui a, b, c valori particulare s. ex. $a=b=c=1$, găsim $k=1$. **41.** Proceedeu analog cu precedentul; rezultatul identic. **42.** Expresiunea din membrul întâi se reduce la zero pentru $a=b$, $a=c$, $b=c$ şi pentru $a=0$, deci este divizibilă cu $a(a-b)(b-c)(c-a)$, cum ea este numai de gradul al treilea, iar împărţitorul de gradul al patrulea, trebue să se reducă identic la zero. **43.** Polinomul dat este divizibil cu fiecare din factorii împărţitorului deci şi cu produsul lor. Pentru $m=3$, deîmpărţitul şi împărţitorul sunt de gradul al 3-lea în raport cu x, câtul va fi independent de x şi se va obţine divizând termenul de gradul cel mai mare din deîmpărţit, care este $-(a-b)(b-c)(c-a)x^3$, cu termenul de gradul cel mai mare din împărţitor, $(a-b)\times(b-c)(c-a)x^3$. Câtul este -1. Pentru $m=4$, câtul va fi de gradul întâiu în raport cu x şi se va obţine divizând primii doi termeni din deîmpărţit cu primii doi termeni din împărţitor, se găseşte: $x-3(a+b+c)$. **44.** Prima parte ca mai sus. Pentru găsirea câtului observăm că schimbând două litere oare care între ele, s. ex. a cu b, deîmpărţitul şi împărţitorul îşi schimbă numai semnul, câtul rămâne deci neschimbat; pentru $m=1$, $n=3$ câtul este $a+b+c$; pentru $m=2$, $n=3$ câtul e de forma $\alpha\Sigma a^2+\beta\Sigma ab$, făcând $c=0$ găsim $\alpha=0$, $\beta=1$; pentru $m=1$, $n=5$ câtul e de forma $\alpha\Sigma a^3+\beta\Sigma a^2b+\gamma abc$, făcând $c=0$ găsim $\alpha=1$, $\beta=1$ făcând $a=1$, $b=-1$, $c=2$ găsim $\gamma=-9$; pentru $m=2$, $n=5$, câtul e de forma $\alpha\Sigma a^4+\beta\Sigma a^3b+\gamma\Sigma a^2b^2+\delta abc\times\times(a+b+c)$, făcând $c=0$ găsim $\alpha=0$, $\beta=1$, $\gamma=1$, făcând apoi $a=1$, $b=-1$, $c=2$ găsim $\delta=-3$. (G. M. VII). **45.** Expresiunea se reduce la zero pentru $x=0$, y şi z oarecare, apoi pentru $y=0$, x şi z oarecare; pentru $z=0$, x şi y oarecare; deci este divizibilă cu xyz, câtul fiind de forma $\alpha\Sigma x^2+\beta\Sigma xy$; făcând $x=y=z=1$, găsim $\alpha+\beta=80$; făcând $x=y=1$, $z=-1$, găsim $3\alpha-\beta=240$, deducem $\alpha=80$, $\beta=0$. **46.** Polinomul dat poate fi scris $nx^n(x-1)-(x^n-1)$, divizând cu $x-1$ obţinem câtul $nx^n-x^{n-1}-x^{n-2}-\ldots-x-1$, care se divide din nou cu $x-1$, dând câtul $nx^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+$ $+(n-2)x^{n-3}+\ldots+2x+1$. **47.** Putem scrie $m(x^m+1)\times$ $\times(x^n-1)-n(x^n+1)(x^m-1)$, divizând cu $x-1$ obţinem câtul $m(x^m+1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1)-n(x^n+1)(x^{m-1}+x^{m-2}+$ $\ldots+x+1)$, care se divide din nou cu $x-1$; pentru găsirea câtului se va scri $x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1=(x-1)[x^{n-2}+$ $+2x^{n-3}+\ldots+(n-2)x+(n-1)]+n$ etc. (G. M. VIII). **48.** In expresiunea dată înlocuind $x+y$ cu u, avem $(u^{2x-1}-1)+$ $(u^{2y-1}-1)=(u-1)(u^{2x-2}+u^{2x-3}+\ldots+1+u^{2y-2}+u^{2y-3}+\ldots$ $+\ldots+1)$. Ultima paranteză este divizibilă cu $u-1$, pentrucă înlocuind u prin1, se găseşte $2(x+y-1)$, deci $2(u-1)$. (G.M.I.). **49.** Inlocuind pe x cu $-y$ expresiunea se reduce la un termen în y al cărui coeficient este $1+(-1)^p+m(-1)^{p-2q}\times$ $\times[1+(-1)^q]$; dacă p ar fi par şi q impar expresiunea precedentă nu se poate reduce la zero, deci nici o soluţie; dacă p este impar şi q par trebue $m=0$, polinomul se reduce la x^p+y^p care e divizibil cu $x+y$, dar nu e divizibil cu $(x+y)^2$, deci iar nici o soluţie; dacă p şi q sunt amândoi pari trebue $m=-1$, polinomul dat se reduce la $x^{p-q}(x^q-y^q)-y^{2b}$ $\times(x^{p-2q}-y^{p-2q})$, făcând împărţirea cu $x+y$ şi exprimând că rezultatul se divide din nou cu $x+y$, obţinem $p=3q$; în fine dacă p şi q sunt ambii impari, polinomul dat este divizibil cu $x+y$ ori care ar fi m, ca să fie din nou divizibil cu $x+y$ trebue $m=p:q$. In rezumat condiţiile sunt $q=2k$, $p=6k$ şi $m=-1$, sau p şi q impari şi $m=p:q$. **50.** $(x+y+z)^3-$ $-x^3-y^3-z^3=3(x+y)(x+z)(y+z)$, — 15 II —, expresiunea dată este divizibilă cu fiecare din factorii $x+y$, $x+z$, $y+z$. Pentru $n=2$ câtul e de forma $a\Sigma x^2+b\Sigma xy$; făcând $x=y=z$ obţinem $3a+3b=10$, făcând apoi $x=y$, $z=0$ obţinem $2a+b=5$, deducem $a=b=5:3$. **51.** Se va baza pe problema precedentă şi pe (15 II), observând în plus că $x+y=$ $-z$. **52.** Expresiunea dată este evident divizibilă cu $(x-y)$ $(y-z)$ $(z-x)$; pentru a arăta că este divizibilă şi cu ultimul factor o vom scrie $x(y-z)[(y-z)^{6n}-(x-y)^{6n}]+y(z-x)\times$ $[(z-x)^{6n}-(x-y)^{6n}]$, iar împărţitorul $(y-z)^2+(y-z)\times$ $(x-y)+(x-y)^2=(z-x)^2+(z-x)(x-y)+(x-y)^2$. Pentru

$n=1$ câtul este $\Sigma x^3+2\Sigma x^2y-15xyz$. **53.** Fie $f(x)=(x-a)\times(x-b)+Ax+B$, făcând succesiv $x=a$, $x=b$, deducem $Aa+B=m$, $Ab+B=n$, $A=\frac{m-n}{a-b}$, $B=\frac{mb-na}{b-a}$. Pentru generalizare vezi G. M. vol. XIX. pag. 47 și u. **54.** Să grupăm de o parte termenii care conțin puterile cu soț ale lui x, de alta cele fără soț, putem scrie $f(x)=f_1(x^2)+xf_2(x^2)$, restul diviziunei prin x^2-a^2 va fi $f_1(a^2)+xf_2(a^2)$, ca împărțirea să se facă exact, trebue $f_1(a^2)=0$ și $f_2(a^2)=0$. De asemenea putem scrie $f(x)=f_1(x^3)+xf_2(x^3)+x^2f_3(x^3)$, restul diviziunei prin x^3-a^3 este $f_1(a^3)+xf_2(a^3)+x^2f_3(a^3)$, ca împărțirea să se facă exact, trebue $f_1(a^3)=0$, $f_2(a^3)=0$, $f_3(a^3)=0$. **55.** Câtul diviziunei polinomului dat prin $x-y$ își schimbă semnul când schimbăm pe x cu y, avem $Q(xy)=-Q(y,x)$ făcând $x=y$; $Q(x,x)=-Q(x,x)$ deci $Q(x,x)=0$ ceea ce înseamnă că $Q(x,y)$ se divide prin $x-y$. **56.** Generalizarea chestiunei precedente; se poate încă generaliza pentru cazul de n litere $x_1, x_2 \dots x_n$ (G. M. IV). **57.** $Q=x^5+ax^4+ +a^2x^3+a^3x^2+a^4x+a^5$, $Q'=x^4+2ax^3+3a^2x^2+4a^3x+5a^4$, $Q''=x^3+3ax^2+6a^2x+10a^3$, $Q'''=x^2+4ax+10a^2$, $Q''''=x+5a$; $A_1=6a^5$, $A_2=15a^4$, $A_3=20a^3$, $A_4=15a^2$, $A_5=6a$, $A_6=1$ (G. M. IV. 73, 140). **58.** Se va baza pe identitatea $P(x)=(x-a)Q(x)$, în care $Q(x)$ este de asemenea un polinom cu coeficienți întregi.

IV. 1. $\frac{1}{2}$. **2.** $\frac{-2}{x(4x^2-1)}$. **3.** 0. **4.** $\frac{b(a-b)}{x(a+b)}$. **5.** $\frac{x^3-y^3}{y(x^2+y^2)}$. **6.** $\frac{3x}{4y}$. **7.** $\frac{a^2+x^2}{2ax}$. **8.** $\frac{(a+b+c)^2}{2bc}$. **9.** $\frac{ab+ac+bc}{ac+bc-ab}$ **10.** $\frac{4}{3(x+1)}$ **11.** Avem $\left(\frac{1-x^2}{1+x^3}+\frac{1-x^2}{1-x^3}\right)$: $\left(\frac{1-x^2}{1-x^3}-\frac{1-x^2}{1+x^3}\right)$, apoi simplificând cu $(1-x^2)$ și efectuând operațiile de adunare și scădere găsim $\frac{1}{x^3}$ **12.** Se va observa că atât numărătorul cât și numitorul sunt cuburi perfecte; $\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^3$. **13.** Adunând prima fracţie cu a treia avem x^2+x+1, iar a doua cu a patra dau $1-x$, deci rezultatul este x^2+2. **14.** Punând $x^n=y$ şi folosind precedentul avem $x^{2n}+2$: **15.** Prima fracţie, după efectuarea operaţiilor, devine $\frac{a+b+c}{(a-b+c)(a+b-c)}$. Celelalte se deduc permutând circular literele a, b, c. Insemnăm rezultatele şi obţinem $\frac{(a+b+c)^2}{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$ (S. E. G. M. II. p. 42). **16.** Primul termen al sumei devine $\frac{abc}{(c-a)(a-b)}$; ceilalţi se deduc prin permutări circulare. Rezultatul este zero (S. E. G. M. II p. 81). **17.** Efectuând operaţiile în primul factor al numărătorului, se găseşte $\frac{1-b^2}{(a-1)(a+b)}$, iar primul factor al numitorului devine $\frac{1-b^2}{(a+1)(a+b)}$. Permutând circular literele a, b, c, multiplicând şi simplificând, aflăm rezultatul: $\frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{(a-1)(b-1)(c-1)}$ (S. E. G. M. III. p. 39). **18.** Efectuăm operaţiile în membrul I şi simplificăm (S. E. G. M. II, p. 47). **19.** Efectuăm adunarea în membrul I, obţinem

$$\frac{abc(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)+a^2b^2c^2(a^2+b^2+c^2+2)+b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}{abc}$$

Numărătorul se transformă succesiv astfel: $a^3b^3c^3+abc(a^2b^2+$ $+a^2c^2+b^2c^2)+abc(a^2+b^2+c^2+1)+a^2b^2c^2+a^2b^2c^2(a^2+b^2+$ $+c^2+1)+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=a^2b^2c^2(abc+1)+(a^2b+b^2c^2+$ $+c^2a^2)(abc+1)+abc(a^2+b^2+c^2+1)(abc+1)=(abc+1)\times$ $(a^2b^2c^2+\Sigma a^2b^2+abc\Sigma a^2+abc)=(abc+1)[ab^2c(ac+b)+$ $ac(ac+b)+bc^2(ac+b)+a^2b(ac+b)]=(abc+1)(ac+b)$ $(bc+a)(ab+c)$. (S. E .G. M. II, p. 16). **20.** Se adună primele două fracţiuni. Rezultatul este $\frac{2(a^2+a+1)}{a^2-1}$; scăzând $\frac{a^3-1}{a^3+1}$. obţinem:

$$\frac{2(a^2+a+1)(a^2-a+1)-(a^3-1)(a-1)}{(a-1)(a^3+1)}=\frac{(a^2+a+1)(a^2+1)}{(a-1)(a^3+1)}$$

(S. E. G. M. I, p. 36). **21.** Efectuând adunarea în primul membru, găsim o fracţiune al cărei numărător este $\Sigma(x^2-1)\times(y^2+1)(z^2+1)+(x^2-1)(y^2-1)(z^2-1)=\Sigma[x^2y^2z^2+(x^2y^2+ +y^2z^2-z^2x^2)+(x^2-y^2-z^2)-1]+(x^2-1)(y^2-1)(z^2-1)= =3x^2y^2z^2+(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)-(x^2+y^2+z^2)-3+(x^2-1)\times(y^2-1)(z^2-1)$. Calculăm ultimul termen al acestei expresii, şi reducând, obţinem rezultatul. (G. M. XXXIX, p. 113). **22.** Efectuăm adunările şi observăm că numărătorii celor 2 factori ai membrilor I se simplifică (S. E. G. M. I. p. 35). **23.** Efectuăm adunările la numărător şi numitor în membrul I, apoi observăm simplificarea numărătorilor celor două fracţii obţinute. Analog în membrul II (S. E. G. M. I., p. 35). **24.** $x^2-3x-4=x^2-3x-3-1=(x^2-1)-3(x+1)=(x+1)\times(x-4)$, asemenea $x^2-4x-5=(x+1)(x-5)$. Deci rezultatul simplificării este $\frac{x-4}{x-5}$. **25.** Observăm ca în exerciţiul precedent că $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ şi că numărătorul se divide cu ambii factori ai numitorului; deducem rezultatul simplificării $x-3$. **26.** Descompunem numărătorul în factori avem: $x^3+3x^2+2x=x(x^2+3x+2)=x(x+1)(x+2)$. Numitorul este divizibil numai cu $x+2$. Rezultatul simplificări este $\frac{x^2+x}{x^4-2x^3+4x^2-8x+16}$. **27.** Dacă fracţia se simplifică cu $x+a$, a trebue să fie divizor comun al lui -36 şi -12. Incercând toţi factorii $x+a$ în care a îndeplineşte condiţia de mai sus, vedem că numărătorul şi numitorul sunt divizibili cu $x-3$ şi $x+4$. Rezultatul simplificării este $\frac{x^2+2x+3}{x^2+x+1}$.

28. Notăm $a+b+c=x$. Fracţia se scrie $\frac{(x^2-4)(x^2-1)}{(x+2)(x+1)}= =(x-2)(x-1)$ (S. E. G. M. III, p. 64). **29.** Avem $\frac{(a+b)^2(a+b+1)+(a+b+1)}{(a+b)^2(a+b-1)+(a+b-1)}$ etc. Soluţia II-a. Notăm $a+b= =u$. Expresiunea se scrie $\frac{u^3+u^2+u+1}{u^3-u^2+u-1}=\frac{(u^4-1)(u+1)}{(u-1)(u^4-1)}$ etc.

Analog procedăm în cazul general, când în locul lui 3 se află o putere impară $2n+1$ (S. E. G. M. II, p. 81). **30.** Desvoltând patratul dela numărător, expresia dată se mai poate scrie sub forma $E=1+2\times\frac{(2\alpha\beta)^4[(\alpha^2+\beta^2)^4+(\alpha^2-\beta^2)^4]+(\alpha^4-\beta^4)^4}{(\alpha^2+\beta^2)^8+(\alpha^2-\beta^2)^8+(2\alpha\beta)^8}$. Dar $(\alpha^2+\beta^2)^4+(\alpha^2-\beta^2)^4=2(\alpha^8+6\alpha^4\beta^4+\beta^8)$. ·. $(\alpha^2+\beta^2)^8+(\alpha^2-\beta^2)^8=2(\alpha^{16}+28\alpha^{12}\beta^4+70\alpha^8\beta^8+28\alpha^4\beta^{12}+\beta^{16})$. Inlocuind aceste expresiuni în E, desvoltând $(\alpha^4-\beta^4)^4$ şi făcând reducerile, găsim $E=2$ (G. M. XLI, p. 149). **31.** Numărătorul se scrie $[(x+y)^5-x^5-y^5]\,[(x+y)^{13}-x^{13}-y^{13}]$, iar numitorul, $5(x+y)^{11}[(x+y)^7-x^7-y^7]-5(x^{11}+y^{11})[(x+y)^7-x^7-y^7]+$ $+11x^2y^2(x+y)^7[(x+y)^7-x^7-y^7]-11x^2y^2(x+y)^2(x^5+y^5)\times$ $[(x+y)^7-x^7-y^7]=55xy(x+y)[(x+y)^7-x^7-y^7][x^6+3x^5y+$ $+8x^4y^2+11x^3y^3+8x^2y^4+3xy^5+y^6]$. Dar $(x+y)^5-x^5-y^5=$ $=5xy(x+y)(x^2+xy+y^2) \therefore (x+y)^7-x^7-y^7=7xy(x+y)(x^2+$ $+xy+y^2)^2 \therefore (x+y)^{13}-x^{13}-y^{13}=13xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2\times$ $(x^6+3x^5y+8x^4y^2+11x^3y^3+8x^2y^4+3xy^5+y^6)$. Inlocuind în expresiile ultime ale numărătorului şi numitorului, simplificând avem rezultatul $\frac{13}{77}$ (G. M. XXXIX, p. 418). **32.** Numărătorul fracţiunei se poate scrie $(x+y)^{13}[(x+y)^5-x^5-y^5]-$ $-(x+y)^5(x^{13}+y^{13})+x^{13}(x^5+y^5)+y^{13}(x^5+y^5)=[(x+y)^5-$ $-x^5-y^5][(x+y)^{13}-x^{13}-y^{13}]$. Numitorul transformat analog se scrie $[(x+y)^7-x^7-y^7][(x+y)^{11}-x^{11}-y^{11}]$. Pentru simplificare ţinem seamă de relaţiile folosite în problema precedentă. Rezultatul este $\frac{65}{77}\times\frac{x^6+3x^5y+8x^4y^2+11x^3y^3+8x^2y^4+3xy^5+y^6}{x^6+3x^5y+7x^4y^2+9x^3y^3+7x^2y^4+3xy^5+y^6}$ (G. M. XXXVIII, p. 63). **33.** Adunăm primele două fracţii ale membrnlui I, apoi ultimele două fracţii şi scăzând rezultatele, observând condiţia, obţinem $\frac{2(ab-1)(d+c-a-b)}{(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)}$. Procedeu analog pentru ultimul factor al membrului II (S. E. G. M. I, p. 36). **34.** In relaţia de condiţie se vor goni numitorii şi grupa termenii convenabil. **35.** Relaţia de stabilit se poate pune sub forma $AB(a-b)^2+BC(b-c)^2+CA(c-a)^2=0$. (G. M. V). **36.** Cel mai mic multiplu comun al numitorilor este

$abc \times (a-b)(b-c)(c-a)$; aducând fracţiunile la acelaş numitor, numărătorul este $-bc(b-c)-ca(c-a)-ab(a-b)$, el este divizibil cu $(a-b)(b-c)(c-a)$, rezultatul este $1:abc$. **37.** Procedeu analog, rezultatul este 0. **38.** Idem, rezultatul este 1. **39.** Idem, rezultatul este $\frac{ab+ac+bc}{abc}$. **40.** Aducând la acelaş numitor, numărătorul se reduce la zero pentru $a=0$, b,c oarecare; $b=0$, a şi c oarecare; $c=0$, a şi b oarecare, el este divizibil cu abc; rezultatul este $2(a+b+c)$ (G. M. III). **41.** Aducând la acelaş numitor, numărătorul este divizibil cu numitorul, iar câtul e de forma $\alpha(a+b+c)$, făcând $c=0$ găsim $\alpha=1$. **42.** Idem, câtul este de forma $\alpha(a^2+b^2+c^2)+\beta(ab+ac+bc)$, făcând $a=0$ se găseşte $\alpha=\beta=1$. **43.** 1. **44.** Idem. **45.** Aducând la acelaş numitor, numărătorul care este de gradul $m+\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, este divizibil cu numitorul de gradul $\frac{n(n-1)}{2}$, câtul va fi de gradul $m-n+1$ de forma $\Sigma A a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_n^{\alpha_n}$; $(\alpha_1+\alpha_2+\ldots$ $\ldots+\alpha_n=m-n+1)$; din aproape în aproape se găseşte că toţi coeficientii $A=1$ (G. M. VIII). **46.** $x^2+y^2+z^2-a^2-b^2$. **47.** $ab+ac+ad+bc+bd+cd$. **48.** Se va aduce la acelaş numitor şi observa că termenul în p^3 se reduce cu termenul în p^2, coeficientul acestuia fiind $a+b+c$. **49.** Efectuând scăderile, obţinem numărătorul $abc-a(p-a)^2-b(p-b)^2-c(p-c)^2$, care este divizibil cu $p-a$, deoarece făcând $p=a$ sau $b+c=a$ numărătorul se anulează. La fel se arată divizibilitatea cu $p-b$, $p-c$. Numărătorul fiind de gradul III, este identic egal cu $K(p-a)(p-b)(p-c)$. K se determină particularizând pe $a, b, c \therefore k=2$. **50.** Se va aduce la acelaş numitor şi observa că $x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y=(xy+xz+yz)(x+y+z)-$ $-3xyz$. **51.** Se va trece 1 în membrul întâiu aducând la acelaş numitor; numărătorul este $xyz(3xyz-x^3-y^3+z^3)$, paranteza este divizibilă cu $x+y+z$ (23. III) deci 0. **52.** Se aduce la acelaş numitor şi se ţine seamă de exerciţiul 41 Cap. III. **53.** Dacă punem $a+b+c=q$, partea întâia se va scrie $\sum\frac{b+c}{a}=\sum\frac{q-a}{a}=q\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-3$ care în virtutea condiţiei este egală cu -3. **54.** Relaţia de condiţie se poate scrie $bc+ca+ab=0$, deci $b+c=-\frac{bc}{a}$, etc. **55.** Idem

56. Rădăcinile numitorului sunt 2 şi $\frac{1}{3}$, deci $a=2$, $b=\frac{1}{3}$ şi avem: $\frac{x-1}{3x^2-7x+2}\equiv\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-\frac{1}{3}}$, de unde $\frac{1}{3}(x-1)\equiv$ $\equiv A\left(x-\frac{1}{3}\right)+B(x-2)$. Punând $x=2$, se găseşte $A=\frac{1}{5}$; iar cu $x=\frac{1}{3}$, $B=\frac{2}{15}$. ∴ Pentru a doua fracţiune şi a treia se procedează analog: $\frac{3x-5}{x^2-3x+1}=\frac{A}{x-\frac{3+\sqrt{5}}{2}}+\frac{B}{x-\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$, unde $A=\frac{15-\sqrt{5}}{10}$, $B=\frac{15+\sqrt{5}}{10}$ ∴ $\frac{2x+1}{3x^2-x+6}=$ $=\frac{A}{x-\frac{1+i\sqrt{71}}{6}}+\frac{B}{x-\frac{1-i\sqrt{71}}{6}}$ cu $A=\frac{71-4i\sqrt{71}}{213}$, $B=\frac{71+4i\sqrt{71}}{213}$ ∴ Generalizarea se prezintă astfel: $\frac{5x+7}{x(x+3)(x-4)}\equiv\frac{A}{x}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{x-4}$ sau $5x+7\equiv A(x+3)\times$ $(x-4)+Bx(x-4)+Cx(x+3)$. Făcând succesiv $x=0$, -3, $+4$, se determină A, B, C. $A=-\frac{7}{12}$, $B=-\frac{8}{21}$, $C=\frac{27}{28}$ ∴ In cazul când numitorul are o rădăcină dublă, descompunerea se face astfel: $\frac{x^2+2x-3}{x^2(x+11)}\equiv\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x+11}$, $x^2+2x-3=$ $=A(x+11)+Bx(x+11)+Cx^2$. Dacă $x=0$, -11, $+1$, aflăm $A=-\frac{3}{11}$, $C=\frac{96}{121}$, $B=\frac{25}{121}$. **57.** Se va considera identitatea $\frac{1}{(p+n)(p+n-1)}=\frac{1}{p+n-1}-\frac{1}{p+n}$.

(G. M, V.). **58.** Egalitatea este adevărată pentru $m=1$, $m=2$, presupunând că este adevărată pentru o valoare oarecare a lui m se va arăta că este adevărată şi pentru valoarea imediat superioară.

V. 1. $x^{\frac{4}{3}}$ **2.** 1. **3.** a^4-1. **4.** $x+y$. **5.** x^2-1. **6.** $\frac{a^2b}{d}\cdot\sqrt[12]{\frac{a^4b^5c^{11}}{d^6}}$. **7.** Se vor utiliza proprietăţile rapoartelor egale. **8.** Idem. (G. M. XV). **9.** $\left(\frac{a}{b}\right)^{mn}$. **10.** $\frac{x+a}{x^2+3ax+a^2}$. **11.** Numărătorul este patratul lui $x-\sqrt{y}+\sqrt[3]{z}$, iar numitorul este $x^2-(\sqrt{y}-\sqrt[3]{z})^2$, rezultatul este $\frac{x-\sqrt{y}+\sqrt[3]{z}}{x+\sqrt{y}-\sqrt[3]{z}}$. **12.** $\frac{x-\sqrt{y}}{x+\sqrt{y}}$. (G. M. IV). **13.** Prima fracţiune se poate scrie $\frac{x-(\sqrt[3]{y}-\sqrt[4]{z})^2}{(\sqrt{x}-\sqrt[3]{y}+\sqrt[4]{z})^2}$ rezultatul este $\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{y}-\sqrt[4]{z}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{y}+\sqrt[4]{z}}$ (G. M. V). **14.** Avem $n^3-3n-2=(n-2)(n+1)^2$, $n^3-3n+2=(n+2)(n-1)^2$; punând la numărător pe $(n+1)\sqrt{n-2}$ în factor şi la numitor pe $(n-1)\sqrt{n+2}$ se găseşte ca rezultat $(n+1)\sqrt{n-2}:(n-1)\times\sqrt{n+2}$. **15.** Se va pune $\sqrt{x}=a$, $\sqrt{y}=b$, $\sqrt{z}=c$, apoi $a-b=\alpha$, $b-c=\beta$, $c-a=\gamma$; avem $\alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=-2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)$, $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4=2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)^2$; rezultatul este $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}$. (G. M. IV). **16.** Se va ridica la patrat şi în urmă se va extrage rădăcina patrată, rezultatul este $\sqrt{(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2})^3}$. **17.** In expresia dată considerăm $x^2>4$, pentru a avea sub radicali cantităţi positive. Fie u valoarea expresiunei date, să ridicăm la cub şi să ţinem seama de identitatea $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$, găsim $u^3-x^3-3(u-x)=0$ sau $(u-x)(u^2+xu+x^2-3)=0$. Deci $u=x$ şi $u=\frac{1}{2}(-x\pm\sqrt{-3(x^2-4)})$

şi având în vedere ipoteza făcută relativ la x, urmează $u=x$. **18.** Se va aduce la acelaş numitor. **19.** Se va pune $\sqrt[4]{a}=x$, $\sqrt[4]{b}=y$, $\sqrt[4]{c}=z$, se va aduce la acelaş numitor şi simplifica. **20.** $\sqrt{xy}$. **21.** Se va considera suma a două radicale ca un singur termen, numitorul făcut raţional este $a^2+b^2+c^2-2ab-2ac-2bc$. **22.** Se va considera că numitorul este compus din doi termeni $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ şi $\sqrt{c}+\sqrt{d}$; chestiunea se reduce la precedenta; când $a+b=c+d$, numitorul făcut raţional este $2(ab-cd)$. **23.** Numitorul se poate scrie $3(\sqrt{10}-\sqrt{5})$, rezultatul este $\sqrt{5}(1+\sqrt{2})$. **24.** $\dfrac{(\sqrt[4]{a}-\sqrt{b})\,(\sqrt{a}+b)}{a-b^2}$.

25. Se va avea în vedere identitatea $\alpha^6-\beta^6=(\alpha+\beta)(\alpha^5-\alpha^4\beta+\alpha^3\beta^2-\ldots-\beta^5)$; se găseşte $\dfrac{\sqrt[3]{a^5}-\sqrt[3]{a^4}\sqrt{b}+\sqrt[3]{a^3}\sqrt{b^2}\ldots-\sqrt{b^5}}{a^2-b^3}$.

26. Punând ca mai sus $\sqrt[6]{a}=\sqrt[12]{a^2}=\alpha$ şi $\sqrt[4]{b}=\sqrt[12]{b^3}=\beta$ şi amplificând fracţia cu $\dfrac{\alpha^{12}-\beta^{12}}{\alpha+\beta}$, găsim la numitor a^2-b^3. **27.** Fie M c. m. m. c. m. al indiciilor m şi n; se va multiplica numărătorul şi numitorul cu $a^{\frac{M-1}{m}}-a^{\frac{M-2}{m}}b^{\frac{1}{n}}+a^{\frac{M-3}{m}}b^{\frac{2}{n}}-\ldots+a^{\frac{1}{m}}b^{\frac{M-2}{n}}-b^{\frac{M-1}{n}}$, numitorul devine $a^{\frac{M}{m}}-b^{\frac{M}{n}}$, care este raţional căci M este divizibil cu m şi n. **28.** Se va considera suma primilor doi termeni ca unul singur; numitorul făcut raţional este $3ab(a+b)$.

29. Se efectuează scăderea, reducerile şi simplificarea. Se obţine 4. (S. E. G. M III. p. 42). **30.** Dacă înmulţim, sub radical, numărătorii şi numitorii primului şi ultimului termen cu conjugata numitorului respectiv, obţinem, însumând rezultatele, $\sqrt{2}-\sqrt{3}$. Considerăm fracţiunea a doua a expresiunii, înmulţim numărătorul şi numitorul cu conjugata numitorului. Găsim $\dfrac{1+\sqrt{3}+4\sqrt[4]{3}}{5-\sqrt{3}}=\dfrac{4+3\sqrt{3}+2\sqrt[4]{3}(5+\sqrt{3})}{11}$. Rezultatul final este $E=\dfrac{15-8\sqrt{3}+2\sqrt[4]{3}(5+\sqrt{3})}{11}+\sqrt{2}$. (G. M. XLI, p. 157).

31. Expresiunea se scrie

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}\sqrt{(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)^2}-\sqrt{3}\sqrt[3]{3}$$

$$=\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}\sqrt{(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)}-\sqrt[3]{3}\right)$$

$=\sqrt{3}\left[(\sqrt[3]{2}+1)\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}-\sqrt[3]{3}\right]$. Raţionalizând acest rezultat, înmulţindu-l şi împărţindu-l cu $(\sqrt[3]{2}+1)^2\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1)^2}+\sqrt[3]{3}\times\left(\sqrt[3]{2}+1\right)\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}+\sqrt[3]{3^2}$, găsim o fracţie al cărei numărător este $\sqrt{3}\left[(\sqrt[3]{2}+1)^3(\sqrt[3]{2}-1)-3\right]=3\sqrt{3}\left[(\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{2}-1)-1\right]$ $=3\sqrt{3}\ [2-1-1]=0$. Valoarea expresiunii este zero. (G. M. XXXVIII. p. 317). **32.** Efectuând înmulţirea, găsim $2\left[x^2-y^2+2x\sqrt{2(x^2+y^2)}+2(x^2+y^2)\right]=4x^2+4x\sqrt{2(x^2+y^2)}$ $+2(x^2+y^2)=[2x+\sqrt{2(x^2+y^2)}]^2$. (G. M. XLII. p. 389). **33.** Observăm că suma radicalilor de subt radicalul numitorului membrului întâi provine dela produsele radicalelor $\sqrt{a-b}, \sqrt{b-c}, \sqrt{c-a}$ ale căror patrate au suma $(a-b)+$ $+(b-c)+(c-a)=0$. Pornim deci dela egalitatea $(\sqrt{a-b}+$ $+\sqrt{b-c}+\sqrt{c-a})^2=2\left[\sqrt{(a-b)(b-c)}+\sqrt{(b-c)(c-a)}+\right.$ $\left.+\sqrt{(c-a)(a-b)}\right]$, cu care membrul I al identităţii cerute se scrie $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{a-b}+\sqrt{b-c}+\sqrt{c-a}}$ unde raţionalizând numitorul, obţinem membrul II. (S. E. G. M. II p. 60). **34.** Efectuăm adunarea în membrul I şi cu egalitatea folosită în exerciţiul precedent, devine $\dfrac{\sqrt{a-b}+\sqrt{b-c}+\sqrt{c-a}}{\sqrt{2}\sqrt[4]{(a-b)(b-c)(c-a)}}$, care descompusă în suma a trei fracţii, conduce la membrul II. (S. E. G. M. II p. 61).

35. $$\sqrt[n]{\frac{x+a}{x+b}}+\sqrt[n]{\frac{x-a}{x-b}}=\frac{\sqrt[n]{(x+a)(x-b)}+\sqrt[n]{(x-a)(x+b)}}{\sqrt[n]{x^2-b^2}}$$

Analog se calculează numitorul primului termen. Numărătorii celor 2 fracţii obţinute se simplifică şi avem $\dfrac{\sqrt[n]{x^2-a^2}}{\sqrt[n]{x^2-b^2}}$, etc.

(S.E.G.M.I p.55). **36.** Se va scrie: $x^2(x^2-2a)+b$ şi observa că $x^2=a+\sqrt{a^2-b}$; rezultatul este zero. **37.** Avem $x^\alpha=\frac{b^2-ac}{a-b}$ şi înlocuind pe x^α în E, $E=\frac{ab-ac+a^2x^\beta-abx^\beta}{b^2-ac+abx^\beta-b^2x^\beta}=\frac{a}{b}$. (G. M, XXXV, p. 435). **38.** După înlocuire se va introduce cantitatea de afară sub radical; rezultatul este 1. **39.** Se vor face mai întâi numitorii raţionali, expresiunea dată devine $\frac{\sqrt{(1+x)^3}+\sqrt{(1-x)^3}-2x}{x}$, înlocuind pe x cu $\frac{\sqrt{3}}{2}$ obţinem $\frac{\sqrt{(2+\sqrt{3})^3}+\sqrt{(2-\sqrt{3})^3}}{\sqrt{2}\sqrt{3}}-2$; însemnând cu u valoarea fracţiunei avem $u^2=\frac{(2+\sqrt{3})^3+(2-\sqrt{3})^3+2}{6}=\frac{54}{6}=9$. $u=3$, iar valoarea expresiunei date este 1. Se mai poate proceda şi prin trigonometrie: Punem $x=\cos a$, expresiunea va deveni, făcând calculele: $2\frac{\left[1-\sin a\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)\right]}{1+2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)\sin a}$, făcând $a=30$, avem resultatul 1. **40.** Se va calcula mai întâi $\sqrt{1+x^2}$, acesta devine $\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$; rezultatul este $a+b$. **41.** $\sqrt{1+x^2}=\frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sqrt{1-x^2}=\frac{a-b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, rezultatul este $\frac{a}{b}$. **42.** $\sqrt[n]{1+x^2}=\sqrt[n]{\frac{2(a+b)^n}{(a+b)^n+(a-b)^n}}$, $\sqrt[n]{1-x^2}=\sqrt[n]{\frac{2(a-b)^n}{(a+b)^n+(a-b)^n}}$ înlocuind, reducând şi simplificând, găsim $\frac{a}{b}$. **43.** Se poate scrie $\frac{a\sqrt[3]{x-b}-b\sqrt[3]{a-x}}{\sqrt[3]{a-x}+\sqrt[3]{x-b}}+x$, când se face înlocuirea, numărătorul fracţiunei se reduce la zero, astfel că valoarea căutată este valoarea dată lui x. **44.** Idem.

45. Avem $\sqrt{u^2-1}=\sqrt{\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1}=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)$; $\sqrt{v^2-1}=$

$\frac{1}{2}\left(y-\frac{1}{y}\right)$; prima din expresiunile date devine egală cu $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$, iar cea de a doua cu $xy+\frac{1}{xy}\cdot$ **46.** Să punem $\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}=u$, $\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}=u'$, $\sqrt{1+b}-\sqrt{1-b}=v$, $\sqrt{1+b}+\sqrt{1-b}=v'$, deducem $x=\frac{u+v}{u'+v'}$, $y=\frac{u-v}{u'=v'}$, $1-xy=1-\frac{u^2-v^2}{(u'+v')^2}=\frac{u'^2+v'^2+2u'v'-u^2-v^2}{(u'+v')^2}$, se verifică imediat că $u^2+u'^2=v^2+v'^2$, înlocuind în numărătorul expresiunei precedente, aceasta devine $2\,u'(u'+v')$, deci $\frac{1-xy}{2}=\frac{u'}{u'+v'}$, în mod analog $\frac{1+xy}{2}=\frac{v'}{u'+v'}$, $\frac{x+y}{2}=\frac{u}{u'+v'}$, $\frac{x-y}{2}=\frac{v}{u'+v'}$; rezultatele finale sunt $\frac{2}{a}$ şi $\frac{2}{b}\cdot$

VI. 1. 4. **2.** $\frac{4}{13}$. **3.** 56. **4.** 7. **5.** $\frac{29}{13}$. **6.** 3. **7.** 12. **8.** 12. **9.** 1. **10.** $\frac{79}{29}$; această valoare verifică ecuaţia, întru cât nu anulează nici unul din factorii cu care am înmulţit, când am scăpat de numitori. Ecuaţia dată tinde a fi de asemenea satisfăcută când x creşte nemărginit, deci $x=\infty$ este de asemenea o soluţie. **11.** 5; aceiaşi observaţie ca mai sus. **12.** $\frac{9}{2}$, idem. **13.** Cel mai mic multiplu comun al numitorilor este x^2+5x+6; se găseşte $x=1$. **14.** Cel mai mic multiplu comun al numitorilor este $7+16x+4x^2$; se găseşte $x=\frac{7}{8}$, $x=\infty$. **15.** 4. **16.** 0 şi $\frac{13}{3}$. **17.** Ecuaţia se poate scrie: $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right):(x-4)\left(x+\frac{2}{3}\right)=0$, singura rădăcină este $\frac{1}{2}\cdot$ **18.** Gonind numitorii şi reducând, găsim $(na+mb-ma-nb)x=ma^2+nb^2-mab-nab$ sau $(m-n)(a-b)x=(ma-nb)(a-b)$, dacă $a-b\neq 0$ soluţia este $x=\frac{ma-nb}{n-m}$, când $a-b=0$ ecuaţiunea se reduce la

identitate. Ea admite încă soluţia $x=\infty$. **19.** $\frac{br-cq}{cp-ar}$ şi ∞.
20. $\frac{a-b}{2}$ şi ∞. **21.** $\frac{a+b}{a-b}$. **22.** $\frac{ab}{a+b}$. **23.** Grupând primul termen din partea întâia cu primul din partea a doua, de asemenea termenii de al doilea reducând, avem:
$\frac{2}{(ax+m-1)(ax+m-2)}=\frac{2}{(ax+n-1)(ax+n-2)}$, deci $(ax+m-1)(ax+m-2)=(ax+n-1)(ax+n-2)$, de unde, după ce am simplificat cu $m-n$, $x=\frac{3-m-n}{2a}$.
24. Avem $(2a-b-x)+(a-2b+x)=3(a-b)$, ridicând la cub avem $(2a-b-x)^3+(a-2b+x)^3+3(2a-b-x)(a-2b+x)$ $3(a-b)=27(a-b)^3$, ţinând seama de ecuaţia dată, relaţia precedentă devine $3(a-b)(2a-b-x)(a-2b+x)=0$, deci dacă $a-b\neq 0$, $x=2a-b$ şi $x=2b-a$; când $a=b$ ecuaţia e identic satisfăcută. **25.** Generalizarea chestiunei precedente; în mod analog se găseşte $x=\frac{ma-nb}{p}$ şi $x=\frac{na-mb}{p}$. **26.** Se vor aplica proprietăţile rapoartelor; se găseşte $x=0$ şi $x=\frac{2ab}{a+b}$.
27. Eliminând numitorii şi reducând avem $(x^2-a^2$ $(x+a)^2=(x^2-a^2)$ $(x+a)^3$ $*{*}*$ $x^2-a^2=0$ şi $x+a=1$.
28. Se va pune $\frac{(x+a)(x+b)}{(x-a)(x-b)}=y$ şi $\frac{(x+c)(x+d)}{(x-c)(x-d)}=z$, ecuaţia dată devine $y+\frac{1}{y}=z+\frac{1}{z}$ sau $yz(y-z)-$ $-(y-z)=0$ sau $(y-z)(yz-1)=0$, $y=z$ sau $yz=1$; prima dă $\frac{(x+a)(x+b)}{(x-a)(x-b)}=\frac{(x+c)(x+d)}{(x-c)(x-d)}$ $*{*}*$ $x=$ $\pm\sqrt{\frac{abc-bcd-acd+abd}{a+b+c+d}}$, cea de a doua dă $(x+a)(x+b)\times$ $(x+c)(x+d)=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ $*{*}*$ $x=0$ şi $x=\sqrt{\frac{abc+abd+acd+bcd}{a+b+c+d}}$. **29.** Izolând mai întâi radicalul dublu într'un membru şi ridicând la patrat avem

$-\sqrt{1-x}=1-2\sqrt{x}$, apoi succesiv $-x=4x-4\sqrt{x}$, $25x^2=16x$ *** $x=0$ şi $x=\frac{16}{25}$; prima soluţie nu convine, ea verifică ecuaţia $\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{1-x}}=1$. **30.** Rădăcina pătrată a lui x^2-2x+1 este $x-1$ sau $1-x$, considerând succesiv ambele cazuri, găsim: $x=0$, $x=1$; $x=\frac{2}{3}$ şi $x=-\frac{3}{20}$
31. $\sqrt{a^2}=\pm a$, considerând ambele cazuri găsim $x=-\frac{2}{3}a$, $x=-2a$; prima soluţie convine când se ia radicalul din partea a doua cu —. **32.** Se va scrie $\frac{x-1}{\sqrt{2x+x^2}}=$ $=\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x}}$; se găseşte $x=\frac{5}{2}$ şi $x=\infty$. **33.** $x=\pm\sqrt{\frac{3a^3+b^2}{3}}$.
34. 0 şi $\frac{25}{16}$. **35.** Ridicând la patrat şi simplificând: $4(a+x)$ $+4\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{x(a+x)}$, divizând cu $\sqrt{a+x}$ şi ridicând din nou la patrat, avem $a+\sqrt{a^2-x^2}=\frac{x}{32}$, se deduce $x=0$ şi $x=$ $=\frac{64a}{1025}$; avem încă soluţia $x=-a$, rezultând din împărţirea cu $\sqrt{a+x}$, şi care singură verifică ecuaţia dată. **36.** Se vor aplica proprietăţile rapoartelor, avem: $\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a+x}}=\frac{b+1}{b-1}$, deci $\frac{a+x}{a-x}=\left(\frac{b+1}{b-1}\right)^2$; aplicând din nou proprietăţile rapoartelor avem: $\frac{x}{a}=\frac{(b+1)^2-(b-1)^2}{(b+1)^2+(b-1)^2}=\frac{2b}{b^2+1}$. **37.** Se va ridica la cub, având în vedere identitatea $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$; se găseşte $x=a^3-\frac{(b-2a)^3}{27b}$. **38.** Ridicând la cub avem: $\frac{1+x}{1-x}+\frac{1-x}{1+x}+3c=c^3$ sau $\frac{(1+x)^2+(1-x)^2}{1-x^2}=2\frac{1+x^2}{1-x^2}=$ $=c^3-3c$ *** $x^2=\frac{c^3-3c-2}{c^3-3c+2}=\frac{(c+1)^2(c-2)}{(c-1)^2(c+2)}$. **39.** Multiplicând numitorul cu 3 şi scăzând numărătorul, avem $\frac{2\left[\sqrt[3]{(a+x)^2}-2\sqrt[3]{a^2-x^2}+\sqrt[3]{(a-x)^2}\right]}{\sqrt[3]{(a+x)^2}-\sqrt[3]{a^2-x^2}+\sqrt[3]{(a-x)^2}}=\frac{3-c}{3}$, multiplicând apoi

numărătorul cu 3 şi scăzând numitorul, se găseşte $\frac{\sqrt[3]{(a+x)^2}+\sqrt[3]{a^2-x^2}+\sqrt[3]{(a-x)^2}}{2\left[\sqrt[3]{(a+x)^2}+2\sqrt[3]{a^2-x^2}+\sqrt[3]{(a-x)^2}\right]}=\frac{3c}{3c-1}$, înmulţind ecuaţia dată cu cele 2 egalităţi găsite, avem

$$\frac{\left(\sqrt[3]{a+x}-\sqrt[3]{a-x}\right)^2\left(\sqrt[3]{(a+x)^2}+\sqrt[3]{a^2-x^2}+\sqrt[3]{(a-x)^2}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{a+x}+\sqrt[3]{a-x}\right)^2\left(\sqrt[3]{(a+x)^2}-\sqrt[3]{a^2-x^2}+\sqrt[3]{(a-x)^2}\right)^2}=\frac{(3-c)c^2}{3c-1},$$

sau

$$\frac{\sqrt[3]{(a+x)^3}-\sqrt[3]{(a-x)^3}}{\sqrt[3]{(a+x)^3}+\sqrt[3]{(a-x)^3}}=\pm c\sqrt{\frac{3-c}{3c-1}}, \text{ de unde } x=\pm ac\sqrt{\frac{3-c}{3c-1}}.$$

40. Trecând pe $2\sqrt{1-a^2}$ în partea întâia, acesta va reprezenta patratul lui $\sqrt[4]{1-a}\sqrt[8]{\frac{1+x}{1-x}}-\sqrt[4]{1+a}\sqrt[4]{\frac{1-x}{1+x}}$, egalând aceasta cu zero, ridicând la puterea a 8-a şi aplicând proprietăţile rapoartelor se găseşte $x=a$. **41.** Divizând parte cu parte identitatea $\sqrt[4]{(x+a)^4}-\sqrt[4]{(x-a)^4}=2a$ cu ecuaţia dată, obţinem:

$$\frac{\sqrt[4]{(x+a)^2}+\sqrt[4]{(x-a)^2}}{\left(\sqrt[4]{x+a}+\sqrt[4]{x-a}\right)^2}=\frac{a}{b}, \text{ de unde } \frac{2\sqrt[4]{a^2-x^2}}{\left(\sqrt[4]{x+a}+\sqrt[4]{x-a}\right)^2}$$

$$=\frac{b-a}{b} \quad \text{sau} \quad \frac{\sqrt[4]{(x+a)^2}+\sqrt[4]{(x-a)^2}}{\sqrt[4]{a^2-x^2}}=\sqrt[4]{\frac{x+a}{x-a}}+\sqrt[4]{\frac{x-a}{x+a}}$$

$=\frac{2a}{b-a}$ Notăm $\sqrt[4]{\frac{x+a}{x-a}}=u$. Ecuaţia devine $(b-a)u^2-2au+(b-a)=0, u=\frac{a\pm\sqrt{2ab-b^2}}{b-a}$. Deci $x=a\frac{(a\pm\sqrt{2ab-b^2})^4+(b-a)^4}{(a\pm\sqrt{2ab-b^2})^4-(b-a)^4}=$

$\frac{(a^2+2ab-b^2)(a\pm\sqrt{2ab-b^2})^2}{2\sqrt{2ab-b^2}(a\pm\sqrt{2ab-b^2})^2}=\frac{a^2+2ab-b^2}{2\sqrt{2ab-b^2}}$. **42.** Generalizarea ex 36; se găseşte $x=\pm a\sqrt{\frac{(a+b)^n-(a-b)^n}{(a+b)^n+(a-b)^n}}$. **43.** Ecuaţia dată se poate scrie: $(a+x)^{\frac{n+1}{n}}=\frac{a}{c}x^{\frac{n+1}{n}}$ $*{*}*$ $\frac{a+x}{x}=\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{n}{n+1}}$

$x=\frac{a}{\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{n}{n+1}}-1}$, (vezi R. M. T., IV, 25).

VII. 1. $x=60$, $y=36$. **2.** $x=18$, $y=6$. **3.** $x=2$, $y=7$. **4.** $x=18$, $y=12$. **5.** Indepărtând numitorii, ecuaţiile devin: $(a+c)x+(b+c)y=2(a+c)(b+c)$, $ax-by=(a-b)c$; multiplicând prima cu b, cea de a doua cu $b+c$ şi adunând avem $(ac+bc+2ab)x=(b+c)[2b(a+c)+c(a-b)]=(b+c)(ac+bc+2ab)$, deci $x=b+c$. In acelaş mod multiplicând prima cu a, a doua cu $a+c$ şi scăzând, găsim $y=a+c$. **6.** Din ecuaţiunile date deducem $(a-b)x+(a+b)y=2a(a^2-b^2)$, $x-y=4ab$ sau $a(x+y)-b(x-y)=a(x+y)-4ab^2=2a(a^2-b^2)$. $\therefore x+y=2(a^2+b^2)$, $x-y=4ab$, care dau imediat $x=(a+b^2)$, $y=(a-b)^2$. **7.** Sistemul se mai scrie, dacă descompunem numitorii în factori primi $\frac{x}{a+b}+\frac{y}{a(a+b)}+\frac{1}{ab(a+b)(a-b)}=$ $=\frac{x}{ab(a+b)(a-b)}+\frac{y}{ab(a-b)}+\frac{1}{b(a-b)}$, $\frac{x}{a^2+ab+b^2}+$ $+\frac{y}{a(a^2+ab+b^2)}+\frac{1}{ab(a-b)(a^2+ab+b^2)}=\frac{x}{ab(a-b)(a^2+ab+b^2)}+$ $+\frac{y}{ab(a-b)}+\frac{1}{b(a-b)}$ sau, notând $a+b=\alpha$, $a=\beta$, $b(a-b)=\gamma$ $a^2+ab+b^2=\delta$, şi îndepărtând numitori, găsim $\beta\gamma x+\gamma y+$ $+1=x+\alpha y+\alpha\beta$, $\beta\gamma x+\gamma y+1=x+\delta y+\delta\beta$ sau încă $(\delta-\alpha)[(\beta\gamma-1)x+\gamma y+1]=0$. (S. E. G. M. II p. 132).

8. Se vor lua ca necunoscute $\frac{1}{x}=x'$ şi $\frac{1}{y}=y'$; se găseşte $x=\frac{p^2-q^2}{ap-bq}$, $y=\frac{p^2-q^2}{bp-aq}$. **9.** $x=-\frac{1}{pq}$, $y=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$.

10. Din prima deducem $\frac{x}{bn-am}=\frac{y}{an-cm}$; însemnând cu u valoarea comună a acestor rapoarte, deducem $x^2+y^2=[(bn-$ $-dm)^2+(an-cm)^2]u^2=k^2 \therefore u=\frac{k}{\sqrt{(bn-dm)^2+(an-cm)^2}}$, $x=(bn-dm)u$, $y=(an-cm)u$. **11.** Prin împărţire deducem $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$; procedând în mod analog ca mai sus, găsim $\frac{x^3}{a^3}=\frac{y^3}{b^3}=\frac{x^3+y^3}{a^3+b^3}$, apoi $\frac{x^4}{a^3}=\frac{x(x^3+y^3)}{a^3+b^3}$, etc.;

$x=\dfrac{a}{\sqrt[4]{a^3+b^3}}$, $y=\dfrac{b}{\sqrt[4]{a^3+b^3}}$. **12.** Prin înmulţire şi împărţire deducem $(x+y)(x-y)=\sqrt[5]{a\,b}$, $\dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{a}{b}$, se găseşte apoi, rezolvând ca mai sus în raport cu $x+y$ şi $x-y$, $x=\dfrac{a+b}{2\sqrt[5]{a^2b^2}}$, $y=\dfrac{a-b}{2\sqrt[5]{a^2b^2}}$ **13.** Din ecuaţiile date, prin înmulţire şi împărţire, deducem $\dfrac{x}{a-x}=\dfrac{b-y}{y}$, $\dfrac{\sqrt[3]{x}}{a-x}=\dfrac{\sqrt[3]{y}}{b-y}$, însemnând cu u valoarea primelor rapoarte, găsim $u=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$. **14.** Cea de a doua ecuaţie se face imediat raţională $(4y+5x=180)$, multiplicând prima cu 3 adunând cu cea de a doua şi ridicând la patrat, avem $25x-16y=0$ ∴ $x=16$, $y=25$. **15.** $x=9$, $y=16$. **16.** Multiplicăm cea de a doua ecuaţie cu 4 şi 3 şi scădem din întâia şi a treia, obţinem $-10x+5y=0$, $14y=28$ ∴ $y=2$; $x=1$, $z=3$. **17.** Se va elimina mai întâi y succesiv între întâia şi a treia, apoi între a doua şi a treia, se găseşte $x=3$, $y=4$ $z=6$. **18.** $x=2$, $y=4$, $z=3$. (G. M. II.) **19.** $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}$, $\dfrac{1}{(b-c)(b-a)}$, $\dfrac{1}{(c-a)(c-b)}$. **20.** Se poate uşor elimina x scăzându-le două câte două, apoi y etc. Se poate încă rezolva chestiunea astfel: Să considerăm polinomul $x-\mathrm{X}\,y+\mathrm{X}^2z-\mathrm{X}^3$, în baza ecuaţiilor date acest polinom se reduce la zero pentru $\mathrm{X}=a$, $\mathrm{X}=b$, $\mathrm{X}=c$, vom avea deci $x-\mathrm{X}\,y+\mathrm{X}^2z-\mathrm{X}^3=(a-\mathrm{X})(b-\mathrm{X})(c-\mathrm{X})$; desvoltând membrul al doilea şi identificând, avem: $x=abc$, $y=+(ab+ac+bc)$, $z=a+b+c$. Chestiunea se poate generaliza pentru sistemul $x_1-a_i x_2+a_i^2 x_3-\ldots\pm a_i^{n-1}a^{n-1}x_n\mp a_i^n=0$, $i=1,2,3\ldots n$. (G. M. II.) **21.** Scăzând două câte două ecuaţiunile date deducem: $\dfrac{x-y}{a}+\dfrac{y-z}{b}+\dfrac{z-x}{c}=$ $=\dfrac{x-y}{b}+\dfrac{y-z}{c}+\dfrac{z-x}{a}=\dfrac{x-y}{c}+\dfrac{y-z}{a}+\dfrac{z-x}{b}$, aceste ecuaţii au ca soluţii $x-y=y-z=z-x=0$ sau $x=y=z$; substituind într'una din ecuaţiile date găsim că valoarea lor comună este 1. In cazul când $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$, sistemul admite încă soluţiile: $x=y=z=k$. **22.** $x=\frac{a^3(\alpha-b)(\alpha-c)}{\alpha^2(a-b)(a-c)}$ etc. (G.M.III). **23.** Luând ca necunoscute pe $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$ chestiunea se reduce la precedenta. **24.** Eliminând mai întâi pe x^2 şi z^2 găsim: $y^2=\frac{(\mu^2-b^2)(\nu^2-b^2)(b^2-\rho^2)}{b^2(b^2-c^2)}$, în acelaş mod: $z^2=\frac{(\mu^2-c^2)(\nu^2-c^2)(c^2-\rho^2)}{c^2(c^2-b^2)}$, apoi $x^2=\frac{\mu^2\nu^2\rho^2}{b^2c^2}$. (G. M. I.) **25.** Să considerăm expresiunea $\frac{x}{a-X}+\frac{y}{b-X}+\frac{z}{c-X}-1$, dacă x, y, z reprezintă rădăcinile sistemului dat, expresiunea precedentă se reduce la zero pentru $X=\lambda$, $X=\mu$, $X=\nu$, vom avea deci $\frac{x}{a-X}+\frac{y}{b-X}+\frac{z}{c-X}-1=\frac{(X-\lambda)(X-\mu)(X-\nu)}{(a-X)(b-X)(c-X)}$ multiplicând cu $a-X$ şi făcând $X=a$, deducem $x=\frac{(a-\lambda)(a-\mu)(a-\nu)}{(b-a)(c-a)}$ etc. **26.** Procedeu analog ca în problema 10, se găseşte $x=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ etc. **27.** Din aplicarea proprietăţilor rapoartelor rezultă $\frac{x}{b+c}=\frac{y}{a+c}=\frac{z}{b+a}$; se găseşte $x=\frac{m(b+c)}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}}$ etc. **28.** Adunând avem $(x+y+z)^2=$ $=a+b+c$, deci $y+z=\frac{2a}{\sqrt{a+b+c}}$ etc.; se găseşte $x=\frac{b+c-a}{\sqrt{a+b+c}}$ etc. **29.** Pentru rezolvare procedeu analog ca la problemele 10 şi 26; găsim $x^m=\frac{a^{m+n}}{d^n}$ etc. de aci se deduce $a=x^{\frac{m}{m+n}}d^{\frac{m}{m+n}}$ etc., deci $a^n+b^n+c^n=x^{\frac{mn}{m+n}}d^{\frac{n^2}{m+n}}+...$, rezultatul eliminării este: $x^{\frac{mn}{m+n}}+y^{\frac{mn}{m+n}}+z^{\frac{mn}{m+n}}=d^{\frac{mn}{m+n}}$

30. $x=\frac{-a+b+c}{r}$, $y=\frac{a-b+c}{r}$, $z=\frac{a+b-c}{r}$

$r=\frac{1}{2}\sqrt[3]{(a+b+c)(a+b-c)}$. **31.** Ecuaţiile date se pot scrie: $(x+y)(x+z)=a...$, deducem $(x+y)(y+z)(z+x)=\sqrt{abc}$ deci $y+z=\frac{\sqrt{abc}}{a}$, etc. apoi $x=\frac{ab+ac-bc}{2\sqrt{abc}}$ etc. **32.** Primele ecuaţii le putem scrie $\frac{\sqrt[n]{a}}{\left(\frac{1}{x}\right)}=\frac{\sqrt[n]{b}}{\left(\frac{1}{y}\right)}=\frac{\sqrt[n]{c}}{\left(\frac{1}{z}\right)}=u$, $\therefore \frac{1}{x}=\frac{\sqrt[n]{a}}{u}...$

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{d}=\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{u}$, $u=d\left[\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}\right]$,

$x=\frac{d\left[\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}\right]}{\sqrt[n]{a}}...$, iar $ax^{n-1}+by^{n-1}+cz^{n-1}=$

$=d^{n-1}\left[\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}\right]^n$. **33.** Ecuaţiile date pot fi scrise: $\left(x+\frac{1}{a}\right)\left(y+\frac{1}{a}\right)=\frac{la+1}{a^2}....$ se găseşte $x=-\frac{1}{a}+$ $+\sqrt{\frac{la+1}{a^2}\cdot\frac{ma+1}{a^2}\cdot\frac{na+1}{a^2}}$ etc. **34.** Punând $x-a=y-b=$ $=z-c=u$, avem $x=a+u$, $y=b+u$, $z=c+u$, substituind în ultima ecuaţie, termenii în u^3 şi u^2 se reduc şi obţinem $u=-\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{3(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)}=-\frac{1}{3}(a+b+c)$, apoi $x=a-\frac{1}{3}(a+b+c)...$ **35.** Se vor divide ecuaţiile cu xyz şi se vor lua ca necunoscute $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$ se găseşte: $x=\frac{1}{b+c-a}$, $y=\frac{1}{c+a-b}$, $z=\frac{1}{a+b-c}$. **36.** Se va pune

$\frac{y+1}{y-1}=at,\ y=\frac{at+1}{at-1}$. Impărţind prima ecuaţie ridicată la patrat cu a doua, găsim $\frac{(z-1)(y+1)}{(y-1)(z+1)}=\frac{a^2}{b}$, sau $\frac{z+1}{z-1}=\frac{bt}{a}$, de unde $z=\frac{bt+a}{bt-a}$. Din prima ecuaţie, deducem $x=\frac{bt-a}{at-1}$. Ecuaţia ultimă se scrie $ax^2\frac{z^2+z+1}{y^2+y+1}=c$ şi înlocuind x,y,z în funcţie de t aflăm $t=\pm\sqrt{\frac{a^3-c}{3a(b^2-ac)}}$ **37.** Avem $\frac{1}{xy}+\frac{1}{xz}=\frac{1}{a}\ldots$ $\therefore\frac{1}{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)\ldots$ $x=\sqrt{2\left(-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right):}$ $\overline{:\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)}\ldots$ **38.** Procedeu analog ca la 9 şi 25; se găseşte $x=\frac{ka_i}{\sqrt[p]{\Sigma a_i^p}}$, $i=1,2\ldots n$. **39.** Insemnând cu $\frac{1}{u}$ valoarea comună a rapoartelor date, avem $x_1=au$, $x_2=ux_1,\ x_3=ux_2,\ldots x_n=ux_{n-1},\ b=ux_n.\ \therefore\ u=\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$, $x_i=a\sqrt[n+1]{\left(\frac{b}{a}\right)^i}$. (G. M. X.). **40.** Se va lua ca necunoscută suma $s=x+y+z+t$, avem $x=\frac{\alpha-ms}{a-m}$, $y=\frac{\beta-ns}{b-n}$, $z=\frac{\gamma-ps}{c-p}$, $t=\frac{\delta-qs}{d-q}$, adunând $\frac{\alpha-ms}{a-m}+\frac{\beta-ns}{b-n}+\frac{\gamma-ps}{c-p}+$ $+\frac{\delta-qs}{d-q}=s$, care dă pe s. **41.** Generalizarea chestiunei precedente; se rezolvă în acelaş mod. **42.** Ecuaţiile date se pot pune sub forma: $\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2=\frac{1-y}{1+y}$, $\left(\frac{1-y}{1+y}\right)^2=\frac{1-z}{1+z}$, $\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^2=\frac{1-u}{1+u}$, $\left(\frac{1-u}{1+u}\right)^2=\frac{1-a}{1+a}$, se găseşte $x=\frac{1-t}{1+t}$,

$y=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $z=\frac{1-t^4}{1+t^4}$, $u=\frac{1-t^8}{1-t^8}$, $t=\sqrt[16]{\frac{1-a}{1+a}}$. **43.** Punând $x-a=m$, $y-b=n$, $z-c=p$, $x-a'=m'$, $y-b'=n'$, $z-c'=p'$, avem $a-a'=m'-m$..., prima ecuaţie devine: $\sqrt{m^2+n^2+p^2}+\sqrt{m'^2+n'^2+p'^2}=\sqrt{(m-m')^2+(n-n')^2+(p-p')^2}$ ridicând la patrat şi simplificând obţinem: $\sqrt{(m^2+n^2+p^2)(m'^2+n'^2+p'^2)}=-(mm'+nn'+pp')$, ridicând din nou la patrat şi servindu-ne de identitatea lui *Lagrange* obţinem $(mn'-nm')^2+(np'-pn')^2+(pm'-mp')^2=0$ $\therefore \frac{m}{m'}=\frac{n}{n'}=\frac{p}{p'}$ sau $\frac{m}{m'-m}=\frac{n}{n'-n}=\frac{p}{p'-p}$ deci $\frac{x-a}{a'-a}=$ $=\frac{y-b}{b'-b}=\frac{z-c}{c'-c}=u$, $x=a+u(a'-a)$..., substituind în cea de a doua ecuaţie găsim $ua=\frac{1-(Aa+Bb+Cc)}{A(a-a')+B(b-b')+C(c-c')}$. Chestiunea se poate generaliza. **44.** Să punem $X=x^2+a^2+$ $+b^2+c^2$...; sistemul devine $\sqrt{X}=\sqrt{Y-a^2}+\sqrt{Z-a^2}$..., eliminând radicalii, deducem din comparaţia rezultatelor: $a^2X=b^2Y=c^2Z=u$, găsim:

$$u=\frac{4a^4b^4c^4}{2a^4b^2c^2-2b^4a^2c^2-2c^4a^2b^2+a^4b^4+a^4c^4+b^4c^4}.$$

45. Rezolvând sistemul găsim $x=\frac{bcu-(b+c)v+w}{(a-b)(a-c)}$, $y=\frac{cau-(c+a)v+w}{(b-c)(b-a)}$, $z=\frac{abu-(a+b)v+w}{(c-a)(c-b)}$, valori ce se introduc în expresiunea considerată. (S. E. G. M. II. p. 188).

VIII. 1. Fie $a<b<c<d$, avem $c-b<d-a \therefore a+c<b+d$. **2.** Revine la $(a-b)^2>0$. **3.** Avem $\frac{ma+nb}{m+n}=a+\frac{n(b-a)}{m+n}=$ $=b-\frac{m(b-a)}{m+n}$ **4.** Se poate scrie $(a-1)(a^3-1)>0$ sau $(a-1)^2(a^2+a+1)>0$, $(a-1)^2\left[\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]$ expresie pozitivă. **5.** Se poate scrie $(a-1)^2$ $[(a+1)^2+a^2]>0$. **6.** Multiplicând cu 2 şi trecând totul în membrul întâi, acesta devine: $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2>0$. **7.** Efectuând operaţiile, se reduce la precedenta. **8.** Se va porni dela inegalităţile evidente $a^2>a^2-(b-c)^2...$ **9.** Se poate scrie b^2+c^2- $-2(a-c)\sqrt{b^2+c^2}+(a-c)^2>0$, primul membru e un patrat perfect. **10.** Se poate scrie $(a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})>0$ sau $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2>0$. **11.** Din identitatea lui *Lagrange* (II, 23) avem: $(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)-(aa'+bb'+cc')^2>0$, deci $(aa'+bb'+cc')^2<1$. **12.** Avem $5a^4+b^2c^2-2a^2bc-2a(b+c)(2a^2-bc)\geqslant 0$. Cum $a^2=b^2+c^2$, inegalitatea se scrie $4a^4+b^2c^2-$ $-4a^2bc+2a^2bc+a^4-2a(b+c)(2a^2-bc)\geqslant 0, 4a^4+b^2c^2-4a^2bc+$ $+a^2(b^2+c^2)+2a^2bc-2a(b+c)(2a^2-bc)\geqslant 0, (2a^2-bc)^2+$ $+a^2(b+c)^2-2a(b+c)(2a^2-bc)\geqslant 0, [2a^2-bc-a(b+c)]^2\geqslant 0$. Expresiunea a doua se scrie $Aa^6+B[b^6+c^6+3b^2c^2(b^2+c^2)]=$ $Aa^6+B(b^2+c^2)^3=a^6(A+B)$. (G. M. XXXV. p. 135). **13.** $(a-2b)^2\geqslant 0$, $(b-2c)^2\geqslant 0$, $(c-2a)^2\geqslant 0$, deci $5(a^2+b^2+c^2)>$ $4(ab+bc+ca)$. (G. M. XXXIV. p. 38). **14.** Avém $a^3+b^3+c^3-$ $-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$, iar paranteza este $\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$. (G. M. XXXIV. p. 38). **15.** Generalizarea chestiunei 11 VIII, diferenţa obţinută trecând totul în membrul I, se poate pune sub forma unei sume de pătrate de forma $(a_i a'_k - a_k a'_i)^2$. **16.** Se poate scrie $(\alpha\beta'-\beta\alpha')^2(p^2-q)^2$. (G. M. IX). **17.** Fie a şi b cele două numere $a>b$, avem $\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$;

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{(a+b)^2-4ab}{2(a+b+2\sqrt{ab})}=\frac{(a-b)^2}{2(a+b+2\sqrt{ab})}<\frac{(a-b)^2}{8b}.$$

18. Pentru $n=2$ vezi pr. 17. E destul să arătăm că teorema fiind adevărată pentru $n-1$ este adevărată şi pentru n. Fie $a_1>a_2>a_3>...>a_n$, prin ipoteză $\frac{a_1+a_2+...+a_{n-1}}{n-1}>$ $>\sqrt[n-1]{a_1 a_2 \dots a_{n-1}}$, dar $a_1 a_2 \dots a_{n-1}>a_n^{n-1}$, de unde $1>\frac{\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}}{\sqrt[n-1]{a_1 a_2 \dots a_{n-1}}}$, şi $a_n<\sqrt[n-1]{a_1 a_2 \dots a_{n-1}}$; din acestea se deduce imediat că $\frac{n-1}{n} > \left\{ \frac{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}}{\sqrt[n-1]{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}}} - \frac{a_n}{n \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}}} \right\}$.

Deci *a fortiori* $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}{n} > \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} - \frac{a_n}{n}$ c.c.t.d.

19. Din inegalităţile $a < b + c$, $b < c + a$, $c < a + b$ deducem $a - b < c \ldots$, prin ridicări la pătrat şi adunări obţinem inegalitatea căutată.

20. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c) \times \frac{1}{2} [(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$.

21. Se poate scrie $a^2(a^2 - bc) + b^2(b^2 - ac) + c^2(c^2 - ab) = a^2(a^2 + b^2 - c^2 - bc) + b^2(b^2 + c^2 - a^2 - ac) + c^2(c^2 + a^2 - b^2 - ab) = (a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2) + (a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 - a^2bc - b^2ac - c^2ab)$, fiecare paranteză e o sumă de pătrate. **22.** Se va pune sub forma unei sume de termeni toţi pozitivi observând că $a^3 + b^3 - a^2b - ab^2 = (a+b)(a-b)^2$; pentru partea a doua a inegalităţei aceşti termeni sunt: $a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2$. **23.** Punem $y + z = a$, $x + z = b$, $x + y = c$, $x = \frac{(b + c - a)}{2}$, $y = \frac{a + c - b}{2}$, $z = \frac{a + b - c}{2}$.

Inegalitatea se reduce la $\frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} + \frac{a+b}{c} \geqslant 6$, apoi la precedenta. (G. M. XXXII p. 194). **24.** Inegalitatea revine la $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < n$, care este verificată pentru $n = 3$, când n creşte cu o unitate membrul al doilea creşte cu 1 iar membrul întâi cu o cantitate mai mică ca 1, deci *a fortiori* inegalitatea va fi verificată (G. M. XVI). **25.** După precedenta avem $\sqrt[n-1]{n-1} > \sqrt[n]{n}$. **26.** Avem $(n+1)^n - n^n = \frac{(n+1)^n - n^n}{(n+1) - n} = (n+1)^{n-1} + n(n+1)^{n-2} + \ldots + n^{n-1} > n.n^{n-1} = n^n$.

27. p fiind un număr mai mic ca n, avem $p(n - p + 1) > n$, căci din $n > p$ deducem $n(p-1) > p(p-1) {*}{*}{*} p(n - p + 1) > n$, făcând $p = 1, 2 \ldots \frac{n-1}{2}$ sau $\frac{n}{2}$ şi făcând produsul avem prima inegalitate; avem apoi $p(n-p) < \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$, după cum se poate verifica uşor, procedând ca mai sus găsim a doua inegalitate.

28. După ex. 18, $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{n+1}}{n+1} > \sqrt[n+1]{a_1 a_2 \ldots a_{n+1}}$. Punând $a_1=m$, $a_2=a_3=\ldots=a_{m+1}=1$ avem $m+n>(n+1)\sqrt[n+1]{m}$ dând lui n valori dela 1 la n şi multiplicând inegalităţile obţinute, aflăm prima inegalitate a enunţului. Cu $(m+n)^{n+1}>(n+1)^{n+1}m$ obţinem analog cealaltă inegalitate. (G.M.XXXII p. 185). **29.** Pentru ca să avem $\frac{2p+1}{2q+1}<\frac{2p+1}{2q}$, trebue să avem $2p+1>0$, $q>0$ sau p şi q pozitivi; din inegalităţile $\frac{2p+1}{2q+1}>\alpha$ şi $\frac{2p+1}{2q}<\beta$ deducem $\frac{(2q+1)\alpha-1}{2}<$ $<p<\frac{2q\beta-1}{2}$, cele două limite între care e cuprins p trebue să diferă cel puţin cu o unitate, deducem $q>\frac{2+\alpha}{2(\beta-\alpha)}$; luând p şi q astfel ca inegalităţile precedente să fie satisfăcute — ceea ce este în totdeauna posibil — şi inegalităţile date vor fi satisfăcute. **30.** x şi y fiind greutăţile reale l şi l' braţele de cumpănă, avem $pl=xl'$, $yl=pl'$ ∴ $x+y=$ $=p\frac{l^2+l'^2}{ll'}$; cantitatea ce el crede că a vândut fiind $2p$, rezultă o diferenţă $2p-(x+y)=2p-p\frac{l^2+l'^2}{ll'}=-p\frac{(l-l')^2}{ll'}$, deci el pierde. **31.** $x<-\frac{1}{2}$. **32.** $-\frac{34}{5}<x<\frac{13}{8}$. **33.** Dacă $b(m+p)(a^2-b^2)>0$, trebue $x>\frac{a(n-q)}{b(m+p)}$, contrariu dacă $b(m+p)(a^2-b^2)<0$. **34.** $x<0$ sau $x>\sqrt{ab}$. **35.** $0<x<1$. **36.** Revine la $\frac{x}{1-x^2}>0$, trebue $-\infty<x<-1$ sau $0<x<1$. **37.** $y<2$, $x>\frac{1}{2}-\frac{3}{2}y$. **38.** $y>1$, $1-y<$ $<x<y-1$. **39.** Trebue să avem $(x-y)(x+y)>0$, $y=3-2x$ ∴ $(x-1)(3-x)>0$ ∴ $1<x<3$, $-1<y<3$. **40.** Primul membru se poate scrie $(x-1)^2+(y-1)^2+h-2$, deci trebue să avem $h>2$. **41.** Generalizarea chestiunei precedente, trebue să avem $h>\Sigma a_i^2$ **42.** Primul membru se poate scrie $(x-y-2)^2+(y+1)^2+h-5$, trebue să avem $h>5$ **43.** Primul membru se poate pune sub forma: $\frac{1}{a}(ax+by+d)^2+\frac{ac-b^2}{a}\left(y+\frac{ae-bd}{ac-b^2}\right)^2+f-\frac{d(cd-be)+e(ae-bd)}{ac-b^2}$ trebue să avem $a>0$, $ac-b^2>0$, $f(ac-b^2)-d(cd-be)-e(ae-bd)>0$. **44.** Se poate scrie: $(x-2y+z-3)^2+\left(2y+\frac{1}{2}z-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{3}{4}\left(z-\frac{3}{2}\right)^2+h-3^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2-\frac{3}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^2$, trebue $h>\frac{45}{4}$. **45.** Trebue să avem: $1-e<a-1<1+e$ şi $1-e<\frac{1}{a-1}<1+e$; distingem: $0<e<1$ găsim $\frac{2+e}{1+e}<a<2+e$, $1<e<2$ acelaş rezultat, $e>2$ găsim $2-e<a<\frac{e-2}{e-1}$. (G. M. XII).

IX. 1. 8 şi 9. **2.** Ecuaţia problemei $x+10=\frac{1}{5}(140-x)$ *** $x=15$, $140-x=125$. **3.** Ecuaţia problemei $600\times0,75+0,9x=(600+x)0,82$ *** $x=525$ gr. **4.** Ecuaţiile problemei $0,02x+0,06y=1600$; $0,02\frac{1}{2}x+0,06\left(\frac{1}{2}x+y\right)=2000$ *** $x=20000$, averea este de 40000 lei **5.** Ecuaţia problemei $x-\frac{9}{6}\times\frac{3}{7}x=\frac{3}{7}\times60$ *** $x=72$ sărituri de ale ogarului în care timp vulpea a mai făcut 108 sărituri. **6.** x, fiind numărul persoanelor şi y suma de împărţit, ecuaţiile problemei sunt: $\frac{y}{x+3}=\frac{y}{x}-1$, $\frac{y}{x-2}=\frac{y}{x}+1$ *** $x=12$, lei. **7.** Ecuaţiile problemei: $\frac{y}{x+m}=\frac{y}{x}-p$, $\frac{y}{x-n}=\frac{y}{x}+q$ *** $x=\frac{mn(p+q)}{mq-np}$, $y=\frac{mnpq(m+n)(p+q)}{(mq-np)^2}$; pentru ca problema să fie posibilă trebue $mq-np>0$ şi $mn(p+q)$ divizibil cu $mq-np$; valoarea lui y este întotdeauna admisibilă. **8.** x, y, z reprezentând greutăţile celor trei aliage, ecuaţiile problemei sunt: $2(0{,}65x+0{,}70y+0{,}75z)=5(0{,}35x+0{,}30y)$; $0{,}65x+0{,}70y+0{,}75z+3=0{,}35x+0{,}30y+0{,}25z+6$: $\frac{0{,}65x+0{,}75z}{0{,}35x+0{,}25z}=\frac{0{,}70}{0{,}30}$; ultima ecuaţie dă $x=z$, apoi se găseşte $x=z=600$ gr., $y=6{,}300$ kg. **9.** Celui dintâi i s'au luat 88 lei, iar celui de al doilea 44 lei. **10.** Numărul dat poate fi scris: $10^5+x10^4+y10^3+z10^2+t10+u=\frac{1}{3}(x10^5+y10^4+z10^3+t10^2+u10+1)$ cele două numere trebuind să aibă acelaşi număr de unimi deducem că $3u=M\,10+1$, cum $3u<30$ rezultă $u=7$; apoi $3t+2=M\,10+7$, $t=5$ etc., numărul este 142856. **11.** 2 cireşi, 12 meri, câte 36 peri, piersici şi pruni. **12.** 6 pari şi 8 sau 9 vrăbii (G. M. IX). **13.** A înaintează pe oră cu 1. m. 36 sec., B rămâne îndărăt cu 4 m. pe oră (G. M. III). **14.** A 500, B 700, C. 800 (G. M. IV). **15.** 600 lei cu 4%, 100 lei cu 6% (G. M. V). **16.** $MN=3a-b$, $v=2(2a-b):c$ $v'=2a:c$. (G. M. VI). **17.** Fie t timpul întrebuinţat de câine, ca să meargă dela stăpânul său A până la călătorul B; în acest timp călătorul B a mai parcurs distanţa $v't$ astfel că drumul parcurs de câine este $d+v't=Vt$, deci $t=d:(V-v')$ (1); în mersul înapoi câinile are de parcurs, în timpul t' d. ex. drumul $d+v't-v(t+t')$ deci $t'=d(V-v):(V-v')(V+v)$ (2) *Discuţie.* I. $v>v'$, *a)* $V>v$, formulele (1) şi (2) rezolvă problema aşa cum a fost pusă. *b)* $v>V>v'$, formula (1) ne dă pentru v o valoare pozitivă care reprezintă timpul întrebuinţat de câine ca să ajungă pe călătorul B; iar formula (2) ne dă pentru t o valoare negativă, aceasta luată pozitiv verifică ecuaţia $-t'V=d+v't-v(t-t')$ sau $tv=d+v't+t'(V+v)$, care corespunde problemei când s'ar cere să se găsească timpul ce l'ar pune stăpânul câinelui să îl ajungă pe acesta, când câinele ajunsese pe călătorul B; cu alte cuvinte ar fi problema în care s'ar prespune că în loc să alerge câinele după stăpân, acesta se întoarce după câine. *c)* $V<v'$, în acest caz $t<0$ şi $t'<0$, ceea ce înseamnă că niciodată câinele nu va ajunge pe călătorul B, valorie lui t şi t' luate pozitiv verifică ecuaţiile $d-v't=-Vt$,

$-Vt'=d-v't+v(t+t')$ sau $v't=d+Vt, v't+d+Vt'+v(t+t')$ care corespunde la cazul când s'ar căuta timpul de când câinele întâlnise cei doi călători, actualmente ei găsindu-se în poziţiile depărtate cu distanţa d şi câinele aflându-se la stăpânul său. II) $v<v'$ *a)* $V>v'$ aceiaşi concluzie ca la *a* *b)* $v<V<v'$, t luat pozitiv reprezintă timpul ce a trecut de când călătorul a întâlnit câinele, etc. **18.** Fie A şi B cele două mobile, să presupunem mai întâi că mişcarea se face dela A spre B şi că viteza v a lui A, este mai mare ca viteza v' a lui B, prima întâlnire va avea loc după timpul $t_1=\frac{d}{v-v'}$, a doua după timpul $t_2=\frac{l+d}{v-v'}, \dots$ a $n^{\text{-a}}$ după timpul $t_n=\frac{d+(n-1)l}{v-v'}$ (1). Să presupunem din contră că mişcarea se face dela B spre A şi că $v'>v$, a $n^{\text{-a}}$ întâlnire va avea loc după timpul $t'_n=\frac{d+(n-1)l}{v-v'}$ (2). Dacă în primul caz $v<v'$, iar în cel de al doilea $v'<v$, este suficient ca în formulele precedente să înlocuim pe d prin $l-d$ şi să schimbăm semnul numitorului. Să presupunem acum că mobilele merg în acelaş sens, de exemplu, ambele pe arcul d, a n^a întâlnirea va avea loc după timpul $\frac{d+(n-1)l}{v+v'}$ (3); iar pentru cazul când ar merge pe arcul din afară este suficient a înlocui pe d prin $l-d$. Să presupunem că mobilul A pleacă cu θ secundă înaintea lui B, întâlnirea a n^a va avea loc după timpul $\frac{d+(n-1)l-v\theta}{v-v'}$ sau $\frac{d+(n-1)l-v\theta}{v+v'}$ (4) sau acela ce s'ar deduce schimbând pe d în $l-d$. Dacă mobilul A pleacă cu θ secunde în urma mobilului B, a n^a întâlnirea are loc după timpul (5) $\frac{d+(n-1)l+v'\theta}{v-v'}$ sau $\frac{d+(n-1)l+v'\theta}{v+v'}$. Formulele (4) şi (5) sunt cuprinse în formula unică (6) $\frac{d+(n-1)l-v\theta}{v-v'}$ cu condiţiunea de a considera

ca pozitivă viteza când mobilul merge dela A spre B şi negativă în sensul contrariu, iar timpul să-l socotim totdeauna din momentul pornirii mobilului din A, pozitiv posterior acestei date şi negativ anterior. Formula (6) cuprinde de asemenea şi formulele (1), (2) şi (3) ele corespunzând la $\theta=0$. **19.** x reprezentând averea de împărţit, părţile primilor 2 copii sunt: $a+\frac{x-a}{n}$ şi $2a+\frac{1}{n}\left[x-a-\frac{x-a}{n}-2a\right]=$ $=2a+\frac{(n-1)(x-a)-2na}{n^2}$, aceste părţi fiind egale vom avea $a+\frac{x-a}{n}=2a+\frac{(n-1)x-(3n-1)a}{n^2}$ $*_*^*$ $x=(n-1)^2 a$ partea unui copil, partea primului copil fiind $a+\frac{(n-1)^2a-a}{n}$ $=a(n-1)$ rezultă că numărul copiilor este $n-1$. Se va arăta că şi părţile celorlalţi copii sunt aceleaşi. **20.** Să considerăm jucătorul care a pierdut partida de rangul i, fie x_i suma pe care a avut-o la începutul jocului; după prima partidă el are $2x_i$, după a doua $4x_i$.... după acea de rangul $i-1$ $2^{i-1}x_i$. Suma totală ce se află în joc fiind na, rezultă că după partida de rangul $i-1$ se află la ceilalţi jucători $na-2^{i-1}x_i$, el pierzând partida de rangul i, rezultă că a trebuit să plătească suma de mai sus şi i-a mai rămas $2^{i-1}x_i-na+2^{i-1}x_i=2^i x_i-na$; după partida următoare el are $2^{i+1}x_i-2na$ etc., după ultima partidă el are $2^n x_i-2^{n-i}na=a$ $*_*^*$ $x_i=\frac{(1+2^{n-i}n)a}{2^n}$, făcând pe $i=1, 2\ldots n$ găsim capitalurile iniţiale ale jucătorilor: $\frac{(1+2^{n-1}n)a}{2}, \frac{(1+2^{n-2}n)a}{2^2}\ldots\frac{1+a}{2^n}a$. **21.** Să evaluăm timpul întrebuinţat de cele două automobile până în momentul întâlnirii, x reprezentând lungimea drumului, automobilul T a parcurs $\frac{2}{3}x$ cu iuţeala v' întrebuinţând timpul $\frac{2}{3}x:v'$, apoi $\frac{1}{3}x-a$ cu iuţeala $\frac{1}{2}v'$ întrebuinţând timpul $2(x-3a):3v'$; timpul total trebue să fie egal cu întârzierea între cele două automobile, plus timpul întrebuinţat de automobilul T pentru a parcurge distanţa $x-a$; se găseşte astfel că ecuaţia problemei este $\frac{2x}{3v'}+\frac{2(x-3a)}{3v'}=\frac{x}{v'}-\frac{x}{v}+\frac{x-a}{v}$ ∗∗∗ $x=6a-3a\frac{v'}{v}$. **22**, x reprezentând distanţa punctului P la centrul cercului, găsim $x=(2m-1)R$ ca soluţia să fie admisibilă trebue $x>R$ ∗∗∗ $m>1$. **23.** Aceastǎ împărţire are loc la fiecare rotaţie a secundarului, afară de cea dintâi: pentru a n^n oară acul secundelor a parcurs de n ori cadranul plus o fracţiune. Fie A origina arcelor, la XII, M, S, O extremităţile minutarului, secundarului şi orarului, x numărul de secunde căutat; trebue să avem $OS:MS=k$, sau, socotind arcele dela originea A, avem $(AS-AO):(AM-AS)=k$ ∗∗∗ $AO+kAM=(k+1)AS$, însă $AO=\frac{x}{12\times 3600}$, $AM=\frac{x}{3600}$, $AS=\frac{x}{60}-n$, substituind găsim $x=\frac{12\times 3600(k+1)n}{708k+719}$. **24.** Ecuaţiile problemei sunt: $\frac{ax}{\alpha}=\frac{by}{\beta}=\frac{cz}{\gamma}$, $ax+by+cz=2S$ ∗∗∗ $x=\frac{2\alpha S}{a(\alpha+\beta+\gamma)}$ etc. **25.** $x=\frac{2R}{\alpha^3}, y=\frac{2R}{\beta^3}, z=\frac{2R}{\gamma^3}, R=\frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}+\frac{1}{\gamma^3}\right)\left(\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}+\frac{1}{\gamma^3}\right)\cdots}}$

26. $x=\frac{2\alpha^4\beta\gamma\delta}{R}, y=\frac{2\alpha\beta^4\gamma\delta}{R}, z=\frac{2\alpha\beta\gamma^4\delta}{R}$, $R^2=(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)\times$ $\times(\alpha^3+\beta^3-\gamma^3)\ldots$ (G.M.V). **27.** Fie $AM=x$, $CN=y$, $AB=c$; ecuaţiile problemei sunt: $\frac{x+c-y}{y+c-x}=\frac{a}{b}$, $\frac{x}{p}=\frac{y}{q}$ ∗∗∗ $x=\frac{p}{p-q}\times$ $\times\frac{a-b}{a+b}c$, $y=\frac{q}{p-q}\,\frac{a-b}{a+b}c$. Ca valorile găsite să convină problemei, astfel cum a fost pusă, trebue să avem: $c>x>0$, $0<y<c$, care dau $(a-b)(p-q)>0$ şi $q(a+b)<2pb$, $p(a+b)>2qa$. Să presupunem $a>b$, trebue şi $p>q$, $\frac{p}{q}>\frac{2a}{a+b}$ şi $\frac{p}{q}>\frac{a+b}{2b}$ ultima inegalitate atrage pe cea

dintâi (IX, 2); fie $a) \frac{p}{q} > \frac{a+b}{2b}$, o soluţie determinată, avem două trapeze în care s'a descompus patratul şi al căror raport este $a:b$; $b) \frac{a+b}{2b} > \frac{p}{q} > \frac{2a}{a+b}$, latura MN întâlneşte pe BC în R între B şi C, soluţia găsită convine chestiunei cu condiţiunea de a considera suprafaţa triunghiului BMR ca negativă; $c) \frac{p}{q} < \frac{2a}{a+b}$ avem $x > c$, $y > c$, MN întâlneşte pe BC şi DA în R şi S, soluţia convine dacă vom considera suprafeţele BMR şi DNS ca negative; $d) \frac{p}{q} = 1$, $x = \infty$, $y = \infty$, dreapta MN tinde a deveni paralelă cu AB şi CD; $e) \frac{p}{q} < 1$, $x < 0$, $y < 0$, MN tae pe BC şi DA respectiv în R şi S, soluţia convine cu condiţia considerării suprafeţelor triunghiurilor CNR şi ANS ca negative; $f) \frac{p}{q} = 0$, $x = 0$, $y = -\frac{a-b}{a+b}c$, dreapta MN devine AN, fiind la dreapta lui C $g) \frac{p}{q} < 0$, $x > 0$, $y < 0$, M se găseşte la dreapta lui A şi N la dreapta lui C etc. Toate aceste cazuri se pot cuprinde într'unul singur, cu condiţia de a considera ca positive valorile lui x la dreapta lui A şi ale lui y la stânga lui C, şi negative cele de sensuri contrarii; de asemenea dacă se vor considera ca pozitive suprafeţele din interiorul patratului şi negative cele din afară, iar raportul $\frac{p}{q}$ ca pozitiv când P este între A şi C, negativ în afară. **28.** Dacă l este latura dată, cealaltă latură este $\frac{2R(l-R)}{l-2R}$, iar ipotenusa $\frac{2R^2-2Rl+l^2}{l-2R}$; pentru ca soluţiile găsite să fie admisibite trebue $l > 2R$.
29. Viteza primului tren este de 30 km. pe oră, iar a celui de al doilea 60 km. pe oră; AB = 72 km., BC = 120 km.
30. R fiind raza secţiunei determinată de primul plan, a

apotema corespunzătoare, x apotema corespunzătoare celei de a doua secţiuni, ecuaţia problemei este $\frac{a(a^2-x^2)}{R(a^2+x^2)}=\frac{m}{n}$ sau $\frac{a(x^2-a^2)}{R(x^2+a^2)}=\frac{m}{n}$; problema admite două soluţii când $\frac{m}{n}<\frac{R}{a}$, nici una când $\frac{m}{n}>\frac{R}{a}$, o infinitate de soluţii când $\frac{m}{n}=\frac{R}{a}$, în acest caz planul de al doilea tae cea de a doua pânză a conului. **31.** Fie V_t volumul balonului la t^0, P greutatea mercurului la această temperatură, d densitatea sa la 0^0, α şi α' coeficienţii de dilataţie cubică ai mercurului şi sticlei; avem $V_0=\frac{P}{d}\cdot\frac{1+\alpha t}{1+\alpha' t}$, $V_T=V_0(1+\alpha T)$; la T^0, volumul mercurului este $\frac{P}{d}(1+\alpha T)$; se găseşte $p=$ $=\frac{(\alpha-\alpha')(T-t)}{(1+\alpha T)(1+\alpha' t)}$, care dă pe T. **32.** $V=\frac{PP''-P'^2}{d'(P-P')-d(P'-P''}$ $v=\frac{P-Vd'}{d-d'}$, $v'=\frac{Vd-P}{d-d'}$, $v''=\frac{PP''-P'^2}{Pd'-P'd}$ (G. M. IV).

33. Se va stabili mai întâi că dacă se ia un punct în plan suma algebrică a produselor distanţelor acestui punct la laturile unui poligon, prin latura corespunzătoare, este constantă şi egală cu îndoitul suprafeţei poligonului, se găseşte apoi: $ax+by+cz+\ldots=2\sqrt{S}\,(\sqrt{S}\pm\sqrt{S'})$. **34.** Avem $\frac{p-a}{p}=\frac{l}{a}\ldots 2p$ reprezentând perimetrul, deducem $\frac{l}{a}+\frac{m}{b}+$ $+\frac{n}{c}=1$ (1), apoi $am+bl=4Rr=\frac{abc}{p}\ldots$; se va rezolva în raport cu a, b, c şi substitui în (1), de unde se va găsi $4Rr$; rezultatul final este $a=\frac{l(2\Sigma mn-\Sigma l^2)}{(n+l-m)(l+m-n)}\ldots$

35. $x=\frac{Rrr'}{R^2-rr'}$, unde $AC=2r$, $BC=2r'$.

X. **1.** Insemnând cu m valoarea fracţiunei date, trebue să avem, ori care ar fi x, $(a - ma')x + (b - mb') = 0$, deci $a - ma' = 0$, $b - mb' = 0$, $\therefore \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$. **2.** $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$. **3.** $\frac{a_1}{a'_1} = \frac{a_2}{a'_2} = \ldots = \frac{a_n}{a'_n} = \frac{b}{b'}$. **4.** $\alpha = 3$, $\beta = 2$. **5.** $l^2 + m^2 + n^2 + 2lmn = 1$. **6.** Sistemul este nedeterminat, prima ecuaţie este o consecinţă a ultimelor două. **7.** Adunând primele două ecuaţii avem $9x - 2y - 7z = 31$, care este incompatibilă cu cea din urmă ecuaţie. **8.** $a \neq b$ sau $a \neq -b$ soluţiuni determinate, $a = b$ sistemul este incompatibil sau nedeterminat după cum $c \neq d$ sau $c = d$; $a = -b$ sistemul este incompatibil sau nedeterminat, după cum $c \neq d$ sau $c = -d$. **9.** Deducând din două ecuaţii valorile lui x şi y şi substituind în cea de a treia, se găseşte că această ecuaţie va fi verificată, oricare ar fi z, dacă avem factorul comun independent de z,

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = \frac{1}{2}(a-b)^2 + \frac{1}{2}(b-c)^2 + \frac{1}{2}(c-a)^2 = 0$$

$\therefore a = b = c$. **10.** Fie x, y, z timpurile ce ar trebui fiecărui lucrător să termine lucrarea, dacă ar lucra singur, rezultă că în unitatea de timp fiecare ar produce $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$ din întreaga lucrarare; A şi B lucrând împreună în unitatea de timp produc $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, lucrarea putându-se termina atunci în timpul $\frac{z}{\gamma}$, rezultă că vom avea $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\frac{z}{\gamma} = 1$ sau $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{\gamma}{z} = 0$, în mod analog $\frac{1}{x} - \frac{\beta}{y} + \frac{1}{z} = 0$, $-\frac{\alpha}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \therefore \alpha\beta\gamma - \alpha - \beta - \gamma = 2$. **11.** Făcând produsul celor trei relaţii şi observând că $x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2$, etc., avem: $a^2 + b^2 + c^2 - abc = 4$. **12.** Produsul lor dă: $\frac{x^3 + y^3}{x^3 - y^3} = ab$. Aplicând proprietăţile rapoartelor egale, avem: $\frac{y}{x} = \frac{a-1}{a+1}$,

$\frac{y^3}{x^3}=\frac{ab-1}{ab+1}$, etc... (G. M. XXXII, p. 396). **13.** Se vor pune sub forma $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=2a$... şi procedând ca în exerciţiul 11, avem: $a^2+b^2+c^2-2abc=1$. **14.** Punem $x+y+z=s$, scoatem $x=as:(a+1)$; deci $\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}=1$.

15. Avem $\frac{y+x}{(x+y)(x+z)}-\frac{x+z}{(x+y)(x+z)}=\frac{1}{a}$, sau $\frac{1}{x+z}-\frac{1}{x+y}=\frac{1}{a}$ şi alte 2 relaţii analoage. Adunându-le avem $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$. (G. M. XXXII, pag. 396). **16.** Ca la 14 punem $ax+by+cz+dt=s$, şi scoatem $x=s:(a+1)$... prin adunare deducem: $\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}+\frac{d}{d+1}=1$.

17. Generalizarea chestiei precedente; rezultatul e $\sum\frac{a_i}{a_i+1}=1$.

18. $t=x$. **19.** Din egalităţile date eliminând pe y, deducem mai întâi: $\frac{(a-b)x}{1+a^2}+\frac{(c-b)z}{1+c^2}=0$, şi analog altele prin permutări circulare, de unde se poate deduce prima egalitate scăzând două din relaţiile obţinute, iar a doua egalitate, din adunarea acestor relaţii. **20.** Din egalităţile $ab+a'b'+a''b''=0$ şi $ac+a'c'+a''c''=0$, deducem $\frac{a}{b'c''-c'b''}=\frac{a'}{cb''-bc''}=$ $=\frac{a''}{bc'-cb'}=k$, aplicând proprietăţile rapoartelor şi identitatea lui *Lagrange*, avem:

$$k=\frac{\sqrt{a^2+a'^2+a''^2}}{\sqrt{(b^2+b'^2+b''^2)(c^2+c'^2+c''^2)-(bc+b'c'+b''c'')^2}};$$

sau în baza relaţiilor date, $k=\pm 1$, deci: $a=\pm(b'c''-c'b'')$, $a'=\pm(cb''-bc'')$, $a''=\pm(bc'-cb')$; în mod analog din relaţiile $ab+a'b'+a''b''=0$ şi $bc+b'c'+b''c''=0$, deducem $b=\pm(c'a''-a'c'')$, $b'=\pm(ac''-ca'')$, $b''=\pm(ac'-ca')$; în fine din $ac+a'c'+a''c''=0$ şi $bc+b'c'+b''c''=0$ deducem

$c = \pm(a'b'' - b'a'')$, $c' = \pm(ba'' - ab'')$, $c'' = \pm(ba' - ab')$. Considerând primele din fiecare din relaţiile găsite mai sus, multiplicându-le respectiv cu a', b', c' şi făcând suma, găsim $aa' + bb' + cc' = 0$; relaţiile de rândul al doilea multiplicate respectiv cu a'', b'', c'' ne dau $aa'' + bb'' + cc'' = 0$ etc. Din relaţiile $a = \pm(b'c'' - c'b'')$, $b = \pm(c'a'' - a'c'')$, $c = \pm(a'b'' - b'a'')$ $\therefore a^2 + b^2 + c^2 = (a'^2 + b'^2 + c'^2)(a''^2 + b''^2 + c''^2)$... se deduce $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ etc. **21.** Ne folosim de relaţiile precedente. Avem $a^2 a'^2 + b^2 b'^2 - c^2 c'^2 = a^2 b^2 + a'^2 b'^2 - a''^2 b''^2$, şi $a''^2 + b''^2 - c''^2 = c^2 + c'^2 - c''^2$, deci $(a''^2 + b''^2 - c''^2).(a^2 a'^2 + b^2 b'^2 - c^2 c'^2) = (c^2 + c'^2 - c''^2)(a^2 b^2 + a'^2 b'^2 - a''^2 b''^2)$. Considerăm încă cele două relaţii analoage deduse din aceasta prin permutarea literilor şi indiciilor, adunând apoi parte cu parte şi efectuând înmulţirile ajungem la $a^2 a'^2 a''^2 + b^2 b'^2 b''^2 + c^2 c'^2 c''^2 - a'b'a''b''c^2 - aba''b''c'^2 = a^2b^2c^2 + a'^2b'^2c'^2 + a''^2b''^2c''^2 - aca'c'b''^2 - bcb'c'a''^2$. Termenii negativi se reduc şi rămâne identitatea cerută. **22.** Trebuie să avem $a^2 + 2bc \neq 0$, $b^2 + 2ac = 0$, $c^2 + 2ab = 0$, care dau: $a = 1$, $b = -2\lambda$, $c = -2\lambda^2$, $\lambda^3 = 1$ sau $b = c = 0$, $a \neq 0$. (G. M. VII). **23.** $a' = -(a^2 - 1):b$, $b' = -a$, $c' = -c(a+1):b$. **24.** Se vor determina x si y din ecuaţiile $ap^n + bq^n = x(ap^{n-1} + bq^{n-1}) + y(ap^{n-2} + bq^{n-2})$ şi $ap^{n+1} + bq^{n+1} = x(ap^n + bq^n) + y(ap^{n-1} + bq^{n-1})$ $\therefore x = p + q$, $y = -pq$, care verifică relaţiile de forma precedentă ori care ar fi n. **25.** $x = p + q + r$, $y = -(pq + pr + qr)$, $z = pqr$. **26.** Se va scrie prin analogie cu exemplele precedente $x_1 = \Sigma p_i$, $x_2 = -\Sigma p_i p_k$, $x_3 = \Sigma p_i p_k p_l$.., $x_h = \pm p_1 p_2 \ldots p_h$ şi se va verifica în urmă. **27.** Dreapta care trece prin A, situat pe Ox' la distanţa $-\frac{3}{2}$ de origină, şi prin punctul B situat pe Oy la distanţa 3 de origină. Segmentul AB are abscisele cuprinse între $-\frac{3}{2}$ şi 0; cea de a doua porţiune este determinată prin intersecţiunile cu drepte paralele cu Ox duse la distanţele 10 şi 20. **28.** Dreapta care taie axele coordonate la distanţele 1 şi 1; distanţa acestei drepte la origină este $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. **29.** Dreapta care taie pe Ox la distanţa 2 de origină şi pe Oy la distanţa -3. Segmentul de dreaptă cuprins în interiorul cercului descris din origină cu raza 2. **30.** Dreptele se mişcă paralel cu ele însele. **31.** Punctul de intersecţie descrie dreapta $8x-5y=0$. **32.** Dacă $m>1$ trebue $\alpha>0$, iar dacă $m<1$, $\alpha<0$. **33.** $y=0$, $2y+2\sqrt{3}.x-\sqrt{3}=0$ şi $2y-2\sqrt{3}.x-\sqrt{3}=0$. **34.** Patrulaterul e un dreptunghiu a cărui arie este $\frac{1}{2}\alpha^2$.

XI. 1. 2 şi -5. **2.** 1 şi -5. **3.** 0 şi $\frac{-15\pm\sqrt{-55}}{4}$. **4.** $-\frac{1}{2}$ de două ori. **5.** 0 şi $-\frac{2}{3}$; ecuaţia este de asemenea verificată când x creşte nemărginit. **6.** $\frac{a+b}{a-b}$ şi $\frac{a-b}{a+b}$. **7.** $a+b$ şi $\frac{a^2+b^2}{a+b}$. **8.** $\frac{a^2+b^2+2c^2}{a+b}$ şi $\frac{a^2+2b^2+c^2}{a+c}$. **9.** $-a$ şi $-b$. **10.** $\frac{a+b+c\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc}}{3}$, cantitatea de sub radical se poate pune sub forma unei sume de trei patrate, deci rădăcinile sunt totdeauna reale. **11.** Aceleaşi rădăcini ca şi la ecuaţia precedentă, în plus rădăcina 0. **12.** $a\pm b$. **13.** Se face împărţirea în prima parte şi se pune apoi $(b-x)$ în factor. Se găseşte rădăcinile a, b şi $\frac{a+b}{2}$. **14.** Se vor grupa primii doi termeni între ei şi ultimii doi, numărătorii sunt $2x+a+b$ pe care punându-l în factor obţinem ecuaţia $x^2+2(a+b)x+ab+ac+bc-c^2=0$; rădăcinile sunt: $-\frac{1}{2}(a+b)$ şi $-(a+b)\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2+ab-ac-bc}$. **15.** Pentru $y=1{,}2$ rădăcinile sunt 7,102 şi 1,280: iar pentru $x=1{,}6$ rădăcinele sunt 1,083, $-$ 0,744 **16.** Făcută raţională revine la exerciţiul 10. **17.** Se va rezolva în raport cu $\sqrt[3]{\frac{x-2}{x-3}}$, se găseşte $\sqrt[3]{\frac{x-2}{x-3}}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$, apoi $x=\frac{5}{2}$ care nu convine. Asemenea ridicând ambele părţi la cub şi ţinând seama de ecuaţia dată, avem : $(2x-5)^2=0$. **18.** Se va rezolva în raport cu $\sqrt[m]{\frac{1+x}{1-x}}$, se găseşte $\sqrt[m]{\frac{1+x}{1-x}}=$ $=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, apoi $x=\frac{(1\pm\sqrt{5})^m-2^m}{(1\pm\sqrt{5})^m+2^m}$. **19.** Ecuaţia admite rădăcinile $-a$, $-b$ apoi rădăcinile ecuaţiei $x^2+(a+b)x+a^2+$ $+ab+b^2=0$. (G. M. I.). **20.** Se va lua ca necunoscută $x+q:x=y$. Se găseşte $y=\frac{p(\alpha-\beta)\pm\sqrt{-4\alpha\beta p^2+\alpha+\beta}}{\alpha+\beta}$, şi $x=\frac{1}{2}(y\pm\sqrt{y^2-4q})$. **21.** Se va pune $x(x-3a)=y$, ecuaţia în y este $y^2+2a^2y-A=0$ $\therefore$ $x=\frac{3a\pm\sqrt{5a^2\pm4\sqrt{a^2+A}}}{2}$ (G. M. XVII). **22.** Punând $u=\sqrt[3]{x(a-x)^2}$ şi $v=\sqrt[3]{x^2(a-x)}$ avem $u+v=a$, $uv=x(a-x)$ $\therefore$ $u=x$ sau $a-x$, rădăcinele sunt $\frac{1}{2}a$. **23.** Procedeu analog, rădăcinele sunt: $\frac{1}{2}a$ şi $\frac{1}{2}a(1\pm\sqrt{-3})$. G, M. XVII), **24.** Procedeu analog, rădăcinile sunt: $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}a(1\pm\sqrt{-3})$ şi $\frac{1}{2}a(1+i)$. (G. M. XVII). **25.** Se va pune $\sqrt{x^2+5}=y$, se găseşte $y=0$ şi $y=\frac{8}{3}$, soluţia $y=0$ nu convine, ea verifică ecuaţia când se ia cel de al doilea radical cu $+$; soluţia $y=\frac{8}{3}$ dă $x=\pm\frac{1}{9}\sqrt{19}$. **26.** -3, $+5$ şi -9; soluţia $x=-9$ nu convine, (G. M. IV). **27.** Se va pune: $\sqrt{x^2+2x+8}=y$ de unde $y^2+y-20=0$, care dă $y_1=-5$, $y_2=4$, apoi $x_1=2$, $x_2=-4$, $x_3=-1+\sqrt{18}$, $x_4=-1-\sqrt{18}$. Numai prima verifică ecuaţia propusă. **28.** $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. **29.** Prima parte este divizibilă cu $(x-1)+$

$+(2x+3)=3x+2$, care divide şi partea a doua; dând factor comun avem din paranteză o ecuaţie de gradul al doilea. Rădăcinile sunt: $-\frac{2}{3}$, 3 şi $-\frac{1}{2}$. **30.** In ecuaţia făcută raţională se va pune $\frac{x^2+a^2}{ax}=y$. Găsim: $y^2-2y-1=0$. deci: $y=1\pm\sqrt{2}$, iar $x=\frac{a}{2}(y\pm\sqrt{y^2-4})$. **31.** Avem identitatea $(\alpha+\beta)^4=\alpha^4+\beta^4+4\alpha\beta(\alpha+\beta)^2-2\alpha^2\beta^2$, aplicând-o în cazul de faţă vom avea: $a-x+x-b+4\sqrt[4]{(a-x)(x-b)}\times$ $\times\sqrt{c}-2\sqrt{(a-x)(x-b)}=c$; punând $\sqrt[4]{(a-x)(x-b)}=z$ avem $2z^2-4\sqrt{c}.z+c-a+b=0$ etc. **32.** Observăm că $\frac{x^2}{2}+$ $+\frac{48}{x^2}=3\left[\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right]^2+8$ Avem rădăcinile: $6, -2$ şi $3\pm\sqrt{21}$.
33. Ecuaţia poate fi scrisă: $ax^2(x-1)^2+bx(x-1)+c=0$. Dacă punem $y=x(x-1)$, ecuaţia devine $ay^2+by+c=0$
34. Punând $x^4+10x^2=y$ ecuaţiunea devine:
$$\frac{(y+1)(5a^4+10a^2+1)}{(y+5)(a^4+10a^2+5)}=\frac{(y-1)(5a^4-10a^2+1)}{(y-5)(a^4-10a^2+5)}$$ sau încă:
$$10a^2(a^4-1)y^2-[5a^8+126a^4+5]y+50a^2(a^4-1)=0.$$
35. Ecuaţia poate fi scrisă subt forma: $(x^2-2ax-3a^2)(x^2-2ax-$ $-8a^2)=c^4$, deci punând: $x^2-2ax=y$, obţinem: $y=\frac{11a^2\pm\sqrt{4c^4+25a^4}}{2}$ iar $x=a\pm\sqrt{\frac{13a^2}{2}\pm\frac{\sqrt{4c^4+25a^4}}{2}}$. **36.** Ecuaţiunea poate fi scrisă: $\frac{x+\frac{ac}{x}+2a}{x+\frac{ac}{x}+2c}=\frac{a}{x+\frac{ac}{x}+a+c}$, deci punem $x+\frac{ac}{x}=y$.
37. Se va pune: $x+\frac{d}{x}=y$, ecuaţia în y este y^2+ $+ay+b-2d=0$. **38.** Simplificând avem de rezolvat ecuaţia reciprocă $(1-a)x^4+(1+a)x^3+$ $+(1-a)x^2+(1+a)x+(1-a)=0$, punând $x+\frac{1}{x}=y$,

ecuaţia în y este $(1-a)\,y^2+(1+a)\,y-(1-a)=0$ etc. **39.** Acelaş procedeu ca la precedenta, se va pune $x^2+1:$ $:x^2=y$ etc. **40.** Observăm că ecuaţiunea în raport cu parametrul a este de gradul al doilea, deci dacă realizantul ei este pătrat perfect, ea se descompune într'un produs de doi factori raţionali. Se găseşte: $(x^2+2x-a)(x^2-2ax+1)=0$. (G. M. I.). **41.** Ordonând după puterile lui a, ecuaţiunea poate fi scrisă subt forma: $(x-1)[xa^2+(x^3-x-1)a-x(x+1)(x^2+$ $+x+1)]=0$, restul ca la 40. (G. M. I.). **42.** Se poate scrie $\left(\frac{x}{c}\right)^4-$

$$-\frac{(a^2+b^2)^2}{ab(a^2-b^2)}\cdot\left(\frac{x}{c}\right)^3+2\left(\frac{x}{c}\right)^2+\frac{(a^2+b^2)^2}{ab(a^2-b^2)}\cdot\left(\frac{x}{c}\right)+1=0;$$

se va pune: $\frac{x}{c}-\frac{c}{x}=y\quad\therefore\ y^2-\frac{(a^2+b^2)^2}{ab(a^2-b^2)}y+4=0$,

$y_1=\frac{a^2-b^2}{ab}$, $y_2=\frac{4ab}{a^2-b^2}$, iar valorile lui x sunt $\frac{ac}{b}$, $-\frac{bc}{a}$, $\frac{c(a+b)}{a-b}$ şi $-\frac{c(a-b)}{a+b}$. **43.** Să punem $a-x=y+z$, $x-b=$ $=y-z\quad\therefore\ y=\frac{1}{2}(a-b)$, $2z^4+12y^2z^2+2y^4=c^4$; apoi $x=-z+\frac{1}{2}(a+b)$. **44.** Procedeu analog; se găseşte:

$$x=\frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}\sqrt{2r-(a-b)^2},\text{ unde } r=\pm\sqrt{\frac{(a-b)^5+4c^5}{5(a-b)}}.$$

45. Fie $a-x=y+z$, $x-b=y-z$, $a+b=2m$, $a-b=2y=2n$ deducem că ecuaţia dată poate fi scrisă $\frac{(y+z)^4+(y-z)^4}{(y+z)^2+(y-z)^2}=$ $=\frac{(m+n)^4+(m-n)^4}{(m+n)^2+(m-n)^3}\ \ {}^{*}{}^{*}{}^{*}\ \ \frac{n^4+6n^2z^2+z^4}{n^2+z^2}=\frac{m^4+6m^2n^2+n^4}{m^2+n^2}$, sau $(m^2+n^2)\,z^4-(m^4-5n^4)\,z^2-m^2n^2(m^2+5n^2)=0$, care dă $z=\pm m$ şi $z=\pm ni\sqrt{\frac{m^2+5n^2}{m^2+n^2}}$ **46.** -1, $\frac{5}{4}$, $\frac{4}{5}$ şi $\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{5})$. **47.** Ecuaţia este reciprocă. **48.** Se va pune ecuaţiunea sub forma: $\frac{\left(x+\frac{1}{x}+1\right)^2}{\left(x+\frac{1}{x}+2\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)}=\frac{a}{b}$ ecuaţiune reciprocă.

$x=\dfrac{\sqrt{a+r}+\sqrt{a-3r}}{\sqrt{a+r}-\sqrt{a-3r}}$ în care $r=\sqrt{a^2-ab}$ **49.** Se va observa că dacă p^2-4r este un patrat perfect, el este patratul unui număr de aceiaşi paritate cu p. **50.** Punem $\sqrt[4]{x}=y$, avem $y+\sqrt[3]{y^4+343}=7$, sau trecând pe y în membrul II şi ridicând la cub, $y(y^3+y^2-21y+147)=0$. $y=0$ este o soluţie. Celelalte sunt date de al doilea factor, care se scrie y^3+7y^2- $-6y^2-42y+21y+147=0$, $y^2(y+7)-6y(y+7)+21(y+$ $+7)=0$, $(y+7)(y^2-6y+21)=0$. (G. M. XXXV. p. 72).

XII. 1. Rădăcinile sunt întotdeauna reale; pentru $-\infty<m<-1$, ambele rădăcini sunt negative; pentru $-1<$ $<m<0$, rădăcini de semne contrarii, cea mai mare în valoare absolută, negativă; $0<m<1$, rădăcini de semne contrarii, cea mare în valoare absolută pozitivă; $m>1$, ambele rădăcini sunt pozitive. **2.** *a)* $c=-1$ sau $c=\frac{1}{3}$; *b)* $c=1$; *c)* trebue $c^2-c+2=0$ care în numere reale nu se poate satisface; *d)* $c=\frac{1}{2}(a\pm\sqrt{-4a-3a^2})$, trebue $a(3a+4)<0$, $0>a>-\frac{4}{3}$ *e)* $c=1$ sau $c=-1$; *f)* $c=\dfrac{-2\pm 3\sqrt{2}}{7}$ **3.** *a)* 25 şi 9; *b)* 1; *c)* 15; *d)* 7. **4.** *a)* 7 şi -5; *b)* 1. **5.** *a)* $\dfrac{m+1\pm\sqrt{m^2-6m+1}}{m}$; *b)* $m=3\pm2\sqrt{2}$; *c)* $3-2\sqrt{3}<m<0$ sau $m>3+2\sqrt{3}$; *d)* $m>3+2\sqrt{3}<m<8$. **6.** α fiind rădăcina mică, a doua rădăcină este 3α scriind relaţiile între coeficienţi şi rădăcini, găsim $\alpha=\pm\dfrac{1}{3}$, iar $m=-1$; $+\dfrac{3}{4}$, $\dfrac{1\pm i\sqrt{47}}{8}$ (G. M. XXXVI, p. 197). **7.** $b=0$ sau $b=2$; $b<0$ sau $b>2$. **8.** Ca rădăcinile să fie reale, trebue $m<\dfrac{a^2+b^2}{2a}$; semnele rădăcinilor se pot schimba când m trece prin valorile 0, a şi $\pm b$, nu vom avea însă de considerat de cât valori mai mici ca $\dfrac{a^2+b^2}{2a}$; dacă $a>b$, $b<\dfrac{a^2+b^2}{2a}$, iar $a>\dfrac{a^2+b^2}{2a}$, deducem: $m<-b$ rădăcini de acelaş semn pozitive, $-b<m<0$ rădăcini de semne contrarii, cea mai mare în valoare absolută pozitivă; $0<m<b$ rădăcini de semne contrarii, cea mai mare în valoare absolută negativă, $b<m<\frac{a^2+b^2}{2a}$ rădăcini de acelaş semn ambele negative; dacă $a<b$, a şi b sunt ambii mai mici ca $\frac{a^2+b^2}{2a}$ deducem pentru intervalele $(-\infty, -b)$ şi $(-b, 0)$ aceleaşi concluzii ca mai sus, când $0<m<a$ rădăcini de semne contrarii, cea mai mare în valoare absolută negativă, $a<m<b$ rădăcini de semne contrarii cea mai mare în valoare absolută pozitivă, $b<m<\frac{a^2+b^2}{2a}$ ambele rădăcini pozitive. **9.** $x^2-(p^2-2q)x+q^2=0$; $qx^2+px+1=0$. **10.** *a)* $ax^2-bx+c=0$; *b)* $cx^2+bx+a=0$; *c)* $ax^2+(b-2am)x+$ $+am^2-bm+c=0$; *d)* $ax^2+bkx+k^2c=0$. Pentru formarea acestor ecuaţiuni se pot utiliza relaţiunile între rădăcini şi coeficienţi; sau încă se poate observa că dacă x reprezintă una din valorile care verifică ecuaţia dată şi y valoarea corespunzătoare a ecuaţiei ce voim să formăm, se va scrie relaţia între x şi y, care rezultă din enunţ, şi în urmă se va elimina x; astfel pentru prima parte a chestiunei avem $y=-x$, pentru cea de a doua $y=1:x$, în a treia $y=x+m$, în a patra $y=kx$; în ecuaţiile rezultate s'a scris apoi peste tot x în loc de y. **11.** $qx^2+p(q+1)x+(q+1)^2=0$. **12.** Fie $y^2+py+q=0$ ecuaţiunea ce trebuie formată. Avem $p=-2\frac{x'}{x''}=-2\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{-b-\sqrt{b^2-4ac}}=-\frac{(b-\sqrt{b^2-4ac})^2}{2ac}$;

$$q=\frac{(x'+x'')(x'-x'')(x'^2+x''^2)}{(x'x'')^2}=-\frac{b(b^2-2ac)\sqrt{b^2-4ac}}{a^2c^2}.$$

Natura rădăcinilor depinde de $p^2-4q=a^2c^2(b-\sqrt{b^2-4ac})^4+$ $+16a^2c^2b(b^2-2ac)\sqrt{b^2-4ac}=4a^2c^2\{[b^2-2ac-b\sqrt{b^2-4ac}]^2+$ $+4b(b^2-2ac)\sqrt{b^2-4ac}\}=4a^2c^2[b^2-2ac+b\sqrt{b^2-4ac}]^2$ Condiţiunea necesară şi suficientă pentruca ecuaţiunea în y să aibă rădăcini reale (afară de cazul $b=0$) este ca ecuaţiunea dată să aibă rădăcini reale. Procedeu analog când luăm $x' = -b - \sqrt{b^2 - 4ac}$. (G. M. XLII. p. 542).

13. x' şi x'' fiind rădăcinile ecuaţiei date, rădăcinile ecuaţiei pe care voim să o formăm, vor fi $\frac{2x'+1}{x'+2}$ şi $\frac{2x''+1}{x''+2}$, avem $\frac{2x'+1}{x'+2} + \frac{2x''+1}{x''+2} = \frac{4x'x''+5(x'+x'')+4}{x'x''+2(x'+x'')+4} = \frac{8+5+4}{2+2+4} = \frac{17}{8}$, $\frac{2x'+1}{x'+2} \cdot \frac{2x''+1}{x''+2} = \frac{4x'x''+2(x'+x'')+1}{x'x''+2(x'+x'')+4} = \frac{11}{8}$, ecuaţia coutată va fi $8x^2 - 17x + 11 = 0$. Se poate încă elimina x între ecuaţia dată şi $y = \frac{2x+1}{x+2}$ *** $x = \frac{2y-1}{2-y}$ substituind în ecuaţia dată, avem: $(2y-1)^2 - (2y-1)(2-y) + 2(y-2)^2 = 0$ sau $8y^2 - 17y + 11 = 0$; acelaş rezultat ca mai sus, cu deosebire că necunoscuta este notată cu y în loc de a fi notată cu x. **14.** Se vor utiliza relaţiunile între rădăcini şi coeficienţi, sau încă se va elimina x între ecuaţia dată şi $y = \frac{x^2}{x^2+1}$ *** $y^2 = \frac{-px-q}{-px-q+1}$ *** $x = \frac{(q-1)y-q}{p(1-y)}$ pe care întroducând-o în ecuaţia dată, găsim: $[(1-q)^2+p^2]y^2 + [2q(1-q) - p^2]y + q^2 = 0$. **15.** $X_1 + X_2 = (x'_1 + x''_1)(x'_2 + x''_2) = ap$; $X_1 X_2 = x'_1 x''_1 (x'^2_2 + x''^2_2) + x'_2 x''_2 (x'^2_1 + x''^2_1) = x'_1 x''_1 [(x'_2 + x''_2)^2 - 2x'_2 x''_2] + x'_2 x''_2 [(x'_1 + x''_1)^2 - 2x'_1 x''_1] = p^2 b + a^2 q - 4bq$. Ecuaţia cerută este $X^2 - apX + a^2q + p^2b - 4bq = 0$. (G. M. XLII p. 276).

16. Eliminând pe x între ecuaţia dată şi $y = \frac{x+x'}{x+x''}$, obţinem: $(ax''^2 - bx'' + c)y^2 + (bx' + bx'' - 2ax'x'' - 2c)y + (ax'^2 - bx' + c) = 0$; ca această ecuaţie să admită aceleaşi rădăcini ca şi ecuaţia dată, trebue ca coeficienţii lor să fie proporţionali, deci $\frac{ax''^2 - bx'' + c}{a} = \frac{b(x'+x'') - 2ax'x'' - 2c}{b} = \frac{ax'^2 - bx' + c}{c}$, ţinând seama de relaţiunile între rădăcini şi coeficienţi şi că x' şi x'' verifică ecuaţiile date, din relaţiile de mai sus deducem: $(a+c)(4ac+b^2)+2b^3=0$ şi $c(b^2-4ac)(3b^2+4ac)=0$, ecuaţiile care satisfac condiţia dată sunt: $x^2-2x-3=0$, $2x^2-x=0$, $3x^2+2x-1=0$, $x^2-2x+1=0$. (G. M. XVI). **17.** Avem $x'+x''=-b:a$, $x'x''=c:a$, ridicând prima relaţie la patrat, la cub, la puterea a 4-a, avem: $x'^2+x''^2+2x'x''=b^2:a^2$, $(x'+x'')^3=$ $=x'^3+x''^3+3x'x''(x'+x'')=-b^3:a^3$, $(x'+x'')^4=x'^4+$ $+x''^4+4x'x''(x'^2+x''^2)+6x'^2x''^2$; *** $x'^2+x''^2=$ $\dfrac{b^2-2ac}{a^2}$, $x'^3+x''^3=\dfrac{3abc-b^3}{a^3}$, $x'^4+x''^4=\dfrac{b^4-4ab^2c+2a^2c^2}{a^4}$.

Pentru cazul general fie $S_m=x'^m+x''^m$, avem identitatea: $x'^m+x''^m=(x'^{m-1}+x''^{m-1})(x'+x'')-x'x''(x'^{m-2}+x''^{m-2})$ sau $S_m=-\dfrac{b}{a}S_{m-1}-\dfrac{c}{a}S_{m-2}$, care ne permite a calcula suma puterilor de rangul m când cunoaştem suma puterilor de rangul $m-1$ şi $m-2$, s. ex, pentru $m=5$, avem $x'^5+x''^5=$ $=S_5=-\dfrac{b}{a}S_4-\dfrac{c}{a}S_3=-\dfrac{b}{a}\left(\dfrac{b^4-4ab^2c+2a^2c^2}{a^4}\right)-\dfrac{c}{a}\times$ $\left(\dfrac{3abc-b^3}{a^3}\right)=\dfrac{-b^5+5ab^3c-5a^2bc^2}{a^5}$. **18.** Se va considera în locul ecuaţiei date, ecuaţia $cx^2+bx+a=0$, ale cărei rădăcini sunt egale cu inversele rădăcinilor ecuaţiei date, şi chestiunea se reduce la precedenta. **19.** Ecuaţia cerută este $y^2-\dfrac{4q-p^2}{q}y+\dfrac{4q-p^2}{q}=0$. Dacă $p^2-4q<0$, rădăcinele y' şi y'' sunt imaginare. Dacă $p^2=4q$, rădăcinile sunt ambele egale cu zero. Dacă $p^2-4q>0$ şi $q>0$ una pozitivă şi cea mai mare în valoare absolută negativă, iar dacă şi $q<0$ ambele sunt pozitive. Pentru ca să avem $y'^2+py'+q=y''^2+py''+q$, trebue $p^2-4q=0$ sau $q(p+4)=p^2$, în acest caz dacă $p<-4$, ambele rădăcini sunt pozitive; dacă $-4<p<0$, sunt imaginare; $p>0$, una pozitivă şi cea mai mare în valoare absolută negativă. Dacă $p=0$, $y'=y''=+2$. **20.** Cantitatea de sub radical poate fi scrisă $(a^2+b^2-c^2-d^2)^2+4a^2c^2$. (G. M. III). **21.** Cantitatea de sub radical poate fi scrisă $\left(a-\dfrac{p}{2}\right)^2+3\left(\dfrac{p^2}{4}-q\right)$. **22.** Realizantul este: $b^2+4a\alpha\left[\frac{a}{\alpha+2}+\frac{b}{\alpha+1}\right]=\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}$ $[b^2(\alpha+1)(\alpha+2)+4a^2\alpha(\alpha+1)+4ab\alpha(\alpha+2)]=\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}$ $[\alpha^2(b+2a)^2+2ab(b+2a)+2b^2+\alpha(b+2a)^2]=\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}$ $\{[\alpha(b+2a)+b]^2+\alpha(b+2a)^2+b^2\}$. (G. M. XLII. pag. 143). **23.** Ib. $(a^2-b^2+cp-cq)^2+4a^2b^2$. **24.** Ib. $q^3-3q^2+7q-5=(q-1)[(q-1)^2+4]$, dacă prima ecuație are rădăcinele sale reale avem $q<1$, deci cea de a doua va avea rădăcinele imaginare; reciproca este evidentă. **25.** Primul membru se poate scrie $(x+1-a^2)^2+(x+1-b^2)^2+$ $+(x+1-c^2)^2=0$. **26.** După identitatea lui *Lagrange* cantitatea de sub radical se poate pune sub forma unei sume de 3 patrate având fiecare semnul —. In cazul general ecuația $(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)x^2+2(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)x+(b_1^2$ $+b_2^2+\ldots+b_n^2)=0$, are totdeauna rădăcinele imaginare, afară de cazul când $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}$; ne servim tot de identitatea lui *Lagrange* generalizată. **27.** Realizantul ecuațiunei este $b^2b'^2-4aca'c'$ și se poate scrie dacă $ac>0$ subt forma: $b'^2(b^2-4ac)+4ac(b'^2-4a'c')$, care este mai mare ca zero căci, $b^2-4ac>0$, $b'^2-4a'c'>0$. Același lucru când presupunem $a'c'>0$. **28.** Inegalitatea dată, înmulțită respectiv cu n și $4n'$ (presupunând n și n' pozitivi), se poate pune sub una din formele $(m^2-4n)(n-n')^2>[2m'n-m(n+n')]^2$ sau $(m'^2-4n')(n'-n)^2>[2mn'-m'(n+n')]^2$. Dacă n sau n' este negativ, rădăcinile ecuației corespunzătoare sunt reale. (G. M. IV). **29.** Se va examina numai cazul când și b'^2- $-4a'c'<0$; fie $b^2-4ac=-\alpha^2$, $b'^2-4a'c'=-\alpha'^2$, cantitatea de sub radical se poate scrie $(2ac'+2a'c-bb'+\alpha\alpha')$ $(2ac'+2a'c-bb'-\alpha\alpha')=\Delta$, însă $2a=\frac{b^2+\alpha^2}{2c}$, $2a'=\frac{b'^2+\alpha'^2}{2c}$

$$*_*^*\ \Delta=\frac{1}{4c^2c'^2}[(bc'-cb')^2+(\alpha c'+c\alpha')^2][(bc'-cb')^2+(\alpha c'-c\alpha'^2).$$

30. Ecuația dată se reduce la $(a+b+c)x^2+2(ab+ac+bc)$

$x+3abc=0$, cantitatea de sub radical se poate scrie: $\frac{1}{2}[a^2(b-c)^2+b^2(c-a)^2+c^2(a-b)^2]$. **31.** Punând $m=b\alpha$, $n=a\beta$, $p=abi$, $m'=bx$, $y'=ay$, $p'=abi$ și aplicând identitatea lui Lagrange găsim: $(b^2-\beta^2)(x-\alpha)^2+2\alpha\beta(y-\beta)(x-\alpha)+(a^2-\alpha^2)(y-\beta)^2=0$. Rezolvând în raport cu $(x-\alpha)$ cantitatea de sub radical este: $a^2b^2\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}-1\right)(y-\beta)^2$, deci pentru ca x să fie real trebue $y=\beta$ etc. (G.M.II). **32.** Scriind relațiile dintre coeficienți și rădăcini, numai pentru rădăcinile x'_i se obține $x'_1=\frac{p_1-p_2+p_3-...+p_{2n+1}}{2}$, $(x'_1)^2=\frac{q_1q_3q_5...q_{2n+1}}{q_2q_4q_6...q_{2n}}$, deci: $\frac{q_1q_3...q_{2n+1}}{q_2q_4...q_{2n}}=\left(\frac{p_1-p_2+...+p_{2n+1}}{2}\right)^2$, iar când ecuațiile sunt în număr par $p_1+p_3+...+p_{2n-1}=p_2+p_4+...+p_{2n}$, $q_1q_3...q_{2n-1}=$ $=q_2q_4...q_{2n}$. **33.** $q[p^3-(p+q)^2]=0$. (G.M.IV). **34.** $\lambda=-9$ $\mu=\frac{13}{2}$. **35.** $m=\frac{(a+b)(\alpha+\beta)}{ab+2\alpha\beta}$, $\alpha=OA$, $\beta=OB$. (G. M, IV).

36. Se vor forma ecuațiile ale căror rădăcini sunt: $1+\sqrt{3}$ și $1-\sqrt{3}$, $a+\sqrt{b}$ și $a-\sqrt{b}$; $1+i$ și $1-i$: $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}i$ și $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}i$, și se va calcula apoi pentru aceste ecuații suma puterilor a 5^{-a}, a 4^{-a}, a 5^{-a} și a 7^{-a} a rădăcinilor (17); rezultatele sunt: 152; $2(a^4+6a^2b+b^2)$; -8; 1. **37.** Cantitățile $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}i$ și $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}i$ sunt rădăcinile ecuației $x^2-x+1=0$, sau multiplicând cu $x+1$, sunt două din rădăcinile ecuației $x^3+1=0$; pentru această din urmă ecuație se găsește ușor: $S_1=S_4=...=S_{3n+1}=0$, $S_2=S_5=...=S_{3n+2}=0$, $S_3=S_6=...=S_{3n}=-3$, conchidem că $S_m=1$ când m nu e multiplu de 3 și $S_m=-2$ când m este multiplu de 3. **38.** a) $x^2-4x+1=0$; b) $x^2-10x+34=0$; c) $4x^2-$ $-12x+11=0$; d) $x^2+1=0$. **39.** $y^6+y^4-y^2-1=0$. **40.** Fie $2a$, $2b$ rădăcinile necomune, deci $(a+b)$ rădăcina comună. Ecuațiile cerute sunt $x^2-(3a+b)x+2a(a+b)=0$ $x^2-(a+3b)x+2b(a+b)=0$. (G. M. XL. p. 188).

41. a) Pentru ca ecuaţiile $ax^2+bx+c=0$ şi $a'x^2+b'x+c'=0$ să aibă o rădăcină comună, e necesar şi suficient să avem: $(ac'-ca')^2-(ab'-ba')(bc'-cb')=0$, în cazul nostru relaţia precedentă devine $\lambda^3(13\lambda+154)=0$, care dă pentru λ două valori distincte. b) x' şi x'' reprezentând rădăcinile primei ecuaţii, x_1 şi x_2 a celei de a doua, trebue să avem $x'=kx_1$, $x''=kx_2$, între acestea şi relaţiile între rădăcini şi coeficienţi eliminând pe x'. x'', x_1, x_2 şi k găsim $\lambda=0$, $131\lambda^2+58\lambda-25=0$. Se poate însă înlocui una din ecuaţii cu alta, ale cărei rădăcini să fie egale cu rădăcinile acesteia, multiplicate cu un coeficient k, exprimând ca noua ecuaţie cu a doua au aceleaşi rădăcini se obţin relaţiile de mai sus. (G. M. IV). **42.** Sunt două sisteme de ecuaţii: $x^2+2x-8=0$, $x^2-8x+15=0$ şi $x^2-3,4x-8=0$, $x^2+7,75x+15=0$. (G. M. VI). **43.** Se notează x_1, x_2 rădăcinile primei ecuaţiuni; x_2, x_3 rădăcinile ecuaţiunii a doua; x_3, x_1 rădăcinile ultimei ecuaţiuni, apoi se ţine seama de relaţiunile dintre coeficienţi şi rădăcini găsim $x_2=-\frac{q+q'}{p''}$, $x_2^2=\frac{qq'}{q''}$, etc. (S. E. G. M. II). **44.** Relaţia de condiţie este $q(k-p)^2+p(p^2-q)(k-p)+(p^2-q)^2=0$; cantitatea de sub radical este: $(p^2-q)^2(p^2-4q)$. **45.** Relaţia de condiţie este $k^2+(m+n)pk+mnp^2+q(m-n)^2=0$, cantitatea de sub radical este $(m-n)^2(p^2-4q)$; cazul de excepţie când $m=n$ când relaţia de condiţie este de gradul întâi. **46.** Fie ecuaţia $ax^2+bx+c=0$ sporind toţi coeficienţii cu λ obţinem ecuaţia $(a+\lambda)x^2+(b+\lambda)x+(c+\lambda)=0$, ea va avea rădăcinile egale dacă $(b+\lambda)^2-4(a+\lambda)(c+\lambda)=0$; această ecuaţie în λ are totdeauna rădăcinile reale. Fie $ax^2+bx+c=0$ $a'x^2+b'x+c'=0$ cele două ecuaţii, sporind toţi coeficienţii cu λ obţinem $(a+\lambda)x^2+(b+\lambda)x+(c+\lambda)=0$ şi $(a'+\lambda)x^2+(b'+\lambda)x+(c'+\lambda)=0$, dacă ele au o *singură* soluţie comună, aceasta trebue să fie reală şi să verifice ecuaţia $(a-a')x^2+(b-b')x+(c-c')=0$, deci trebue să avem $(b-b')^2-4(a-a')(c-c')>0$. Condiţia aceasta e şi suficientă. (G. M. VI). **47.** Ecuaţia în y este: $(b^2+pb+q)y^2-[2ab+p(a+b)+2q]y+a^2+pa+q=0$, ca ecuaţia dată să aibă o rădăcină cuprinsă între a şi b, trebue ca ecuaţia transformată să aibă o rădăcină negativă; condiţia este: $(a^2+pa+q)(b^2+pb+q)<0$. **48.** Dacă cele două ecuaţii au o rădăcină comună, substituind rădăcinile unei ecuaţii în primul membru al celeilalte, unul din rezultate trebue să fie nul, de unde primele două relaţii. Reciproca este evident adevărată. Servindu-ne de relaţiile între rădăcini şi coeficienţi, din una din primele două relaţii se deduce cea de a treia; ultima este identică cu aceasta. **49.** $x^4+px^3+qx^2+px+1=0$ şi $x^4+p'x^3+q'x^2+p'x+1=0$, ecuaţiile; dacă aceste ecuaţii au comune rădăcinele x_1 şi $\frac{1}{x_1}$, ecuaţiile în y, ce vom obţine punând $y=x+\frac{1}{x}$, vor avea comun rădăcina $y_1=x_1+\frac{1}{x_1}$, condiţia este: $[q'-2-q+2]^2-(p'-p)[p(q'-2)-p'(q-2)]=0$. **50.** Trebue să avem $(ac'-ca')^2-(ab'-ba')(bc'-cb')=0$. $a''(bc'-cb')+b''(ca'-ac')+c''(ab'-ba')=0$ şi $ab'-ba'\neq 0$. Ca să aibă ambele rădăcini comune trebue $a:a':a''=b:b':b''=c:c':c''$. **51.** Din cele $m-1$ ecuaţiuni de gradul al II-lea scoatem $A_{i+1}^2=A_iA_{i+2}$, din care se scoate $\frac{A_0}{A_1}=\frac{A_1}{A_2}=\frac{A_2}{A_3}=\ldots=\frac{A_{m-1}}{A_m}=\frac{A_m}{A_0}=\frac{1}{k}$ $\ast\ast\ast$ $k^{m+1}=+1$. Dacă m este impar avem $k=+1$, deci ecuaţia devine $A_0(x^m+x^{m-1}+\ldots+1)=0$. In cazul când m este impar avem: $k=\pm 1$. **52.** Ecuaţiunea fiind reciprocă de grad impar, admite rădăcinile: $-1, x_1, x_2=\frac{1}{x_1}, x_3, x_4=\frac{1}{x_3}$. Fie $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ ecuaţiunea care admite rădăcinile x_1 şi x_3. Ecuaţiunea ce admite rădăcinile x_2, x_4 este transformata celei precedente când înlocuim pe x cu $\frac{1}{x}$, deci $\gamma x^2+\beta x+\alpha=0$. Trebuie ca produsul $(\alpha x^2+\beta x+\gamma)(\gamma x^2+\beta x+\alpha)$ să fie egal cu câtul obţinut împărţind polinomul ecuaţiei date la $(x+1)$, deci cu $acx^4+(ab+bc)x^3+(a^2+b^2+c^2)x^2+(ab+bc)x+ac$. Avem $\alpha\gamma=ac$,

$\beta(\alpha+\gamma)=b(a+c)$, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=a^2+b^2+c^2$, deci $\beta=b$, $\alpha=a$, $\gamma=c$. Deci ecuaţiunea dată se descompune în $x+1=0$, $ax^2+bx+c=0$, $cx^2+bx+a=0$. Ultimele două au rădăcinile reale dacă $b^2-4ac>0$. Când $b^2-4ac=0$, ecuaţiunea dată are două rădăcini duble (G. M. XLI, p. 445). **53.** Avem $x_1^2+x_2^2=-\frac{b^2}{a^2}$ sau $(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=-\frac{b^2}{a^2}$. Condiţia este $b^2-ac=0$ (S. E. G. M. II). **54.** Se folosesc relaţiile $x_1+x_2+2\mu=-\frac{b+\lambda}{a+\lambda}$, $(x_1+\mu)(x_2+\mu)=\frac{c+\lambda}{a+\lambda}$ sau $\frac{b+\lambda}{a+\lambda}-$ $-\frac{b}{a}+2\mu=0$, $\frac{c}{a}-\mu\frac{b}{a}+\mu^2=\frac{c+\lambda}{a+\lambda}$. Sistem din care aflăm pe λ şi μ. (S. E. G. M. II).

XIII. **1.** $(x-2)(x-3)$. **2.** $5\left(x-\frac{1+\sqrt{21}}{10}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{21}}{10}\right)$. **3.** $(x-1-i)(x-1+i)$. **4.** $(x-a)(x-2a)$. **5.** $(x-a-b)(x-a+b)$. **6.** $(x-a-bi)(x-a+bi)$. **7.** $[(a+2b)x+a^2-b^2][(a-2b)x+$ $+a^2+b^2]$. **8.** $(x-2)(x+2)(x-3)(x+3)$. **9.** $x^4+x^2+1=$ $=(x^2+1)^2-x^2=(x^2+x+1)(x^2-x+1)=\left(x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right.$ $\left.-\frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)\left(x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)\left(x-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)$. **10.** $(x-a-b)$ $(x-a+b)(x+a-b)(x+a+b)$. **11.** $x^6-1=(x^2-1)(x^4+x^2+1)$, factorii lui x^2-1 sunt $x-1$ şi $x+1$, iar ai lui x^4+x^2+1 cei dela 9. **12.** $(x-1)(x+1)(x-i)(x+i)\left[x-\frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i)\right]$ $\left[x-\frac{1}{2}\sqrt{2}(1-i)\right]\left[x+\frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i)\right]\left[x-\frac{1}{2}\sqrt{2}(1-i)\right]$. **13.** $(x-a-$ $-bi)(x-a+bi)(x+a-bi)(x+a+bi)(x-b-ai)(x-b+ai)$ $(x+b-ai)(x+b+ai)$, în care $a=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$, $b=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$. **14.** $x^{2^n}-1=(x^{2^{n-1}}-1)(x^{2^{n-1}}+1)$, primul factor este de aceiaşi formă cu expresiunea dată, iar cel de al doilea se poate scrie $(x^{2^{n-2}}+1)^2-2x^{2^{n-2}}=(x^{2^{n-2}}-\sqrt{2}.x^{2^{n-3}}+1)(x^{2^{n-2}}+$ $+\sqrt{2}.x^{2^{n-3}}+1)$; fiecare din aceştia se poate descompune în factori de gradul 2^{n-3} etc. $ax^{2^n}+bx^{2^{n-1}}+c$ se poate descompune în factori de forma $x^{2^{n-1}}-A$, punând $x=y^{2^{n-1}}\sqrt{A}$ aceştia devin de forma $y^{2^{n-1}}-1$ şi chesiunea se reduce la precedenta. **15.** Pentru ca cele două expresiuni să fie patrate perfecte, trebue şi e de ajuns ca realizanţii să fie nuli, sau după identitatea lui *Lagrange* să avem $ab'-ba'=0$, $bc'-cb'=0$, sau încă $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$, de unde şi $ac'-ca'=0$. **16.** Condiţiunile necesare şi suficiente ca primele două expresiuni să fie patrate sunt: $\frac{a}{\alpha}=\frac{b}{\beta}=\frac{c}{\gamma}$. Realizantul expresii folosind identitatea lui *Lagrange* se poate scrie astfel: $(a\beta-b\alpha)^2+(a\gamma-c\alpha)^2+(b\gamma-c\beta)^2=0$. (G. M. XXXIV, p. 390). **17.** Rădăcinele sunt $\frac{1}{2}(a+1\pm\sqrt{(1-a)(1+3a)}$, ca ele să fie reale trebue $-\frac{1}{3}<a<1$. **18.** Condiţiunile sunt: $a^3+ab=ab^2+b^2=ac^2+bc$ sau: $(a-b)[a^2+(a+1)b]=0$ şi $(b-c)[(a+1)b+ac]=0$ care duc la patru sisteme şi dau soluţiunile: 1) $a=b=c$; 2) $a=b=0$; 3) $a=b=-(c+1)$ 4) $b=c=-\frac{a^2}{a+1}$; 5) $c=a$, $b=-\frac{a^2}{a+1}$. Rădăcinile se găsesc imediat. (G. M. IV). **19.** Inecuaţia poate fi scrisă: $(x-2a)[x^2-2ax+1]>0$, rădăcinile fiind: $x=2a$, $x_{2,3}=a\pm\sqrt{a^2-1}$, pentru ca inecuaţia să fie satisfăcută trebuie: dacă $a>0$, $a-\sqrt{a^2-1}<x<a^2+\sqrt{a^2-1}+$ sau $x>2a$; dacă $a<0$, $2a<x<a-\sqrt{a^2-1}$ sau $x>a+\sqrt{a^2-1}$. **20.** Punând $k-h=\frac{1}{\alpha}$, inecuaţia devine: $\frac{(\alpha-1)x^2-x-1}{\alpha(x^2+x+1)}<0$ având $x^2+x+1>0$ pentru toate valorile de x, urmează să găsim pe x astfel ca: $\alpha[(\alpha-1)x^2-x-1]<0$. Având $x_{1,2}=\frac{1}{2(\alpha-1)}[1\pm\sqrt{4\alpha-3}]$. Dacă $\alpha<0$ *** $4\alpha-3<0$, $\alpha-1<0$ inecuaţia nu e satisfăcută. Dacă $0<\alpha<\frac{3}{4}$ *** $4\alpha-3<0$, $\alpha-1<0$

inecuaţia este satisfăcută oricare ar fi x real. Dacă $\frac{3}{4}<\alpha<1$ $**$ $4\alpha-3>0$, $\alpha-1<0$ trebue să luăm pe x în afara intervalului rădăcinilor $x<\frac{1}{2(\alpha-1)}[1+\sqrt{4\alpha-3}]$ sau $x>\frac{1}{2(\alpha-1)}$ $[1-\sqrt{4\alpha-1}]$. Dacă $1<\alpha$ $**$ $4\alpha-3>0$, $\alpha-1>0$ trebue să luăm pe x cuprins în intervalul rădăcinilor $\frac{1}{2(\alpha-1)}$ $[1-\sqrt{4\alpha-3}]<x<\frac{1}{2(\alpha-1)}[1+\sqrt{4\alpha-3}]$. Dacă $\alpha=1$ inecuaţia este satisfăcută pentru $x>-1$. Dacă $\alpha=\frac{3}{4}$ $\frac{3}{4}(-\frac{1}{4}x^2-x-1)<0$ sau $-\frac{3}{10}(x^2+4x+4)<0$ sau $-\frac{3}{16}(x+2)^2<0$ este satisfăcută oricare ar fi x.
21. Trebue să avem: $(x+1)(x-2)(x-3)(x-5)>0$ şi $\left(x+\frac{1+\sqrt{153}}{4}\right)(x+1)\left(x-\frac{-1+\sqrt{153}}{4}\right)(x-3)>0$, aranjând rădăcinile pe o axă se vede că inecuaţia dublă este satisfăcută pentru: $x<-\frac{1+\sqrt{153}}{4}$, sau $2<x<\frac{-1+\sqrt{153}}{4}$ sau pentru: $x>5$. (G. M.). **22.** Inecuaţia poate fi scrisă $(x^2-2)(x^2-5)>0$ sau $(x+\sqrt{5})(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{5})>0$ şi studiind semnul produsului când x variază dela $-\infty$ la $+\infty$ găsim că inecuaţia este satisfăcută pentru: $x<-\sqrt{5}$, sau $-\sqrt{2}<x<+\sqrt{2}$ sau $x>+\sqrt{5}$. **23.** Trebue să avem $x<-5$ sau $-1<x<0$ sau $1<x<2$. **24.** $-\sqrt{12}<x<-\sqrt{5}$ sau $0<x<\sqrt{5}$ sau $3<x<\sqrt{12}$ sau $x>5$. **25.** Se poate scrie $\frac{\sqrt{a^4+2x^4}-(9a^2-x^2)}{3a-x}<0$ sau $\frac{a^4+2x^4-(9a^2-x^2)^2}{(3a-x)[\sqrt{a^4+2x^4}+(9a^2-x^2)]}$ <0, însă $\sqrt{a^4+4x^4}+9a^2-x^2>0$, deci trebue să avem $(3a-$ $-x)(x^4+18a^2x^2-80a^4)<0$ $**$ a) dacă $a>0$ trebue

$-a\sqrt{-9+\sqrt{161}}<x<a\sqrt{-9+\sqrt{161}}$ sau $x>3a$; b) dacă $a<0$ trebue $3a<x<a\sqrt{-9+\sqrt{161}}$ sau $x>-a\sqrt{-9+\sqrt{161}}$.

26. Ori care ar fi x. **27.** Avem: $\frac{x^3-3x+2}{x^3-3x-2}=\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x+1)^2(x-2)}$ $\therefore$ $x<-2$ sau $x>2$. **28.** Se observă că $2x^3-6x^2-6x-8=$ $=2(x-4)(x^2+x+1)$. Inegalitatea devine $2(x-4)>\frac{x^3+x^2-22x-4}{(x+1)^2}$ sau $2(x-4)(x+1)^2>x^3+x^2-22x-4$; $x^3-5x^2+8x-4>0$, $(x-1)(x-2)^2>0$, deci $x>1$. (G. M. XXXV p. 192). **29.** x trebue să rămână cuprins într'unul din intervalele: $(-\infty, -6)$; $(-x_2, -4)$; $(-x_1, -2)$; $(0, 1)$; $(x_1, 3)$ sau $(x_2, 5)$ în care $x_1=\sqrt{\frac{29-\sqrt{249}}{2}}$ şi $x_2=\sqrt{\frac{29+\sqrt{249}}{2}}$. **30.** $0<a<2$. **31.** Se va observa că numitorul este totdeauna pozitiv, inegalitatea dată revine la $(a-7)x^2-2(a-1)x-1<0$, ca aceasta să fie verificată ori care ar fi x, trebue ca coeficientul primului termen să fie negativ şi rădăcinele trinomului să fie imaginare sau confundate: $a-7<0, (a-1)^2+(a-7)\leqslant 0$ $\therefore$ $-2\leqslant a\leqslant 3$. **32.** Observând că $x^2+x+1>0$ trebue să avem: $4x^2-(h-3)x+4>0$ şi $2x^2+(h+3)x+2>0$ care pentru a fi îndeplinite pentru x oarecare trebue să avem: $(h-3)^2-64\leqq 0$ $(h+3)^2-16\leqq 0$ sau încă: $(h+5)(h-11)\leqq 0$ şi $(h-1)(h+1)\leqq 0$ deci $-1\leqq h\leqq +1$. **33.** Pentru m cuprins între 3 şi 8 trinomul are rădăcinele sale imaginare. (G. M. VI). **34.** Insemnăm cu $P(x)$ polinomul primei inegalităţi şi cu x', x'' rădăcinile lui, în cazul când x', x'' sunt reali presupunem $x'>x''$. Dacă $\lambda<\frac{2}{3}$ rădăcinile x', x'' sunt reale. Pentru $\lambda<-2$, având $\frac{\lambda}{\lambda+2}>0$ şi $\frac{2(\lambda-2)}{\lambda+2}>0$, x' şi x'' sunt ambele pozitive, deci $x''>2\lambda$, iar $\lambda+2<0$ $\therefore$ $x''<x<x'$; pentru $-2<\lambda<0$ având $\frac{\lambda}{\lambda+2}<0$, şi $\frac{2(\lambda-2)}{\lambda+2}<0$, avem $x'>0$, $x''<0$ $(x''>x')$; dar $P(2\lambda)=\lambda(4\lambda^2+4\lambda+9)=$ $=\lambda[(2\lambda+1)^2+8]<0$, deci $x''<2\lambda$. Insă $\lambda+2>0$ $\therefore$

$x \leqq x''$, $x > x'$; pentru $\lambda = -2$ inecuaţiile devin: $8x - 2 \geqq 0$, $x + 4 \geqq 0$ $*\!*\!*$ $x \geqq + \frac{1}{4}$; pentru $\lambda = 0$ inegalităţile devin: $2x(x+2) \geqq 0$ şi $x \geqq 0$ $*\!*\!*$ $x \geqq 0$; pentru $0 < \lambda < \frac{2}{3}$, având $\frac{\lambda}{\lambda+2} > 0$, $\frac{2(\lambda-2)}{\lambda+2} < 0$ x', x'' sunt ambele negative, deci $x'' < x' < 2\lambda$, iar $\lambda + 2 > 0$ $*\!*\!*$ $x \leqq x''$ sau $x \geqq 2\lambda$; pentru $\lambda = \frac{2}{3}$, avem $x' = x'' = -\frac{1}{2}$ $*\!*\!*$ $x \geqq \frac{4}{3}$; pentru $\lambda > \frac{2}{3}$, avem x', x'' imaginari, iar $\lambda + 2 > 0$ $*\!*\!*$ $x \geqq 2\lambda$. **35.** Dacă înlocuim pe x prin zero, avem, însemnând polinomul ecuaţiunii cu $f(x)$, rezultatul $f(o) = \frac{-\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)}[a(\alpha+1) + b(\alpha+2)]$. Deasemenea $f\left(\frac{\alpha+1}{\alpha+2}\right) = \frac{a(\alpha+1)+b(\alpha+2)}{(\alpha+1)(\alpha+2)^2}$. Avem $f(0).f\left(\frac{\alpha+1}{\alpha+2}\right) < 0$, deci una din valorile 0 şi $\frac{\alpha+1}{\alpha+2}$ este cuprinsă între rădăcini, sau o rădăcină este cuprinsă între 0 şi $\frac{\alpha+1}{\alpha+2} < 1$. (G. M. XLII. p. 143). **36.** Mai întâi trebue $-x^2 - x + 6 > 0$ $*\!*\!*$ $-3 < x < 2$; dacă $x > -\frac{1}{2}$ inegalitatea e satisfăcută pentru toate valorile lui x cuprins în intervalul $(-\frac{1}{2}, 2)$; dacă $x < -\frac{1}{2}$, trebue să avem: $4(2x+1)^2 < 9(x^2 - -x + 6)$ $*\!*\!*$ $-2 < x < -\frac{1}{2}$; în definitiv trebue $-2 < x < 2$. **37.** $m < 0$, rădăcini reale de semne contrare, cea mai mare în valoare absolută pozitivă; $0 < m < 3$, rădăcini imaginare; $m > 3$, rădăcini reale, ambele negative; $m = 0$, $m = 3$ rădăcini egale. **38.** $-\infty < m < \frac{6-2\sqrt{3}}{3}$, rădăcini imaginare; $\frac{6-2\sqrt{3}}{3} < m < 2$, rădăcini reale, ambele pozitive; $2 < m < 3$, rădăcini reale de semne contare; $3 < m < \frac{6+2\sqrt{3}}{3}$, rădăcini reale, ambele negative; $m > \frac{6+2\sqrt{3}}{3}$, rădăcini imaginare. **39.** Cantitatea $b^2-ac=$ $=4(m+3)(m-2)(m-5)$; se găseşte: $m < -\sqrt{\frac{15}{2}}$, rădăcini imaginare; $-\sqrt{\frac{15}{2}} < m < 0$, rădăcini reale de semne contrare; $0 < m < 2$, rădăcini reale, ambele pozitive; $m > 2$, rădăcini imaginare. (G. M. V). **40.** $m < -\frac{1}{3}$ 4 rădăcini reale; $-\frac{1}{3} < m < 0$, 4 rădăcini imaginare; $0 < m < 1$, 2 rădăcini reale şi 2 imaginare; $m > 1$, 4 rădăcini reale. **41.** $m < 0$ 2 rădăcini reale 2 imaginare; $0 < m < \frac{2}{3}$, 4 rădăcini reale; $m > \frac{2}{3}$, 2 rădăcini reale şi 2 imaginare. **42.** Fie $p=2m(m-a)-b$, $q=m^2[(m-a)^2-b]$ $R=p^2-4q=b(4am+b)$. Natura rădăcinilor depinde de semnele cantităţilor p, q, R; ele îşi schimbă semnul pentru m egal cu: (1) $-\frac{b}{4a}$, $\frac{a-\sqrt{a^2+2b}}{2}$, $\frac{a+\sqrt{a^2+2b}}{2}$, $a-\sqrt{b}$, $a+\sqrt{b}$. Când m rămâne cuprins într'un interval, în care p, q, R nu se anulează, natura rădăcinilor nu se schimbă. Este nevoe a aranja numerele din şirul (1) în ordinea mărimei lor crescânde. Se găseşte: a) dacă $b < 4a^2$, avem: $\frac{a-\sqrt{a^2+2b}}{2} < -\frac{b}{4a} < a-\sqrt{b} < \frac{a+\sqrt{a^2+2b}}{2} < a+\sqrt{b}$; b) dacă $b > 4a^2$, avem: $-\frac{b}{4a} < a-\sqrt{b} < \frac{a-\sqrt{a^2+2b}}{2} < \frac{a+\sqrt{a^2+2b}}{2} <$ $< a+\sqrt{b}$. In primul caz se deduc rezultatele următoare: $m < -\frac{b}{4a}$, $R < 0$, 4 rădăcini imaginare; $-\frac{b}{4a} < m < a-\sqrt{b}$,

$R>0, p<0, q>0$, 4 rădăcini reale: $a-\sqrt{b}<m<\frac{a+\sqrt{a^2+2b}}{2}$, $R>0$, $p<0$, $q<0$, 2 rădăcini reale şi 2 imaginare; $\frac{a+\sqrt{a^2+2b}}{2}<m<a+\sqrt{b}$, $R>0, p>0, q<0$, ib; $m>a+\sqrt{b}$ $R>0$, $p>0$, $q>0$, 4 rădăcini imaginare. In al doilea caz găsim: $m<-\frac{b}{4a}$, 4 rădăcini imaginare; $-\frac{b}{4a}<m<a-\sqrt{a}$ ib; $a-\sqrt{b}<m<a+\sqrt{b}$, 2 rădăcini reale şi 2 imaginare; $m>a+\sqrt{b}$, 4 rădăcini imaginare. Când $m=0$ ecuaţia are 2 rădăcini nule şi celelalte două reale şi de semne contrare. **43.** $m<-a$, avem pentru x^4 două valori reale, pozitive, deci pentru x 4 valori reale şi 4 imaginare; $-a<m<0$, 8 rădăcini imaginare; $m>0$, 2 rădăcini reale şi 6 imaginare. **44.** Notând $f(x)$ membrul I, trebue să avem $f(1)<0$, $f(2)<0$, găsim: $\frac{1}{2}(5-\sqrt{5})<m<2$. **45.** Fie $f(x)$ primul membru al ecuaţiei date, condiţiile sunt: a) $(m^2-1)f(0)$, 5)>0, $\frac{2m+1}{(m^2-1)}<1$ şi condiţia de realitate a rădăcinilor, se găseşte: $-\frac{5}{4}<m<-1$ sau $m>2+\sqrt{3}$; b) trebue să avem $(m^2-1)f(1)<0$, se găseşte: $-1<m<1-\sqrt{2}$ sau $1<m<1+\sqrt{2}$. **46.** Condiţiunea de realitate $(m^2-5)^2-16(m+2)=(m^2-1)^2-8(m^2-1)-16(m+1)=(m+1)^2[(m-1)^2-8]\geq 0$, deci trebue $m>1+2\sqrt{2}$ sau $m<1-2\sqrt{2}$; să formăm $f(-1)$ şi $f(+1)$, avem $f(-1)=(m+2)^2$, deci -1 este în totdeauna exterior rădăcinilor, $f(+1)=-m^2+4m+14$, deci trebue $2-3\sqrt{2}<m<2+3\sqrt{2}$; în fine trebue ca $+1$ să fie mai mare decât semisuma rădăcinilor: $-\sqrt{7}<m<+\sqrt{7}$. Ţinând seama de toate condiţiile precedente găsim $2-3\sqrt{2}<$ $<m<1-2\sqrt{2}$. **47.** Punând $f(y)=y^2-2my+4m-2$, observăm că $f(+2)=+2>0$, adică $+2$ este totdeauna în afara intervalului rădăcinilor $y'>y''$, iar $f(-2)=8\left(m+\frac{1}{4}\right)$. Punând $S=y'+y''$ şi $P=y'y''$ şi observând că rădăcinile ecuaţiunii $f(y)=0$ sunt reale dacă $m<2-\sqrt{2}$ sau $m>2+\sqrt{2}$, avem următoarele rezultate: $m<-\frac{1}{4}$, $f(-2)<0$, $P<0$ $\therefore$ $y''<-2<y'<2$, deci ecuaţia în x are două rădăcini reale şi 2 rădăcini imaginare; $-\frac{1}{4}<m<\frac{1}{2}$, $f(-2)>0$, $P<0$ $y'>0$ $\therefore$ $-2<y''<y'<+2$, deci ecuaţia în x are 4 rădăcini imag.; $\frac{1}{2}<m<2-\sqrt{2}$, $f(-2)>0$, $P>0$ $S>0$, $\frac{y'+y''}{2}=m<2-\sqrt{2}<+2$ $\therefore$ $-2<y''<y'<+2$ deci ecuaţia în x are patru rădăcini imaginare; $2-\sqrt{2}<m<2+\sqrt{2}$ $\therefore$ y', y'' imaginare, deci 4 rădăcini imaginare ale ec. în x; $m>2+\sqrt{2}$, $P>0$, $S>0$, $\frac{y'+y''}{2}>2+\sqrt{2}>2$ $\therefore$ $y'>y''>+2$, deci ecuaţia în x are patru rădăcini reale. $m=-\frac{1}{4}$ $y'=-2$ $\therefore$ $y''=+\frac{3}{4}<2$, deci ecuaţia în x are două rădăcini reale egale şi 2 imaginare; $m=2-\sqrt{2}$ $y'=y''=2-\sqrt{2}<+2$, deci ecuaţia în x are rădăcini imaginare duble, polinomul este patrat perfect, $m=2+\sqrt{2}$ $\therefore$ $y'=y''=2+\sqrt{2}$ deci ecuaţia în x are două rădăcini reale duble. **48.** Se va rezolva în raport cu y şi se va exprima că cantitatea de sub radical este un patrat perfect; condiţia este: $ae^2+cd^2+fb^2=bde+4acf$. **49.** Fie x' şi x'' rădăcinile primei ecuaţii $x'<x''$, x_1 rădăcina celei de a doua, să formăm cantităţile $E=(2x'-3m)(2x''-3m)=9m^2-12m-12$ şi $F=(2x'-3m)+(2x''-3m)=4-6m$, dispoziţia rădăcinilor celor două ecuaţii depinde de semnele lui E şi F; găsim: $m<-\frac{2}{3}$, $E>0$, $F>0$, $x_1<x'<x''$; $m=-\frac{2}{3}$, $E=0$, $F>0$, $x_1=x'<x''$; $-\frac{2}{3}<m<2$, $E<0$, $x'<x_1<x''$; $m=2$, $E=0$, $x'<x_1=x''$; $m>2$, $E>0$, $F<0$, $x'<x''<x_1$. **50.** Fie $x'\leqq x''$ rădăcinile primei ecuaţii, $x_1\leqq x_2$ a celei de a doua; cantităţile E şi F sunt $E=(x'^2-2mx'-m)$

$(x''^2-2mx''-m)=-9m^2+7m+16$, $F=(x'^2-2mx'-m)+$ $+(x''^2-2mx''-m)=17-8m$; se găseşte: $m<-1$, $E<0$, $x_1<x'<x_2<x''$: $m=-1$, $E=0$, $x_1=x'=x_2<x''$; $-1<m<0$, x_1 şi x_2 imaginari; $0<m<\frac{16}{9}$, $E>0$, $F>0$ şi cum rădăcinile x_1 şi x_2 sunt în acest interval de semne contrare rezultă $x'<x_1<x_2<x''$; $m=\frac{16}{9}$, $x'<x_1<x_2=x''$; $m>\frac{16}{9}$, $E<0$, $x'<x_1<x''<x_2$. **51.** Fie $x'\leqq x''$ rădăcinile celei dintâi, $x_1\leqq x_2$ rădăcinile celei de a doua; se găseşte: $m<\frac{1}{4}(3-\sqrt{13})$, $x'<x_1<x''<x_2$; $m=\frac{1}{4}(3-\sqrt{13})$, $x'=x_1<x''<x_2$; $\frac{1}{4}(3-\sqrt{13})<m<1$, $x_1<x'<x''<x_2$; $m=1$, $x_1<x'=x''<x_2$; $1<m<\frac{1}{4}(3+\sqrt{13})$, $x_1<x'<x''<x_2$; $m=\frac{1}{4}(3+\sqrt{13})$, $x_1<x'<x''=x_2$; $\frac{1}{4}(3+\sqrt{13})<m$, $x_1<x'<x_2<x''$. (G.M.IV).

52. Cantitatea $4p+4q+1$ fiind negativă să o însemnăm cu $-a^2 \therefore p=-q-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}a^2$, $q=-p-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}a^2 \therefore p^2-q=p^2+$ $+p+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}a^2=\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2>0$, $q^2-p=\left(q+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2>0$; $E=4(p^3+q^3)-4(p+q)pq+p^2+q^2-2pq=(p-q)^2$ $(4p+4q+1)<0$, deci una din rădăcinile unui trinom este cuprinsă între rădăcinile celuilalt trinom. **53.** Fie $x'\leqq x$ rădăcinile primei ecuaţii, $x_1\leqq x_2$ a celei de a doua, să formăm cantităţile: $E=(a'x'^2+b'x'+c')(a'x''^2+b'x''+c')=$ $=\frac{(ac'-ca')^2-(ab'-ba')(bc'-cb')}{a^2}$; $F=(a'x'^2+b'x'+c')+$ $+(a'x''^2+b'x''+c')=\frac{b(ba'-ab')-2a(a'c-c'a)}{a^2}$, $F_1=(ax_1^2+$ $+bx_1+c)+(ax_2^2+bx_2+c)=\frac{b'(ab'-ba')-2a'(ac'-ca')}{a'^2}$, $F'=FF_1$, $\delta=-\frac{b}{a}-\left(-\frac{b'}{a'}\right)$; se găseşte: $E>0$, $F'>0$,

$\delta < 0$, $x' < x'' < x_1 < x_2$; $E > 0$, $F' > 0$, $\delta > 0$, $x_1 < x_2 < x' < x''$; $E > 0$, $F' < 0$, $F > 0$, $x' < x_1 < x_2 < x''$; $E < 0$, $\delta > 0$, $x_1 < x' < x_2 < x''$; $E < 0$, $\delta < 0$, $x' < x_1 < x'' < x_2$. (A se vedea și G. M. IV și V. *Compararea rădăcinilor mai multor ecuații de gradul al doilea*). **54.** $x^2-6x+10=(x-3+i)(x-3-i)$, trebue $x=3+\alpha i$, în care $\alpha > 1$. (G. M. VII).

XIV. **1.** x și y sunt rădăcinile ecuației $z^2-100z+2400=0$ $\therefore x=60$, $y=40$ sau invers. **2.** $x=y=2$. **3.** Multiplicând a doua ecuație cu 2, adunând și scăzând-o din din cea dintâi, avem $(x+y)^2=121$, $(x-y)^2=9$ de unde $x=7$, $y=4$, sau invers și $x=-7$, $y=-4$ sau invers. **4.** x^3-y^3 se divide prin $x-y$, se găsește $x=2$, $y=0$ sau $x=0$, $y=-2$ **5.** Aceași observație ca mai sus se găsește $x=4$. $y=1$ sau invers. **6.** $x=\pm 3\sqrt{2}$, $y=\pm\sqrt{2}$. **7.** Fie $x+y=u$, ridicând la cub $x^3+y^3+3xy(x+y)=u^3=35+3.30=125$ $\therefore$ $u=5$, $xy=6$ $\therefore x=2$, $y=3$ sau invers. **8.** Cea de a doua ecuație se poate scrie $x+y=\frac{3}{4}xy$, ridicând la cub $x^3+y^3+3xy\cdot\frac{3}{4}xy=\frac{27}{64}x^3y^3 \therefore \frac{27}{64}(xy)^3-\frac{9}{4}\cdot(xy)^2-9(xy)=0$ $\therefore (xy)_1=0$, $(xy)_2=8$, $(xy)_3=-\frac{8}{3}$; apoi $(x+y)_1=0$, $(x+y)_2=6$, $(x+y)_3=-2$; se găsesc apoi soluțiile: 0, 0; 4, 2; $1\pm\sqrt{\frac{11}{3}}$. **9.** Se va elimina mai întâi y^2 se găseste (1) $xy=30-2x^2$. Inlocuind pe xy în una din ecuațiile date, avem (2) $y^2-4x^2+20=0$. Rezolvând sistemul (1), (2) se găsește: $x=\pm 3$, $y=\pm 4$. **10.** Ridicăm a doua ecuație la la patrat și o scădem pe prima, etc.; se găsește $x, y=b\pm\sqrt{a^2-b^2}$. **11.** Se găsește pentru produsul $xy=\frac{b^3-a^3}{3b}$. **12.** Produsul xy este dat de ecuația: $2(xy)^2-4b^2(xy)+b^4-a^4=0$ obținută ridicând ecuația a doua la puterea 4. **13.** xy este dat de ecuația: $5b(xy)^2-5b^3(xy)+b^5-a^5=0$. **14.** Se împart ecuațiile apoi se extrage x din $6x^2-11xy+3y^2=0$, $x=0$, $y=0$;

$x=3,\ y=2;\ x=5,\ y=15$. **15.** $3, 1; -3, -1; 2, \frac{3}{2}$
$-2, -\frac{3}{2}; \frac{1}{2}(5+i), \frac{1}{2}(5-i); -\frac{1}{2}(5+i), -\frac{1}{2}(5-i)$. (G. M. VII). **16.** Se adună, apoi se scad ecuațiile, $x=3{,}5,\ y=0{,}5$ sau invers. **17.** Multiplicând prima cu 4 și adunând cu cea de a doua, obținem: $9y^2-54xy+$ $+81x^2=9(y-3x)^2=0$; se găsește apoi: $x=0,\ y=0$; $x=15,\ y=45$. **18.** Prima ecuație se poate scrie $xy(x+y-3)=3(y+4x-xy)$, combinând cu cea de a doua avem $xy=\pm 6$; apoi $x=\pm\sqrt{3},\ \pm\sqrt{3}\,i$; $y=\pm 2\sqrt{3}$, $\pm 2\sqrt{3}.i$. **19.** $x=y=1$; $x=\pm i,\ y=\pm i$; $x=\pm i$, $y=\mp i$, $x=\frac{1}{2}(-1\pm i\sqrt{3})$, $y=\frac{1}{2}(-1\mp i\sqrt{3})$. (G.M.III). **20.** $x=\sqrt[3]{(a-1)(b-1)^2}$, $y=\sqrt[3]{(a-1)^2(b-1)}$. **21.** Ecuațiunile sistemului se mai pot scrie sub forma $(x^2-y^2)(x^4+y^4)=51$, $x^4y^4(x^4+y^4)=272$, care prin împărțire ne dau $\frac{x^2-y^2}{x^4y^4}=\frac{3}{16}$ Notăm $x^2-y^2=X$, $x^2y^2=Y$, sistemul devine $Y^2(X^2+2Y)=$ $=272$, $16X=3Y^2$. Inlocuind în prima ecuatie pe X scos din a doua, găsim $9Y^6+512Y^3-69632=0$ ecuația trinomă care se desface în $Y^3=64$ și $Y^3=-\frac{1088}{9}$, de unde $Y=4\varepsilon$,

$$Y=-4\varepsilon\sqrt[3]{\frac{17}{9}},\ \varepsilon=1, \frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{-3}) \text{ și } X=3\varepsilon^2, X=\varepsilon^2\sqrt[3]{\frac{289}{3}}.$$

Revenind la cunoscutele inițiale, găsim în total 48 soluții. (G. M. XI. p. 133). **22.** Sistemul se transformă în sistemul echivalent $x^9+y^9=513$, $(x^3+y^3)^3=9^3$. α având semnificația lui ε din problema precedentă, sistemul se descompune în 3 sisteme $x^9+y^9=513,\ x^3+y^3=9$; $x^9+y^9=513,\ x^3+y^3=9\alpha$; $x^9+y^9=513,\ x^3+y^3=9\alpha^2$, sisteme ce se rezolvă ușor punând $x^3=X,\ x^3=Y$. Obținem soluțiile $x_1=1,\ y_1=2$; $x_2=\alpha$, $y_2=2\alpha$; $x_3=\alpha^2,\ y_3=2\alpha^2$; $x_4=2,\ y_4=1$; $x_5=2\alpha,\ y_5=\alpha$; $x_6=2\alpha^2,\ y_6=\alpha^2$; $x_7=\sqrt[3]{\alpha},\ y_7=2\sqrt[3]{\alpha}$; $x_8=\alpha\sqrt[3]{\alpha},\ y_8=2\alpha\sqrt[3]{\alpha}$;. $x_9=\alpha^2\sqrt[3]{\alpha},\ y_9=2\alpha^2\sqrt[3]{\alpha}$; $x_{10}=2\sqrt[3]{\alpha},\ y_{10}=\sqrt[3]{\alpha}$; $x_{11}=2\alpha\sqrt[3]{a}$,

$y_{11}=\alpha\sqrt[3]{\alpha}$; $x_{12}=2\alpha^2\sqrt[3]{\alpha}$, $y_{12}=\alpha^2\sqrt[3]{\alpha}$; $x_{13}=\sqrt[3]{\alpha^2}$, $y_{13}=2\sqrt[3]{\alpha^2}$; $x_{14}=\alpha\sqrt[3]{\alpha^2}$, $y_{14}=2\alpha\sqrt[3]{\alpha^2}$; $x_{15}=\alpha^2\sqrt[3]{\alpha^2}$, $y_{15}=2\alpha^2\sqrt[3]{\alpha^2}$; $x_{16}=2\sqrt[3]{\alpha^2}$, $y_{16}=\sqrt[3]{\alpha^2}$; $x_{17}=2\alpha\sqrt[3]{\alpha^2}$, $y_{17}=\alpha\sqrt[3]{\alpha^2}$; $x_{18}=2\alpha^2\sqrt[3]{\alpha^2}$, $y_{18}=\alpha^2\sqrt[3]{\alpha^2}$. (G. M. XXXIX, p. 472). **23.** Prima parte a primei ecuaţii se scrie $7xy[x^5+y^5+3xy(x^3+y^3)+5x^2y^2(x+y)]=7xy(x+y)[x^4+2x^3y+3x^2y^2+2xy^3+y^4]=7xy(x+y)[(x^2+y^2)^2+x^2y^2+2xy(x^2+y^2)]=7xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2$. Punând $x+y=u, xy=v$, sistemul devine $u^2-v=19$, $uv(u^2-v)^2=10.830$. Notând $u^2-v=t$, $uv=z$, sistemul devine $t=19$, $t^2z=10.830$. Deci $t=19$, $z=30$. Revenind la necunoscutele iniţiale, obţinem următoarele trei sisteme $x+y=-2$, $xy=-15$; $x+y=-3$, $xy=-10$; $x+y=5$, $xy=6$. (G. M. XXXVIII. p. 71). **24.** Prima ecuaţie se descompune în $x-y-1=0$, $x^2+xy+y^2=0$. Considerând sistemul $x-y=1$, $x^5-y^5=211$ şi împărţind ultima ecuaţie prin prima, avem $x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4=211$. Dar $x=y+1$, $x^2=y^2+2y+1$, $x^3=y^3+3y^2+3y+1$, $x^4=y^4+4y^3+6y^2+4y+1$. Şi ecuaţia ultimă se reduce la $y^4+2y^3+2y^2+y-42=0$ sau $(y-2)(y+3)(y^2+y+7)=0$. Deci $y_1=2$, $x_1=3$; $y_2=-3$, $x_2=-2$; $y_{3,4}=\frac{-1\pm i\sqrt{27}}{2}$, $x_{3,4}=\frac{1\pm i\sqrt{27}}{2}\cdot$ Considerând sistemul $x^2+xy+y^2=0$, $x^5-y^5=211$, rezolvând prima ecuaţie în x, avem $x'=y\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)=\alpha y$, $x''=y\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)=\alpha^2 y$. Observând că $\alpha^5=\alpha^2$, avem $y'^5=\frac{211}{\alpha^2-1}$, etc. (G. M. XLI, p. 198). **25.** 1°. $b\neq 0$, ecuaţia a doua se scrie $x^2+2y^2=b-2xy$, şi ridicând la patrat, $x^4+4y^4=b^2-4bxy$, folosind prima ecuaţie, aceasta devine $a=b^2-4xy$, $xy=\frac{b^2-a}{4b}\cdot$ Introducând în a doua ecuaţie această valoare, $x^2+2y^2=\frac{b^2+a}{2b}\cdot$. Obţinem soluţiile

$$x=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(1+\sqrt{2})b^2+(1-\sqrt{2})a}{2b}}\mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(1-\sqrt{2})b^2+(1+\sqrt{2})a}{2b}}$$

$$y=\pm\frac{1}{4}\sqrt{\frac{(1+\sqrt{2})b^2+(1-\sqrt{2})a}{b}}\mp\frac{1}{4}\sqrt{\frac{(1-\sqrt{2})b^2+(1+\sqrt{2})a}{b}}.$$

2^0. $b=0$. Trebue să avem a$=0$, din $x^4+4y^4=(x^2+2xy+2y^2)(x^2-2xy+2y^2)$. In acest caz $x=0$, $y=0$, sau $\left(\frac{x}{y}\right)^2+2\left(\frac{x}{y}\right)+ +2=0$, deci $x=(-1\pm i)y$. (G. M. XLI. p. 201). **26.** x şi y sunt rădăcinele ecuaţiilor $z^2\mp 2az+9-3a^2=0$; să considerăm d. ex. ecuaţia $z^2-2az+9-3a^2=0$, deducem: $a<-\sqrt{3}$, x şi y reali de semne contrare; $-\sqrt{3}<a<-\frac{3}{2}$, x şi y reali, ambii negativi; $-\frac{3}{2}<a<\frac{3}{2}$, x şi y imaginari; $\frac{3}{2}<a<\sqrt{3}$, x şi y reali, ambii pozitivi; $a>\sqrt{3}$, x şi y reali de semne contrare. Dacă se ia semnul $+$ înaintea lui $2az$, aceasta revine a schimba semnul lui a; discuţie analoagă. (G. M. V). **27.** Se va calcula mai întâi suma şi produsul celor două necunoscute scriindu-se ecuaţiile astfel $(x+y)^2+(x+y)-$ $-xy+m=0$ şi $\frac{(x+y)^2-2xy}{x+y}=\frac{x+y+2m}{-1}$, aplicându-se în a doua o proprietate a proporţiilor. (G. M. III). **28.** Scoţând pe x şi y în funcţiune de xy obţinem prin înmulţire o ecuaţiune în xy. Avem: $x=\frac{ab+1\pm\sqrt{(a^2-1)(b^2-1)}}{a+b}$, $y=\frac{ab-1\pm\sqrt{(a^2-1)(b^2-1)}}{a-b}$. **29.** Rezolvând prima în raport cu y, x este dat de ecuaţiile: $(3a+2b)x^2+a(a+b)x+a^2b=0$ sau $(3b+2a)x^2+b(a+b)x+ab^2=0$. (G.M.V). **30.** Adunând şi scăzând avem: $x^2+b^2=\sqrt{2}(ax+by)$, $y^2+a^2=\sqrt{2}\,(xy-ab)$, multiplicând $(x^2+b^2)\,(y^2+a^2)=2(ax+by)(xy-ab)$, însă $(x^2+b^2)\,(y^2+a^2)=(ax+by)^2+(xy-ab)^2 \therefore ax+by=xy-ab$ *** $y=a\frac{x+b}{x-b}$ şi $x^2+b^2=y^2+a^2$ se găseşte: $x=bi, y=-ai$;

$x=-bi$, $y=+ai$; $x=a\sqrt{2}+b$, $y=a+b\sqrt{2}$. **31.** Efectuăm calculele şi împărţim respectiv cu xy şi x^2y^2. Punând $x+\frac{1}{x}=u$ şi $y+\frac{1}{y}=v$, avem $u+v=18$, $u^2+v^2=212 \therefore u=4$, $v=14$, apoi $x=2\pm\sqrt{3}$, $y=7\pm4\sqrt{3}$ sau invers. **32.** Prima ecuaţiune se poate scrie sub forma: x^2+xy+y^2- $-\frac{xy(x^2+y^2)}{x^2-xy+y^2}=a^2+ab+b^2-\frac{ab(a^2+b^2)}{a^2-ab+b^2}$. Se vor lua ca necunoscute $x^2+y^2=u$, $xy=v$, se găseşte: $u=\frac{ab(a^2+ab+b^2)}{a^2-ab+b^2}$, $v=\frac{(a^2+b^2)(a^2+ab+b^2)}{a^2-ab+b^2}$ şi $u=a^2+b^2$, $v=ab$.

33. $x=4$, $y=3$, $z=2$ şi $x=1+i\sqrt{11}$, $y=1-i\sqrt{11}$, $z=7$. Admite şi sistemele $x=3$, $y=4$, $z=2$ şi $z=7$, $x=1-i\sqrt{11}$ $y+1+i\sqrt{11}$. **34.** Se va adăoga în ambii membrii 1, prima ecuaţie devine $(y+1)(z+1)=1+a\ldots$, se găseşte: $x=\frac{\sqrt{(a+1)(b+1)(c+1)}}{a+1}-1$ etc. **35.** Se găseşte mai întâi prin scăderi şi împărţiri că $y=\frac{x+z}{2}$, etc. Avem: 4, 1, -2; -4, -1, $+2$; $2\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$, 0; $-2\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$, 0. (G. M. XV.)

36. Ridicând ultima la patrat, avem $xy+xz+yz=0$; apoi ridicându-o la cub, găsim $3(x+y+z)(xy+xz+yz)+6xyz=0$, deci $xyz=0$, presupunând $z=0$, se găseşte apoi $xy=0$, $\therefore y$ (sau x)$=0$, apoi x (sau y)$=1$. **37.** Se foloseşte identitatea $(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3(x+y)(y+z)(z+x)$, se deduce $xyz=0$, etc.

38. Fie p, q, r coeficienţii lui x^2, x şi termenul liber, ca ecuaţia dată să admită rădăcinile -1, 0 şi $+1$, trebue să avem: $-1+p-q+r=0$, $r=0$, $1+p+q+r=0 \therefore p=0$, $r=0$, $q=-1$, adică $a+b+c=0$, $a^3+b^3+c^3-a^2b-a^2c-$ $-b^2a-b^2c-c^2a-c^2b=0$, $a^2+b^2+c^2-2ab-2ac-2bc=1$; se găseşte $\Sigma ab=-\frac{1}{4}$ şi $6abc=0$, deci: $a=0$. $b=\frac{1}{2}$,

$c=-\frac{1}{2}$. (G. M. III). **39.** Se vor elimina mai întâi x şi y adunând primele două şi folosind pe a treia; ecuaţia în z are rădăcinile 6 şi $-\frac{5}{2}$ etc. **40.** $x=4$, $y=3$, $u=2$, $v=1$, sau 7, 0, 1, 2. **41.** Se vor lua ca necunoscute produsele xy şi uv, se găseşte $xy=uv=480$, apoi $x=40$, $y=12$ sau invers şi $u=30$, $v=16$ sau invers. **42.** Prin scăderi şi împărţiri se găseşte: $z=5u-10$; $y=4u-3$; $x=23-10u$ apoi: $5u^2-16u+12=0$, deci: $x=3$, $y=5$, $z=0$, $u=2$ sau 11; 1, 8; -4; 1, 2. **43.** Adunând avem: $\Sigma x^2(y-z)=-(x-y)(y-z)(z-x)=a+b+c$; înmulţind avem: $x^2y^2z^2(x-y)(y-z)(z-x)=abc \therefore xyz=\pm\sqrt{\frac{-abc}{a+b+c}}=r$; sistemul poate fi scris atunci $\frac{a}{x}+\frac{r}{y}-\frac{r}{z}=0$, $\frac{b}{y}+\frac{r}{z}-\frac{r}{x}=0$, $\frac{c}{z}+\frac{r}{x}-\frac{r}{y}=0$; $\ast\ast\ast\; y=\frac{r+b}{r-a}x$, $z=\frac{r-c}{r+a}x$; se găseşte apoi $x=\sqrt[3]{\frac{r(r^2-a^2)}{(r+b)(r-c)}}$ etc.
44. Din primele două deducem $x=(a+r)z$, $y=(a-r)z$, $r=\sqrt{b-a^2}$, apoi substituind în cea de a treia ecuaţie $z=\frac{c}{\sqrt[n]{(a+r)^n+(a-r)^n+1}}$. **45.** Rezolvind două din ecuaţiile date în raport cu x şi y şi substituind în cea de a treia, ecuaţia în z se descompune în factorii: $z^2+z+1=0$ şi $(a-b+c)z^2-(a+b-3c)z-a+b+c=0$.
46. Fie $u=x+y+z$, $v=x^2+y^2+z^2 \therefore z=\frac{v-a}{u}$, $x=\frac{v-b}{u}$, $y=\frac{v-c}{u}$, adunând, ridicând apoi la patrat şi adunând, obţinem: $\frac{3v-(a+b+c)}{u}=u$, $\frac{3v^2-2(a+b+c)v+(a^2+b^2+c^2)}{u^2}=v$ $\therefore v=\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$, $u=\sqrt{\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{a+b+c}}$. **47.** Să punem $X=xu$, $Y=yv$, $Z=zw$ şi să înmulţim prima ecuaţie cu ultima, a doua cu a patra, iar a treia cu a cincea. Obţinem

(1) $X(Y+Z)^2=4abcd=K$, (2) $Y(Z+X)^2=4abcd=K$, (3) $Z(X+Y)^2=4abcd=K$. Scăzând primele două ecuații, avem $(X-Y)(Z^2-XY)=0$. Dacă luăm $X=Y$, (1) și (3) devin $X(X+Z)^2=K$, $4X^2Z=K$ și prin scădere $X(X-Z)^2=0$. Nu putem avea $X=0$, de oarece $K\neq 0$, deci $X=Z$ și atunci, $X=Y=Z=\varepsilon\sqrt[3]{abcd}$, ε fiind una din rădăcinile cubice ale unității. Ecuațiile propuse dau:

$$x=\frac{\varepsilon' bc}{\sqrt[3]{abcd}},\quad y=\frac{\varepsilon' ac}{\sqrt[3]{abcd}},\quad z=\frac{\varepsilon' ab}{\sqrt[3]{abcd}}\quad \varepsilon\varepsilon'=1,$$

$$u=\frac{\varepsilon' ad}{\sqrt[3]{abcd}},\quad v=\frac{\varepsilon' bd}{\sqrt[3]{abcd}},\quad w=\frac{\varepsilon' cd}{\sqrt[3]{abcd}}.$$

Dacă luăm $Z^2=XY$, înlocuind în (2) și (3) XY prin Z^2 și scăzând, $X^2+Y^2-Z(X+Y)=0$ sau $(X+Y)^2-Z(X+Y)-$ $-2Z^2=0$. Deci $X+Y=2Z$, $X+Y=-Z$. Rezolvând sistemul format de una din ecuații și $XY=Z^2$, găsim $X=Y=Z$ și $X=\varepsilon Z$, $Y=\varepsilon' Z$ și cum $1+\varepsilon+\varepsilon'=0$, avem $Z=\varepsilon_1\sqrt[3]{4abcd}$, $\varepsilon_1^3=1$. Avem

$$x=\frac{-2bc}{\varepsilon_1\sqrt[3]{4abcd}},\quad y=\frac{-2ac}{\varepsilon_1\sqrt[3]{4abcd}},\quad z=\frac{-2ab}{\varepsilon_1\sqrt[3]{4abcd}},$$

$$u=\frac{-2\varepsilon\varepsilon_1^2 ad}{\sqrt[3]{4abcd}},\quad v=\frac{-2\varepsilon'\varepsilon_1 bd}{\sqrt[3]{4abcd}},\quad w=\frac{-2\varepsilon_1^2 cd}{\sqrt[4]{4abcd}}$$

(G. M. XXXIX. p. 69).

48. Avem soluțiile $x^2=0$, $y^2=0$, $z^2=0$. Să notăm $x^2+y^2=\frac{1}{w}$, $x^2+z^2=\frac{1}{v}$, $y^2+z^2=\frac{1}{u}\cdot$ Sistemul devine $v+w=a$, $w+u=b$, $u+v=c$, notând $a+b+c=2p$. Și adunând ecuațiile, $u+v+w=p$, de unde $u=p-a$, $v=p-b$, $w=p-c$ și deci $x^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-b}+\right.$ $\left.+\frac{1}{p-c}-\frac{1}{p-a}\right)$, $y^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-c}+\frac{1}{p-a}-\frac{1}{p-b}\right)$, $z^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-a}+\right.$ $\left.+\frac{1}{p-b}-\frac{1}{p-c}\right)\cdot$ (G. M. XXXIX. p. 102). **49.** Se pune $\sum_1^n x_i = S$ şi avem $(S - x_1) S = (n-1) a_1$, $(S - x_2)$ $S = (n-2) a_2 \ldots (S - S_n) S = (n-1) a_n$ pe care însumându-le, $S(nS - S) = (n-1) \sum_1^n a_i$, $S = \pm \sqrt{\sum_1^n a_i}$. (G. M. XXXVI. p. 412).

50. Fie $S = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, ecuaţia de rangul i poate fi scrisă: $x_i(S - x_i) + i(i+1) S^2 = (2i+1)^2 a^2$ sau $x_i^2 - Sx_i + (2i+1)^2 a^2 - i(i+1) S^2 = 0 \therefore x_i = \frac{S \pm \sqrt{S^2 - 4(2i+1)^2 a^2 + 4i(i+1) S^2}}{2} = \frac{S + (2i+1)\sqrt{S^2 - 4a^2}}{2}$, făcând $i = 1, 2, \ldots n$ şi adunând avem: $2S = nS + \sqrt{S^2 - 4a^2} \cdot \sum_{i=1}^{i=n} (2i+1)$, ecuaţie care ne dă pe S.

51. Fie $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = a_1^2 - x_1 = a_2^2 - x_2 = \ldots = a_n^2 - x_n = u$, u este dat de ecuaţia: $nu^2 - (1 + 2\sum a_i^2) u + \sum a_i^4 = 0$. **52.** Ridicând la patrat cele două ecuaţii şi scăzând rezultatele unul din altul, avem (1) $1 - 2(x+y) + 4xy = a^2 - b^2$, izolând cel de al doilea radical din prima ecuaţie şi ridicând la patrat, avem: $x + y - 2a\sqrt{xy} = 1 - a^2$ (2); ecuaţiile (1) şi (2) avem $x = \frac{1}{2}[1 + a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}]$, $y = \frac{1}{2}[1 + a\sqrt{1-b^2} - b\sqrt{1-a^2}]$.

Verificarea: Calculând $\sqrt{xy}$ şi $\sqrt{(1-x)(1-y)}$ găsim respectiv: $\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-b^2}$ şi $\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-b^2}$, etc. **53.** Avem: $\frac{x}{y} = -\frac{1}{4}p \pm \frac{1}{2}\sqrt{q}$; pentru ca rădăcinele să fie reale trebue $p^2 - 4q > 0$, $p < 0$, $q > 0$. **54.** Prima ecuaţie se poate scrie $\sqrt{x^2 - y^2} = 2(y - 1)$; iar cea de a doua după ce am multiplicat numitorul cu 2, şi am aplicat o proprietate cunoscută a rapoartelor: $\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2 = \frac{34+30}{34-30} \therefore$ $x + y = \pm 4(x - y)$, luând semnul $+$ găsim $x = 5$, $y = 3$; luând semnul $-$ găsim $x = \frac{3(5-2i)}{29}$, $y = \frac{5(5-2i)}{29}$. **55.** $x = 729$,

$y=512$, sau $x=-512$, $y=-729$. **56.** Avem: $x-y=\frac{xy}{c}$, $x^2+y^2=\frac{x^2y^2}{c^2}+2xy$ deducem din prima ecuaţiune $(xy-c^2)^2=0$. $x=\frac{1}{2}c(1\pm\sqrt{5})$, $y=\frac{1}{2}c(-1\pm\sqrt{5})$. **57.** Punând $\sqrt[6]{x}=u$, $\sqrt[6]{y}=v$, $\sqrt[6]{2a}=b$, şi luând ca necunoscute $(u+v)$ şi uv, se găsesc sistemele următoare de soluţii $u_1=\frac{1}{2}b\sqrt{2}$, $v_1=\frac{1}{2}b\sqrt{2}$;

$$u_2=\frac{1}{2}b\left[\sqrt{\frac{3-\sqrt{2}}{2}}+\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}\right],\ v_2=\frac{1}{2}b\left[\sqrt{\frac{3-\sqrt{2}}{2}}-\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}\right];$$

$$u_3=\frac{1}{2}b\left[\sqrt{\frac{3+\sqrt{2}}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right],\ v_3=\frac{1}{2}b\left[\sqrt{\frac{3+\sqrt{2}}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right],$$

(G. M. II). **58.** Ridicând prima ecuaţiune la patrat şi observând că: $2x^2y^2+x^2\sqrt[3]{x^2y^4}+y^2\sqrt[3]{x^4y^2}=\left(\sqrt[3]{x^4y^2}+\sqrt[3]{x^2y^4}\right)^2$, se poate scrie $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$, iar a doua observând că ea este ecuaţia: $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{b}$, ridicată la cub; punând $\sqrt[3]{x}=u$, $\sqrt[3]{y}=v$, chestiunea se reduce la una cunoscută.

59. $\sqrt[3]{(x+2)(x+12)}=z+3$, $\sqrt{(x+1)(x+13)}=y+4$, sau $x^2+14x+24=z^3+9z^2+27z+27$, $x^2+14x+13=$ $=y^2+8y+16$, deci următorul sistem: z^3+9z^2+27z- $-y^2-8y=0$, $z+y=0$ înlocuind în prima ecuaţie pe y prin $-z$, sistemul devine $y=z$, $z^3+8z^2+35z=0$ (1). Deci $z=0$, $y=0$ sau $(x+2)(x+12)=27$, $(x+1)(x+13)=16$ care după reduceri se transformă în $x^2+14x-3=0$. Deasemenea avem din (1) $z^2+8z+35=0$, $z=-4$ $\pm\sqrt{-19}$ etc. (G. M. XXXIII. p. 353).

XV. **1.** Ecuaţia problemei $x(15-x)=54$, numerele sunt 6 şi 9. **2.** Ecuaţia problemei este $2x^2+5(11-x)^2=277$; $\therefore x=\frac{82}{7}$ şi $x=4$, cea de a doua soluţie singură convine. **3.** Fie x numărul din mijloc, ec. problemei este

$(x-1)x(x+1)$: $3x=a$ ∴ $x=\sqrt{1+3a}$, ca problema să fie posibilă trebue $a=\frac{1}{3}(k^2-1)$, k fiind un număr întreg. **4.** Ecauţiile problemei sunt: $x^2-y^2=xy=x+y$ ∴ $x=y=0$, sau $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, $y=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. **5.** Fie x prima parte, t timpul socotit în luni, ecuaţiile problemei sunt: $0,10xt=12\times400$; $0,12(8000-x)(t+8)=320\times12$ ∴ $x=6000$, $t=8$; părţile din capital sunt 6000 lei şi 2000 lei, iar timpul 8 luni şi 16 luni. **6.** Cele două numere fiind x şi y se găseşte: din ecuaţia a doua $\frac{x^2-xy+y^2}{x^2+y^2}=\frac{b}{a}$, $xy=\frac{a^2(b-a)}{2b-3a}$; $x, y=\frac{a}{2}\left[1\pm\sqrt{\frac{2b-a}{3a-2b}}\right]$. **7.** Ecuaţiile problemei: $\frac{x}{y}=\frac{z}{t}$. $x+t=7$, $y+z=5$, $x^3+y^3+z^3+t^3=252$. Se observă că: $x^2+t^2=49-2tx$, $x^3+t^3=7(49-3tx)$, etc. ∴ $x=1$, $y=2$, $z=3$, $t=6$. **8.** Presupunând că acei doi călători pleacă în acelaş moment din A şi B, x şi y distanţele făcute până la întâlnire şi t timpul întrebuinţat, avem: $x-y=40$, $9x=ty$, $25y=tx$ ∴ $x=100$ km, $y=60$ km deci: AB=160 km. **9.** Ecuaţiile problemei sunt: $vt-v't=2v(t-5)-v(t-5)=v(t+16)-2v'(t+16)=120$; eliminând pe v şi v' găsim: $t^2+22t-240=0$, soluţia pozitivă convine singură chestiunei; găsim apoi: $v=25$ m/oră, $v'=10$ m/oră. **10.** Se va lua ca necunoscută numărul de m. executaţi în plus sau în minus peste 20 m.; ecuaţiile problemei sunt, pentru primul caz: $(20-x)(10-x)=144$, în al doilea $(20+x)(10+x)=336$, deducem că în prima zi a lucrat 18 m, iar în a doua 24 m. **11.** a reprezentând numărul de metri, dela care pornind preţul unitar p se măreşte sau se micşorează, A suma cuvenită, ecuaţia problemei este: $(a+x)(p+\alpha x)-A=0$, x reprezentând numărul de m. execuţie în plus sau în minus peste a metri, iar α suma cu care se măreşte sau se micşorează preţul unitar. Pentru discuţie vom distinge 2 cazuri:

$a)$ $pa > A$, cele două rădăcini ale ecuației, care sunt totdeauna reale, sunt negative, una din rădăcini este mai mică ca $-a$ și alta mai mare, numai cea de a doua convine; $b)$ $p\alpha < A$. ecuația admite o rădăcină pozitivă și una negativă, numai cea pozitivă convine. In toate cazurile problema are o singură soluție. **12.** x fiind numărul moștenitorilor, ecuația problemei este: $\frac{a}{x-n} - \frac{a}{x} = b$ sau $bx^2 - bnx - an = 0$, soluția negativă nu convine, cea positivă convine dacă $\frac{an}{b} = \alpha(\alpha + n)$, α fiind un număr întreg pozitiv. **13.** Se vor avea în vedere formulele din fizică relative la căderea corpurilor; ecuația problemei este: $vt - \frac{1}{2}gt^2 = v'(t-5) - \frac{1}{2}g(t-5)^2$, v și v' vitezele cu care au fost asvârlite mobilele, g accelerația gravității; se găsește $t = \frac{5v' + 12{,}5g}{v' - v + 5g} = 7{,}66$ sec.; t fiind mai mare ca $\frac{v}{g}$ rezultă că un corp se urcă și altul se coboară etc. **14.** Ecuația problemei este: $(5x^2+4)(3x^2+4) = 1.9^5 + 6.9^3 + 1.9^2$, care dă $x = 8$. **15.** Fie $AB = a$, $OA = x$ raza cercului, dacă O este între A și B ecuația problemei este $4x^2 - 6ax + a^2 = 0$, iar dacă centru este în afară de segmentul AB și anume de partea lui A, ecuația problemei este $4x^2 + 2ax - a^2 = 0$; în ambele cazuri problema admite numai o soluție. (G. M. II). **16.** Se vor distinge două cazuri, după cum cercul înscris sau partea rămasă divide triunghiul în medie și extremă rație. In primul caz ecuația problemei este: $\pi^2x^2 - p\pi x - p^2 = 0$, iar în cel de al doilea caz ecuația este: $\pi^2x^2 - 3p\pi x + p^2 = 0$; în ambele cazuri avem câte o soluție, în cel de al doilea caz soluția care convine este aceia când luăm radicalul cu —. **17.** Fie $MN = x$, avem $BM = x \operatorname{cotg} \beta$, $AM = x \operatorname{cotg} \alpha$, $\overline{BM}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{AB}^2 - 2\overline{AB}.\overline{AM}.\cos\omega$; ecuația problemei este: $(\operatorname{cotg}^2\alpha - \operatorname{cotg}^2\beta)x^2 - 2ax \operatorname{cotg}\alpha . \cos\omega + a^2 = 0$, Ca problema să fie posibilă trebue $\sin\omega <$

$< \frac{\cotg\beta}{\cotg\alpha}$; se găseşte: *a*) ω ascuţit, $\alpha < \beta$, 2 soluţii, $\alpha > \beta$ o soluţie; *b*) $\omega = 90^0$, $\alpha < \beta$ nici o soluţie, $\alpha > \beta$ o soluţie *c*) ω obtuz, $\alpha < \beta$ nici o soluţie, $\alpha > \beta$ o soluţie. **18.** Fie $CD = x$, $CP = d$, $CP' = d'$, h înălţimea corespunzătoare vârfului A, $BC = a$, $AC = b$. Avem $S = m^2 = \frac{DE}{DP} \cdot \frac{(d + d')hx}{2b}$; pentru evaluarea raportului $\frac{DE}{DP}$ se va aplica teorema transversalelor triunghiului PBE tăiat de transversala AC; apoi având $\frac{\overline{DE}}{\overline{PD}} = \frac{a}{cd}\overline{AE}$ aplicăm triunghiului ABC cu transversala PDE şi obţinem: $\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = \frac{bd - dx}{ax + dx}$ *** $AE = \frac{(b - x)dc}{bd + ax}$; se găseşte $\frac{DE}{DP} = \frac{a(b - x)}{ax + bd}$ şi ecuaţia problemei este

$$ah(d + d')x^2 - ab(dh + d'h - 2m^2)x + 2b^2 dm^2 = 0,$$

punând $\frac{2bm^2}{ah(d + d')} = k$, ecuaţia precedentă devine $x^2 + (ak - b)x + bdk = 0$. Ca problema să fie posibilă trebue $0 < k < \frac{b[a + 2d - 2\sqrt{d(d + a)}]}{a^2}$, în acest caz ea admite două soluţii; $\frac{b[a + 2d - 2\sqrt{d(d + a)}]}{a^2}$ este valoarea lui k, pentru care suprafaţa triunghiului P'DE înscris în ABC este cea mai mare. **19.** Fie $AB = a$, $AC = b$, $BC = c$, $BP = x$, ecuaţia problemei este $\frac{c^2}{a^2}(a - x)^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2 = m^2$, $(b^2 + c^2)x^2 - 2ac^2 x + a^2c^2 - a^2m^2 = 0$; ca problema să fie posibilă trebue $m^2 \geq \frac{b^2c^2}{a^2} = h_a^2$ adică m mai mare ca lungimea perpendicularei scoborâtă din O pe ipotenusă, cea mai mică valoare pe care poate să o ia m este lungimea acestei perpendiculare. Soluţia negativă se poate interpreta şi problema admite două soluţii. **20** Fie a şi b înălţimea şi baza dreptunghiului, trebue să avem: $\frac{1}{3}\pi a^2 x + \frac{1}{3}\pi$

$(b-x)\,[(a+x)^2+a^2+a\,(a+x)]=\pi a^2 b \therefore x\,[x^2+(3a-b)\,x-a\,(3b-2a)]=0$, soluţia problemei este dată în toate cazurile de formula $x=\frac{b-3a+\sqrt{b^2+6ab+a^2}}{2}$. Soluţia $x=0$ este evidentă, soluţia negativă se poate interpreta. (G. M. IV). **21.** Fie $OM=x$, $MF=y$, ecuaţiile problemei sunt: $x^2+y^2=a^2+b^2$, $\frac{x-a}{a}=\frac{y}{b} \therefore (a^2+b^2)\,x^2-2\,ab^2x-a^4=0 \therefore x=\frac{a\,(b^2+\sqrt{a^4+a^2b^2+b^4})}{a^2+b^2}$; ambele soluţii convin, soluţia pozitivă ne dă un punct dincolo de A, iar cea negativă unul dincoace de O. **22.** Insemnând cu x distanţa planului secant la vârful conului, trebue să avem $\pi\,(2Rx-x^2)-\frac{1}{3}\pi x^2=\pi a^2 \therefore x=\frac{3R\pm\sqrt{9R^2-12a^2}}{4}$, ca problema să fie posibilă trebue $a^2<\frac{3}{4}R^2$, adică S poate fi cel mult egal cu $\frac{3}{4}$ din suprafaţa unui cerc mare; dacă condiţiunea precedentă e împlinită ambele soluţii convin, ele fiind cuprinse între 0 şi $\frac{3}{2}R$. **23.** $2x$ reprezentând lungimea coardei şi y distanţa ei la centru, ecuaţiile problemei sunt $2x+y=l$, $x^2+y^2=R^2$, eliminând pe y avem ecuaţia: $5x^2-4lx+l^2-R^2=0$ (1). Ca problema să fie posibilă trebue să avem $5R^2-l^2>0$, $0<x<R$, $0<y<R$; distingem următoarele cazuri: a) $0<l<R$, rădăcinile ecuaţii (1) sunt una pozitivă alta negativă, rădăcina negativă nu convine, iar rădăcina pozitivă este mai mare ca $\frac{1}{2}l$, ceea ce dă pentru y o valoare negativă, deci în acest caz nici o soluţie; b) $R<l<2R$, ecuaţia (1) are două rădăcini pozitive, una mai mică ca $\frac{1}{2}l$ şi alta mai mare, la cea dintâi corespunde o soluţie la cea de a doua nu; c) $2R<l<R\sqrt{5}$, problema admite două soluţii; d) $l>R\sqrt{5}$, nici o soluţie. **24.** Insemnând cu h înălţimea, cu a

generatoarea, V volumul şi punând $\frac{3V}{\pi h} = b^2$, razele bazelor sunt:

$x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4b^2 + h^2 - a^2}{3}} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - h^2}$ şi $y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4b^2 + h^2 - a^2}{3}}$ $+ \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - h^2}$. **25.** Fie trapezul ABCD, $\overline{AD} = z$ înălţimea, $x < y$ lungimile bazelor $\overline{AB} < \overline{CD}$, $\overline{BC} = l$; a^2 şi $\frac{1}{3}\pi c^2$ suprafaţa şi volumul dat, $\overline{AF}$ şi $\overline{DE}$ fiind perpendicularele pe BC, din ariile triunghiurilor DBC şi ABC avem: $\overline{DE} = \frac{yz}{l}$, $\overline{AF} = \frac{xz}{l}$; $\overline{CE} = \frac{y}{l}(y - x)$, $\overline{BF} = \frac{x}{l}(y - x)$. z este dat de ecuaţia: $z^4 - l^2 z^2 + 4b^3 l - 12a^4 = 0$; iar laturile paralele sunt: $x, y = \frac{a^2}{z} \pm \sqrt{\frac{l^2 - z^2}{4}}$. Pentru $l < 2a$ trebue $\frac{3a^4}{l} < b^3 < \frac{4a^4}{l}$, iar pentru $l > 2a$ trebue $\frac{3a^4}{l} <$ $b^3 < + \frac{3a^4}{l} + \frac{l^3}{16}$. (G. M. II). **26.** 39 m., 80 m., 89 m.

27. x, y, z fiind laturile triunghiului avem: $x^2 + y^2 = z^2$, $x + y + z = 2p$, $R(x + y + z) = x\,y$, x şi y sunt rădăcinile ecuaţiei $u^2 - (p + R)u + 2pR = 0$. Pentru ca rădăcinile acestei ecuaţii să convină chestiunei, ele trebue să fie reale, pozitive şi mai mici ca $p - R$; pentru ca să fie reale trebue $p^2 - 6pR + R^2 > 0$ $\therefore$ $p > R(3 + 2\sqrt{2})$ sau $p < R(3 - 2\sqrt{2})$, cum $p > R$ rezultă că trebue $p > R(3 + 2\sqrt{2})$; dacă această condiţie e îndeplinită, cele 2 rădăcini sunt reale, pozitive şi mai mici ca $p - R$, problema admite o soluţie. Cea mai mică valoare a lui p este $R(3 + 2\sqrt{2})$. **28.** Insemnând cu x distanţa coardei BC la centrul cercului şi cu y pe $\overline{AB}$, folosind asemănarea triunghiurilor dreptunghiuri formate şi proprietatea puterii unui punct, găsim: $\overline{AB} = \sqrt{a^2 - x^2} - \sqrt{r^2 - x^2}$, $\overline{AC} = \sqrt{a^2 - x^2} + \sqrt{r^2 + x^2}$, apoi ecuaţia problemei este:

$4x^4-(2R^2-2a^2-ma^2)x^2-4a^2R^2=0$. **29.** x reprezentând raza bazei şi $2y$ înălţimea, x este dat de ecuaţia: $5x^4-2(m^2+$ $+2R^2)x^2+m^4=0$. Observăm că dacă în ecuaţiunea în x^2 substituim în locul lui x^2 valorile: O, $\frac{R^2}{5}$, R^2 având condiţiunea $m^2 \leqq R^2\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ îndeplinită, vedem că O şi R^2 sunt în afară de intervalul rădăcinilor, iar $\frac{R^2}{5}$ dacă $m^2<R^2$ este între rădăcini, dacă $m^2=R^2$ ea este o rădăcină şi dacă $m^2>R^2$ ea este în afara inservalului rădăcinilor. Problema are două soluţii; pentru $m^2=R^2\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ avem o singură soluţie; $R^2\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ reprezintă cea mai mare valoare pe care poate să o ia m^2. **30.** Se va arăta că cercul tangent la trei din laturile trapezului, obţinut tăind trunchiul de con printr'un plan trecând prin axa lui, este tangent şi la a patra latură. Razele celor două baze fiind x şi y, avem: $4xy=i^2$, x^2+y^2+ $+(x+y)^2=a^2$; x şi y sunt rădăcinile ecuaţiei: $u^2-\frac{\sqrt{2a^2+i^2}}{2}u$ $+\frac{i^2}{4}=0$. Ca problema să fie posibilă trebue să avem $a^2>$ $>\frac{3}{2}i^2$, în care caz avem o soluţie, când $a^2=\frac{3}{2}i^2$ trunchiul de con se reduce la un cilindru. **31.** x reprezentând distanţa punctului, unde cea de a treia tangentă tae una din laturile unghiului, distanţă socotită de la vârful unghiului drept, y lungimea analoagă la cealaltă tangentă dată, avem: $xy=2m^2)$ $x^2+y^2=(x+y-2R)^2$. x şi y sunt rădăcinile ecuaţiei: $u^2-\frac{m^2+R^2}{R}u+2m^2=0$; ca problema să fie posibilă trebue $m^2>R^2(3+2\sqrt{2})$ sau $m^2<R^2(3-2\sqrt{2})$; $R^2(3+2\sqrt{2})$, reprezintă cea mai mică valoare pe care poate să o ia m^2 din şirul de valori mai mari ca acesta, iar $R^2(3-2\sqrt{2})$ cea mai mare. Cercul este realmente înscris

în triunghiul format, dacă x şi y sunt mai mari ca $2R$, deducem $m^2 > 2R^2$; când x şi y sunt mai mici ca $2R$ cercul este exinscris, cea de a doua condiţie $m^2 < (3-2\sqrt{2})R^2$ corespunde la acest caz. **32.** Fie $AD=x$, $BC=y$, ecuaţiile problemei sunt $R(x^2+xy+y^2)=2r^3$, $xy=R^2$, R fiind raza cercului iar r raza sferei; ecuaţiile de mai sus dau: $x_1 = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{2r^3+R^3}{R}}+\sqrt{\frac{2r^3-3R^3}{R}}\right]$, $y_1 = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{2r^3+R^3}{R}}-\sqrt{\frac{2r^3-3R^3}{R}}\right]$ **33.** a fiind latura triunghiului dat, aplicând teorema lui Stewart triunghiurilor BAC şi ABC respectiv la punctele N şi P avem: $\overline{AN}^2 = 4x^2-2ax+a^2$ $\overline{BP}^2 = 9x^2-3ax+a^2$; apoi triunghiurilor ANB, ANC şi APB, avem: $\overline{MN}^2 = 7x^2-4ax+a^2$, $\overline{NP}^2 = 19x^2-7ax+a^2$, $\overline{MP}^2 = 13x^2-7ax+a^2$; cele trei laturi ar putea forma un triunghiu dreptunghic în trei moduri, obţinem astfel condiţiile $x^2-4ax+a^2=0$ sau $25x^2-10ax+a^2=0$ sau $13x^2-4ax+a^2=0$. Problema admite trei soluţiuni distincte. Ca punctele M, N, P să fie în linie dreaptă trebue să avem $11x^2-6ax+a^2=0$, care are rădăcinile imaginare. **34.** Fie ABC secţiunea cerută, $AB'C'$ secţiunea normală trecând prin A, $BB'=x$, $\overline{CC'}=y$, avem $(x-y)^2+m^2=a^2$, $m^2+x^2=b^2$, $m^2+y^2=c^2$, $16k^4=4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2=3m^4+4m^2(x^2+y^2-xy) \therefore (x+y)^2 = \frac{16k^4-3a^2m^2}{m^2}$, $(x-y)^2=a^2-m^2$. Ca problema să fie posibilă trebue $a>m$, $16k^4>3a^2m^2$. **35.** Avem: $x^2+y^2=x'^2+y'^2=a^2$, $xy+x'y'=2S$, $x+y+x'+y'=2p$; să punem $u=p-x-y=x'+y'-p$, găsim apoi $2xy=(p+u)^2-a^2$, $2x'y'=(p-u)^2-a^2$ $u=\pm\sqrt{a^2+2S-p^2}$, etc.

XVI. **1.** Deducem: $b^2+2xy=c^2$, $a^3+3cxy=c^3 \therefore 3b^2c-2a^3=c^3$. **2.** Adunând şi scăzând primele două ecuaţii avem $(x+y)^3=(a+b)r^2$, $(x-y)^3=(a-b)r^2 \therefore x+y=\sqrt[3]{(a+b)r^2}$, $x-y=\sqrt[3]{(a-b)r^2}$,

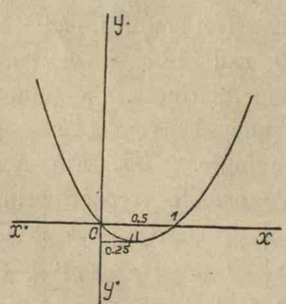
$(x+y)^2+(x-y)^2=2\,r$, deci: $(a+b)^{\frac{2}{3}}+(a-b)^{\frac{2}{3}}=2\,r^{\frac{2}{3}}$.

3. Punând: $\dfrac{x}{z}=u$, $\dfrac{y}{z}=v$ şi scăzând din a treia ecuaţiune pe a doua, obţinem ţinând seama de prima: $au+vb=au^2+bv^2=-c$; găsim apoi: $u=\dfrac{b-c}{a-b}$, $v=\dfrac{c-a}{a-b}$ *** $a(b-c)^2+b(c-a)^2+$ $+c(a-b)^2=0$ sau: $(a+b)(a+c)(b+c)-8abc=0$. **4.** Se observă că espresiunea:

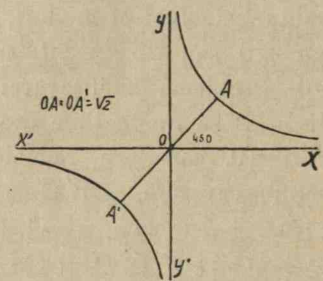
$$E=\frac{(x-y-z)^2(y-z)+(y-z-x)^2(z-x)+(z-x-y)^2(x-y)}{(x-y)(y-z)(z-x)}$$

este constantă şi egală -4, deci: $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=4$. **5.** $A^2=$ $=B^2+2\,C^2$. **6.** Un cerc cu centrul în origină şi cu raza egală cu 1.

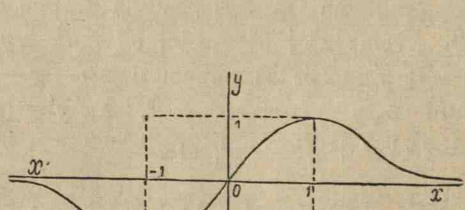
7.

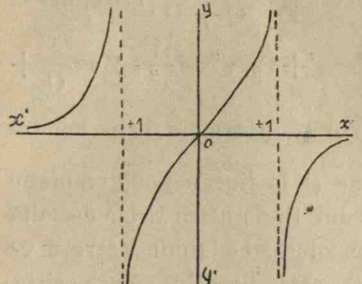


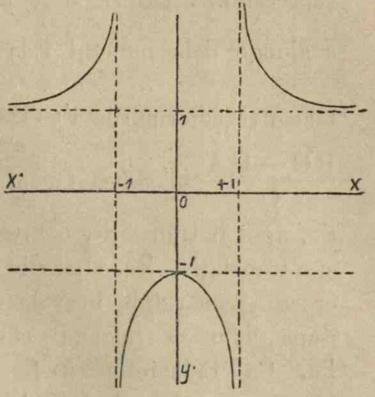
8.



9. Se va rezolva în raport cu x şi se va determina între ce limite trebue să rămână y ca x să fie real; se găseşte: $-1\leqslant y\leqslant 1$.



10. 

11. 

12. Punctele din interiorul cercului descris din origină cu raza 2. **13.** Se va scrie $(x-1)^2+(y-1)^2-2<0$; punctele din interiorul cercului având ca origină punctul de coordonate 1, 1 şi raza $\sqrt{2}$. **14.** Punctele din partea concavă a curbei $y=x^2$ care conţine partea pozitivă a axei yy'). **15.** OB reprezentând bisectoarea unghiului xOy, punctele din interiorul unghiului BOy şi unghiul opus acestuia. **16.** Punctele din interiorul segmentului limitat de cercul descris din origină cu raza 1 şi coarda AB, A şi B fiind situaţi respectiv pe Ox şi Oy la distanţa 1 de origină. **17.** Punctele din interiorul coroanei circulare formată de cercurile de raze 1 şi 2, descrise din origină ca centru. **18.** Punctele din partea comună iperbolei echilatere şi cercului cu centrul în origină şi raza 2. **19.** Se vor suprapune figurile dela 9 şi 10. **20.** Se va pune $\sqrt{i}$ sub forma $a+bi$, se găseşte $a=b=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$, deci $\sqrt{i}$ va fi reprezentat prin două din vârfurile patratului înscris în cercul de rază 1, cu centrul în origină, patratul având laturile paralele cu axele de coordonate. **21.** Avem $\frac{k+i}{k-i}=\frac{k^2-1}{k^2+1}+i\frac{2k}{k^2+1}$, când k variază punctul reprezentativ descrie cercul cu raza 1 şi cu centrul în origină. **22.** Punctul

reprezentativ descrie dreapta: $a'x - ay = a'b - ab'$. **23.** Pentru a ajunge dela punctul z la punctul $Z = \frac{A + Bz}{C + Dz}$, trebue să facem transformările $z' = Dz$, $z'' = z' + C$, $z''' = \frac{1}{z''}$, $Z = \frac{A}{C} + \frac{BC - DA}{C} z'''$ adică facem întâi o transformare prin omotetie, apoi o translație, o inversiune și în fine o nouă omotetie și o translație. **24.** Una din rădăcini tinde către 1, iar cealaltă crește nemărginit în valoare absolută, ea tinde către $\pm\infty$ după cum m tinzând către 0 este negativ sau pozitiv. **25.** Ca rădăcinile să fie reale trebue ca m să tindă către zero prin valori pozitive; în acest caz una din rădăcini tinde către $+\infty$, iar cealaltă către $-\infty$. **26.** Fie $x_1 + \varepsilon$ una din rădăcinile ultimei ecuații, ținând seama că x_1 este o rădăcină a primei ecuații, trebue să avem: $(a + \alpha)\varepsilon^2 + (2ax_1 + 2\alpha x_1 + b + \beta)\varepsilon + \alpha x_1^2 + \beta x_1 + \gamma = 0$, când α, β, γ tind către zero, una din rădăcinile ecuației precedente tinde către zero, iar alta către $-(2ax_1 + b) : a$, deci rădăcinile celei de a doua din ecuațiile considerate vor tinde: una către $x_1 + 0 = x_1$, alta către $x_1 - \frac{2ax_1 + b}{a} = -x_1 - \frac{b}{a} = x_2$. **27.** Punând $\alpha : \alpha' = \lambda$ între această relație și relațiile $\alpha^2 + a\alpha - a^2 = 0$, $\alpha'^2 + \alpha' - a = 0$ se va elimina α și α' se va simplifica și în urmă se va face $a = 0$, λ este dat de ecuația $\lambda^4 - \lambda^3 - \lambda^2 = 0$ care dă pentru λ valorile: 0, 0, $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. (G. M. VI).
28. Rădăcinile sunt $x_1 = 1 - \sqrt{1 + m^2}$, $x_2 = 1 + \sqrt{1 + m^2}$; când m crește dela $-\infty$ la 0, x_1 crește dela $-\infty$ la 0, iar x_2 descrește dela $+\infty$ la $+2$; când m crește dela 0 la $+\infty$, x_1 descrește dela 0 la $-\infty$, iar x_2 crește dela $+2$ la $+\infty$. **29.** Rădăcinile sunt totdeauna reale și diferite; pentru $m = -\infty$ rădăcinile sunt $x_1 = -1$, $x_2 = +1$; când m crește una din rădăcini crește în valoare absolută, iar cealaltă descrește, căci produsul lor este totdeauna -1; când m tinde către zero, fiind negativ, una din rădăcini tinde către 0 cea-

laltă către $-\infty$, cum rădăcinile sunt necontenit diferite, rezultă că x_1 a variat dela -1 la $-\infty$, iar x_2 dela 1 la 0; când m trece de zero, rădăcina care era $-\infty$ sare la $+\infty$, iar când m variază dela 0 la $+\infty$, x_1 variază dela $+\infty$ la $+1$ şi x_2 dela 0 la -1. In rezumat x_1 variază dela -1 la $-\infty$ apoi dela $+\infty$ la $+1$, iar x_2 variază între -1 şi $+1$. **30.** Ca x să fie real trebue $\frac{6-2\sqrt{3}}{3} < m < \frac{6+2\sqrt{3}}{3}$.

Pentru $m=\frac{6-2\sqrt{3}}{3}$, $x_1=x_2=2+\sqrt{3}$; când m variază dela valoarea precedentă la 1, apoi dela această valoare până la $\frac{6+2\sqrt{3}}{3}$, x_1 variază de la $2+\sqrt{3}$ la $+\infty$, apoi sare la $-\infty$ şi creşte până la $2-\sqrt{3}$, x_2 variază dela $2+\sqrt{3}$ la 2 apoi continuă să descrească până la $2-\sqrt{3}$. **31.** Trebue să avem $f\,(1000)>0$; $m<0$ şi $\left|\frac{2m}{1+2m+\sqrt{1+4m}}\right|<\frac{1}{10^3}$.

32. Avem $x=1+0{,}01\,x^2$, aplicând metoda aproximaţiilor succesive găsim: $x_1=1$, $x_2=1{,}01$, $x_3=1{,}010201$, $x_4=1{,}010204\ldots$ **33.** $\frac{1}{2}<m<\frac{1+\sqrt{13}}{4}$ (G. M. XI).

34. Expresiunea poate fi scrisă: $E=\frac{xy\,(y^n-x^n)}{x^n y^n (y-x)}-\frac{y\,(y^n-x^n)}{x^n y^n (y-x)}+$ $+2\frac{x-1}{x+1}\,\frac{y\,(y^n-1)}{(y-1)\,y^n}$; dar: $(a+1)\,x^2+(a-2)\,x+1=0$, $xy=\frac{1}{a+1}$, $x+y=-\frac{a-2}{a+1}$ deci: $\frac{x-1}{x+1}=-a\frac{x}{x-1}$ şi $\frac{2axy}{(x-1)(y-1)}=+1$ ***

$$E=\frac{1}{x^{n-1}y^{n-1}}\cdot\frac{x^n-y^n}{x-y}-\frac{1}{x^n y^n}\,\frac{x^{n+1}-y^{n+1}}{x-y}+1.$$ (G.M.XLII. p.532).

35. Notăm $\Delta_m=\frac{P_{m+1}}{a+b}-\frac{m+2}{2(m+1)}P_m$ şi cum $(2n+2)\,P_{n+1}-(m+2)\,(a+b)\,P_m=(a-b)^2\,[P_{m-1}+P_1\,P_{m-2}+\ldots+P_{m-1}]$ urmează $\Delta_m=\frac{(a-b)^2}{2(m+1)}\cdot\frac{P_{m-1}+P_1\,P_{m-2}+\ldots+P_{m-1}}{a+b}$. Avem

$P_{2n}=\dfrac{a^{2n+1}-b^{2n+1}}{a-b}=a^{2n}\dfrac{1-\left(\dfrac{b}{a}\right)^{2n+1}}{1-\dfrac{b}{a}}$; P_{2n} este totdeauna pozitiv. $P_{2n+1}=\dfrac{a^{2n+2}-b^{2n+2}}{a-b}=(a+b)a^{2n}\dfrac{1-\left(\dfrac{b^2}{a^2}\right)^{n+1}}{1-\dfrac{b^2}{a^2}}$; P_{2n+1} are semnul lui $a+b$. $\Delta_{2n}=\dfrac{(a-b)^2}{2(2n+1)}\,\dfrac{P_{2n-1}+P_1P_{2n-2}+\ldots+P_{2n-1}}{a+b}$, deci $\Delta_{2n}>0$ deoarece numărătorul fracţiei a doua are semnul lui $a+b$, sau $\dfrac{P_{2n+1}}{a+b}-\dfrac{n+1}{2n+1}P_{2n}>0$. Analog $\dfrac{\Delta_{2n+1}}{a+b}>0$ conduce la $\dfrac{P_{2(n+1)}}{(a+b)^2}-\dfrac{2n+3}{4(n+1)}\,\dfrac{P_{2n+1}}{a+b}>$ şi schimbând pe $n+1$ în n, avem $\dfrac{P_{2n}}{(a+b)^2}-\dfrac{2n+1}{a+b}\,\dfrac{P_{2n-1}}{a+b}>0$. Din negalităţile stabilite deducem $\dfrac{P_{2n+2}}{(a+b)^2}>\dfrac{2n+3}{4(2n+1)}P_{2n}$. Punând pe rând $n=0, 1, 2\ldots$ şi multiplicând inegalităţile avem: $P_{2n}>\dfrac{2n+1}{4n}(a+b)^{2n}$ sau $P_{2n}>(2n+1)\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^{2n}$. Deasemenea din primele două inegalităţi deducem $\dfrac{P_{2n+1}}{(a+b)^3}>\dfrac{n+1}{4n}\cdot\dfrac{P_{2n-1}}{a+b}$ şi punând $n=1, 2\ldots$, multiplicând apoi $P_{2n+1}>\dfrac{n+1}{4^n}(a+b)^{2n+1}$. (G.M. XXXVIII. p.99).

36. Se va forma ecuaţia care are ca rădăcini pe $x_1=p+\sqrt{p^2-q^2}$ şi $x_2=p-\sqrt{p^2-q^2}$. Calculând, după ridicarea celor doi membri la patrat, pe $x_1^7+x_2^7+29^7$ şi simplificând cu $2(p+q)$ se găseşte $A^2=64p^6-112p^5q^2-48p^4q^2+48p^3q^3+8p^2q^4-8pq^5+q^6$. Punând apoi: $A=8p^3+\alpha p^2q+\beta pq^2+q^3$, se găseşte $A=8p^3-4p^2q-4pq^2+q^3$. (G.M. VII). **37.** Trebue ca $\sqrt{B+\sqrt{C}}$ să se poată pune sub forma $a+\sqrt{b}$, condiţiile sunt: $B^2-C=m^2$, $B+m=2n^2$. $A^2+2An+m=p^2$; m, n, p numere raţionale, care trebue să facă pe A raţional. (G. M. XI).

38. H$\leqslant$T sau $2ab \leqslant ab-1+\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}$ sau $ab+1 \leqslant\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}$. Ridicând la patrat, obţinem o inegalitate evidentă. T$\leqslant$A sau $2\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}\leqslant 2+a^2+b^2$. Ridicăm la patrat, etc. (G.M. XXXVIII .p. 396). **39.** Fie $x=\alpha+\beta i$, ca expresiunea dată să fie reală trebue $2\alpha\beta-\alpha^2+\beta^2-2\alpha+1=0$, sau $\alpha^2-2(\beta-1)\alpha-(\beta^2+1)=0$ $\therefore$ $\alpha=\beta-1\pm\sqrt{2(\beta^2+\beta+1}$, β arbitrar, expresiunea dată este reală pentru valorile reale ale lui $x=-1\pm\sqrt{2}$; semnul său este acela al expresiunei $T=\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta+2\beta+1$. (G. M. VIII). **40.** Dacă ecuaţia dată ar avea ambele rădăcini reale, ecuaţiile $ax^2+bx+c=0$ şi $a'x^2+b'x+c'=0$ ar avea ambele rădăcini comune, deci $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{1}{k}$ $\therefore$ $a'=ka \ldots A=(1+k)ai \ldots$ şi coeficienţii A, B, C nu ar fi primi între ei. Ca ecuaţia dată să aibă o rădăcină reală şi una imaginară, trebue ca ecuaţiile precedente să aibă o singură rădăcină comună, deci: $(ac'-ca')^2-(ab'-ba')(bc'-cb')=0$, fără ca vre-unul din factorii $ac'-ca' \ldots$ să se anuleze (G. M. III).

XVII. 1. $S=\frac{[2a+(n-1)r]n}{2}$; $a=\frac{S}{n}-\frac{(n-1)r}{2}$; $r=\frac{2(S-an)}{n(n-1)}$; $n=\frac{-(2a-r)\pm\sqrt{(2a-r)^2+8rS}}{2r}$. Ca valorile lui n să fie admisibile ele trebue să fie reale, întregi şi pozitive; când $Sr>0$, problema nu poate admite decât o soluţie, dacă $Sr<0$ şi $2a-r<0$ am putea avea 2 soluţii; în aplicaţia propusă putem avea $n=3$ sau $n=6$, ambele admisibile. **2.** In 12 ore sună: $12(1+2+3+4)+ +(1+2+\ldots+12)=198$, iar în 24 ore 396. **3.** Avem: $\frac{n^2(n^2+1)}{2}=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2+\left[\frac{n(n-1)}{2}\right]^2$. **4.** x reprezentând termenul din mijloc şi y raţia, avem: $x=\frac{1}{3}S$. $y= +\sqrt{\frac{S^3-27P}{9S}}$. **5.** Notaţiile fiind cele precedente, termenul

din mijloc va fi $x=\frac{1}{5}$S, iar raţia este dată de ecuaţia: $4y^4-\frac{1}{5}S^2y^2+\frac{1}{625}S^4-\frac{5P}{S}=0$. Numărul soluţiunilor reale depinde de semnul expresiunilor $S\left(S+10\sqrt[5]{\frac{P}{18}}\right)$ şi $S(S-5\sqrt[5]{P})$. Pentru S=15 şi P=120 găsim $x=3$; $y=\pm1$ sau $y=\pm\sqrt{\frac{41}{4}}$ şi progresiunile sunt: 1. 2. 3. 4. 5 sau $3-2\sqrt{\frac{41}{4}}\cdot 3-\sqrt{\frac{41}{4}}\cdot 3.3+\sqrt{\frac{41}{4}}\cdot 3+2\sqrt{\frac{41}{4}}$ sau inversele lor. **6.** $\pm\sqrt{r^2+3}-r.\pm\sqrt{r^2+3}.\pm\sqrt{r^2+3}+r$; când $r=1$: 1. 2. 3 sau —1. —2. —3, **7.** $\frac{1}{n}$ şi $\frac{1}{2}(n+1)$.
8. Se va avea în vedere condiţia pentru ca raportul $\frac{ax+b}{a'x+b'}$ să fie independent de x; progresiunea căutată este $a.3a.5a...$
9. Din egalitatea $\frac{1}{b+c}-\frac{1}{a+c}=\frac{1}{a+c}-\frac{1}{a+b}\therefore$ $a^2-b^2=b^2-c^2$. **10.** Din egalitatea $\frac{2b}{a+c}=\frac{a}{b+c}+\frac{c}{a+b}\cdot$ $\therefore (a+b+c)(2b^2-a^2-c^2)=0$. **11.** Trebue să avem: $(a+mr)+(a+nr)=a+pr \;\therefore\; a+(m+n)r=pr$, adică un termen al progresiunei să fie un multiplu al raţiei. **12.** α, β, p şi q pot forma o progresiune aritmetică în 6 moduri diferite. Ţinând seamă de relaţiunile: $q=\alpha\beta$ şi $p=\alpha+\beta$, se găseşte că soluţiile distincte sunt $x^2-6x+8=0$, $3x^2-10x+8=0$, $3x^2-8x+4=0$, $x^2-4=0$. (G. M .VI.). **13.** Fie $b=a+r$, $c=a+2r$, $d=a+3r$; se găseşte imediat că numerele B, C, D, E sunt în progresiune aritmetică. Pentru ca şi A să facă parte din progresiune trebue $a=-4r$ sau $a=r$. Dacă numerele $a_1.\,a_2...a_n$ sunt în progresiune aritmetică numerile $A_2=a_1+a_2+...+a_{n-1}-a_n=A_1-2a_n$, $A_3=a_1+a_2+...-a_{n-1}+a_n=A_1-2a_{n-1}$... sunt de asemenea în progresiune aritmetică, şi pentru ca şi A_1 să facă parte din acea progresiune trebue $a_1=-nr$ sau $a_1=r$. **14.** Linia

de rangul n începe cu termenul de rangul $(1+3+5+\ldots+2n-3)+1=(n-1)^2+1$, acest termen este $1+4(n-1)^2$, iar ultimul termen din această linie va fi $4n^2-3$, suma lor este: $\frac{1}{2}[1+4(n-1)^2+4n^2-3](2n-1)=(2n-1)^3$. **15.** Generalizarea chestiunei precedente. Se va căuta, în progresiunea dată, rangul primului şi ultimului termen din linia de rangul n; aceste ranguri sunt $n+\frac{1}{2}(n-1)(n-2)b$ şi $n+\frac{1}{2}n(n-1)b$, suma căutată este: $\left\{1+\left[n-1+\frac{(n-1)(n-2)b}{2}\right]a+1+\left[n-1+\frac{n(n-1)b}{2}\right]a\right\}\left[\frac{1+(n-1)b}{2}\right]=$ $=\left[1+(n-1)a+\frac{(n-1)^2}{2}ab\right]\left[1+(n-1)b\right]$; făcând $b=2$, $a=4$ se regăseşte rezultatul din problema precedentă. **16.** 4. 8. 12. 16 sau $-4.\ -8.\ -12.\ -16.$ **17.** Fie x, y şi $2n$ primul termen, raţia şi numărul termenilor, avem: $n[x+(n-1)y]=70$, $n(x+ny)=85$, $x[x+(2n-1)y]=58$; rezolvând în raport cu y şi n găsim $y=\frac{3(x+15)}{17}$, $n=\frac{85}{x+15}$, apoi x este dat de ecuaţia $14x^2+465x-986=0$: singura soluţie care convine este $x=2$, cealaltă dă pentru n o valoare fracţionară, progresiunea este 2. 5. 8. 11. 14. 17. 20. 23. 26. 29. **18.** Laturile triunghiului pot fi reprezentate prin $a-r$, a şi $a+r$ ultima reprezentând ipotenusa; se va avea în vedere relaţiile ce există între laturile unui triunghiu dreptunghic, suprafaţa sa, perimetrul şi raza cercului înscris. **19.** Fie x numărul adăogat, cele 3 numere devin $1+x, x, x-\frac{3}{4}$, ele pot forma o progresiune geometrică în 3 moduri $1+x:x:\left(x-\frac{3}{4}\right)$ sau $x:(1+x):\left(x-\frac{3}{4}\right)$ sau $x:\left(x-\frac{3}{4}\right):(1+x)$; în primul caz găsim $x=3$ şi raţia $\frac{3}{4}$, în al doilea caz $x=-\frac{4}{11}$ şi raţia

$-\frac{7}{4}$, în al treilea caz $x=\frac{9}{40}$ şi raţia $-\frac{7}{3}$. **20.** Ecuaţiile problemei sunt $y^2=xz$, $2(y+8)=x+z$, $(y+8)^2=x(z+64)$.·. $4:12:36$ şi $\frac{4}{9}:-\frac{20}{9}:\frac{100}{9}$. **21.** x fiind termenul dela mijloc şi y raţia, avem $x^5=\mathrm{P}$, apoi $\frac{x}{y^2}+\frac{x}{y}+x+xy+xy^2=\mathrm{S}$, care este în raport cu y o ecuaţie reciprocă de gradul al 4-lea. ce o putem rezolva. **22.** Raţia este 2 şi suma termenilor 3069. **23.** Exprimând că o latură este mai mică decât suma celorlalte două, găsim că raţia progresiunei trebue să verifice inegalitatea $r^2-r-1<0$. **24.** Trebue să avem $\left(\frac{1}{b+c}\right)^2=\frac{1}{(a+b)(c+a)}$ etc. (S. E. G. M. III. p. 42). **25.** Avem suma termenilor unei progresii geometrice de raţie $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.

$$\mathrm{S}=\frac{1-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^{n+1}}{(a-b)^n(1-\sqrt{a}+\sqrt{b})}.$$ (S. E. G. M. I. p. 38). **26.** Suma termenilor unei progresii geometrice de raţie $\frac{1}{\sqrt[m]{a}\sqrt[n]{b}}$;

$$\mathrm{S}=\frac{1-(\sqrt[m]{a}\sqrt[n]{b})^{r+1}}{\sqrt[n]{b^{2r}}(1-\sqrt[m]{a}\sqrt[n]{b})}.$$ (S.E.G.M.I. p.38). **27.** Suma dată se descompune în: $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\ldots+\frac{1}{a^n}\right)+\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}+\ldots+\frac{1}{a^n}\right)+\ldots$

$$\ldots+\frac{1}{a^n}=\frac{1}{a-1}\left[\left(1-\frac{1}{a^n}\right)+\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a^n}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{a^{n-1}}-\frac{1}{a^n}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{(a-1)^2}\left[a-\frac{1}{a^{n-1}}\right]-\frac{n}{(a-1)a^n}.$$ Când n creşte nemărginit suma precedentă tinde către $a:(a-1)^2$. **28.** Adunăm fiecare şir, presupunând $a>p$. Suma rezultatelor este: $\frac{1}{a}+\frac{1}{a(a-1)}+\frac{1}{(a-1)(a-2)}+$

$$+\frac{1}{(a-2)(a-3)}+\ldots+\frac{1}{(a-p+1)(a-p)}.$$ Se observă

că: $\frac{1}{(a-p+1)(a-p)}=\frac{1}{a-p}-\frac{1}{a-p+1}$ şi se face $p=1, 2, 3 \ldots p$, după care suma se obţine imediat. (S. E. G. M. III. p. 43). **29.** $(mn-1)^2=(m-1)(n-1)$ sau $(m-1)^2=(mn-1)(n-1)$ sau $(n-1)^2=(mn-1)(m-1)$. **30.** $(n+1)^3$. **31.** Termenul general $(2n-1)^2-(2n)^2=-(4n-1)$ şi suma este $-n(2n+1)$. **32.** Avem: $\left[\frac{m(m-1)}{2}\right]^2+$ $+\left[\frac{m(m+1)}{2}\right]^2=\frac{m^2(m^2+1)}{2}=\frac{m^2(m^2-1)}{2}+\frac{m(m-1)}{2}+$ $\frac{m(m+1)}{2}$. **33.** Există o valoare întreagă pentru x care verifică ecuaţia $m^p=\frac{1}{2}m(2x+m-1)$ sau ecuaţia $m^p=\frac{1}{2}2m(2x+2m-1)$. **34.** $S_n=\frac{r^{4n}-1}{r^4-1}\left[r^4+\frac{1}{r^{4n}}\right]+2n$.
35. Fie r şi i raza bazei şi înălţimea conului dat, R raza primei sfere înscrise, avem: $R=\frac{ri}{r+\sqrt{r^2+i^2}}$, punând $k=\frac{\sqrt{r^2+i^2}-r}{\sqrt{r^2+i^2}+r}$, razele sferele următoare sunt: $kR, k^2R, k^3R\ldots$ iar suma volumelor tuturor sferelor este: $\frac{2}{3}\pi r^2 i^3:(4r^2+i^2)$. Dacă conul este echilateral $i=r\sqrt{3}$ şi suma precedentă devine $\frac{2}{7}\pi\sqrt{3}\,.\,r^3$.
36. Ecuaţia problemei este: $\alpha x^2-(2c+\alpha-2a)x+2bc=0$; dacă $\alpha>0$, pentru ca problema să fie posibilă trebue $(2c+$ $+\alpha-2a)^2-8\alpha bc>0$ şi $2c+\alpha-2a>0$, în acest caz ambele soluţiuni sunt reale, pozitive şi mai mari ca b, ambele convin chestiunei; una din ele dă timpul până când cel de al doilea tren întâlneşte pe cel dintâi, iar cealaltă timpul până când primul tren — a cărui iuţeală merge necontenit crescând — întâlneşte din nou pe cel de al doilea. Pentru $a=1$, $\alpha=2$, $b=6$, $c=32$, se găseşte: $x'=8$ ore, $x''=24$ ore. **37.** Fie $\frac{\alpha}{q}$, α, αq cele 3 numere: a, b, c laturile triunghiului, trebue să avem

$\frac{c}{a}+\frac{\alpha}{q}$, $\frac{a}{b}=\alpha$, $\frac{b}{c}=\alpha q$ ∴ $\alpha=1$, $a=b$, $c=\frac{a}{q}$; fie $2p$ și S perimetrul și suprafața, în primul caz $a=\frac{2pq}{2q+1}$; în al doilea caz $(4q^2-1)a^4=16q^4S^2$. **38.** Se observă că volumul unui octaedru este $\frac{1}{6}$ din volumul cubului respectiv, iar latura unui cub este o treime din latura cubului precedent. Se găsește: $\frac{63}{52}a^2$, a fiind latura cubului. (G. M. I.). **39.** $(a-1)^n:a^{n-1}$. **40.** Să presupunem că la început se toarnă a vin, apoi până la γ dintr'un amestec de vin și apă în raportul $b:c$, cu modul acesta condițiile problemei nu sunt schimbate. a, b, c reprezentând cantitățile de lichid cuprinse în vas până în α, dela α la β, dela β la γ, rezultatul este: $\frac{c}{b+c}\left[a-a\left(\frac{a}{v}\right)^{n+1}\right]$ apă și $a\left(\frac{a}{v}\right)^{n+1}+$ $+\frac{ab}{a+b}\left[1-\left(\frac{a}{v}\right)^{n+1}\right]$ vin, $v=a+b+c$. (G.M.IX.). **41.** Punând $x_1=x$, avem: $x^n=a^{n-1}\times x+\frac{a^{n-1}-1}{a-1}b$. **42.** r reprezentând rația progresiunii aritmetice și q rația celei geometrice, trebue să calculăm suma $\sum_{i=0}^{i=n-1}(a_1+ir)b_1q^i=a_1b_1\Sigma q^i+b_1r\Sigma iq^i$; se găsește: $\frac{b_1}{(q-1)^2}[a_1(q^n-1)(q-1)+(n-1)rq^n(q-1)-r(q^n-q)]$. Pentru cazurile particulare considerate se găsește: $2\left(1-\frac{n+2}{2^{n+1}}\right)$ și $\frac{x}{(x-1)^2}[nx^n(x-1)-(x^n-1)]$. **43.** Termenul de rangul n poate fi scris $5+4\frac{10^n-10}{9}=\frac{5+4.10^n}{9}$; se găsește pentru suma căutată: $\frac{45n+40(10^n-1)}{81}$. (G. M. I.). **44.** Fie $a=1+\alpha$, $\alpha>0$ avem $(1+\alpha)^3=1+3\alpha+3\alpha^2+\alpha^3>1+3\alpha+3\alpha^2$ multiplicând cu $1+\alpha$ și păstrând în partea a doua numai, termenii în α și α^2, avem $(1+\alpha)^4>1+4\alpha+10\alpha^2$, din aproape în aproape găsim $(1+\alpha)^n>1+n\alpha+\frac{1}{2}n(n-1)\alpha^2$

$\therefore n:(1+\alpha)^n < \dfrac{1}{\frac{1}{n}+\alpha+\frac{1}{2}(n-1)\alpha^2}$, iar când $n=\infty$ partea a doua tinde către zero. **45.** $S_n = \frac{4}{3}(\pi+3)\frac{4^n-1}{4^n}R$; caz particular $lim\, S_n = \pi + 3$. (G. M. II.).

46. Generalizarea ex. 43, procedeu analog, se găseşte $\dfrac{9(9b-10a)n+10a(10^n-1)}{81}$. **47.** Expresiunea lui S_n fiind aceia din formula precedentă, avem: $\Sigma S_n = \dfrac{9(9b-10a)}{8}\Sigma n + \dfrac{10a}{81}\Sigma(10^n-1) = \dfrac{9(9b-10a)}{81}\cdot\dfrac{n(n+1)}{2} + \dfrac{100a}{81}\cdot\dfrac{10^n-1}{9} - \dfrac{10an}{81}$. **48.** Se va presupune mai întâi $p=1$ şi se va face $q=1, 2, 3, \ldots$, suma corespunzătoare este $\frac{1}{2}$; făcând apoi $p=2$ şi $q=1, 2, 3\ldots$ se găseşte $\frac{1}{2.3}$ apoi pentru $p=3$, $q=1, 2, \ldots \frac{1}{1.4}\ldots$; avem după aceia $\frac{1}{2.3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3.4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\ldots$. Rezultatul este 1.

XVIII. **1.** 6. **2.** 4. **3.** 2. **4.** Avem: $\sqrt{10\sqrt{10}} < 7 < \sqrt{10\sqrt{10\sqrt{10}}}$, deci $\frac{3}{4} < \log 7 < \frac{7}{8}$, cele două numere căutate sunt $\frac{3}{4}$ şi $\frac{7}{8}$. **5.** $\text{Log}\, 0,5 = \log\frac{1}{2} = 0-0,30103 = \overline{1},69897$; $\log 5,4 = \log\dfrac{2+3^3}{10} = 0,73239$; $\log 0,00216 = \log\dfrac{2^3 \cdot 3^3}{10^5} = +\overline{3}\,33445$; $\log 0,666\ldots = \log\frac{2}{3} = \overline{1},82391$. **6.** In baza 10, $\log\left(\frac{25}{40}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}(\log 5 - \log 7) = -0,09742$; când baza devine de 10 ori mai mare, logaritmii tuturor numerelor de-

vin de 2 ori mai mici, deci. în baza 100, $\log\left(\frac{25}{49}\right)^{\frac{1}{3}} =$ $-0,04871$. **7.** $2^{64}-1$, care este un număr de 20 cifre, dintre care cele dintâi sunt: 184... **8.** 1,00278...
9. Se va scrie: $\frac{(0,23)^2\sqrt{2}}{\sqrt[3]{5}}$, rezultatul este, 0,04375....
10. Pentru calcul se va servi de tabela No. 5. pag. 34, din tablele aranjate de *Dupuis*; rezultatul este 1,000098995...
11. 0.012786... **12.** $x^2-3x+2=6$.˙. $x=4$ și $x=-1$.
13. $x=2$. **14.** $x=2$. **15.** $\log x=5$.˙. $x=100000$.
16. $ax=(\alpha+x)^2$ sau $x^2+(2\alpha-a)x+\alpha^2=0$, ca rădăcinile să convie trebue $(2\alpha-a)^2-4\alpha^2>0$ și $2\alpha-a<0$, .˙. $\alpha<\frac{1}{4}a$, trebue încă $\alpha+x>0$.˙. $x>-\alpha$; când $\alpha>0$ ambele rădăcini convin, iar când $\alpha<0$ numai cea mai mare. **17.** $x=\frac{1}{10^4}$, $x=1$ și $x=10^{\pm\sqrt{5}}$. **18.** $\frac{1}{6}$ și $\frac{729}{2}$. (G. M. III.). **19.** 0; 1; $\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}.i$. (G. M. VIII.). **20.** Revine la $7^{3x}=5^{4x-1}$.˙. $x=\frac{\log 5}{4\log 5-3\log 7}$. **21.** Se va rezolva în raport cu $\log(x+1)$ avem: $\log(x+1)=-[2\log 2+\log(x^2-1)]\pm[\log(x^2-1)+$ $+2\log(x-1)]$, care dă $x=-3$, ce nu convine și $x=\sqrt{\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}}$. **22.** Din primele două deducem $(1-\log x)$ $\log y=1$, $(1-\log y)\log z-1$, eliminând pe $\log y$ avem $\log x(1-\log z)=1$ etc. **23.** Trebue să avem $\log\frac{4(ax+b)^2}{a^3b^3x^3}$ $=\log\left(\frac{ax+b}{abx}\right)^4$.˙. $4abx=(ax+b)^2$.˙. $x=\frac{b}{a}$, (G. M. III.).
24. Se poate scrie $\left(\frac{3}{5}\right)^x=\frac{1025}{5^7}=\left(\frac{3}{5}\right)^4$.˙. $x=4$, $y=3$. **25.** $x=5$, $y=4$. **26.** Se poate scrie $\left(\frac{2}{3}\right)^{\log x}=\sqrt{\frac{2}{3}}$.˙. $\log x=\frac{1}{2}$, $x=\sqrt{10}$, $y=10\sqrt{10}$. **27.** $x=10$, $y=1$; sau

$x=1$, $y=\sqrt[3]{100}$. **28.** Avem: $x\log y = y\log x$, $p\log x = q\log y$ $\therefore\ px = qy$, $p\log x = q\left[\log x + \log\frac{p}{q}\right]$ $\therefore\ x=\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{q}{p-q}}$ $y=\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{p}{p-q}}$ **29.** Se va înlocui în chestiunea precedentă, p prin $\log p$ şi q prin $\log q$, şi se va observa că $(\log p)^x = (\log q)^y$ se poate scrie $x^{\log p} = y^{\log q}$, ecuaţia de aceiaşi formă cu cea de a doua prin problema precedentă. **30.** Se găseşte: $x+y = \pm\sqrt{\frac{(m+n)\log(bc)}{\log a}}$; $x-y=\pm\sqrt{\frac{(m-n)\log(b:c)}{\log a}}$; $\log u + \log v = \pm\sqrt{\frac{\log a \log(bc)}{m+n}}$, $\log u - \log v = \pm\sqrt{\frac{\log a\log(b:c)}{m-n}}$. **31.** Se poate scrie $x\log 1{,}01 - \log x > 1$ sau $\log x\left[\frac{x}{\log x}\cdot\log 1{,}01 - 1\right] > 1$; prima parte va creşte necontenit, când x creşte, căci $x:\log x$ creşte; prin încercări se găseşte că inegalitatea dată va fi satisfăcută pentru $x > 917,\ldots$ **32.** $x > 1106,\ldots$ **33.** Se va calcula mai întâi $(0{,}99)^{150}$ se găseşte: $0{,}22145\ldots$ apoi $x > 622{,}75\ldots$ **34.** Trebue să avem: $\log a + \log b = m$, $m > f$ fiind diferenţa între caracteristice $\therefore\ ab = 10^m$, $a = 2^h5^k$, $b = 2^{m-h}5^{m-k}$, k şi h fiind numere întregi mai mici ca m. **35.** $\sqrt[a]{a}$, **36.** $t=\frac{\log 2}{\log 1{,}05}\backsim 14$ ani 3 luni. Pentru ca timpul în care capitalul se îndoeşte să se reducă la jumătate, dobânda la 1 leu trebue să fie $(1{,}05)^2 - 1 = 0{,}1025$ sau $10{,}25\,\%$. **37.** Ecuaţia problemei este $x\times(1{,}05)^5 = 30000\times\times(1{,}06)^5$ $\therefore\ x=31455$, ambele capitaluri valorează atunci câte 40147 lei. **38.** 13780 lei. **39.** Populaţia în anul 2000 va fi: $P_{2000} = P_{1900}\left(1+\frac{82000}{5913000}\right)^{100} = 23723000$ aproximativ; populaţia va fi de 10 milioane la epoca $t = 1900 + \frac{\log 10^7 - \log 5912000}{\log\left(1+\frac{82000}{5912000}\right)} \backsim 1941$. **40.** Dacă capitalizarea se face anual, dobânda începând să curgă dela sfârşitul anului în care s'au făcut depunerile şi făcând abstracţie de anii bisecţi, capitalul strâns va fi: $\frac{365\,[(1,05)^{21}-1]}{0,05} = 12037$ lei; dacă capitalizarea se face trimestrial, trebue să înlocuim în formula precedentă 0,05 prin $0,05:4 = 0,0125$ şi pe 21 prin $4 \times 21 = 84$, se găseşte atunci 13302 lei. **41.** $A\,(1+r)^t - a\frac{(1+r)^t-1}{r}$; pentru a găsi timpul în care acea persoană se va ruina, se va căuta valoarea lui t pentru care expresiunea precedentă se anulează; $t = \frac{\log a - \log(a - Ar)}{\log(1+r)}$; pentru datele numerice t este aproximativ 20 ani şi 11 luni. **42.** Reţinerile capitalizate din 6 în 6 luni cu $4\,{}^1/_2\,{}^0/_0$ anual s'au urcat la 25713 lei; pensia semestrială netă este de 2214 lei şi îşi va lua înapoi toate reţinerile în 6 ani $9\,{}^1/_2$ luni[1]. (G. M. XV.). **43.** Prima plată făcându-se după n ani şi a doua după $n + 2n'$ ani, media lor aritmetică este $n + n'$. Fie A suma împrumutată, B cele două părţi egale, A′ partea din capital plătită în prima rată, A″ în cea de a doua, avem: $B = A'(1+r)^n = A''(1+r)^{n+2n'}$, $A' + A'' = A$. Dacă ar fi să achităm întreaga sumă cu dobânda ei, dând 2 B lei după timpul x, am avea $2B = A(1+r)^n$; din relaţiile precedente deducem $\frac{1}{(1+r)^n} + \frac{1}{(1+r)^{n+2a'}} = \frac{1}{(1+r)^n} \therefore (1+r)^{n+n'} > (1+r)^x \therefore n + n' > x$. **44.** Fie $a_1, a_2, \ldots a_n$ ratele anuale avem: $\frac{a_1}{n} = \frac{a_2}{n-1} = \ldots = \frac{a_n}{1} = k$, apoi $a(1+r)^n = a_1(1+r)^{n-1} + a_2(1+r)^{n-2} + \ldots + a_n = k[n(1+r)^{n-1} + (n-1)(1+r)^{n-2} + \ldots + 1] = k\left[\frac{n(1+r)^n}{r} - \frac{(1+r)^n}{r^2} + \frac{1}{r^2}\right] \therefore a_1 = \frac{a r^2 (1+r)^n}{r(nr-1)(1+r)^n + 1}$. **45.** Amortizarea făcându-se în 12

1) Un factor important ce intervine în calculul pensiilor şi în genere al rentelor viagere, de care nu s'a ţinut seamă aici, este *mortalitatea*; ceia ce face capitalul strâns şi timpul până când depunătorul îl epuizează, să fie mai mare decât cel calculat mai sus.

ani şi 7 luni, iar capitalizarea din 6 în 6 luni, avem: $A(1+r)^{25+\frac{1}{6}} = a(1+r)^{24} + a'(1+r)^{24} : r - a' : r$. In prima ipoteză $A = 15.000.000$, $a = 1243683$, $a' + 1064200$, r necunoscută; prin încercări se găseşte $r = 0{,}05$ (aproximativ); deci dobânda pe o jumătate de an este de 5%; dobânda anuală este dată de formula $(1+r)^2 = (1+x) \therefore x = 0{,}1025$ sau 10, 25%. In cea de a doua ipoteză se va observa că capitalul împrumutat s'a redus la 1 Aprilie 1901 la $15.000.000 + 896875$ dobânda pe 7 luni $- 1243683$ suma plătită la 1 Aprilie $= 15653192$; pornind dela această sumă convenţia se poate considera ca redusă la 12 ani. Dacă venitul brut este de 4.000.000 suma ce s'ar fi plătit anual sindicatului ar fi fost: $4.000.000 - 0{,}32 \times 4.000.000 - \frac{1}{2}[4.000.000 - 0{,}32 \times 4.000000 - 0{,}68 \times 3130000] = 2424200$ lei. Capitalizarea făcându-se din 6 în 6 luni, dobânda la un leu pe 6 luni va fi dată de formula $14653192\ (r+1)^{24} = 1212100\,[(1+r)^{24} - 1] : r$ sau $12{,}089\, r\, (1+r)^{24} - (1+r)^{24} + 1 = 0$; prin încercări se găseşte $0{,}064 < r < 0{,}065$, dobânda anuală corespunzătoare este cuprinsă între 13,20% şi 13,42%[1].

1) In realitate venitul a fost mult mai mare, dobânda anuală plătită sindicatului de bancheri germani a trecut de 25%.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE"

I. **I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu** și **V. Cristescu**, *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme)*. (Epuizată).

II. **A. G. Ioachimescu**, *Culegere de probleme de Algebră (Teoria ecuațiilor)*. (Epuizată).

III. **N. Abramescu**, *Lecțiuni elementare de Algebră superioară, pentru cl. VIII științifică, Ediția VI.* . . . . Lei 120,—

IV. **A. G. Ioachimescu** și **G. Țițeica**, *Culegere de probleme de mecanică și geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme și o planșă). (Epuizată).

V. **Tr. Lalescu** și **Șt. N. Mirea**, *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie* (Epuizată).

VI. **Tr. Lalescu**, *Tratat de geometrie analitică*, Fascicola I *Ediția II revăzută și adăogită*, 1923 . . . . Lei 30,—
Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).
Idem, Fascicola IV Aplicațiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . Lei 150,—

VII. **Gh. Lazăr**, *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de *Gh. Lazăr*, la colegiul Sf. Sava) . . . . Lei 10,—

VIII. **A. G. Ioachimescu**, *Culegere de probleme de Algebră*, Ediția IV revăzută și mărită . . . . Lei 120,—

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu** și **G. Țițeica**, *Vocabular Matematic* . . . Lei 20,—

X. **G. Țițeica**, *Culegere de probleme de geometrie* . Lei 150,—

XI. **Gazeta Matematică 1895—1935.** *Istoric, învățăminte.* Volum jubiliar (500 pag.) . . . . Lei 250,—

XII. **V. Cristescu**, *Culegere de probleme de Trigonometrie. Partea I (Goniometrie), ediția II revăzută și adăogită de Gh. Th. Gheorghiu* . . . . Lei 95,—

XIII. **I. Ionescu**, *Culegere de probleme de aritmetică.* Lei 190.—

La aceste prețuri se vor adăuga taxele poștale pentru expediție.

Biblioteca technică a „GAZETEI MATEMATICE"
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. I. Ionescu, *Beton Armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul.* (Ediția II) Lei 150,—

Prețul 120 Lei 500