CESTIUNI

DE

ALGEBRA

CU SOLUȚIUNI, ÎNDRUMĂRI

ȘI UN

MEMENTO

DE

G. CH. ASLAN

FOCȘANI
TIPOGRAFIA ALESSANDRU CODREANU
1898

CESTIUNI

DE

ALGEBRA

CU SOLUȚIUNI, ÎNDRUMĂRI

ȘI UN

MEMENTO

DE

G. CH. ASLAN

FOCȘANĬ
TIPOGRAFIA ALESSANDRU CODREANU
1898

G. Adam

MEMENTO

Numerile aritmetice nu esprimă de cât o idee de conținut, prin urmare sunt abstracte; astfel 4 de. es. poate reprezenta, indiferent, 4 mere, 4 metri etc.; căci în fiecare din aceste cazuri terminul cu care se compară—numit *unitate*, este cuprins de un acelaş număr de ori.

Astfel de numere, cari esprimă conținutul de un număr ezact de ori a unităței într'o mărime oare-care, le-am numit *numere întregi*.

Nu toate mărimile cuprind însă unitatea de un număr ezact de ori, în acest caz încercăm dacă nu se cuprinde de un număr ezact de ori o parte a unităței, pentru acea o împărțim în 2,3.... părți egale şi dacă de. es. a 5-a parte a unităței se cuprinde ezact de 3 ori în mărimea considerată, zicem că acea mărime este *măsurată* prin *numărul fracționar* trei cincimi.

Numerile întregi şi fracționare formează grupa numerilor *comensurabile* sau *raționale* căci cu ajutorul lor se pot esprima toate raporturile de conținut a două mărimi cari au o comună măsură.

Se poate întâmpla ca împărțind unitatea într'un foarte mare număr de părți egale, tot să nu dăm peste o părticică care să se cuprindă de un număr ezact de ori în mărimea considerată; se zice atunci că acea mărime e *incomensurabilă* cu unitatea, şi este măsurată printr'un număr *incomensurabil* sau *irațional*. Astfel raportul circonferinței la diametru este un număr incomensurabil căci împărțindu-se diametru într'un număr neînchipuit de mare de părți (egale), circonferința nu va putea rezulta nici-o-dată din adunarea unui număr întreg de aceste părți. Acest raport, care se însamnă cu π, este

$$\pi = 3,14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26434.....$$

Dar nevoia de a se întroduce aceste din urmă două grupe de numere n'a rezultat numai din considerațiunea de a se putea reprezenta toate raporturile de conținut dintre două mărimi oare-cari, ci şi din operaţiunile cu numerile întregi—abstracţiune făcându-se de mărimile ce ar reprezenta: fracţiunile au rezultat din neputinţa de a împărţi ezact şi numerile iraţionale din neputinţa estragerei de rădăcină.

Cu studiul proprietăţilor şi a calculelor ce se pot săvârşi cu aceste dintăi trei grupe de numere se ocupă *Aritmetica.*

Sunt unele cestiuni de Aritmetică cari din cauza enunţului greşit ne dau ca răspuns nişte numere precedate de semnul minus; în prezenţa acestor rezultate, e natural să ne întrebăm ce reprezintă aceste cantităţi? Esaminănd cu atenţiune datele cestiunei, observăm că enunţul este pus *în sens opus* rezultatului care ar trebui să'l căpătăm şi încercând să modificăm în acest sens enunţul, vedem că căpătăm pentru rezultat acelaş număr însă fără nici un semn—adecă adevăratul răspuns. Deducem dar că *în cazul când căpătăm pentru rezultatul unei probleme un număr precedat de semnul minus, acest număr luat fără de nici un semn răspunde cestiunci opuse acelei propuse.*

Un număr comensurabil sau incomensurabil, precedat de minus se numeşte *negativ* în deosebi de celelalte precedate sau nu de plus cari se numesc *pozitive.*

Cu întroducerea acestor numere, noi proprietăţi apar şi altele se perd; de aici nevoia unei alte ştiinţe care să le studieze: ***Algebra.***

Algebra propunându-şi să simplifice şi să generalizeze rezultatele Aritmeticei, întrebuinţează în acest scop numere generale: *litere*; urmează că rezultatele însăşi a-le unui calcul algebric vor fi generale—adecă nişte *formule.*

Aşa-dar, în Algebră nu putem de cât arăta prin semne operaţiunile ce leagă diferitele cantităţi, mulţumindu-ne a reduce terminii simili şi a simplifica.

Adunarea algebrică este o operaţiune care are de scop de a face *suma algebrică* a două sau mai multe cantităţi.

Prin *suma algebrică* a două sau mai multe cantităţi, înţelegem acele cantităţi scrise una lângă alta cu semnele lor.

Scăderea algebrică este o operaţiune care are de scop ca fiind dată o sumă şi una din părţile sale să se afle cealaltă parte numită *diferenţă algebrică* sau *rest.*

Prin *diferenţa algebrică* a două cantităţi, înţelegem cantitatea scăzătoare scrisă cu semn schimbat după descăzut.

Prin reducerea algebrică a doi sau mai mulţi termini simili de acelaş semn, înţelegem suma aritmetică a terminilor precedată de semnul comun.

Prin reducerea algebrică a doi sau mai mulţi termini simili de semne diferite, înțelegem diferența aritmetică a sumilor terminilor de acelaș semn precedată de semnul sumei celei mari.

Inmulțirea algebrică este o operațiune care are de scop de a face *productul algebric* a două sau mai multe cantități.

Prin *productul algebric* a două cantități, înțelegem productul aritmetic al acelor cantități precedat de (+), dacă factorii au alaș semn; de (—), dacă factorii au semne contrare.

Impărțirea algebrică este o operațiune care are de scop ca fiind dat un product de doi factori și unul din ei să se afle celalt factor numit *cât algebric*.

Prin *câtul algebric* a două cantități, înțelegem câtul aritmetic precedat de (+), în caz când cantitățile au acelaș semn; de (—), când cantitățile au semne contrare

A ridica o cantitate *la puterea* a n-a, însamnă a o înmulți de n ori cu ea însăși. De aici regula: Un monom se ridică la o putere, ridicându-se coeficientul la acea putere și înmulțindu-se esponentul fiecărei litere cu esponentul puterei.

Tot din definițiunea puterei rezultă că dacă monomul e negativ, atunci, dacă se ridică la o putere de esponent *nepăreche*, rămâne tot *negativ*; iar dacă se ridică la o putere de esponent *păreche*, devine *pozitiv*.

A estrage rădăcina a n-a dintr'o cantitate, însamnă a găsi o altă cantitate care ridicată la puterea a n-a să reproducă pe cea dintâi. De aici regula: Pentru a afla rădăcina unui monom, se estrage rădăcina din coeficient și se împarte esponentul fiecărei litere prin indicele rădăcinei.

Din definițiunea puterei rezultă că *nu putem* estrage o rădăcină de indice păreche dintr'o cantitate *negativă*. Astfel de cantități se numesc *imaginare*.

Din aceiaș definițiune mai rezultă că orice cantitate are *două* rădăcini de indice păreche *egale* însă de *semne contrare*.

Pentru a estrage rădăcina patrată dintr'un trinom patrat perfect, se estrage rădăcina din estremi despărțindu-i prin semnul terminului mijlociu*).

Toate proprietățile și regulele aplicabile fracțiunilor aritmetice se aplică și fracțiunilor algebrice, observându-se regula semnelor.

Astfel, pentru a *aduna* două sau mai multe fracțiuni cari au acelaș numitor, se face suma algebrică a numărătorilor căreia i se dă de numitor numitorul comun; pentru a *scădea* două

---

* Pentru amănunte a se vedea *Cursul teoretic și practic de Algebră* pag. 30

fracţiuni, cari au acelaş numitor, se scad algebriceşte numărătorii şi diferenţei se dă numitorul comun. In caz când fracţiunile nu au acelaş numitor, le aducem mai ântăi la acelaş numitor şi apoi operăm după regulă.

Pentru a *înmulţi* două sau mai multe fracţiuni, se înmulţesc numărătorii între dânşii şi numitorii între dânşii.

Pentru a *împărţi* o fracţiune printr'o alta, se înmulţeşte fracţiunea deîmpărţit cu fracţiunea împărţitoare răsturnată.

Pentru a *ridica* o fracţiune la o *putere*, se ridică, în parte, ambii săi termini la acea putere.

Pentru a *estrage rădăcina* dintr'o fracţiune, se estrage, în parte, din ambii sei termini acea rădăcină.

Pentru a *înmulţi* doi sau mai mulţi radicali de acelaş indice, se înmulţesc cantităţile de sub radical.

Pentru a *împărţi* doi radicali de acelaş indice, se împart cantităţile de sub radical.

Pentru a *ridica* un radical la o *putere*, se ridică cantitatea de sub radical la acea putere.

Pentru a *estrage rădăcina* dintr'un radical, se înmulteşte indicele radicalului cu indicele rădăcinei.

Două espresiuni algebrice se zic *egale*, când iau aceiaş valoare numerică pentru ori-ce valori s'ar atribui literilor.

Relaţiunea dintre două espresiuni egale se numeşte *egalitate.*

Egalităţilor algebrice se aplică ca şi celor aritmetice acsioma: *putem opera asupra ambilor membri ai unei egalităţi un acelaş calcul cu aceleaşi cantităţi şi căpătăm tot o egalitate.*

Se numeşte *ecvaţie* o relaţiune dintre două espresiuni cari pot deveni egale pentru anumite valori ale necunoscutelor ce cuprind.

A afla acele valori —numite *rădăcini*, însamnă *a rezolvi* ecvaţia.

Ecvaţiunea fiind o egalitate condiţională, acsioma aplicabilă egalităţilor se aplică şi ecvaţiilor cu oare-cari restricţiuni: 1° Cantitatea cu care înmulţim sau împărţim ambii membri ai unei ecvaţii să fie *finită* şi *diferită de zero*—altfel am căpăta o egalitate propriu zisă de forma $0=0$ sau $\infty=\infty$, şi *să nu cuprindă necunoscute*—în care caz s'ar întroduce sau s'ar perde din rădăcini; 2° Dacă *ridicăm* ambii membri ai unei ecvaţii la o *putere*, ecvaţia rezultată admite toate rădăcinele celei date, dar se poate întâmpla să admită şi altele străine—e nevoe dar să verificăm dacă toate rădăcinele aflate verifică ecvaţia dată.

O ecvaţie se zice *rezolvită*, când necunoscuta ce o cuprinde se află într'un singur membru cu coeficientul şi esponentul 1.

Această definiţiune ne arată că pentru a rezolvi o ecvaţie, vom căuta să izolăm într'un singur membru necunoscuta şi apoi o vom face să aibă coeficientul şi esponentul 1.

Intr'o sistemă de ecvaţii simultane, putem înlocui o ecvaţie prin ecvaţia ce o formăm adunând sau scăzând membru cătră membru toate ecvaţiunile sau două din ele; de asemenea putem înlocui o necunoscută prin valoarea sa scoasă din una din ecvaţii.

De aici şi două metode de a rezolvi o sistemă: metoda prin *reducţie* şi metoda prin *substituţie.*

Două espresiuni algebrice se zic *neegale*, când iau valori numerice diferite pentru ori-ce valori atribuite literilor ce cuprind.

Relaţiunea dintre două espresiuni neegale se numeşte *neegalitate.*

Asupra neegalităţilor avem acsioma: putem aduna sau scădea o aceiaş cantitate din ambii membri ai neegalităţei; putem de asemenea înmulţi sau împărţi ambii săi membri prin o aceiaş cantitate *pozitivă* şi *finită* şi în fiecare din aceste cazuri căpătăm o neegalitate de acelaş sens.

Dacă cantitatea cu care înmulţim sau împărţim e *negativă* (fără a fi infinită), căpătăm o neegalitate de *sens schimbat.*

Se numeşte *inecvaţie* o relaţiune dintre două espresiuni algebrice cari sunt neegale numai pentru anumite valori ale necunoscutelor ce cuprind.

Acsioma aplicabilă neegalităţilor se aplică şi inecvaţiilor fără nici o restricţiune.

In rezolvirea unei inecvaţii ne călăuzim întocmai ca la ecvaţii.

O ecvaţiune cu o necunoscută se zice *de gradul al doilea*, când, după ce s'a adus la forma generală, esponentul cel mai mare cu care intră necunoscuta este 2.

Când o ecvaţiune de gradul al doilea e necomplectă, adecă e de una din formele

$$ax^2+bx=0 \qquad \text{sau} \qquad ax^2+c=0$$

o vom rezolvi direct: în cazul ântăi scoţând pe x în factor comun şi egalând fie-care factor cu 0, în cazul al doilea trecând terminul cunoscut în membrul al doilea, împărţindu-l prin coeficientul necunoscutei şi estrăgând rădăcina patrată din acest rezultat.

Când avem de rezolvit o ecvaţiune de formă complectă, ne servim numai de formule—de aici nevoia de a-le memoriza bine, astfel cum se citesc.

Distingem 3 formule de rezolvire:

formula $$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ care e generală;

formula $$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$ aplicabilă în cazul când coeficientul lui x e păreche $(b=2b')$

şi formula $$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$ aplicabilă în cazul când coeficientul lui x^2 e unitatea, dar puţin întrebuinţată.

Separând rădăcinele date de formula a treia şi adunândule, deducem că *suma rădăcinelor* unei ecvaţii de forma $x^2+px+q=0$ este egală cu *coeficientul lui x schimbat de semn*; înmulţind apoi aceleaşi rădăcini, deducem că *productul* lor este egal cu *terminul cunoscut.*

Dacă ecvaţiunea ar fi de forma $ax^2+bx+c=0$, n'avem de cât să'i împărţim ambii săi membri cu a şi apoi să aplicăm proprietăţile.

Cu ajutorul acestor proprietăţi—numite *proprietăţile ecvaţiilor de gradul al doilea*, putem rezolvi următoarele cestiuni:

1° Să se găsească două numere cunoscând suma şi productul lor.

2° Să se formeze o ecvaţiune de gr. II. ale carei rădăcini să fie două numere date.

3° Să se discute *a priori* semnele rădăcinelor unei ecvaţii de gr. II.

4° Descompunerea trinomului de gr. II.—Un trinom de gr. II. se poate descompune în productul lui a cu doi factori pe cari îi căpătăm scăzând succesiv din x fiecare rădăcină.

Se numeşte *ecvaţie binomă* o ecvaţiune care nu conţine de cât doi termini.

Rezolvirea ori-cărei ecvaţii binome se reduce la rezolvirea ecvaţiei $y^n\pm1=0$, căci înmulţind rădăcinele acestei ecvaţiuni cu $a=\sqrt[n]{A}$, căpătăm toate rădăcinele ecvaţiei date.

Se numeşte *ecvaţiune trinomă*, ecvaţiunea în care necunoscuta intră cu un esponent indoit unul altuia; forma generală a unei astfel de ecvaţii va fi dar $ax^{2n}+bx^n+c=0$.

Pentru a rezolvi astfel de ecvaţiuni, punem $x^n=z$ şi ecvaţiunea se reduce la gr. II. pe care o rezolvim; estrăgând apoi a n^a rădăcină din z' şi z'', căpătăm toate rădăcinele ecvaţiei date.

In cazul particular când $n=2$, forma ecvaţiunei e $ax^4+bx^2+c=0$ subt care formă ecvaţiunea se numeşte *bipatrată*. In rezolvirea acestei ecvaţiuni urmăm, de sigur, aceiaş metodă ca pentru ecvaţiile trinome.

O sistemă de ecvaţii se zice că e *de gradul al doilea*, când cel puţin una din ecvaţiile ce o formează e de gr. II—celelalte putând fi de gr. I.

Când sistema cuprinde două ecvaţiuni dintre cari una e de gr. I., metoda generală constă în a aduce ecvaţiile sub formă de sumă şi product a necunoscutelor şi a rezolvi apoi ecvaţiunea de gr. II. la cari suntem conduşi.

Se numeşte *progresie* un şir de numere astfel că fiecare se formează din precedentul după o lege determinată.

Numerile ce formează o progresie se zic *terminii* progresiei.

O progresie aritmetică este un şir de termini astfel că fiecare din ei se formează *adunând* precedentului un acelaş număr numit *raţiunea* progresiei.

Dacă raţiunea e *pozitivă*, terminii merg crescând şi progresia se zice *crescătoare*; dacă raţiunea e *negativă*, terminii merg descrescând şi progresia se zice *descrescătoare*.

In progresiile aritmetice avem următórele formule fundamentale:

$$l=a+(n-1)r \quad \text{şi} \quad S=\frac{(a+l)n}{2}$$

cari se pot enunţa şi în cari putem considera două cantităţi ca necunoscute ceiace dă loc la 10 probleme diferite.

Pentru a însera m medii între terminii a şi b ai unei progresii, ne servim de formula care ne dă raţiunea progresiei ce trebue să o formăm

$$r=\frac{b-a}{m+1}$$

O *progresie geometrică* este un şir de termini astfel că fiecare din ei se formează *înmulţind* pe precedentul cu un acelaş număr numit *raţiunea* progresiei.

Dacă raţiunea e *mai mare ca unitatea*, termini merg crescând şi progresia se zice *crescătoare*; două raţiunea e *mai mică ca unitatea*, terminii merg descrescând şi progresia se zice *descrescătoare*.

La progresiile geometrice avem de asemenea formulele fundamentale

$$l=aq^{n-1} \quad ; \quad P=\sqrt{(al)^n} \quad \text{şi} \quad S=\frac{lq-a}{q-1}$$

de asemenea $\quad \lim. S=\dfrac{a}{1-q} \quad$ şi $\quad q=\sqrt[m+1]{\dfrac{b}{a}}$

Dacă considerăm două progresii, una geometrică *începând cu unitatea* şi alta aritmetică *începând cu zero*, fie-care termin al progresiei aritmetice este numit *logaritmul* terminului de acelaş rang din progresia geometrică. Astfel log 1=0 . . . log $q^n=nr$*).

Urmează dar că într'o sistemă dată ori ce număr mai mare ca 1 are un logaritm şi unul singur.

Dacă am prelungi progresiile la stânga, deducem că orice număr pozitiv *maĭ mic ca 1* are un logaritm şi unul singur şi acest logaritm e *negativ*.

Progresia geometrică neavând termini negativi, urmează că *numerile negative n'au logaritmi*.

In calculele cu logaritmi întrebuinţăm de multe ori proprietăţile :

Logaritmul unui product este egal cu suma logaritmilor factorilor săi.

Logaritmul unui cât este egal cu diferenţa logaritmilor terminilor săi.

Logaritmul puterei unui număr este egal cu logaritmul acelui număr îmulţit cu esponentul puterei.

Logaritmul rădăcinei unui număr este egal cu logaritmul acelui număr împărţit prin indicele rădăcinei.

In calculele noastre întrebuinţăm sistema de logaritmi de baza 10 numită sistemă *vulgară* sau *zecimală*.

Această sistemă ne oferă multe avantaje :

Puterile lui 10 au de logaritmi numeri întregi cari sunt înşăşi esponenţii puterei.

Caracteristica logaritmului unui număr mai mare ca 1 este compusă din atâtea unităţi câte cifre are numărul la partea întreagă mai puţin una.

Caracteristica negativă a logaritmului unui număr mai mic ca 1 are un număr de unităţi corespunzând rangului primei cifre semnificative după virgulă.

Cologaritmul unui număr este logaritmul inversului acelui număr—este, prin urmare, *egal* însă de *semn contrar* logaritmului.

Cunoscând logaritmul unui număr putem forma imediat cologaritmul său adunând +1 la caracteristică şi schimbându-i semnul, şi apoi făcând complimentul unităţei la partea zecimală.

O aplicaţiune imediată a logaritmului o întâlnim în cestiunile de dobândă compusă.

---

* O altă definiţiune a logaritmului ar fi : *logaritmul unui număr este esponentul puterei la care trebue ridicat un alt număr numit bază pentru a căpăta numărul dat.*

Această definiţiune poate fi tradusă prin ecvaţia log $N=b^x$

Se numeşte *dobândă* folosul ce'l aduce o sumă dată cu împrumut pe un timp determinat.

Când dobânda nu se plăteşte la sfârşitul fiecărui an, ci se lasă ca să mărească capitalul împrumutat, aducând la rândul ei dobândă pe anul următor, se zice că se împrumută cu *dobândă compusă.*

Diferitele cestiuni ce ne putem propune asupra dobândei sunt rezolvite cu ajutorul logaritmilor prin formulele

$$C=c(1+r)^n;\ c=\frac{C}{(1+r)^n}\ ;\ 1+r=\sqrt[n]{\frac{C}{c}}\ ;\ n=\frac{\log C-\log c}{\log(1+r)}$$

De dobândă compusă se ţine socoteală şi în calculul anuităţilor.

Se numeşte *anuitate* o sumă hotărâtă ce o persoană o dă în fiecare an pentru a'şi forma un capital sau pentru a scapa de o datorie.

Operaţiunea de a forma un capital se numeşte *depuneri* şi în acest caz anuitatea se plăteşte la *începutul* fiecărui an, iar operaţiunea de a se mântui de o datorie se numeşte *amortisment* în care caz anuitatea se plăteşte la *sfârşitul* fiecărui an.

In cestiunile de depuneri ne servim de formulele

$$C=\frac{a(1+r)[(1+r)^n-1]}{r}\ ;\quad a=\frac{Cr}{(1+r)[(1+r)^n-1]}$$

$$n+1=\frac{\log\left(1+r+\frac{Cr}{a}\right)}{\log(1+r)}$$

iar în cestiunile de amortisment de formulele

$$a=\frac{Cr(1+r)^n}{(1+r)^n-1}\ :\ C=\frac{a[(1+r)^n-1)}{r(1+r)^n}\ ;\ n=\frac{\log a-\log(a-Cr)}{\log(1+r)}$$

Când o cantitate are o valoare unică şi determinată într'o anumită formulă se zice că e *constantă.*

Când, din contra. o cantitate poate trece prin diferite stări de mărimi, se zice că e *variabilă.*

O variabilă se zice *independentă*, când i se poate atribui *ori-ce valoare* arbitrară; în trinomul de gr. II. x este o variabilă independentă. Trinomul însuş este o variabilă a cărei valoare *atârnă* însă *de la acea* a lui x, pentru care se şi numeşte variabilă *dependentă* sau *funcţiune* a lui x.

O funcţiune se zice că trece printr'un *macsimum* când după ce a crescut până la o valoare oare-care a variabilei, începe a descreşte.

O funcţiune se zice că trece printr'un *minimum*, când, după ce a descrescut până la o valoare oare-care a variabilei, începe a crește.

In cestiunile de macsimum și de minimum ne propunem să cercetăm dacă o funcțiune dată admite macsimum sau minimum și să determinăm valoarea variabilei pentru care funcțiunea este macsimă sau minimă.

In acest scop întrebuințăm metoda *directă*, metoda *indirectă* sau câteva teoreme cari se enunță:

Un product de doi sau mai mulți factori pozitivi variabili, a căror sumă e constantă, este macsimum când factorii sunt egali.

Productul a doi sau mai mulți factori pozitivi variabili fiind constant, suma acestor factori este minimum când acești factori sunt egali.

Suma patratelor a două numere a căror sumă e constantă, e minimum când numerile sunt egale.

Un trinom de gr. II prezintă un *macsimum* când a e *negativ* și un *minimum* când a e *pozitiv*.

CESTIUNI
DE
ALGEBRA

ESERCIŢII PRELIMINARE

1. *Care este scopul Algebrei şi cum ajunge la acest scop?*

2. *Ce numim coeficient şi ce esponent?*

3. *Ce este o formulă? Sunt ele de vre-un folos?*

4. *De câte feluri poate fi o espresiune algebrică? cum se clasifică espresiunile?*

5. *Ce înţelegem prin gradul unui polinom? cum îi ordonăm?*

6. *Care e coeficientul în espresiunile*

$$3ab\ ,\quad 7c^2d\ ,\quad \frac{2}{3}ab^2\ ,\quad \sqrt{2}a\ ,\ -a\ ,\ -8a^2b$$

dar în espresiunile

$$a^2x\ ,\quad abx\ ,\quad 5b^2y\ ,\quad a\sqrt{3}zy\ ,\quad -a^2bx$$

7. *In espresiunea* $4a^2-5a^4$ *ce este 4 din monomul întâi şi ce din monomul al 2-le? Calculaţi valoarea espresiunei pentru* $a=\frac{1}{2}$.

8. *In general, ce înseamnă* ma *şi ce* a^m*? Calculaţi valoarea ambelor espresiuni pentru* $m=3$ *şi* $a=28$.

9. *Esprimaţi în scris:* 1° *câtul sumei lui* a *şi* x *prin diferenţa lor;* 2° *triplul lor product prin semi-suma lor;* 3° *semi-diferenţa lor prin semi-productul lor.*

10. *Esprimaţi câtul sumei cantităţilor* a, b *şi* c *prin triplul product al semi-sumei celor d'intăi cu rădăcina patrată din* c.

11. *Să se afle valoarea numerică a espresiunilor:*

1. 1° a^2-b 2° a^2+b^2 3° ab^2-a^2b 4° $ab^3+a^2b^2$

pentru $a=3$ şi $b=5$.

2. 1° $a^2b+ab+ab^2$ 2° $a^2b^2-2ab^2+a^2b$ 3° $a^3-a^2b+b^2$ 4° $a^3+a^2b^2-b^3$

NOTĂ.— Esercițiile la cari am crezut de cuviinţă să nu dau rezultatul pot fi verificate uşor atribuind nişte valori numerice literilor şi săvârşind calculele; se atribue apoi aceleaşi valori şi literilor din rezultat şi dacă se găseşte acelaşi număr, calculul e bine făcut.

pentru $a=7$ și $b=2$

3. $7a^2bx^2-8a^4+16ab^2x$ *pentru* $a=2$, $b=4$ și $x=5$

4. $\dfrac{9a^3-2bc^2-d^2}{2a^2+3d}$ *pentru* $a=8$, $b=12$, $c=5$ și $d=3$.

5. $\dfrac{a+\dfrac{b}{c}}{a-c}$ *pentru* $a=29$, $b=36$ și $c=9$.

6. *1⁰* $\dfrac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ R.: 1 *3⁰* $\dfrac{\sqrt{a^2-b}+\sqrt{a^2+5bc}}{a^3}$ R.: $\dfrac{7}{32}$

2⁰ $\sqrt{\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$ R.: $\sqrt{-1}$ *4⁰* $\sqrt[3]{\dfrac{8a^3-12a^2b+6ab^2-b^3}{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}}$ R.: $\dfrac{1}{11}$

pentru $a=4$, $b=7$ *și* $c=3$.

12. *Să se calculeze volumul unui glob sferic dat de formula* $\frac{4}{3}\pi.R^3$ *știind că raza sa* $R=0^m,08$ *și* π *e un număr fics* 3,1416.

(R.: $0^{m\cdot c}$, 002 144 665 6)

13. *Să se calculeze suprafața unui triunghiu dată de formula* $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ *cunoscând laturile sale* $a=12$, $b=15$ *și* $c=23$ *și semi-perimetrul* $p=25$ (R.: $80^{m.p.}$,62)

14. *Verificați rezultatul întrebuințând formula*

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}$$

15. *Să se ordoneze polinomii:*

1⁰ $5ab^3-8a^4b^2+12a^2b^4-9a^3b$

2⁰ $8xy^2+7x^3y^4-19x^5y+3x^2y^3+5x^4y^5$

3⁰ $2ax^5-8a^2bx^3+7ab^2x-a^2b^2x^4$

16. *Ce folos rezultă din introducerea cantităților negative?*

17. *Ce înțelegem prin termini* simili *și cum îi reducem?*

Să se reducă terminii simili din espresiunile:

$a^2b+ab^2+3a^2b^2-5ab^2-2a^2b+4ab^2$

$3a^2b+5a^2b^3-2ab^3+8a^3b-2a^2b^3-5a^2b+11ab^3$

$3\sqrt{ab}+5\sqrt{a^2b}-6\sqrt{ab}+2\sqrt{a^2b}+7\sqrt{ab}$ R.: $4\sqrt{ab}+7\sqrt{a^2b}$

$4\sqrt[3]{a^3b^2}-\sqrt{a+b}-2\sqrt[3]{a^3b^2}+\sqrt{a^3b^2}+\sqrt{a+b}$ R.: $2\sqrt[3]{a^3b^2}+\sqrt{a^3b^2}$

$$\frac{1}{2}xy^2+\frac{3}{4}x^2y-\frac{5}{3}x^2y^2-\frac{1}{4}x^2y+\frac{1}{3}xy^2+\frac{3}{2}x^2y^2$$

R.: $\frac{5}{6}xy^2+\frac{1}{2}x^2y-\frac{1}{6}x^2y^2$

$$\frac{2}{3}x^3y^2-\frac{3}{5}x^2y^2-\frac{1}{4}xy^3-\frac{3}{7}x^2y^2-\frac{1}{6}x^3y^2+\frac{3}{8}xy$$

R.: $\frac{1}{2}x^3y^2-\frac{36}{35}x^2y^2-\frac{1}{4}xy^3+\frac{3}{8}xy$.

18. *Ce este o identitate?*

19. *Verificați identitatea espresiunilor*

$$\frac{5}{3}a^2+\frac{2}{5}a^2-\frac{5}{7}b^2+\frac{3}{8}a^2+\frac{3}{2}b^2-6a^2-\frac{11}{14}b^2=-\frac{427}{120}a^2$$

20. *Esprimați productul sumei a două cantități cu diferența lor.*

21. *Epresiunile* $(a+b-c)(a-b+c)$ și $a+b-c\times a-b+c$ *sunt identice?*

22. *Ce reprezintă una și ce alta?*

23. *Calculați valoarea fie-căreia în parte, pentru* $a=5$, $b=3$, $c=2$. R.: 24 și -3.

Esercițiĭ cu espresiuni raționale întregi.

ADUNAREA.

1. *In ce constă adunarea algebrică a două sau mai multe cantități?*

2. x *fiind un număr întreg, care'i următorul său?*

3. *Cu cât trebue să se vândă un obiect ce costă* a *lei pentru a căștiga la dânsul* b *leĭ?*

4. *La nașterea mea mama avea 20 de ani; ce vârstă are acum știind că eu am* t *ani?*

5. *Un jucător se scoală de la joc cu* a *lei, după-ce perduse 7 partizi de câte* b *lei. Cu cât se pusese la joc?*

6. *Latura unui patrat este* a*; care e perimetrul (conturul) său?*

7. *Care este perimetrul unui paralelogram știind că latura cea mare întrece cu* b *pe cea mică care este* a*?*

8. *Să se facă suma algebrică redusă a polinomilor:*

1^0
$$\begin{array}{r} 2a-3b+2c-5d \\ 3a-2b+c+5d \end{array}$$

2^0
$$\begin{array}{r} 5x^2-8xy+2xy^2-y^2 \\ 2x^2+3xy-5xy^2+4y^2 \end{array}$$

3^0
$$\begin{array}{r} 2a^3b+6ab^2+3a^2b^2 \\ -2a^3b-3ab^2+a^2b^2 \\ a^3b+ab^2-7a^2b^2 \end{array}$$

4^0
$$\begin{array}{r} -3\sqrt{xy}+2\sqrt{x^3y}-9\sqrt{xy^3} \\ -5\sqrt{xy}-9\sqrt{x^3y}+6\sqrt{xy^3} \\ -\sqrt{xy}+5\sqrt{x^3y}+3\sqrt{xy^3} \\ \hline -9\sqrt{xy}-2\sqrt{x^3y} \end{array}$$

5^0
$$\begin{array}{r} 3ax^2+2by-5cxy+z^3 \\ -2ax^2-3by-cxy-7z^3 \\ -ax^2+5by+8cxy+3z^3 \\ 5ax^2-by-2cxy+2z^3 \\ \hline 5ax^2+3by-z^3 \end{array}$$

6^0
$$\begin{array}{r} \frac{3}{4}ab^2+\frac{5}{7}a^2b-\frac{1}{2}a^2b^2 \\ -\frac{2}{3}ab^2-\frac{4}{5}a^2b-\frac{1}{6}a^2b^2 \\ +2a^2b^2 \\ \hline \frac{1}{12}ab^2-\frac{3}{35}a^2b+\frac{4}{3}a^2b^2 \end{array}$$

7^0

$$\begin{array}{l} 7x^3y+3x^2y^2-5xy^3 \\ \quad -x^2y^2 \qquad +4y^4 \\ -3x^3y \qquad +2xy^3 \qquad -x^4 \\ \quad -2x^2y^2 \qquad -3y^4 \\ \hline 4x^3y-3xy^3+y^4-x^4 \end{array}$$

8^0

$$\begin{array}{l} 2x^m-3x^{m-1}-7x^{m-2}+9x^{m-3} \\ 5x^m+6x^{m-1}-x^{m-2}-7x^{m-3} \\ -3x^m-4x^{m-1}+9x^{m-2}-5x^{m-3} \\ \hline \end{array}$$

R.: $4x^m-x^{m-1}+x^{m-2}-3x^{m-3}$

9. Să se facă suma algebrică redusă a espresiunilor:

1^0 $a+2b-3c$; $5a-2d+b$; $d-4b+5c-6a$

2^0 $2a^2$; $3b^2-a^2+5c$; $-b^2+2c^2-a^2+d^2$; $-d^2-a^2$

3^0 a^2b ; $2ab^2+a^2b^2$; $-3a^2b-ab^2-a^2b^2$; a^2b R.: ab^2-a^2b

4^0 $\frac{1}{2}x^2y^2$; $-\frac{3}{4}x^3y^3$; $-\frac{4}{3}xy$; $\frac{7}{4}x^3y^3$; $-\frac{6}{5}x^2y^2$; $-\frac{3}{7}xy$ $-\frac{4}{9}x^3y^3$; $\frac{2}{7}x^2y^2+xy$ R.: $-\frac{29}{70}x^2y^2+\frac{5}{9}x^3y^3-\frac{16}{21}xy$

10. Un lucrător căştigă a *lei pe zi în timp de 3 zile şi* b *lei în timp de 2 zile; cât a căştigat el cu totul?*

11. O persoană cheltueşte câte x *lei pe zi în timp pe 4 zile; câte* y *lei în timp de 2 zile şi* z *lei în o 'altă zi. Câţi lei avusese, ştiind că i'a mai rămas* v *lei?*

12. Intr'un bazen curge apă prin trei canele: caneaua A *dă 4 hectolitri pe oră;* B *dă numai 3 h.l.; iar caneaua* C *cât amândouă la un loc. Câtă apă va fi în bazen lăsând să curgă toate în timp de o oră? dar în timp de 42 minute?*

R.: 1^0 14 h. l. ; 2^0 9 h.l.,8

SCĂDEREA

1. In ce constă scăderea algebrică a două cantităţi?

2. Cunoscând suma a două cantităţi şi una din ele, cum aflăm pe cea-l-altă?

3. x *fiind un număr întreg, care'i precedentul său?*

4. Un unghiu dintr'un triunghiu valorează t *grade; să se afle suma celor-l-alte două unghiuri?* (Se ştie că suma tuturor unghiurilor dintr'un triunghiu valorează 2 unghiuri drepte sau 180°).

5. O zi de vară având t *ore, câte ore are noaptea?*

6. Arătaţi că suma a 3 numere întregi consecutive este egală cu de 3 ori numărul mijlociu. (Numărul mijlociu se însamnă cu x)

7. Să se facă diferenţa algebrică redusă a polinomilor:

1^0 $a^2+2ab+b^2$; $a^2-2ab+b^2$
2^0 $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$; $a^3+3a^2b-3ab^2-b^3$
3^0 $6a\,b+3a^2b^2-5ab^3$; $2a^2b+5a^2b^2$
4^0 $3x^3y^2-7x^2y^3+9xy-2x^4$; $-x^3y^2+2x^2y^3-3xy+3x^4$

8. *Se dă patru polinomi:*

$$3a^3-2a^2b+5ab^2-7b^3+8c^2$$
$$2a^3-7a^2b+9ab^2-3b^3-2c^2$$
$$6a^3+5a^2b-7ab^2-4b^3+3c^2$$
$$-9a^3-3a^2b-2ab^2+9b^3-4c^2$$

1^0 *Din suma celor d'intăi să se scadă suma celor din urmă.*
2^0 *Din cel din urmă să se scadă suma celor trei d'intăi.*
3^0 *Din diferența celor d'intăi să se scadă diferența celor din urmă.*

9. *Din* $7x^m-3x^{m-1}+2x^{m-2}+5x^{m-3}$
să se scadă $-8x^m+2x^{m-1}-3x^{m-2}+4x^{m-3}$

10. 1^0
$$\frac{1}{3}x^3y+\frac{2}{5}x^2y^2-\frac{3}{4}xy^3$$
$$\mp\frac{2}{7}x^3y\mp\frac{3}{8}x^2y^2\mp\frac{1}{6}xy^3$$
R.: $\frac{13}{21}x^3y+\frac{31}{40}x^2y^2-\frac{7}{12}xy^3$

2^0
$$\frac{1}{5}a^2-2a^2b+\frac{3}{7}b^2$$
$$\pm3a^2\mp\frac{2}{9}a^2b\pm\frac{1}{6}b^2$$
$$-\frac{14}{5}a^2-\frac{16}{9}a^2b+\frac{11}{42}b^2$$

11. *Verificați aceste rezultate adunând restul cu scăzătorul.*

INTREBUINȚAREA PARANTEZELOR.

1. *Să se scrie 1^0* a *micșurat cu suma numerilor* b *și* c, *2^0* a *micșurat cu diferența lor.*

2. *Să se scadă din* a *1^0 diferența numerilor* b *și* c *la care se adună* d; *2^0 suma numerilor* b *și* c *din care se scade* d.

3. *Ce deosebire e între espresiunile* $a-b\mp c$ *și* $a-(b+c)$?

4. *Să se scoată cantitățile din paranteze și să se opereze reducerile:*

1^0 $(a+b)-(a-b+c)+c$ 2^0 $a^3-(a^2b-ab^2)+(2a^2b-2ab^2)$
3^0 $a^2-[b^2-(c^2-d^2)+a^2]$ 4^0 $(a^2b-ab^2)-[-a^2b-(ab^2+c)]$
5^0 $(a+2\sqrt{b})-(-a+2\sqrt{b})$ 6^0 $(a+\sqrt{c^3})-(a-\sqrt{c^3}+2\sqrt{a})$
1^0 $(a+b+c)-(a-b+c)+(a+b-c)-(a-b-c)$
2^0 $a+[(b-c)-(b-a)]-[-(a+b+c)]-b$
3^0 $[(a+b-c+d)-(-c+d+b)-a+b]-[-a-(b+c)+d]$ R.: 3a

5. *Ce devine espresiunea* $a-(b-c)$ *când înlocuim* a *prin* $m+n$ *prin* $m-(-n+p)$, c *prin* $m-p$? *(*Făcând reducerile aflăm: *m).*

6. *Verificați identitatea*

$$23x-[32y-(5z-8x+13y)+12x]+[-8z-(3y+2x)+(3z-x)]=$$
$$=-22y$$

7. *Un băiat care avea* a *lei cumpără cu* x *lei cărți și cu* y *lei*

o geantă. Cât i'a mai rămas?

8. *O persoană are numerar 25000 de lei și e dator 12000 din care plătește o dată 3000 și altă dată 4000. Care este averea lui?*

9. *Am luat la mine a treia parte din banii ce am avut acasă și cheltuind* a *lei mi'a mai rămas o sumă* b. *1⁰ Cât am luat la mine? 2⁰ Cât mi'a mai rămas acasă? 3⁰ Cât mi'a ramas cu totul?* [R.: 1^0 $a+b$; 2^0 $2(a+b)$; 3^0 $2a+3b$].

10. *Trei jucători se pun la joc, cel d'intâi cu* a *lei, al doilea cu* b *lei și al treilea cu* c *lei; ei convin ca cel ce perde să dubleze banii celor-l-alți doi. Fie-care perde, pe rând, câte o partidă; cu cât s'au sculat ei dela joc?* [R.: 1^0 $4a-4b-4c$; 2^0 $6b-2a-2c$; 3^0 $7c-a-b$].

11. *Suma unghiurilor dintr'un triunghi fiind de 180⁰ să se esprime valoarea unghiului* C *știind că unghiul* A *este este cu* t *grade mai mare ca* B *care valorează* n *grade; 2⁰ să se calculeze pentru* $n=50^0$ *și* $t=12^0$; *3⁰ ce devine triunghiul când* $A=B=45^0$? [R.: 1^0 $180^0-(2n+t)$; 2^0 68^0; 3^0 *Triunghiul devine dreptunghic în* C].

ÎNMULȚIREA.

1. *Ce e înmulțirea algebrică? Enunțați proprietățile de la înmulțire.*

2. *Productul și suma a două cantități e negativă; cum sunt acele cantități și care din ele e mai mare în valoare absolută? dar dacă suma e pozitivă?*

3. *Un fumător cheltuește zilnic o sumă* a; *câtă economie ar avea în* n *ani dacă n'ar mai fuma?*

4. *Să se săvârșească înmulțirile următoare:*

1⁰ $3a \times 2b$

2⁰ $5a^2 \times 4ab^2$

8⁰ $a^m \times a^n \times a^p$

4⁰ $4a^2 \times 3abc$

5⁰ $(x-a)(x-b)$

6⁰ $(\frac{1}{2}+a)(\frac{1}{2}-b)$

7⁰ $(2x-1)(x+\frac{1}{3})$

8⁰ $0{,}2a^4x \times 0{,}33a^3x^2$

9⁰ $2abc \times 3abd$

10⁰ $2a^mb^n \times 7b^nc^p$

11⁰ $7a^5b^2c \times 3a^2d$

1⁰ $\frac{2}{3}a^2b \times \frac{3}{4}ab^2$

2⁰ $3a^mb^n \times 5a^mb^{n-2}$

3⁰ $4c^{n-1}dx^4 \times 3c^{n-1}d^{m-1}$

4⁰ $\frac{2}{9}b^{x+y} \times \frac{5}{8}b^{x-y}$

5⁰ $\frac{3}{4}ab^m \times \frac{2}{5}a^nb^{p-m}$

6⁰ $(8a^3-2b^2-c^3) \times 3a^{m-1}b^nc^{p+1}$

7⁰ $3\frac{1}{5}a^2b^3c \times 0{,}457ab^2$

1⁰ $4\frac{5}{7}p^{m-n}q^{r-s} \times \frac{1}{3}p^{m+2n}q^{t+s}$

2⁰ $(\frac{3}{4}a^2b-\frac{2}{3}ab^2+\frac{3}{5}a^2b^2)\frac{7}{8}a^2b^3c$

3⁰ $(a^5+2a^4-3a^3+7a^2)(a-1)$

4⁰ $(2a-5b^2+3d+2c)(3a^2+2d+8f)$

1⁰ $(3a^{m-1}-5a^{m-2}+2a^{m-3})\times\frac{1}{2}a^{m-1}b^n$

2⁰ $(2a^2-4a^3b^2+2a^4b-c^3)(a-b)$

3⁰ $\left(\frac{x^2}{4}-\frac{2x}{7}+\frac{6x^3}{5}\right)\left(-\frac{x^2}{6}+\frac{3x}{5}-\frac{2x^3}{7}\right)$

4⁰ $(0{,}35a^4+\frac{2}{7}a^3-\frac{3}{5}a^2-0{,}17a)(\frac{2}{9}a^2-3{,}57a)$

1⁰ $(x+a)(x+b)(x+c)$ 3⁰ $(x+a)(x-b)(x+c)(x-d)$

2⁰ $(x+a)(x-b)(x+c)$ 4⁰ $(x+1)(x^2-1)(x^3+1)$

5⁰ $(x^2+y)(x^2-y)(x^2-y^2)$ 6⁰ $(x^2+y^2)(x+y-1)(x-y)$

7⁰ $(x^5-x^3+x-1)(x^4+x^2-1)$

8⁰ $[(a+b)-(a-b)]ax[(a^2+b^2)+(a^2-b^2)]by$

1⁰ $(x^2+ax+a^2)(x^2-ax+a^2)(x-a)(x+a)$

2⁰ $(1+x^2+x^4+x^6+x^8)(1-2x-3x^3+5x^5-2x^7)$

3⁰ $(5xy^4-8x^2y^3+2x^3y^2-7x^4y+x^5)(-3xy^4-2x^3y^4+7x^4y-9x^5)$

4⁰ $\left(\frac{4a^2b^3}{5}+\frac{3b^3}{7}-\frac{2a^3b}{3}+\frac{5a^4}{8}\right)\left(\frac{2a^3}{3}-\frac{5a^2b^2}{9}+\frac{7ab^3}{6}\right)$

5. *Câți termini poate avea productul unui polinom de* m *termini cu un alt polinom de* n *termini ?*

6. *Să se afle, fără a săvârși înmulțirea, primul și ultimul termin al productului* $(3x^3-8x^2+2xy-5x)(2x^4+7x^3-9xy)$.

7. *Să se înlocuească espresiunile următoare cu altele echivalente:*

1⁰ m^2-n^2 2⁰ m^3+n^3 3⁰ m^3-n^3

4⁰ a^4-b^4 5⁰ x^2-16 6⁰ $x^2-\frac{1}{9}$

7⁰ a^8-b^8 8⁰ $(a+b)^2-c^2$ 9⁰ $(a+c)^2-(a-c)^2$ R.: $4ac$

10⁰ $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$ R.: ab

8. *Să se săvârșească operațiunile arătate:*

1⁰ $(a^2+b^2)(a^2-b^2)-(a+b)(a-b)$

2⁰ $(2x^3-3x^2y+5xy^2)xy-[6a-(2b-3c)]$

3⁰ $(a+b)(b+c)-(a-b)(b-c)+(a-c)(b+d)$

4⁰ $[(a-b)x^2-(a+b)x+(a-b)](ax+b)$

5⁰ $(2a-5b)(3a+7b)-[(8a-6b)(2a+3b)-(3a+4b)(6a-7b)]$

6⁰ $[(a^2+b^2)+x^2+(a+b)x][(a^2-b^2)-(a+b)x-x^2]$

9. *Să se simplifice espresiunea*

$$\frac{a(a+b)(a+2b)}{3}-\frac{a(a+b)(2a+b)}{6}$$ R.: $\frac{ab(a+b)}{2}$

10. *Să se verifice identitățile*

1° $x^2+1=(x+\sqrt{-1})(x-\sqrt{-1})$

2° $x^4+1=(x^2+1+x\sqrt{2})(x^2+1-x\sqrt{2})$

3° $x^6+1=(x^2+1)(x^2+1+x\sqrt{3})(x^2+1-x\sqrt{3})$

4° $x^8+1=(x^4+1+x^2\sqrt{2})(x^4+1-x^2\sqrt{2})$

Se va baza pe proprietatea: „două operaţiuni de sens contrar cu cantităţi egale se nimicesc"; astfel

$$(+x\sqrt{2})(-x\sqrt{2})=-x^2(\sqrt{2})^2=-x^2.2=-2x^2$$

NOTĂ.— A verifica o identitate va să zică a săvârşi toate operaţiunile arătate prin semne în unul din membri şi a merge cu calculul până când dăm peste cel-alt membru.

11. *Să se esprime algebriceşte triplul vârstei unei persoane acum 5 ani, x fiind vârsta actuală.*

12. *Suprafaţa unui triunghi fiind egală cu productul celor două dimensiuni* a *şi* b, *să se esprime suprafaţa dreptunghiului a-le cărui dimensiuni sunt* $(a+c)$ şi $(b-c)$.

13. *Să se afle volumul unui con cunoscând raza bazei sale* R *şi înălţimea* h.

RIDICAREA LA PUTERI.

1. *Ce înţelegem prin* puterea *unei cantităţi?*

2. *Cum se ridică un monom la o putere?*

3. *Un patrat poate fi în sine însuşi negativ? prin urmare cum putem reprezenta o cantitate esenţialmente pozitivă?*

4. *Să se ridice la puterea arătată monomii*

$(-a)^m$; *1° când* m *e nepereche 2° când* m *e pereche*

$-(-a)^5$; $-(-a)^8$; $(a^2)^3$; $-(a^m)^3$; $(-a^m)^2$; $-(-a^2)^4$

$-(-a^3)^3$; $(5xy)^3$; $(-8x^2y)^2$; $(a^{m-2})^3$; $-(-a^{m-n})^{m+n}$

5. *Cu ce este egal patratul unei sume? dar patratul unei diferenţe?*

6. *Să se ridice la patrat binomii*

$5x+3y$; $5x-3y$; $2x^2+1$; $1-3y^3$; m^5-n^3

7. *Să se calculeze diferenţa patratelor lui* $a+1$ şi a; *2°* a şi $a-1$; 3° a^2+1 şi a^2-1.

8. *Cu ce este egal cubul unei sume? dar cubul unei diferenţe?*

9. *Să se ridice la cub binomii de mai sus.*

10. *Să se calculeze espresiunile*

$(a-b)^2+(b+c)^2-(c-a)^2$; $m(m-1)^2(m+1)^2-m(m-1)^2$

$(1+2a-3b)^2-(1-2a+3b)^2$ [punând'o sub formă de sumă şi diferenţă găsim : $8a-12b$].

$(a+b)^3-(a-b)^3-6a^2b$ R.: $2b^3$

$(a+2b)^2-2(a+b)^2+a^2$; $(a+3b)^3-3(a+2b)^2+3(a+b)^3-a^3$

11. Să se demonstre că $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$ şi $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$.

12. Să se calculeze puterea a 4-a a unui binom. [observând că $(a\pm b)^4$ se poate pune sub forma $[(a\pm b)^2]^2$ şi calculând găsim

$$(a\pm b)^4=a^4\pm 4a^3b+6a^2b^2\pm 4ab^3+b^4$$

13. Să se verifice identităţile:

1^0 $(a+b)^3+(a-b)^3=2a(a^2+3b^2)$

2^0 $(a+b)^3-(a-b)^3=2b(3a^2+b^2)$

3^0 $\frac{(a+b-c)^2}{2}+\frac{(a-b+c)^2}{2}=a^2+(b-c)^2$

4^0 $(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)=$
$=4(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)-(a^2+b^2+c^2)^2$

5^0 $(a^2+b^2+c^2)^2-3(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)=$
$=2[(a^2-b^2)^2+(a^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2]$

14. *Să se sâvârşească calculele arătate în espresiunea*

$$(a+b+c)^3-(a+b-c)^3-(a+c-b)^3-(b+c-a)^3$$

şi să se verifice rezultatul făcând $a=5$, $b=2$, $c=7$.

15. *Să se adune binomilor următori câte un termin ast-fel pentru a căpăta nişte trinomi patraţi perfecţi:*

$25x^2+10x$; $9x^2-6x$; $4x^2+12xy$; $64y^2-16xy$
$81x^2+9y^2$; $49x^2-144y^2$; $36a^2b^2c^2-d^2$; $9x^4+81y^4$

IMPĂRŢIREA.

1. *Cunoscând un product de doi factori şi unul din ei, cum aflăm pe cel-alt factor?*

2. *Cum se împart doi monomi?*

3. *Să se formeze câtul monomilor:*

$25a^2b : 5ab$; $81m^2np^3 : 3mp^2$; $165x^2y^2z : 15x^2$
$31a^2x : 14a^2$; $12m^2n : m^2n$; $28a^2b^3c : 7ab^3$
$107a^2b : 9ab^2$; $\frac{2}{11}x^2y : \frac{7}{9}x$; $\frac{17}{23}p^2q : \frac{14}{51}pq^2t$
$7a^{-x}b^{y+1}c : 6a^{x+2}b^{1-y}d^7$; $11a^2(1-b^2)^3 : -8a^3(b^2-1)^2$

4. *Să se formeze productul monomilor:*

$7p^{-3}q^5r\times 8p^2q^{-3}t$; $\frac{8}{3}a^{-7}b^{-2}\times\frac{3}{8}a^{-3}b^3c^{-1}$

5. *Să se formeze câtul monomilor*

$\frac{3}{4}a^{m-2}b^{n+3}c^{p+1} : 2\frac{2}{3}a^{2m-5}b^{n-1}c^{p+3}$; $-\frac{3}{7}x^3y^{m+n} : \frac{2}{5}x^ny^{m-n}z^5$

6. *Să se sâvârşească împărţirea şi să se simplifice câtul*

ESTRAGEREA DE RĂDĂCINI.

1. *Cum se estrage rădăcina dintr'un monom? în ce cazuri nu'i posibilă estragerea?*

2. *Să se treacă sub radical factorul ce'l precede simplificându-se rezultatul:*

$$3\sqrt{2}\ ;\ 8\sqrt[3]{5}\ ;\ 10\sqrt[3]{4}\ ;\ a\sqrt[3]{2}\ ;\ (-b)\sqrt{4}\ ;\ -b\sqrt[4]{6}$$

$$(a+b)\sqrt{\frac{1}{a^2-b^2}}\ ;\ \left(\frac{m-n}{m+n}\right)\sqrt{\frac{m^2+mn}{m^2-2mn+n^2}}$$

3. *Cum se estrage rădăcina patrată dintr'un polinom?*

4. *Să se estragă rădăcina patrată din polinomii:*

$$a^2+a+\frac{1}{4}\ ;\ 9x^2-30x+25\ ;\ 25x^2-30xy+9y^2$$

$$a^2+ab+\frac{b^2}{4}\ ;\ \frac{25}{9}a^2+2a+\frac{9}{25}\ ;\ (x^2+1)(x^2-1)+2(1+x^2)$$

5. *Să se arăte că în cazul când triunghiul e echilateral, adecă când* $a=b=c$, *formula*

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}$$

se reduce la

$$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

iar în cazul când triunghiul e dreptunghic, adecă când avem d. e.

$$a^2=b^2+c^2\ ,\ la\ \ S=\frac{bc}{2}.$$

Eserciţii cu espresiuni raţionale fracţionare.

1. *Să se reducă la cea mai simplă espresiune fracţiunile:*

1. $\frac{12a^2b^3c}{4ab^2}$ *2.* $\frac{-8x^3y^2}{2xy^2}$ *3.* $\frac{84m^2n^3p}{-36mnp}$ *4.* $\frac{-ax+a^2x^2}{-ay-a^2y^2}$;

5. $\frac{a^2-b^2}{2(a+b)}$ *6.* $\frac{a^4-b^4}{4(a+b)^2}$ *7.* $\frac{a^2+2ab+b^2}{3(a+b)}$ *8.* $\frac{a^2-2ab+b^2}{7(a-b)}$

9. $\frac{x^2+2ax+a^2}{5ax+5a^2}$ *10.* $\frac{m^2+2mn+n^2}{m^2-n^2}$ *11.* $\frac{3ax^3+3a^3x-6a^2x^2}{ax^3-a^3x}$

2. $\frac{a^2-2a+1}{a-1}$ *13.* $\frac{a-b}{a^2-b^2}$ *14.* $\frac{3x+1}{9x^2-1}$ *15.* $\frac{x^2-1}{ax+a}$ *16.* $\frac{a^2x^2-a^4}{x+a}$

17. $\frac{x^3+y^3}{3(x+y)^2}$ *18.* $\frac{a^3-2a^2}{a^2-4a+4}$ R.: $\frac{a^2}{a-2}$

19. $\frac{x^3-x}{(1+ax)^2-(x+a)^2}$ R.: $\frac{x}{a^2-1}$ *20.* $\frac{(x^5+1)-(x^3+1)}{x^2-1}$ R.: x^3

21. $\frac{a^3+b^3}{(a-b)^2+ab}$ 22. $\frac{a^2+b^2-c^2+2ab}{a^2+c^2-b^2+2ac}$ 23. $\frac{2a^2-ab-3b^2}{2a^2-5ab+3b^2}$

24. $\frac{a^2-ab+bc-ac}{a^2-ac}$ R.: $\frac{a-b}{a}$ 25. $\frac{1-a^2}{(1+ax)^2-(a+x)^2}$ R.: $\frac{1}{1-x^2}$

26. $\frac{ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2)}{ab(x^2-y^2)+xy(a^2-b^2)}$ R.: $\frac{ax+by}{ax-by}$ 27. $\frac{a^2-4b^2}{2a+4b}$

28. $\frac{(x+y)^4-x^4-y^4}{(x+y)^3-x^3-y^3}$ 29. $\frac{4(a+b)}{c+5d}\left(\frac{c+d}{4}-\frac{c-d}{6}\right)$ R.: $\frac{a+b}{3}$

30. $\dfrac{a-\frac{ac(1-b)}{c+a^2b}}{1+\frac{a^2(1-b)}{c+a^2b}}$ R.: ab 31. $\dfrac{\frac{x}{x-a}-\frac{a}{x+a}}{\frac{x}{x+a}+\frac{a}{x-a}}$ R.: 1

2. *Să se transforme întregii în fracţii şi apoi să se simplifice:*

1. $a+\frac{1}{a}$ 2. $1+\frac{x}{1-x}$ 3. $m+\frac{m-n}{2}$ 4. $2+\frac{2}{x^2-1}$

5. $\frac{a+b+c}{a+c}-1$ 6. $a^2-ax+x^2+\frac{x^3}{a+x}$ R.: $\frac{a^3+2x^3}{a+x}$

7. $a-b-\frac{a-b-c}{2}$ 8. $a+x+\frac{a^2+x^2}{a-x}$ 9. $3a-\left(\frac{2a-b}{2}\right)$

10. $1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ R.: $\frac{(a+b-c)(a+c-b)}{2bc}$

11. $a^2-2a+1+\frac{a^4-1}{a^2+2a+1}$ 12. $a+\dfrac{1}{b-\frac{1}{a}}$ R.: $\frac{a^2b}{ab-1}$

13. $a-\dfrac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ R.: $\frac{a^2}{a+b}$

3. *Să se reducă la acelaşi numitor fracţiunile;*

1° $\frac{2a}{3b}, \frac{3c}{4b}, \frac{4a}{5c}$ 2° $\frac{7a}{8x^2}, \frac{5b}{12y^2}, \frac{3ab}{16xy}, \frac{2a^2b^2}{3x^2y^2}$

3° $\frac{a^2}{a+b}, \frac{ab}{a-b}, \frac{2a-3b}{a^2-b^2}$ R.: $\frac{a^3-a^2b}{a^2-b^2}, \frac{a^2b+ab^2}{a^2-b^2}, \frac{2a-3b}{a^2-b^2}$

4° $\frac{m+n}{m-n}, \frac{m-n}{m+n}, \frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}, \frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$

4. *Dacă am aduna o aceiaşi cantitate* m *la ambii termini ai unei fracţiuni, se schimbă valoarea sa? dar dacă am scădea o aceiaşi cantitate?*

5. *Să se săvârşească operaţiunile arătate şi să se simplifice*

1. $\frac{4}{a}+\frac{5}{a}+\frac{6a}{a}+\frac{a^2}{a}$ 2. $\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}$ 3. $\frac{a+b}{a}-\frac{a-b}{a}$

4. $\frac{a^2}{a-b}+\frac{b^2}{b-a}$ R: $a+b$ *5.* $\frac{a+x}{a-x}+\frac{ax}{a-x}+\frac{a^2+x^2}{a-x}$

6. $\frac{a+b}{2a}+\frac{a-b}{3a}$ *7.* $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}$ *8.* $a+\frac{1}{1+a}+\frac{1+a^2}{1-a}$

9. $\frac{ab}{a-b}+\frac{bc}{b-c}+\frac{ca}{c-a}$ *10.* $\frac{x}{x+1}+\frac{x}{x-1}+\frac{2x^2}{x^2-1}$

11. $\frac{1+2x}{1-2x}+\frac{1-2x}{1+2x}$ *12.* $\frac{b}{a+b}-\frac{ab}{(a+b)^2}+\frac{a^3}{(a+b)^3}$.

13. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$ *14.* $\frac{a}{x(a-x)}+\frac{x}{a(a-x)}+\frac{ax}{(a-x)^2}$

15. $\frac{a}{a+z}+\frac{z}{a-z}$ *16.* $\frac{1}{x+2}-\frac{2}{x+2}+\frac{1}{x+3}$

17. $\frac{ax}{x^2-a^2}+\frac{x-a}{a+x}+\frac{3ax-a^2-x^2}{x^2-a^2}$ *18.* $\frac{x}{x-1}-\frac{x}{x+1}+\frac{2x^2}{x^2-1}$

19. $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}-\frac{x^2+1}{x^2-1}$ *20.* $\frac{3x^2-x+12}{x^2-9}-\frac{x+2}{x+3}-\frac{x+3}{x-3}$

21. $\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$ R.: $a+b+c$

22. $\frac{ab-4b^2-13a^2}{3(a^2-b^2)}+\frac{2a-b}{a+b}+\frac{8a}{3(a-b)}$ R.: $\frac{1}{3}$

23. $\frac{x+c}{x^2-(a+b)x+ab}+\frac{x+b}{x^2-(a+c)x+ac}+\frac{x+a}{x^2-(b+c)x+bc}$

24. $\frac{x^4-2x^2-3}{15x^6-17x^2+25x^4-18}-\frac{x^2-4x+1}{12x^4-x^2-6}$

25. $\frac{a^4}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{b^4}{(b-a)(b-c)(b-d)}+\frac{c^4}{(c-a)(c-b)(c-d)}+$
$+\frac{d^4}{(d-a)(d-b)(d-c)}$ R.: $a+b+c+d$

Inmulțirea și ridicarea la puteri.

1. $2ab\cdot\frac{3cd}{2ab}$ *2.* $3a^2\cdot\frac{2b}{a^2}$ *3.* $\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}$ *4.* $\frac{2}{b}\cdot ab$

5. $(a^2-b^2)\cdot\frac{5a}{7(a+b)}$ *6.* $(x+y)^3\cdot\frac{3x}{x+y}$ *7.* $\frac{3a}{2b}\cdot\left(-\frac{5b}{9a^2}\right)$

8. $\frac{(x-1)^2}{y^2}\cdot\frac{(x+1)y^2}{(x-1)^3}$ *9.* $\frac{(a-b)^2}{a+b}\cdot\frac{b}{a(a-b)}$

10. $\frac{x(a+x)}{x^2-2ax+a^2}\cdot\frac{x(a-x)}{x^2+2ax+a^2}$ *11.* $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

12. $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ 13. $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ 14. $\left(-\frac{3a}{4b}\right)^3$

15. $\frac{2(a^2b)^2}{3(a^2b^2)^3}$ 16. $\frac{(x^2-y^2)^2}{(x^2+y^2)^2}$ 17. $\frac{a+b}{3}\cdot\frac{2}{a+b}$

18. $\frac{(a-b)^2}{a+b}\cdot\frac{b}{a(a-b)}$ 19. $\frac{x(a-x)}{a^2+2ax+x^2}\cdot\frac{a(a+x)}{a^2-2ax+x^2}$

20. $\frac{2b}{a-b}\cdot\frac{a^2-b^2}{5a}$ 21. $\frac{a^3+(a+1)ax+x^2}{(a^2+x)(a^2-x)}\cdot\frac{(a^2-x)x}{a+x}$ R.: x

22. $\left(1-\frac{a-b}{a+b}\right)\left(2+\frac{2b}{a-b}\right)$ 23. $\frac{x(a-x)}{a^2+x(2a+x)}\cdot\frac{a(a+x)}{a(a-2x)+x^2}$

R.: $\frac{ax}{a^2-x^2}$

24. $\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2$ 25. $\frac{6ad}{3c-d}\left(\frac{c+d}{4}-\frac{d}{3}\right)$

26. $\left(\frac{1}{1+x}+\frac{2x}{1-x^2}\right)\left(\frac{1}{x}-1\right)$ 27. $\left(\frac{2a}{3b}-\frac{3c}{4d}\right)\left(\frac{5d}{4c}-\frac{2b}{a}\right)$

28. $\frac{a^4-x^4}{a^2-x(2a-x)}\cdot\frac{a-x}{a^2+ax}$ R.: $\frac{a^2+x^2}{a}$

Impărțirea și estragerea de rădăcini.

1. $a:\frac{a}{b}$ 2. $\frac{a}{b}:a$ 3. $\frac{9a}{b}:3$ 4. $\frac{3a}{2b}:\frac{5b}{6a}$

5. $\frac{3a^3b}{5ab^2}:\frac{5a^4b}{4ab^2}$ 6. $a:\frac{1}{b}$ 7. $\frac{1}{b}:a$ 8. $1:\frac{x}{y}$

9. $mnp:\frac{mp}{nq}$ 10. $\frac{a}{b}:\frac{c}{b}$ 11. $\frac{a+b}{a-b}:\frac{b+a}{b-a}$

12. $\frac{ab+b^2}{a^2-2ab+b^2}:\frac{b^2}{a^2-b^2}$ 13. $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}:\frac{2a^2+2b^2}{a+b}$

14. $-\frac{m}{n}:x$ 15. $-\frac{a}{bc}:-\frac{c}{d}$ 16. $(x+y):\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$

17. $\left(a-\frac{a-b}{1+ab}\right):\left(1+\frac{a(a-b)}{1+ab}\right)$ 18. $\left(1+\frac{1}{x}\right):\left(1-\frac{1}{x}\right)$ R.: $\frac{x+1}{x-1}$

19. $(x+y+z):\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$ 20. $\left(a^2+1+\frac{1}{a^2}\right):\left(a-1+\frac{1}{a}\right)$

21. $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}:\frac{a^4+2a^2b^2+b^4}{a^4-2a^2b^2+b^4}$ 22. $\left(1+\frac{1}{x}\right):\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)^2$

23. $\left(\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}\right):\left(\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}\right)$

24. $\left(\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}\right):\left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)$

Cum se estrage rădăcina dintr'o fracție?

Să se estragă rădăcina patrată din fracțiunile următoare simplificându-se rezultatul)*

$$\frac{4a^2}{9b^2}\ ;\quad \frac{2x^4}{16}\ ;\quad \frac{b^2-4ac}{4a^2}\ ;\quad \frac{a^2-b^2}{(a-b)^2}\ ;\quad \frac{(a+b)^4}{a^4-b^4}$$

Eserciții cu espresiuni iraționale.

1. *Ce numim radicali simili?*

2. *Să se reducă la acelaşi indice radicalii:*

$1^0\ \sqrt{3},\ \sqrt[3]{4}\quad 2^0\ \sqrt{a},\ \sqrt[3]{b},\ \sqrt[6]{c}\quad 3^0\ \sqrt[3]{x},\ \sqrt[4]{y}\quad 4^0\ \sqrt[5]{x^7},\ \sqrt[8]{y^3},\ \sqrt[9]{z^5}$

$5^0\ \sqrt{\frac{x}{y^2}},\ \sqrt[3]{\frac{x^2}{y}},\ \sqrt[5]{\frac{x^3}{y^4}}\quad 6^0\ \sqrt[3]{\frac{1}{a-x}},\ \sqrt{\frac{2}{a-x}},\ \sqrt[6]{\frac{3}{a-x}}$

3. *Să se calculeze espresiunile următoare:*

1. $2\sqrt{3}+3\sqrt{3}$ *2.* $\sqrt[3]{49}+2\sqrt[3]{49}+5\sqrt[3]{49}$ *3.* $3\sqrt{2}+5\sqrt{16}+3\sqrt{64}$

4. $5\sqrt{2}-3\sqrt{2}$ *5.* $4\sqrt[3]{60}-2\sqrt[3]{60}$ *6.* $\sqrt{9}-\sqrt{4}$ *7.* $\sqrt{5}-\sqrt{\frac{1}{5}}$

8. $\sqrt{\frac{a-b}{c^2}}+\sqrt{\frac{a}{b^2}-\frac{1}{b}}$ *9.* $\frac{a}{a-\sqrt{a}}-\frac{a}{a+\sqrt{a}}$ R.: $\frac{2\sqrt{a}}{a-1}$

10. $\sqrt{ab}\,.\,\sqrt{bc}$ *11.* $3\sqrt{x^3}\,.\,\sqrt{y^2}$ *12.* $2\sqrt[3]{a+b}\,.\,3\sqrt[3]{a-b}$

13. $\sqrt{a}\,.\,\sqrt[3]{b}$ *14.* $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})$ *15.* $(-a+b\sqrt{c})(a-b\sqrt{c})$

16. $(-a-\sqrt[3]{b^2c^4})(-a+\sqrt[3]{b^2c^4})$ *17.* $5\sqrt{\frac{1}{2}}\,.\,3\sqrt{\frac{3}{4}}$

18. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ *19.* $(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b})(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})$

20. $(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{a}+\sqrt{c}-\sqrt{b})(\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a})$

21. $(\sqrt{6-\sqrt{3}})(\sqrt{6+\sqrt{3}})$ *22.* $(\sqrt[3]{3-\sqrt{2}})(\sqrt[3]{3+\sqrt{2}})$

23. $\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)$ *24.* $(\sqrt{a^3})^2$ *25.* $(\sqrt[3]{b^2})^3$

26. $(\sqrt[6]{m^2})^3$ *27.* $(\sqrt[4]{z})^2$ *28.* $(\sqrt[6]{(a^2+b^2)^4})^3$ R.: $(a^2+b^2)^2$

*) In Algebră toate rezultatele calculelor trebue se fie cât se poate de simplificate, în cât să nu mai conțină nici o operațiune care să poată fi săvârşită.

29. $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$ *30.* $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3$ *31.* $(\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c})^2$
32. $(m-n+p\sqrt{-1})^2$ *33.* $\sqrt{32}:\sqrt{8}$ *34.* $\sqrt{32}:\sqrt{2}$
35. $\sqrt[3]{32}:\sqrt[3]{4}$ *36.* $\sqrt{15}:\sqrt[3]{5}$ *37.* $\sqrt[3]{65}:\sqrt{15}$
38. $\sqrt{\frac{1}{2}}:\sqrt{\frac{3}{4}}$ *39.* $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}:\sqrt[3]{\frac{5}{6}}$ *40.* $\sqrt{\frac{2}{9}}:\sqrt{\frac{1}{2}}$
41. $\sqrt{\frac{1}{6}}:\sqrt{\frac{3}{2}}$ *42.* $(2-\sqrt{2}):(2+\sqrt{2})$ *43.* $(a-\sqrt{ab}):(\sqrt{ab}-b)$
44. $(\sqrt{a+b}+c)(\sqrt{a+b}-c)$ *45.* $\sqrt{a^2+2ab+b^2}+\sqrt{a^2-2ab+b^2}$
46. $\sqrt{24}+2\sqrt{6}-\sqrt{2}+3\sqrt{18}$ *47.* $\frac{1}{a+\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{1}{a-\sqrt{a^2-x^2}}$ R.: $\frac{2a}{x^2}$
48. $\frac{1}{a-b\sqrt{c}}-\frac{1}{a+b\sqrt{c}}$ *49.* $\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}+\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$
50. $\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}$ *51.* $\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)^2$
52. $\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)^2$ *53.* $\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}:\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$

4. *Să se transforme fracţiunile următoare în altele echivalente însă cu numitori raţionali.*

1. $\frac{3}{\sqrt{3}}$ *2.* $\frac{21}{3\sqrt{7}}$ *3.* $\frac{3+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ *4.* $\frac{a-\sqrt{b}}{\sqrt{c}}$ *5.* $\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$ *6.* $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$
7. $\frac{1-3\sqrt{5}}{1+2\sqrt{3}}$ *8.* $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ *9.* $\frac{a+b\sqrt{-1}}{a-b\sqrt{-1}}$ *10.* $\frac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{6}}$
11. $\frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ *12.* $\frac{a-\sqrt{-b}}{a+\sqrt{-b}}$ *13.* $\frac{m}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}$ *14.* $\frac{m}{\sqrt[4]{a}-\sqrt{b}}$
15. $\frac{\sqrt{1+a^2}-\sqrt{1-a^2}}{a^2+2-2\sqrt{1-a^4}}$ *16.* $\frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}$

Ecvaţiuni de gradul întâi.

Ce deosebire e între o identitate şi o ecvaţie?

Principiul fundamental relativ la identităţi se aplică şi ecvaţiunilor?

Ce restricţiuni sunt de făcut în cazul când înmulţim sau împărţim ambii membri ai unei ecvaţii cu o aceiaşi cantitate?

Cu toate-că am insistat mult asupra acestui punct în curs, totuşi dau aci un esemplu care ne arată că mănuind calculul fără nici o precauţiune, putem fi conduşi la absurdităţi.

Fie a şi b două numere oare-cari a căror diferenţă e c ($c \neq 0$). Reprezentând aceasta înscris, avem

$$a-b=c$$

Inmulţind ambii membri ai acestei egalităţi cu $(a-b)$, care nu e nul, avem

$$a^2-2ab+b^2=ca-cb$$

şi scoţând în factor comun pe a în membrul întăi şi pe b în membrul al doilea, ceia-ce nu schimbă întru nimic valoarea egalităţei căci a şi b sunt diferiţi de zero, vom avea

$$a(a-b-c)=b(a-b-c)$$

Dacă am face acum greşala de a împărţi prin $(a-b-c)$ care e nul, căci $a-b=c$ şi prin urmare $a-b-c=0$, am deduce

$$a=b$$

ceia-ce e imposibil căci $a-b \neq 0$.

ECVAŢIUNI CU O NECUNOSCUTĂ.

Să se rezolvească ecvaţiunile numerice :

1. $45-x=38$ *2.* $4x-5=7$ *3.* $5x+3=18$

4. $27-3y=6$ *5.* $19x-14=12x$ *6.* $8x+3=4x+15-2x$

7. $38-2y=9y-39$ *8.* $12x+4=16x-4$ *9.* $12x-8=3x+28$

10. $21x-42+5x-15=11-68+42$

11. $127-7x-4x=115-8x+9x$

12. $8x+18+14x-9-5x-23-3x=0$ R.: $x=1$

13. $3(x-2)=5$ *14.* $7(y+4)=18$ *15.* $5(15-x)=15$

16. $\frac{x}{2}+\frac{5}{3}=\frac{3x-2}{6}$ *17.* $\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=5x-282-\frac{x}{2}$ R.: $x=72$

18. $\frac{2x}{3}-82-\frac{8x}{6}=-74-\frac{6x}{5}$ R.: $x=15$ *19.* $\frac{4x-2}{3(1+x)}=\frac{10}{9}$

20. $\frac{y}{2}+\frac{y}{3}-\frac{y}{4}=7$ *21.* $-\frac{z}{5}-\frac{z}{2}+\frac{3z}{7}=9$

22. $\frac{z}{2}-\frac{z}{3}-\frac{z}{4}=11-z$ *23.* $\frac{7x}{18}-\frac{5x}{12}+\frac{5x}{6}-6=\frac{4x}{15}-\frac{11}{18}$

24. $\frac{x-3}{4x+2}=\frac{6}{38}$ *25.* $\frac{x}{2}+\frac{x+1}{7}=x-1$ *26.* $\frac{x-2}{3x-5}=\frac{10}{31}$

27. $10-\frac{2x}{3}+\frac{5x}{4}=4x-\frac{1}{4}$ R.: $x=3$ *28.* $\frac{7(x-3)}{4(4x+2)}=\frac{7}{44}$

29. $\frac{4x-3}{5}=\frac{5x-2}{3}-6$ R.: $x=7$ *30.* $\frac{25}{x+3}=\frac{10}{3x-4}$

31. $\frac{x+1}{4}+\frac{x-1}{6}=8$ *32.* $\frac{x+1}{2}+\frac{x+2}{3}=16-\frac{x-6}{4}$

33. $\frac{2x}{7}-1=\frac{3x}{8}+\frac{1}{21}-\frac{31}{28}$ *34.* $\frac{1}{2}-2x=3x-\frac{3}{4}+\frac{5x}{6}$

35. $\frac{x-2}{3}-\frac{12-x}{2}=\frac{5x-36}{4}-1$ R.: $x=8$

36. $\frac{3x+4}{14}+\frac{7}{15}=\frac{38-x}{10}-\frac{4x}{15}$ R.: $x=8$

37. $2+\frac{x+3}{6}=4-\frac{9-2x}{3}$ *38.* $\frac{5x-3}{2x-3}=\frac{5x-1}{2x+3}$

39. $\frac{3}{z-4}+\frac{5}{2(z-4)}+\frac{18}{4(z-4)}=\frac{1}{2}$

40. $[6-(1-x)]x-2=(x+1)^2$. R.: $x=1$

41. $\frac{5x-2}{3}+2=\frac{x-8}{4}+\frac{x+14}{2}$ R.: $x=4$

42. $\frac{2x+7}{6}-\frac{2(7x-1)}{3}-13=20x+\frac{4x-1}{12}+\frac{5}{4}$ R.: $x=-\frac{1}{2}$

43. $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-4}=\frac{1}{x-6}-\frac{1}{x-8}$ *44.* $\frac{x+1}{x-2}+\frac{x+2}{x-1}=2$

45. $\frac{y+2}{y-1}+\frac{y+1}{y-2}=2$ R.: $y=\frac{3}{2}$ *46.* $\frac{z-1}{z-2}-\frac{z-2}{z-3}=\frac{z-5}{z-6}-\frac{z-6}{z-7}$

Să se rezolvească ecvațiile literare:

1. $a-x=b$ *2.* $mx+n=p$ *3.* $x-(a-x)=b$ *4.* $ax-c=bx+d$

5. $ab-cx=bx-ac$ *6.* $(a-x)(b+x)=a^2-x^2$ *7.* $mx-n=x$

8. $\frac{x}{a}-\frac{x}{b}=c$ *9.* $\frac{x}{m}-\frac{a}{n}=\frac{b}{m}-\frac{x}{n}$ R.: $x=\frac{ma+nb}{m+n}$

10. $(a+x)(b+x)-a(b+c)=x^2+\frac{a^2c}{b}$ R.: $x=\frac{ac}{b}$

11. $\frac{a-x}{b}=\frac{b-x}{a}$ R.: $x=a+b$ *12.* $\frac{a}{x}+b=\frac{b}{x}+a$ R.: $x=1$

13. $\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x-a}=\frac{1}{x^2-a^2}$ R.: $x=\frac{1}{2}$ *14.* $\frac{a(a+b-x)}{b-c}=\frac{bx+c(a-b)}{b+c}$

R.: $x=a+c$

15. $\frac{ax}{x-a}+\frac{bx}{x-b}=a+b$ *16.* $\frac{x}{b}=\frac{h-x}{h}$ *17.* $\frac{x+a}{b}-\frac{x-b}{a}=\frac{2b}{a}$

18. $\frac{mx}{n}-\frac{nx}{m}=\frac{1}{n}-\frac{1}{m}$ *19.* $\frac{x-a}{a}+\frac{x-a}{b}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$

20. $\frac{x-a}{b}-\frac{x-b}{a}=\frac{b}{a}$ 21. $\frac{a(a-x)}{b}-\frac{b(b+x)}{a}=x$ R.: $x=a-b$

22. $\frac{a}{y-a}-\frac{b}{y-b}=\frac{a-b}{(y-a)(y-b)}$ R.: $y=1$

23. $(x+a)(x+b)-(x-a)(x-b)=(a+b)^2$ R.: $x=\frac{a+b}{2}$

24. $\frac{m}{n}\left(1-\frac{m}{z}\right)+\frac{n}{m}\left(1-\frac{n}{z}\right)=1$ R.: $m+n$

25. $\frac{a+x}{b+x}=\frac{c+x}{d+x}$ 26. $\frac{1+ax}{1-ax}=\frac{3+a^2x^2}{1-a^2x^2}$ R.: $x=\frac{1}{a}$

27. $\frac{x-a}{b}+\frac{x-b}{c}+\frac{x-c}{a}=\frac{x-(a+b+c)}{abc}$

R.: $x=\frac{a(ac+b^2-1)+b(c^2-1)-c}{a(b+c)+bc-1}$

Probleme dând loc la ecvaţiuni cu o necunoscută.

1. *Să se găsească numărul al cărui product cu 24 este 384.*
2. *Să se afle numărul al cărui cât prin 18 este 9.*
3. *Să se împartă 124 în două numere care să difere de 48.*
4. *La care număr adunându-i 39 căpătăm întreitul lui?*
5. *Din îndoitul unui număr scăzând 4 mai rămâne 24. Care'i acel număr?*
6. *Indoitul unui număr este egal cu întreitul său micşurat cu 11. Să se afle acel număr.*
7. *Dacă la de 5 ori un număr îi adun 6, am 66 pentru sumă Care'i acel număr?*
8. *Să se împartă un număr* a *în 2 părţi ale căror raport să fie ca* m *la* n.
9. *Să se împartă un număr* a *în două părţi ast-fel ca una din ele să fie de* n *ori mai mare ca cealaltă.*
10. *Să se împartă 140 în două părţi ast-fel ca una mărită cu 10 să fie egală cu o cincime din cealaltă.* (R.: 125 şi 15).
11. *Cât trebue să se scadă din numerile 545 şi 173 pentru ca numărul cel d'intăi să fie de 5 ori mai mare de cât cel de al doilea?* (R.: 80).
12. *Un profesor întrebat de numărul elevilor săi, răspunse: la apel mi'au răspuns patru cincimi din numărul lor, 10 fiind absenţi. Câţi elevi are?* (R.: 50).

13. *Vârsta unui părinte este* a *şi a fiului său* b; *la ce epocă vârsta tatălui este de* m *ori cât a fiului său?*

14. *Suma a două numere este* a *şi câtul lor* b; *să se găsească aceste numere.* (x fiind unul din aceste numere, cel-alt va fi (a—x) căci x+(a—x)=a etc.)

15. *Intr'o societate de 126 de persoane erau de 2 ori mai mulţi barbaţi de cât femei, şi de 2 ori mai multe femei de cât copii. Câte persoane erau de fie-care gen?* (R.: 18 c, 36 f şi 72 b).

16. *O garnizoană se compune din 4800 de oameni în cari sunt de 4 ori mai mulţi dorobanţi de cât călăraşi, şi de 3 ori mai mulţi călăraşi, de cât tunari. Câţi oameni sunt din fie-care armă?* (R.: 300 a, 900 c şi 3600 d).

17. *Cum se poate plăti 65 de lei cu 16 piese?* (R.: 11 de 5 lei şi 5 de 2 lei).

18. *Să se împartă 364 de lei la două persoane, ast-fel ca unul să aibă atâtea piese de 5 lei cât are celalt de 2 lei* (R.: 260 şi 104)

19. *Un antreprinor a fost angajat să construească un palat într'un timp determinat; pentru care va primi 1000 de lei pe zi, dar i se va opri un sfert din această sumă pentru fie-care zi de întârziere. El termină lucrarea în 112 zile şi primi 194000 de lei In cât timp trebuia să termine lucrarea?*

20. *Un părinte murind lăsă prin testament ca suma ce o avea de 8600 de lei să fie împărţită ast-fel între cei 4 fii ai sei: cel mai mare să ia de 2 ori cât cel de al 3-le mai puţin 100 de lei; ca al doilea să ia de 3 ori cât al 3-le mai puţin 200 de lei; şi ca al 3-le să ia de 4 ori cât al 4-le mai puţin 300 de lei. Care'i partea fie-căruia?* (R.: al 4-le: 300 lei, al 3-le: 900 lei, al 2-le: 2500 lei, 1-iul: 4900 lei).

21. *Doi curieri* A *şi* B *cari merg în aceiaşi direcţiune sunt, într'un moment dat, la o distanţă* d; *B merge de* c *ori mai iute ca A, se întreabă după cât drum se vor întâlni?*

22. *Un ogar urmăreşte un iepure care are 60 de sărituri înaintea lui; ogarul face 6 sărituri în timp ce iepurele face 9, dar 3 sărituri de a-le ogarului fac cât 7 de a-le epurelui. Se întreabă câte sărituri va mai face ogarul până ce va prinde iepurile?* (R.: 72).

23. *Un colonel voeşte să aranjeze regimentul său în patrat în care scop încearcă în două feluri: întâia oară îi rămâne 39 de oameni; punând apoi un om mai mult pe fie-care latură, îi lipseşte 50 de oameni pentru a formă patratul. Din câţi oameni se compune regimentul?*

ECVAŢIUNI CU DOUĂ NECUNOSCUTE.

1. $x+y=a$, $x-y=b$ *2.* $2x+y=7$, $3x-y=3$ *3.* $4x+5y=22$, $4x-y=10$ *4.* $x+5y=32$, $x+y=16$

5. $5x-3y=2$, $9x-5y=6$ *6.* $5x+9y=188$, $13x-2y=57$ *7.* $8x+3y=3$, $12x+9y=3$

8. $9x+25y=158$, $6x-35y=2$ *9.* $5x-4y=-21$, $6x-5y=22$ *10.* $12x-7y=-27$, $14x-25y+2=0$

11. $4+7x=3y$, $8y=3x+89$ *12.* $31x-48y+379=0$, $72x+19y-1077=0$ *13.* $ax+by=m$, $cx-dy=n$

14. $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=5$, $2x+3y=35$ *14.* $\frac{x}{8}+8y=129$, $\frac{y}{8}+8x=66$ *15.* $10x-\frac{y}{2}=88$, $10y+\frac{x}{3}=43$

16. $\frac{x+y}{3}=\frac{x-y}{2}$, $\frac{x}{2}=y+3$ *17.* $\frac{x+y}{8}+\frac{x-y}{6}=5$, $\frac{x+y}{4}-\frac{x-y}{3}=10$ *18.* $\frac{x}{4}+\frac{3y}{2}=15$, $\frac{5x}{3}-\frac{y}{4}=18$

19. $\frac{3x}{8}-7=5y-\frac{1}{2}$, $10-\frac{4x}{15}=\frac{2}{3}+6y$ *20.* $\frac{x+2y}{5}-\frac{y-2x}{3}=1$, $\frac{y+2x}{4}+\frac{x+y}{3}=2$ *21.* $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=8$, $\frac{x}{9}-\frac{y}{10}=1$

22. $ax+by=a^2+b^2$, $bx+ay=2ab$ *23.* $(x+5)(y+7)=112-(x+1)(9-y)$, $2x+10=3y+1$

24. $\frac{5x}{3}-\frac{y}{2}-4=\frac{3y}{4}+\frac{1}{12}+8$, $\frac{x}{2}+\frac{y+1}{6}=2(x-2)$ *25.* $\frac{5x-2}{4-3y}=\frac{1}{2}$, $\frac{3x+5}{y-1}=\frac{2}{3}$ R.: $\left\{\begin{array}{l} x=-\frac{35}{47} \\ y=\frac{242}{47}\end{array}\right.$

26. $\frac{x}{a+b}+\frac{y}{a-b}=\frac{1}{a-b}$, $\frac{x}{a+b}-\frac{y}{a-b}=\frac{1}{a+b}$ *27.* $\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)=xy-\frac{1}{4}$, $\left(x-\frac{1}{6}\right)\left(y+\frac{1}{4}\right)=xy+\frac{1}{24}$ R.: $\left\{\begin{array}{l} x=\frac{5}{6} \\ y=\frac{3}{4}\end{array}\right.$

Probleme dând loc la ecvaţiuni cu 2 necunoscute.

1. Suma a două numere este a; iar diferenţa lor, b. Care sunt acele numere?

2. Suma a două numere este 21 ca şi intreitul diferenţei lor! Care sunt acele numere? (R.: 14 şi 7).

3. Doi saci cuprind împreună 4000 de nuci. Să se afle conţinutul fie-căruia ştiind că dacă luăm 50 de nuci din sacul ântăi şi le punem în cel de al doilea, ambii saci conţin un acelaşi număr de nuci. (R.: 2050 şi 1950).

4. Doi prieteni 'şi zic unul altuia: Dămi 1 leu ca să am tot atât ca tine.—Dămi tu 1 leu răspunse celalt, că să am de 2 ori cât tine. Căţi lei aveau dânşii? (R.: 5 şi 7).

5. Să se găsească două numere ast-fel ca cel d'intâi mărit cu 5 să fie cât întreitul celui de al doilea, şi aceasta mărit cu 7 să fie cât jumătatea celui d'intăi. (R.: 52 şi 19).

6. Două numere sunt ast-fel că de 3 ori cel d'intăi plus de 5 ori cel de al 2-le fac 71, însă de 5 ori cel d'intăi plus de 3 ori cel de al 2-le fac 81. Care's acele numere? (R.: 12 şi 7).

7. Dându-se câte un măr la fie-care copil, mai rămâne un măr; dacă li s'ar fi dat câte două, ar fi rămas un copil fără de măr. Câte mere şi câţi copii erau? (R.: 4 m. şi 3 c.).

8. Un copil întrebând pe tatăl său ce vârstă are, îi răspunse: Acum 5 ani eram de 4 ori mai mare ca tine, iar acum nu sunt de cât de 3 ori. Ce vârstă au dânşii? (R.; 45 şi 15).

9. Un cârd de ciori trec pe deasupra unor pari; dacă se pune câte o cioară pe un par, mai rămăn 5 ciori; dacă se pune câte două, mai rămân 5 pari. Câte ciori şi câţi pari sunt? (R.: 20 c. şi 15 p.).

10. Să se afle două numere cari să fie între ele ca 3 la 4 şi a căror sumă să fie 126. (R.: 54 şi 72).

11. Un măgar care se plângea de greutatea sarcinei ce o purta, zise cămilei: nu'mi lipseşte de cât o chintală (100 kgr.) din sarcina ta pentru-ca a mea să fie de două ori cât a ta; cămila îi răspunse însă: eu dacă aşi lua o chintală din sarcina ta, a mea ar fi de 3 ori cât a ta. Câte chintale purta fie-care? (R.: măgarul $2\frac{1}{5}$ şi cămila $2\frac{3}{5}$).

12. Un podgorean are 2 cai şi 2 şele din care una ăl costă 50 de lei şi alta numai 6 lei. Dacă punea şeaua cea bună peste calul d'intăi şi cea-laltă peste calul de al doilea, acesta valora cu 24 de lei mai puţin ca cel d'intăi; dar dacă punea şeaua cea ieftină peste calul d'intăi şi cea bună peste calul de al doilea, valoarea acestuia devine cât $\frac{15}{4}$ a acelui d'intăi. Carei valoarea fie-cărui cal? (R.: 210 l şi 90 l).

13. Doi jucători convin ca acela ce va perde ântăia partidă să dubleze banii celui-l-alt; ca acel ce va perde a doua partidă

să tripleze banii adversarului său şi ca cel ce va perde a treia partidă să cadrupleze banii adversarului său; fie-care perde câte o partidă şi se scoală cu 24 de lei. Cu cât s'au pus la joc? (R.: ântăiul cu 31 l şi al doilea cu 17 l).

14. Un părinte promite fiului său 30 de bani pentru fie-care temă bună, însă pentru fie-care temă rea să'i dea înapoi câte 10 bani. După această învoire, tatăl urmează să'i dea 80 de bani pentru 12 teme lucrate. Se întreabă câte din acestea au fost bune şi câte rele? (R.: 5 şi 7).

15. Cifra sutimilor unui număr este întreita cifrei unităţilor iar cifra zecimilor îi este îndoită. Să se afle acest număr, ştiind că dacă scadem 396, căpătăm inversul său. (Această problemă se tratează cu o singură necunoscută. (R.: 642).

16. Adunând 2 la ambii termini ai unei fracţiuni, căpătăm $\frac{6}{5}$; iar scăzând 2 din ambii săi membri căpătăm 2. Care'i acea fracţiune? (Fracţiunea căutată se însamnă cu $\frac{x}{y}$ apoi se urmează enunţul şi se găseşte $\frac{4}{3}$).

17. A zice lui B: Eu am de 2 ori vârsta pe care o aveai când aveam vârsta pe care o ai, şi când vei avea vârsta pe care o am, suma vârstelor noastre va 126 de ani. Se cere vârstele lor. (Diferenţa vârstelor lor fiind $(x-y)$, acum $(x-y)$ ani B avea $(2y-x)$ ani, peste $(x-y)$ ani A va avea $(2x-y)$ ani; urmând enunţul găsim: $x=56$ şi $y=42$

ECVAŢIUNI CU TREI NECUNOSCUTE.

1. $x+y=7$, $y+z=9$, $z+x=8$

2. $2x+3y=31$, $3x-2y=1$, $4z=36$

3. $7x-3y=6$, $2y+5z=30$, $8z-11x=-1$

4. $2x-3y-z=1$, $3x+2y-2z=13$, $5x-4y-2z=11$

5. $5x+2y-2z=3$, $3x-4y+5z=10$, $7x-3y+6z=19$

6. $7x-5y-4z+44=0$, $3x-8y+2z+11=0$, $9x+2y-6z+23=0$

7. $x+y=a$, $y+z=b$, $z+x=c$

8. $x+y+z=a$, $by=cx$, $dz=ey$

9. $x-ax+y=0$, $y-bx+z=0$, $y+z=c$

10. $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{6}=36$, $\frac{x}{15}+\frac{y}{20}+\frac{z}{9}=10$, $\frac{x}{2}+\frac{y}{10}+\frac{z}{4}=43$

11. $\frac{x}{3}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=62$, $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=47$, $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}+\frac{z}{6}=38$

12. $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}+\frac{2z}{7}=58$, $\frac{5x}{4}+\frac{y}{6}+\frac{z}{3}=76$, $\frac{x}{2}-\frac{y}{5}+\frac{7z}{40}=\frac{147}{5}$

13. $2x-y+z=\frac{5}{12}$ *14.* $x+\frac{z}{4}=\frac{41}{2}$ *15.* $\frac{x+2y}{5x+6z}=\frac{7}{9}$ *16.* $\frac{xy}{x+y}=1$

$3x+2y=1$ $y+\frac{x}{2}=41$ $\frac{3y+4z}{x+2y}=\frac{8}{7}$ $\frac{xz}{x+z}=2$

$4y-3z=0$ $\frac{z}{3}+y=34$ $x+y+z=126$ $\frac{yz}{y+z}=3$

Probleme dând loc la ecvaţiuni cu 3 necunoscute.

1. Să se determine 3 numere ştiind că sumele lor luate două câte două sunt respectiv 21, 22 şi 23. (R.: 10, 11 şi 12).

2. Cineva a cumpărat de la 3 ţarani câte o căruţă cu grăne. Cea d'intăi, care conţinea o baniţă de grâu, 3 de secară şi 2 de porumb l'a costat 23 de lei; a doua, care conţinea 4 baniţi de grâu, 5 de secară şi 2 de porumb, l'a costat 46 de lei; a treia, care conţinea tot 5 baniţi de grâu, 5 de secară dar 10 de porumb la costat 75 de lei. Cu cât a cumparat baniţa din fie-care? (R.: grâul 5 l., secara 4. l. şi porumbul 3 l.).

3. Intr'un bazen curge apă prin trei canele: cele două dintâi dau împreună 165 de litruri în 3 ore; ântâia şi a treia, 210 litruri în $3^1/_2$ ore, iar a doua şi a treia, 260 de litruri în 4 ore. Capacitatea bazenului fiind de 9 metri cubi, în cât timp va fi umplut lăsându-se să curgă toate canelele? (Urmând enunţul găsim $x=25$, $y=30$ şi $z=35$; prin urmare cele trei canele curgând împreună dau într'o oră $26+30+35=90$ de litruri; pentru 90 de litruri trebuindu-le o oră pentru 9 m c. sau 9000 de litruri le va trebui 100 de ore).

4. Să se găsească un număr de trei cifre ast-fel ca suma lor să fie 8, cifra sutimilor se fie de două ori cât a unităţilor, şi scăzând 99 din acest număr să căpătăm inversul său (R.: 251).

5. Trei femei au de vânzare 240 de ouă. Dacă cea d'intăi ar da $\frac{1}{5}$ din oule sale celei de a doua şi dacă şi femeia a treia ar da tot acesteia $\frac{1}{9}$ din oule sale, fie-care ar avea un acelaşi număr de ouă. Cât are fie-care? (Prima ecvaţie e $x+y+z=240$; formând şi pe cele-lalte după enunţ şi rezolvindu-le găsim: 100, 50 şi 90].

6. Trei zidari A, B, C vor să construească un beciu (o pivniţă); A şi B lucrând împreună l'ar putea isprăvi în 12 zile; lui

B şi C le-ar trebui 15 zile; iar lui C şi A 20 de zile. In cât timp îl vor putea isprăvi lucrând fie-care singur? (R.: A în 30 de zile, B în 20, C în 60).

ESERCIŢII ASUPRA INEGALITAŢILOR.

1. *Să se rezolvească inecvaţiile*

$\frac{2x}{3}-7>\frac{5x}{6}-9$ R.: Toate valorile mai mari ca 12.

$x-\frac{3x}{4}+17<\frac{8x}{3}-x$ R.: Toate valorile mai mici ca 12.

2. *Să se rezolvească sistema*

$19x-3>5x+\frac{1}{2}$ şi $2(x-7)<\frac{3x}{2}-13$ R.: 1.

Să se verifice relaţiunile

$a^2+b^2\geqq 2ab$ şi $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2$

ori-cari ar fi valorile lui a şi b.

3. Care este numărul a cărui treime micşurată cu 3 este mai mare ca cincimea sa micşurată cu 5? (R.: Toate numerile mai mar ca 15).

4. Să se verifice că media aritmetică a două numere e mai mare ca media lor geometrică, adecă că

$$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$$

5. Să se demonstre că dacă avem

$\frac{a}{b}<\frac{a'}{b'}<\frac{a''}{b''}$ avem de asemenea $\frac{a}{b}<\frac{a+a'+a''}{b+b'+b''}<\frac{a''}{b''}$

şi să se enunţeze această proprietate.

Ecvaţiuni de gradul al doilea.

ECVAŢIUNI CU O NECUNOSCUTĂ.

1. $x^2-5=11$ *2.* $4-x^2=0$ *3.* $x^2+16=2x^2$

4. $x^2-\frac{1}{9}=0$ *5.* $\frac{1}{4}-x^2=\frac{3}{16}$ *6.* $3y^2=75$ *7.* $4z^2=64$

8. $3-x^2=19-5x^2$ *9.* $8y^2-34=101-7y^2$

10. $3(2z-3)^2=279-z^2$ *11.* $x^2-4x=0$ *12.* $5x^2=3x$

13. $7x^2+5x=0$ *14.* $(z-5)^2=0$ *15* $x+\frac{1}{6x-1}=1$

16. $\frac{2}{x+3}-\frac{2}{x-3}=-\frac{3}{4}$ 17. $\frac{3x-1}{x-3}=\frac{17-x}{x-5}$

18. $x^2-5x+6=0$ 19. $x^2-6x+5=0$ 20. $x^2-2x+1=0$

21. $x^2-17x+60=0$ 22. $x^2-x-6=0$ 23. $x^2+x-6=0$

24. $7x^2-23x+6=0$ 25. $27x^2+730x+27=0$

26. $4x^2-8x-12=0$ 27. $5x^2-17x+6=0$

28. $x^2-14x+49=0$ 29. $x^2-40x+400=0$

30. $12x^2-17x+6=0$ 31. $x^2=3x-2$ 32. $16x=1+63x^2$

33. $x^2+6x=-5$ 34. $120x^2-61x+6=0$ 35. $5x^2+18x-8=0$

36. $x^2-879x+85137=0$ 37. $22x^2-9+x=16x^2+86+12x$

38. $(3x-3)^2=20x+1$ 39. $2x(4x-5)=350$ 40. $x^{-1}+6x^{-2}=1$

41. $x^{-2}+5x^{-1}=130$ 42. $5x^{-2}-4x^{-1}-1=0$

43. $3x^{-2}+x^{-1}-154=0$ 44. $\frac{x-1}{x+1}+\frac{x+1}{x-1}=\frac{130}{63}$

45. $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}=\frac{1}{x-3}$ 46. $x+2-\frac{6}{x+2}=1$

47. $\frac{x+1}{x}+1=\frac{x}{x-1}$ 48. $x^{-2}+6x^{-1}=\frac{43}{49}$ 49. $\frac{x+5}{x-5}-\frac{x-5}{x+5}=\frac{55}{24}$

50. $\frac{3}{x-3}+\frac{5}{x-5}=\frac{22}{21}$ 51. $\frac{x-3}{x^2-4}+1=\frac{1}{x-2}$

52. $\frac{x-5}{x+3}+\frac{x-8}{x-3}=\frac{80}{x^2-9}+\frac{1}{2}$

Să se rezolvească ecvațiunile literare:

1. $x^2=1+2a+a^2$ 2. $az^2=a^2$ 3. $my^2-n=p$

4. $x^2(a+1)^2=a^4-1$ 5. $ax^2+bx^2=a^4-b^4$ 6. $ay^2=b^2-cy^2$

7. $x^2-(a+b)x+ab=0$ 8. $x^2-(a^2+b^2)x-2ab(a+b)^2=0$

9. $(a-b)x^2-2(a^2-b^2)+a^2-b^2=0$ 10. $x^2+2ax+b^2=0$

11. $x+\frac{1}{x}=a$ 12. $\frac{a}{x}=\frac{x-1}{x-a}$ 13. $\frac{x}{a}+\frac{a}{x}=\frac{x}{b}+\frac{b}{x}$ R.: $x=\pm\sqrt{ab}$

14. $\frac{x+a}{x+b}+\frac{x-a}{x-b}=0$ 15. $\frac{a}{x-a}+\frac{x-b}{b}=1$

16. $\frac{a}{z-a}-\frac{b}{z-b}=ab$ 17. $\frac{x-a}{a}=\frac{2a}{x-a}$

18. $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 19. $\frac{a+x}{b+x}+\frac{a-x}{b-x}=\frac{a}{b}$

20. $\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}=\frac{1}{x}$ 21. $\frac{x}{x+a}+\frac{x+a}{x}=2a$

22. $\frac{1}{x}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{x-a-b}$ 23. $\frac{z}{a}\left(1+\frac{z}{b}\right)+1+\frac{z}{b}=0$

24. $\frac{x+a}{x-b}-\frac{x+b}{x-a}=1$

25. $\frac{x}{a}+\frac{a}{x}=\frac{x}{b}+\frac{b}{x}$

Probleme dând loc la ecvațiuni cu o necunoscută.

1. Productul unui număr cu îndoitul său e 72; care e acel număr? (R.: 6).

2. Care'i numărul al cărui patrat âl întrece cu 30? (R.: 6 și −5).

3. Care este numărul al cărui patrat mărit cu 12 face cât de 7 ori acel număr? (R.: 4 și 3).

4. Care este numărul al cărui sfert înmulțit cu jumătatea sa face 18? (R.: 12).

5. Să se găsească un număr ast-fel ca adunându-i și scăzându-i 3, productul numerelor căpătate să fie 16. (R.: 5).

6. Să să găsească un număr ast-fel că dacă se adună 14 la de 3 ori patratul său, căpătăm de 23 de ori acel număr. (R.: 7 și $\frac{2}{3}$).

7. Să se găsească două numere ale căror sumă să fie 18 și ale căror product să fie 72. [Unul din numere fiind x, cel-alt va fi $(18-x)$ etc. se găsește ast-fel 12 și 6].

8. Diferența a două numere e 6 și productul lor e 112; care sunt acele numere? [x fiind unul din numere, cel-alt va fi $(x-6)$ etc. R.: 14 și 8].

9. Productul a două numere e 32 și câtul lor 2; care sunt acele numere? [x fiind unul din numere cel-alt va fi $\frac{32}{x}$, căci $x \times \frac{32}{x}=32$, etc se găsește 8 și 4].

10. Suma unui număr cu rădăcina sa patrată este 20. Care'i acel număr? (R.: 16).

11. Să se găsească 2 numere consecutive ale căror product este 182. (R.: 14 și 13).

12. Se cere un număr pozitiv a cărei jumătate înmulțită cu 5, înmulțită cu jumătatea sa minus 5 să dea 30 de product. (R.. 12).

13. Să se împartă 14 în două părți ale căror patrate să fie ca 16 la 9. (R.: 8 și 6).

14. Să se găsească un număr ast-fel ca escesul a de 7 ori acel număr asupra îndoitului său patrat să fie 3. (R.: 3).

15. Prin ce număr trebue să se împartă 48 pentru ca împărțitorul mărit cu câtul să dea 16? (R.: 12 și 4).

16. O bucată de postav costă 275 de lei; dacă această bucată ar cuprinde $2\frac{1}{2}$ metri mai mult, metrul ar costa cu un leu mai

puţin. Cât costă metrul? (x fiind preţul unui metru, bucata cuprinde $\frac{275}{x}$ metri etc.— R.: 11 lei).

17. Să se calculeze latura unui patrat ştiind că numărul care esprimă îndoitul suprafeţei sale, este egal cu de 8 ori acela ce esprimă latura sa. (R.: 4; 0 nu răspunde cestiunei).

18. Să se calculeze laturile unui triunghi dreptunghic ştiind că au de măsură trei numere consecutive. (Se va baza pe o proprietate a triunghiurilor dreptunghice—R.: 3, 4 şi 5).

ECVAŢIUNI DE GR. I. CU 4—5 NECUNOSCUTE.

1.
$$x+2y=18,\quad 3y+4z=38,\quad 5z+u=32,\quad 2u+7x=42$$

2.
$$3t-2y=11,\quad 2x+3y=23,\quad 4x-2z=4,\quad 2t+3z=32$$

3.
$$4x-3y+2z=20,\quad 7y+5z-3t=94,\quad 2z-8y+2t=-48,\quad 5t+3x-4y=19$$

4.
$$5x+3y-2z+t=30,\quad 3x+2y+5z-2t=38,\quad 6x-5y+3z+3t=38,\quad 2x+6y-z+4t=60$$

5.
$$4z-3t=5,\quad 3x-2y=6,\quad 20t-3x=8,\quad 5y-3z=9$$

6.
$$x+y+z+u=10,\quad 2x+y+z+u=11,\quad x+2y+z+u=12,\quad x+y+2z+u=13$$

7.
$$\frac{x}{3}+\frac{y}{5}+\frac{2z}{7}=58,\quad \frac{x}{2}+\frac{3z}{8}+\frac{u}{5}=79,\quad \frac{5x}{4}+\frac{y}{6}+\frac{z}{3}=76,\quad \frac{y}{5}+\frac{z}{2}+\frac{u}{25}=92$$

8.
$$7x-2z+3u=17,\quad 5y-3x-2u=8,\quad 3z+8u-33=0,\quad t-2z+4y=11,\quad 2t-3u+4y=9$$

9.
$$3y-u=1,\quad 4z-2u=2,\quad 5x-y=3,\quad 8x-t=4,\quad 2t-z=5$$

SISTEME PARTICULARE—ARTIFICII DE CALCUL.

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b},\quad x+y=c \qquad \text{R.: } x=\frac{ac}{a+b},\quad y=\frac{bc}{a+b}$$

2.
$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b},\quad x-y=c \qquad \text{R.: } x=\frac{ac}{a-b},\quad y=\frac{bc}{a-b}$$

$$x+y=7,\quad x+z=12,\quad y+z=13$$

4.
$$x-y=4,\quad z-x=3,\quad y+z=17$$

5.
$$\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{5},\quad x+y+z=36$$

$$\frac{x+y}{2}=a,\quad \frac{x-y}{2}=b$$

7.
$$x+y=14,\quad y+z=16,\quad z+t=17,\quad t+x=15$$

8.
$$\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x-y}=a,\quad \frac{1}{x+y}-\frac{1}{x-y}=b$$

meze inversa sa, adecă ecvaţia a-le cărei rădăcini să fie $\frac{1}{2}$ şi $\frac{1}{5}$.

Esercițil asupra discuțiunei rădăcinelor.

1. Să se discute natura rădăcinelor ecvaţiunilor:

1^0 $x^2+6x-12=0$ 3^0 $7x^2-8x+15=0$ 5^0 $x^2+3x+9=0$

2^0 $3x^2+9x+21=0$ 4^0 $2x^2-5x-11=0$ 6^0 $x^2-x-1=0$

2. Ce relaţiune trebue să esiste pentru ca rădăcinele unei ecvaţii de gradul al 2-le să fie: 1^0 egale şi de acelaşi semn, 2^0 egale şi de semne contrare.

3. Să se formeze o ecvaţiune de gradul al doilea 1^0 a cărei prim termin să fie x^2, al doilea $-8x$ şi una din rădăcini 12; 2^0 a cărei prim termin să fie $3x^2$, al doilea termin $-36x$ şi una din rădăcini 7; 3^0 a cărei prim termin să fie $4x^2$, al doilea termin $3x$ şi una din rădăcini -16.

4. In ecvaţiunea $x^2-6x+q=0$ să se determine q ast-fel ca una din rădăcini să fie

1^0 4 2^0 -4 3^0 0 4^0 -1 5 11

6^0 $x'=x''$ 7^0 $x'=-x''$(?) 8^0 $x'=\frac{1}{x''}$ 9^0 $x'=-\frac{1}{x''}$

Esercițil asupra descompunerei trinomului.

1. *Să se descompună în factori trinomii:*

x^2-5x+6 ; x^2+x-6 ; $x^2+13x+40$; $x^2-3x-45$

$x^2-15x+18$; $5x^2-15x-50$; $4x^2-8x-12$; $3x^2+15x+18$

$4x^2-48x+9$; $9x^2-24x+17$; x^2-3x+4 ; $5x^2+2x+3$

2 *Să se simplifice fracțiunile*

$\frac{x^2-3x+2}{x^2+21x-28}$; $\frac{x^2-20x-44}{2x^2+10x+12}$; $\frac{x^2-21x+20}{x^2-40x+400}$

$\frac{x^2+15x+18}{x^2+20x+24}$; $\frac{2a^2-3a+1}{2a^2-31a+15}$; $\frac{x^2+3x+2}{3x^2+5x-2}$

Forme particulare de ecvațiuni.

Să se rezolvească ecvațiunile

$0,01x^2+5x-3=0$ (R.: $x'=0,59928$, $x''=-500,59928$)

$2x^2+21x-0,05=0$ (R.: $x'=-0,502306$, $x''=0,002306$)

Ecvaţiuni Bipatrate.

Să se rezolvească ecvaţiunile:

$x^4-8x^2+16=0$ $\quad$ $x^4-29x^2+100=0$ $\quad$ $x^4-5x^2+4=0$

$36x^4-13x^2+1=0$ $\quad$ $9x^4-10x^2+1=0$ $\quad$ $9x^4-37x^2+4=0$

$x^4+6x^2+9=0$ $\quad$ $x^4-112x^2+927=0$ $\quad$ $\frac{x^2}{x^2+9}+\frac{x^2}{x^2-6}=\frac{7}{2}$

$x^4-2x^2-1=0$ $\quad$ $123x^4-245x^2=70750$

Să se transforme într'o sumă de doi radicali:

$\sqrt{4\pm\sqrt{7}}$; $\sqrt{7-\sqrt{13}}$; $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$; $\sqrt{31-2\sqrt{198}}$; $\sqrt{a^2+b-2a\sqrt{b}}$

Ecvaţiuni reciproce de gradul al IV.

$x^4+x^3-4x^2+x+1=0$

$x^4-3x^3+4x^2-3x+1=0$

$6x^4-5x^3-38x^2-5x+6=0$

$x^4+2x^3+2x+1=0$

$3x^4-10x^3+10x-3=0$

$x^4-4x^3-3x^2-4x+1=0$

$6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0$

$ax^4+bx^3-cx^2+bx+a=0$

$x^4-3x^3+3x-1=0$

$(ax+b)x^3-(a+bx)=0$

Ecvaţiuni binome şi trinome.

1. $x^2+16=0$ $\quad$ *2.* $x^4=32$ $\quad$ *3.* $x^5=243$ $\quad$ *4.* $x^6=64$

5. $x^6+4x^3-96=0$ $\quad$ *6.* $3x^6+42x^3=3321$ $\quad$ *7.* $2x^8-51x^4+304=0$

Ecvaţiuni iraţionale.

1. $\sqrt{x+4}=8$ $\quad$ *2.* $\sqrt{2x+5}=\sqrt{5x-4}$ $\quad$ *3.* $\sqrt{51+x}=3+\sqrt{x}$

4. $ab\sqrt{a-x}=(a-x)\sqrt{x}$ $\quad$ *5.* $\sqrt{2x-5}=x-4$ $\quad$ *6.* $\sqrt{2x-3}=x-3$

7. $x+\sqrt{29-x^2}=7$ $\quad$ *8.* $x-\sqrt{29-x^2}=3$ $\quad$ *9.* $\sqrt{3x+4}-2\sqrt{x}=0$

10. $\sqrt{x-1}=3x-5$ $\quad$ *11.* $\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}=\sqrt{a+b}$

12. $\sqrt{3x-5}-\sqrt{2x-5}=1$ $\quad$ *13.* $\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}=\sqrt{a}$

14. $\sqrt{7x+18}-\sqrt{x+8}=\sqrt{x+2}$ $\quad$ *15.* $\sqrt{3(x-1)(x-2)}=x-2$

16. $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+6}=5$ $\quad$ *17.* $\sqrt{1-\sqrt{a^4-a^2}}=a-1$

18. $\frac{1}{x+\sqrt{2-x^2}}+\frac{1}{x-\sqrt{2-x^2}}=1$ $\quad$ *19.* $x+\frac{10}{\sqrt{4+x^2}}=\sqrt{4+x^2}$

20. $x^2-6x+9=4\sqrt{x^2-6x+6}$ $\quad$ *21.* $x-2+\sqrt{2x^2-3x+3}=0$

22. $\sqrt{2x+3}+\sqrt{5-8x}=\sqrt{4x+7}$ $\quad$ *23.* $\sqrt{2x+3}+\sqrt{5x+1}=\sqrt{12x+13}$

Sisteme de ecvaţii de gradul al doilea.

1. $3x^2+5y^2-2xy-4x+y-40=0$ şi $3x-2y=0$

2. $x+y=8$, $xy=15$

3. $x-y=5$, $xy=36$

4. $x+y=11$, $x^2+y^2=65$

5. $x-y=8$, $x^2+y^2=232$

6. $x^2+y^2=74$, $xy=35$

7. $v^2+z^2=117$, $v^2-z^2=45$

8. $v^2-z^2=33$, $v^2+z^2=65$

9. $x^2+y^2=a^2$, $x^2-y^2=b^2$

10. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=a$, $x+y=b^2$

11. $x^2+y^2+x+y=32$, $x^2+y^2-x-y=18$

12. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=a$ și $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=b^2$

DIFERITE PROBLEME.

1. Să se găsească un număr care adunat la rădăcina sa patrată să dea 56. (R.: 49).

2. Să se găsească un număr care adunat la rădăcina sa cubică să dea 520 (R.: 512).

3. Suma patratelor a două numere este 377; diferența acelorași patrate este 135. Cari sunt acele numere? (R.: 16 și 11).

4. Care'i numărul al cărui patrat mărit cu 14 să fie cât de 9 ori acel număr? (R.: 7 și 2).

5. Productul terminilor unei fracțiuni e 143; să se afle acești termini știind că scăzând 2 din numitor aflăm pe numărător. (R.: $\frac{11}{13}$).

6. Să se găsească două numere întregi consecutive ast-fel ca diferența patratelor lor să fie 13. (R.: 12 și 11).

7. Să se găsească două numere consecutive neperechi ast-fel ca suma patratelor lor să fie 130. (R.: 9 și 7).

8. Care'i numărul a cărui treime înmulțită cu sfertul său este egal cu îndoitul acelui număr? (R.: 24 și 0).

9. Să se găsească un număr a cărui jumătate, treime, sfert și șesime înmulțite între ele să facă cât patratul acelui număr. (R.: 12, 0 și —12).

10. Să se găsească 5 numere întregi consecutive ast-fel ca suma patratelor celor două mari să fie egală cu suma patratelor celor-l-alte trei. [Cele 5 numere consecutive sunt $(x-2)$, $(x-1)$, x, $(x+1)$ și $(x+2)$ etc.—R.: 10, 11, 12, 13 și 14].

11. Un număr este productul a 3 numere întregi consecutive; dacă îl împărțim prin fie-care din factorii săi, suma câților astfel căpătați este 146. Care'i acel număr? [Acel număr este $(x-1)x(x+1)$ și urmând enunțul găsim $x=\pm 7$ și prin urmare numărul căutat e 336 sau (-336)].

12. Să se calculeze laturile unui triunghi a cărui supra-

faţă e de 6 m. p. ştiind că aceste laturi sunt măsurate prin trei numere ântregi consecutive.

(Se va întrebuința formula $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ — R.: 3, 4 şi 5).

13. Cu ocaziunea sărbătorilor o sumă de 400 de lei a fost destinată pentru un număr de săraci. Să se afle numărul săracilor ştiind că 4 neprezentându-se, partea fie-căruia a fost mai mare cu 5 lei. (Partea presupusă a fie-căruia e $\frac{400}{x}$ şi urmând enunţul se găseşte R.: 20—rădăcina negativă nu răspunde cestiunei).

14. Trei numere sunt ast-fel că dacă le înmulţim două câte două, dau de producte 180, 270 şi 216. Cari sunt acele numere? (R.: 12, 15 şi 18).

15. Productul a două numere este egal cu de 3 ori suma lor şi suma patratelor lor este 160. Cari sunt acele numere? (Se va lua mai ântăi ca necunoscută suma lor; aceasta odată aflată, unită cu productul ne dă: R.: 12 şi 4).

16. De ce lungime trebue micşurate laturile unui dreptunghi pentru-ca suprafaţa sa să fie redusă la jumătate? Aplicaţie pentru $b=4$, $h=3$. (R.: $\frac{1}{2}(a+b-\sqrt{a^2+b^2})$ — rădăcina cea mare nu răspunde cestiunei: laturi negative nu esistă; 2⁰: 1).

Progresii — Logaritmi — Aplicaţiuni.

PROGRESII ARITMETICE.

1. Să se calculeze al 31-lea termin al progresiei $\div 3.6.9....$
2. Să se calculeze al 27-lea termin al progresiei $\div 11{,}5.9.6{,}5..$
3. Să se calculeze al 18-lea termin al progresiei $\div \frac{1}{2}.\frac{1}{4}.0...$
4. Să se insereze 12 medii aritmetice între 5 şi 83.
5. Să se însereze 20 medii aritmetice între $3\frac{1}{4}$ şi $66\frac{1}{4}$.
6.

Fiind date	sa se gaseasca	Aplicatiune			Raspuns	
a, l, n	r şi S	a=0,	l=93,	n=32	r=3	şi S=1488
a, r, n	l şi S	a=7,	r=5,	n=41	l=207	şi S=4387
l, r, n	a şi S	l=160,	r=3,	n=54	a=1	şi S=4347
a, l, r	n şi S	a=47,	l=5,	r=—2	n=22	şi S=572
a, l, S	r şi n	a=0,	l=54,	S=999	r=1,5	şi n=37
a, n, S	r şi l	a=10,	n=25,	S=850	r=2	şi l=58
l, n, S	r şi a	l=199,	n=100,	S=10000	r=2	şi a=1
a, r, S	l şi n	a=6,	r=2,	S=594	l=46	şi n=22
l, r, S	a şi n	l=23,	r=4,	S=78	a=3	şi n=6

7. Suma a trei numere în progresie aritmetică este 24 şi pro-

ductul lor 440. Care sunt aceste numere? [Unul fiind x, cei-l-alți vor fi (x—r) și (x+r)—R.: 5, 8 și 11].

8. Câte bătăi sună un ceas în 12 ore? 1° presupunând că sună numai orele; 2° presupunând că sună și sferturile. (R.: 1° 78; 2° în timp de o oră sună 10 sferturi, prin urmare: 198).

9. Să se calculeze numărul punctelor cuprinse în cele 90 de bile ale jocului de loto. (R.: 4095).

10. Se știe că cocorii călătoresc dispuși în formă de triunghi; adecă că 1 cocor ocupă primul rang, 2 cocori al 2-lea rang, 3 cocori al 3-le rang...; cum putem determina numărul lor când cunoaștem numărul șirurilor? Aplicațiune pentru 12 șiruri. (R.: 78).

11. Să se găsească unghiurile unui triunghi dreptunghic știind că numerile ce le măsoară sunt în progresie aritmetică. (Suma unghiurilor unui triunghiu e de 180°—R.: 30°, 60° și 90°).

12. Să se găsească suma celor d'intăi n numeri perechi. [R.: (n+1)n].

13. Să se găsească suma celor d'intăi n termini ai progresiei $\div \frac{n-1}{n} . \frac{n-2}{n} . \frac{n-3}{n} \ldots\ldots$ $\left(\text{R.: } \frac{n-1}{2}\right)$.

14. Cine-va tocmește un servitor cu 240 de lei pe an promițându-i că, dacă se va purta bine, să'i sporească în fie-care an câte 24 de lei. Servitorul mulțumindul în timp de 19 ani, se ântreabă care a fost leafa lui în al 19-lea an și câtă leafă a primit el în tot acest timp. (R.: 1° 672; 2° 8664).

15. Să se afle suma a n numere consecutive cari încep cu n. $\left(\text{R.: } \frac{n(3n-1)}{2}\right)$.

16. Să se afle laturile unui triunghi dreptunghic știind că numerile ce le măsoară sunt în progresie aritmetică de rația 4. (Se va servi de relația $a^2=b^2+c^2$ R.: 12, 16 și 20).

17. Un colonel care comandă 1156 de oameni, vrea să'i rânduiască în formă de triunghi, adecă ca în primul șir să fie numai un soldat; în al 2-le, 3; în al 3-le, 5; ș. a. m. d. Câte șiruri va forma? (R.: 34).

18. Suma a 5 numere în progresie aritmetică este 50, și produetul lor 4536. Cari sunt aceste numere? (R.: 2, 6, 10, 14 și 18).

19. Câte bile sunt în 13 șiruri așezate în formă de triunghi echilateral, dacă primul șir conține o bilă; al 2-le, două; ș. a, m. d. (R.: 91).

20. Un corp care cade străbate în prima secundă a căderei sale 4m,9; în a doua, de 3 ori această distanță; ș. a. m. d. Se cere

spaţiul străbătut de acest corp în a 12-a secundă şi spaţiul străbătut în tot timpul de 12 secunde. (R.: 1° 112m,7; 2° 705m6).

21. Suma a câtor numere din şirul natural este 325? (R.: 25).

22.* Să se găsească suma a n numere consecutive neperechi cari încep cu $[n(n-1)+1]$. (R.: n^3).

23. Un lucrător se tocmeşte să sape o fântână pentru care i se plăteşte 1 leu 50 de metru în plus 50 de bani pentru fie-care din metri următori din cauza greutăţei din ce în ce mai mare a lucrului. Se întreabă cât i se cuvine pentru 18 metri? (R.: 103, 5 lei).

24. La o petrecere ridicându-se un tuoast, fie-care conmesean ciocneşte o dată paharul cu fie-care din cei-l-alţi. Se cere numărul ciocniturilor ştiind că la acea masă asistau 14 persoane. (Cel d'intâi va ciocni de 13 ori, al 2-le de 12 ori.....—R.: 91).

25. Un servitor întrebat ce leafă are răspunse: Eu am acum 820 de lei pe an; anul d'intâi n'am avut de căt 120 de lei, dar în fie-care an mi'a sporit câte 35 de lei.

Mirat cum de a ajuns la o leafă atăt de mare, îl întrebă: „dar de câţi ani serveşti d-ta?"—Să se afle aceasta. (R.: 21).

PROGRESII GEOMETRICE.

1. Să se calculeze al 11-lea termin al progresiei $\div 9 : 45 : 225$.

2. Al 7-lea termin al unei progresii de raţia 3 este 1458. Care'i primul termin?

3. Să se însereze 3 medii geometrice între 5 şi 80.

4. Să se însereze 12 medii geometrice între 21 şi 33480783. (A vedea în tablele lui Dupuis pag. 146 puterile lui 3).

5. Să se găsească suma celor d'intăi 10 termini ai progresiei $\div 3 : 12 : 48 : \ldots$

6. Să se găsească suma celor d'intăi 7 termini ai progresiei $\div 1 : \frac{1}{3} : \frac{1}{9} : \frac{1}{27} : \ldots$ precum şi limita la care tind când numărul lor creşte indefinit.

7. Să se găsească suma celor d'intăi 6 termini ai progresie $\div 1 : 0,1 : 0,01 : 0,001 : \ldots$

8. Să se împartă 182 în trei părţi cari să fie în progresie geometrică de raţia 3. (R.: 14, 42 şi 126).

9. Să se găsească limita sumei terminilor unei progresii infinit descrescătoare ştiind că primul termin e 10 şi raţiunea $\frac{2}{3}$. (R.: 30).

CESTIUNI DE DOBÂNDĂ.

1. Ce va deveni după 12 ani un capital de 1600 de lei dat cu dobândă compusă cu 4 % pe an? (R.: 2561 lei 60).

2. Ce va deveni după 8 ani un capital de 3625 de lei dat cu dobândă compusă cu 4 % pe an? (R.: 4961 lei 06).

3. Ce va deveni după 6 ani un capital de 18500 de lei dat cu dobândă compusă cu 5 % pe an? (R.: 24791 lei, 77).

4. Ce va deveni după 27 ani şi 3 luni un capital de 1000 de lei dat cu dobândă compusă cu 5,5 %? (.: 4303 lei, 82).

5. Ce devine după 7 ani şi 72 de zile capitalul 8745 de lei dat cu dobândă compusă cu 4 % pe an? (R.: 11599 lei, 50).

6. Ce devine după 3 ani, 8 luni şi 6 zile capitalul 13052 lei dat cu dobândă compusă cu 4,5 % pe an? (R.: 15352 lei, 50).

7. Cât trebue să împrumute cine-va cu 3 %; pentru ca după 10 ani să aibă a lua 30000 de lei? (R.: 22322 lei, 82).

8. Cât trebue să împrumute cine-va cu 5 %, pentru-ca după 7 ani şi 4 luni să aibă de luat 1000 de lei? (R.: 8050 lei, 41).

9. Cu ce procent trebue să împrumute cine-va 1000 de lei pentru-ca după 53 de ani să aibă de luat 9000 de lei? (R.: 4, 5%).

10. Cu ce procent trebue să împrumute cine-va 7654 de lei pentru-ca după 12 ani şi 4 luni să'şi formeze un capital de 12416 lei? (R.: 4 %).

11. După cât timp un capital de 40000 de lei împrumutat cu 4, 5% pe an devine 67835? (R.: 12 ani).

12. Cât timp trebue lăsat cu dobândă compusă un capital de 7300 de lei pentru aşi forma 10448 lei 10, procentul fiind de 5, 5%? (R.: 6, 6976 ani sau 6 ani, 8 luni şi 11 zile).

13. In cât timp o sumă dată cu dobândă compusă cu 5 % devine îndoită? dar cu 4 %? (R.: 1° 14 ani, 2 luni şi 14 zile; 2° 17 ani, 8 luni şi 3 zile).

CESTIUNI DE DEPUNERI ŞI AMORTISMENT.

1. Carei capitalul format prin 15 depuneri anuale de câte 5500 lei, procentul fiind de 4,5 %? R.: 118179 lei).

2. Un părinte voind să asigure starea copilului său, depune anual câte 1250 de lei timp de 20 de ani. Care este valoarea capitalului format la sfârşitul acestui an, procentul fiind de 4 %? (R.: 37222 lei, 94).

3. Un fumător cheltueşte de la vârsta de 18 ani câte 73 de lei anual; se întreabă ce capital şi'ar fi putut forma la vârsta de 62 de ani dacă ar fi depus aceşti bani, procentul fiind de 5 %? (R.: 11585 lei).

4. Un industriaş care vrea să'şi formeze după 7 ani un capital de 10000 de lei, se întreabă cât trebue să depue anual, procentul fiind de 5 %? (R.: 1000 lei).

5. Cât trebue să se depue anual pentru ca după 14 ani să se formeze un capital de 25414 lei 55, procentul fiind de 5 %. (R.: 1235 lei).

6. Un lucrător care depune în fie-care an câte 600 de lei se întreabă după câţi ani 'şi va forma un capital de 9376 lei 20, procentul fiind de 4 %? (R.: 12 ani).

7. Timp de câţi ani trebue să depue un lucrător 360 lei 20 cu 3, 5 % pentru a'şi forma un capital de 30000 de lei? (R.: 9 ani).

8. In cât timp anuitatea de 850 de lei formează un capital de 15000 de lei? (R.: 13,.....— Fiind-că în acest caz nu se poate prevedea rezultatul, în caz când n e fracţionar se schimbă cestiunea căutându-se anuitatea care formează capitalul cerut în timpul n. Aplicându-se această observare cazului de faţă, se găseşte că cu 13 anuităţi de 867 lei 42 se formează capitalul voit).

9. Carei anuitatea care amortizează un împrumut de 50000 de lei cu 5 % în timp de 20 de ani? (R.: 4012 lei).

10. Carei anuitatea care amortizează un împrumut de 50000 de lei cu 4 % în timp de 25 de ani? (R.: 3200 l. 50).

11. Cine-va vinde o vie în 10 anuităţi de câte 8000 de lei. Carei valoarea viei, socotindu-se procentul de 5%? (R.: 61773,90).

12. Ce datorie este amortizată prin 95 de anuităţi de câte 5000 de lei, procentul fiind de 3,7%? (R.: 117665 lei).

13. Cine-va împrumută 10000 de lei cu 5% pe cari voeşte să-i achite prin anuităţi de 1000 de lei; în cât timp se va mântui de datorie? (R.: 14 ani).

14. In cât timp o datorie de 10000 de lei este amortizată prin anuităţi de 618 lei 75, procentul fiind de 6%? (R.: 60 ani).

15. Cine-va are de plată la o aceiaşi persoană două sumi: o sumă de 625 de lei plătibilă peste 2 ani şi alta de 2354 de lei plătibilă peste 5 ani; se întreabă carei suma unică ce va trebui să o plătească pentru a achita ambele datorii peste 2 ani, procentul fiind de 4,5%? (R., 2791,40).

16. Când a eşit din corabie, familia lui Noe se compunea din 6 inşi; presupunând creşterea anuală de $\frac{1}{222}$, se întreabă care

ar trebui să fie populaţiunea actuală a pământului ştiind că s'au strecurat aproape 4200 de ani de la această întâmplare (R.: 1 miliard 262 milioane—aproape populaţiunea de astăzi a pământului).

Cestiuni de macsimum şi de minimum.

1. Să se găsească valorile macsime şi minime a-le funcţiunilor următoare, determinându-se şi valorile corespondente a-le lui x:

$7-x^2$; x^2-7 ; $5+x^2$; $(2+x)(2-x)$; $x(7-x)$; $x(x-8)$
x^2-5x+4 ; $50+15x-5x^2$; $x^2+(6-x)^2$; $(x+8)^2-2x^2$

2. Să se împartă cantităţile următoare în două părţi ast-fel ca productul lor să fie macsimum:

14 ; 15 ; $\frac{1}{2}$; a ; $\sqrt{2}$; $\sqrt{-1}$; $(a-b)\sqrt{2}$

3. Să se împartă 14 în două părţi ast-fel ca suma patratelor lor să fie macsimă.

4. Să se descompună cantităţile următoare în doi factori a căror sumă să fie minimă:

49 ; 324 ; 64 ; -36 ; a ; $\frac{1}{9}$; $\frac{16}{25}$; $\sqrt{8}$

5. Să se împartă 8 şi 100 în două părţi ast-fel ca suma patratelor lor să fie minimă.

6. Să se împartă cantităţile următoare în 3 părţi ast-fel ca suma lor să fie macsimă:

27 ; 72 ; $\frac{1}{9}$; 14 ; a ; $\sqrt{2}$; $\sqrt{-27}$

7. Să se împartă 27 în două părţi ast-fel ca suma a de 4 ori patratul părţei dintăi cu de 5 ori patratul părţei de a doua, să fie cea mai mică posibilă. (Bac. Paris.—R.: 15 şi 12).

8. Să se găsească macsimul şi minimul funcţiunilor următoare, precum şi valorile corespondente a-le lui x:

$$\frac{x^2+1}{x} \; ; \; \frac{x^2-1}{x} \; ; \; x+\frac{1}{x} \; ; \; \frac{x^2}{x-1} \; ; \; \frac{x^2}{x+1}$$

FINE

ERATA

Pag.	rînd.	în loc de	să se citească
17	3	$6a\ b$	$6a^3b$
20	4	$(x^4+1+x^2\sqrt{\ })(x^4+1-\ \sqrt{2})$	$(x^4+1+x^2\sqrt{2})(x^4+1-x^2\sqrt{2})$
20		să se lase la o parte problema 13.	
23	21	$(b+c+)(b+c-a)(cb-c+)(a-b+c)$	$(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)$
29		s'a omis răspunsul esercițiului 49	R.: $2x^2$
36	20	va	va fi

De acelaş autor:

Curs teoretic şi practic de Algebră pentru cursul secundar 3,00

Cestiuni de Psihologie ce trebue să le reţină fie-ce elev la esamenele generale şi la bacalaureat. 0,60