GEOMETRIA ELEMENTARA

PENTRU

ELEVIĬ DIN SCOLILE SECUNDARE

DE

CONSTANTIN CLIMESCU

Fost elev al Școaleĭ Normale Superioare din Paris. Licențiat în științele matematice și fizice de la Facultatea de științĭ din Paris. Profesor la Facultatea de științĭ din Iașĭ. Membru corespondent al Academieĭ Romîne.

EDITIA II

IAȘI

Editura Tipo-Litografieĭ H. Goldner

1895.

In ediția I se strecurase o mulțime de erorĭ de tipar, și figurile de și lămurite, însă nu eraŭ corect executate.

In această edițiune toate erorile de tipar sînt îndreptate, iar figurile sînt făcute din noŭ.

Prin acestea se deosebește ediția a doa de întăia, a căreĭ prefață o reproducem.

Dintre toate cărțile franceze de Geometrie, acea întitulată „*Eléments de Géométrie*“ redactată de profesorul *A. Amiot* (mort în 1864), este considerată de toțĭ și cu drept cuvînt, ca cea maĭ bună pentru eleviĭ de Licee.

In școlile noastre secundare, programa de Geometrie este întocmită după acea a școlilor franceze; prin urmare cartea luĭ Amiot poate fi utilă și elevilor noștri.

In acest scop am dat la lumină această lucrare, care în formă nu este întocma Geometria de Amiot, dar conține tot ce se află în ea, cu adăogirĭ însemnate luate din acte tractate.

Din diverse împrejurărĭ, și maĭ cu samă probabil din cauza scurtimeĭ timpuluĭ, eleviĭ nu fac îndeajunse probleme de Geometrie. Pentru a facilita acest util exercițiŭ, am întrodus una sută șepte-zecĭ probleme, cu indicațiunĭ sumare de rezolvire, ceia ce pune pe elev în stare să le rezolvească singur cu ușurință.

Toate exemplarele trebue să fie iscălite de autor.

GEOMETRIA ELEMENTARA

PRELIMINARE

1. Spaţiul ocupat de un corp oare-care, este *volumul* acelui corp. Porţiunea din corp, care este în contact imediat cu ceia ce'l încunjură, este *suprafaţa* luĭ. Cănd doă suprafeţe se întîlnesc, ele formează prin întîlnirea lor o *linie*. Liniile, prin întîlnire, daŭ *puncte*.

Nu există corp în natură care să nu aibă un volum. Pe de altă parte, nu există corp care să aibă numaĭ suprafaţă, saŭ numaĭ liniĭ, saŭ numaĭ puncte, fie împreună fie izolat; cu toate acestea, în imaginaţiunea noastră noĭ le putem considera deosebit pe fie-care, şi aceasta pentru ca să le putem studia maĭ lesne.

Geometria este acea parte a ştiinţelor matematice care are de obiect de a studia volumurile, suprafeţele şi liniile corpurilor, a cerceta şi a stabili mijloacele de a le măsura.

In această carte ne vom ocupa numaĭ de liniile, suprafeţele şi volumurile cele maĭ simple şi de un uz continuŭ.

2. Despre *punctul geometric* nu avem nimic de ḑis, căcĭ nu are nicĭ una din dimensiunile unuĭ corp şi prin urmare nu avem ce măsura în el. El există numaĭ ca o concepţiune a omuluĭ, iar nicĭ de cum în realitate. Punctul făcut pe tabelă cu crida, saŭ pe hărtie cu condeiul, este o imagine foarte exagerată a punctuluĭ geometric; sîntem însă nevoiţĭ să ne servim de ast-fel

de imaginĭ, fiind-că nu avem alt-ceva maĭ bun la dispozițiunea noastră.

3. *Linia geometrică* are numaĭ lungime; ea maĭ poate fi considerată ca născută prin mişcarea continuă a unuĭ punct care ar lasa urme în fie-care loc ce'l ocupă în mişcarea luĭ.

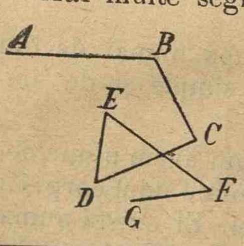
Cea maĭ simplă dintre liniĭ este *linia dreaptă*. Uşor îşĭ poate cineva face o idee de ce este, o linie dreaptă: o radă viduală ce pleacă din ochiul unuĭ observator şi se îndreptează cătră un punct oare-care, distanța cea maĭ scurtă dintre doă puncte, urma lasată de un punct ce se mişcă în o direcțiune constantă, un fir de ață întins, etc. sînt liniĭ drepte (*).

O porțiune de linie dreaptă se numeşte un *segment* de dreaptă.

Atăt linia dreaptă, căt şi un segment al eĭ, se notează, pe hărtie saŭ tabelă, prin doă litere puse în doă din punctele dreptei saŭ la capetele segmentuluĭ.

Astfel AB însemnează saŭ linia dreaptă ce trece prin punctele A şi B, saŭ segmentul eĭ cuprins între aceste doă puncte.

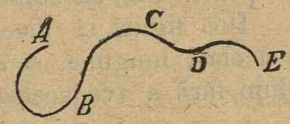
Maĭ multe segmente de dreaptă, aşedate astfel ca un punct să le poată descri fără întrerupere, formează o *linie frăntă* saŭ *poligonală*; astfel este linia alăturată ABCDEFG.



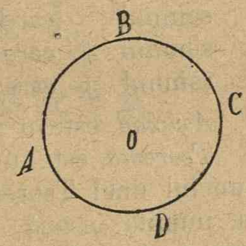
Când un punct se mişcă ast-fel că în fie-care moment îşĭ schimbă direcțiunea, urma lasată

*) Ca definiținne geometrică a linieĭ drepte, este numaĭ acea dată de Euclide, anume: *linia dreaptă este acea care este aşezată egal în respectul tuturor punctelor sale*; (vezĭ „Recreațiĭ Ştiințifice". Anul II pag. 2, Iaşĭ 1884); prin aceasta noĭ credem că Euclide a trebuit să înțeleagă că: orĭ-ce punct al linieĭ îşĭ are simetricul seŭ in privirea orĭ-căruĭ alt punct de-al eĭ.

de el este o *linie curbă.* O asemenea linie nu este nicĭ dreaptă nicĭ frântă: astfel este linia alăturaĭă ABCDE.



Sînt un număr infinit de specii de liniĭ curbe, fie-care cu definițiunea eĭ. Geometria elementară se ocupă numaĭ de una și anume de curba a *căreĭ puncte sînt de o potrivă depărtate de un punct fix;* ast-fel este linia alăturată ABCD.



Această curbă se numește *circumferență de cerc* și punctul fix O este centrul circumferențeĭ.

4. *Suprafața geometrică* are lungime și lățime, ea maĭ poate fi considerată ca născută prin mișcarea continuă a uneĭ liniĭ care ar lăsa urme în fie-care loc ce'l ocupă în mișcarea eĭ.

Cea maĭ simplă suprafață este *planul,* care este astfel că o linie dreaptă ce trece prin doă din punctele luĭ, se află așeḑată în toată lungimea eĭ în plan.

Fața uneĭ tabele, o foae de hârtie întinsă fără îndoiturĭ, fața unuĭ părete, o oglindă, etc. presupuse prelungite îndefinit, sînt planurĭ saŭ suprafețe plane.

Planul poate fi considerat ca născut prin mișcarea uneĭ drepte care se razimă pe alte doă drepte ce aŭ un punct comun.

5. Liniile, suprafețele și volumurile poartă numele de *figurĭ.*

Figurile se împart în doă clase și anume: *figurĭ plane,* adică acele a căror puncte în totalitatea lor sînt așeḑate în un plan; toate celelalte sînt *figurĭ neplane,* saŭ *în spațiŭ.*

De aicĭ rezultă și diviziunea Geometrieĭ în: *plană,* și *în spațiŭ.*

Doă figurĭ se dic *egale*, atuncĭ cănd aplicăndu-le una peste alta, ele coincid în toate punctele lor.

Doă figurĭ se dice că sînt *echivalente*, atuncĭ cănd aŭ aceiaşĭ lungime, saŭ aceiaşì suprafaţă, saŭ acelaşĭ volum fără a ave aceleaşĭ forme.

6. Semnele întrebuinţate în Aritmetică şi Algebră, le întrebuinţăm şi în Geometrie: apoĭ ne maĭ servim de:

semnul $\sim$ care se ceteşte *asemene*,
semnul $\|$ care se ceteşte *paralel*
semnul $\perp$ care se ceteşte *perpendicular*.

Axiomă este o propoziţiune evidentă.

Teoremă este un adevăr ce trebue demonstrat. Enunciul uneĭ Teoreme trebue să conţină doă părţĭ: una, numită *ipoteză*, este o presupunere ce se face asupra unuĭ subiect, şi a doa numită *concluziune*, este consecinţa ipotezeĭ. Cănd pentru a scoate concluziunea din ipoteză este nevoe de un raţionament, acesta se numeşte *demonstraţiunea* Teoremeĭ.

Doă Teoreme sînt *reciproce*, atuncĭ cănd ipoteza şi concluziunea uneia sînt concluziunea şi ipoteza celeialalte. Nu totdeauna *reciproca* uneĭ Teoreme este un adevĕr.

Lemma este o Teoremă care serveşte la demonstraţiunea uneĭ alte Teoreme.

Corolarul uneĭ Teoreme este o consecinţă a eĭ.

GEOMETRIA PLANA

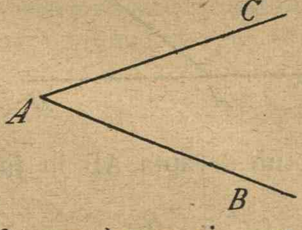
CARTEA I.

LINIA DREARTA

CAPITULUL I.

UNGHIURI.

7. Porţiunea de plan, cuprinsă între doă drepte care pleacă din un acelaşĭ punct A în direcţiunĭ deosebite, se numeşte *unghiul* acelor doă drepte. Punctul A comun celor doă drepte este *vîrful* unghiuluĭ, iar dreptele sînt *laturile* unghiuluĭ.



Un unghiu se însamnă saŭ prin singura literă scrisă la vîrful luĭ, saŭ prin treĭ litere din care câte una pe fie-care lature şi una la vîrf. Figura alăturată reprezintă un unghiu care se însamnă saŭ prin A saŭ prin BAC; litera din vîrf se pune totdeauna în mijloc.

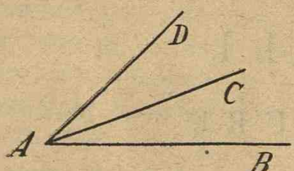
Mărimea unuĭ unghiu nu atîrnă de cât de deschiḑĕtura laturilor luĭ, care trebue presupuse prelungite fără capăt. Când laturea AC coincide cu AB, unghiul dreptelor este nul; laturea AC rădicându-se de pe AB, prin rotaţiune în jur de punctul A, face un unghiu din ce în ce maĭ mare cu laturea AB.

8. Doă unghiurĭ sînt *egale* dacă se pot *suprapune.* Un unghiu compus din alte unghiurĭ, este egal cu *suma* lor.

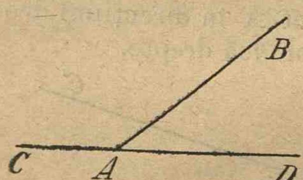
Suma maĭ multor unghiurĭ este *maĭ mare* de căt fie-care unghiu în parte.

Dacă un unghiu se compune din m unghiurĭ tot una de marĭ atuncĭ unul din aceste este a m^a parte din cel dintăĭ.

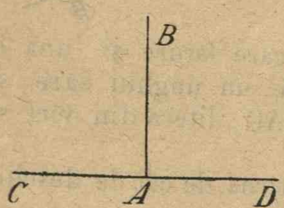
Doă unghiurĭ BAC şi DAC carĭ aŭ acelaşĭ vîrf A, o lature comună AC şi aşeḑate de o parte şi de alta a latureĭ comune, se numesc unghiurĭ *adiacente* saŭ *alăturate.*



9. Să considerăm o dreaptă oare-care CD; din un punct A al eĭ, să plece în o direcţiune oare-care o dreaptă AB; avem de aceiaşĭ parte a drepteĭ CD, doă unghiurĭ adiacente BAD şi BAC, şi după cum este figura videm că:



unghiu BAD< unghiu BAC, căcĭ aceste doă unghiurĭ fiind suprapuse nu coincid. Dacă rotim dreapta AB în jurul luĭ A aşa ca unghiul BAD să se mărească, atuncĭ adiacentul seŭ BAC se va micşura, şi este de observat că cu căt cel întăĭ se măreşte, exact cu atăta se micşorează cel de-al doilea. Continuănd rotirea latureĭ AB, va veni un moment când pozi-

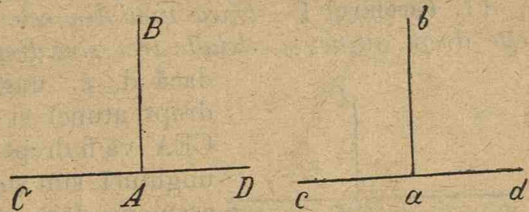


țiunea drepteĭ AB va fi ast-fel că cele doă unghiurĭ adiacente vor fi egale, cum este în figura din urmă; această pozițiune este unică, şi se dice că: dreápta AB este *perpendiculară* pe dreapta CD; în toate cele-lalte pozițiunĭ, dreptele se dic că sînt *oblice* una pe alta.

Unghiul format de doă drepte perpendiculare una pe alta se numeşte *unghiu drept.*

Un unghiu maĭ mare de căt un unghiu drept se numeşte *unghiu obtuz*, şi maĭ mic se numeşte *ascuțit.*

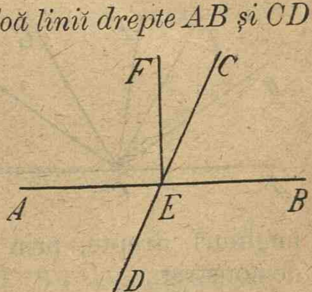
Este uşor de vĕdut că *toate unghurile drepte sînt egale.* Fie dreptele AB şi *ab* perpendiculare respectiv pe dreptele CD şi *cd*; dic că d.e. unghiul drept BAD este egal cu unghiul drept *bad*. In adevĕr, pun



dreapta CD peste *cd* ast-fel ca punctul A să cadă în *a*: perpendiculara AB va lua direcțiunea perpendicularei *ab*, şi prin urmare laturile unghiuluĭ BAD vor coincide cu laturile unghiuluĭ *bad*.

Doă unghiurĭ a căror sumă este egală cu un unghiu drept se numesc *complementare*, şi doă unghiurĭ a căror sumă este egală cu doă unghiurĭ drepte se numesc *suplementare.*

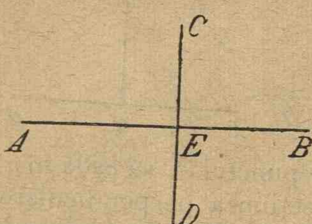
10. TEOREMĂ. — *Când doă liniĭ drepte AB și CD se întretae în un punct E, suma a doă unghiurĭ adiacente AEC și CEB, formate de aceste drepte, este egală cu doă unghiurĭ drepte și prin urmare unghiurile considerate sînt suplementare.*



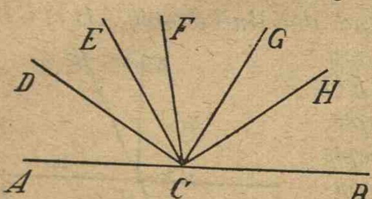
Să rădicăm în punctul E, perpendiculara EF pe AB; unghiul obtuz AEC este egal cu suma unghiurilor AEF, FEC; aşa dar suma unghiurilor adiacente AEC şi CEB se poate înlocui prin suma a treĭ unghiurĭ şi anume : AEF, FEC şi CEB ; însă din aceste treĭ unghiurĭ, cel dintâĭ este drept şi celelalte doă la un loc fac cât un unghiu drept, prin urmare suma acestor treĭ din urmă unghiurĭ, saŭ suma celor doă unghiurĭ adiacente, AEC şi CEB, fac la un loc doă unghiurĭ drepte.

Tot asemene se va demonstra că unghiurile adiacente DEA şi AEC fac la un loc iarăşĭ doă unghiurĭ drepte ; etc.

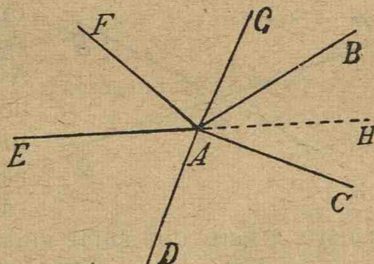
11. **Corolarul I** —*Dacă unul din cele patru unghiurĭ este drept, atuncĭ şi celelalte treĭ sînt drepte.* In adevĕr, dacă d. e. unghiul CEB este drept atuncĭ şi adiacentul seŭ CEA va fi drept, căcĭ aceste doă unghiurĭ sînt suplementare. De asemene, dacă unghiul CEB este drept şi celalalt adiacent al seŭ BED va fi drept, pentru acelaşĭ cuvînt. In fine unghiul AED trebue să fie şi el drept căcĭ este suplementul unghiuluĭ drept CEA.



12. **Corolarul II.**—*Orĭ cât de multe unghiurĭ vor fi de aceiaşĭ parte a uneĭ drepte, cu vîrful comun pe dreaptă, suma lor este egală cu doă unghiurĭ drepte.* Fie, în condiţiunile enunţate, unghiurile ACD, DCE ECF, FCG, GCH şi HCB. Suma tuturor acestor unghiurĭ este egală cu suma unghiurilor ACD şi DCB, carĭ am văzut că fac doă unghiurĭ drepte, prin urmare rezultă ceia ce era de demonstrat.



13 **Corolarul III** —*Când maĭ multe drepte trec prin un punct, suma tuturor unghiurilor formate în jurul punctuluĭ, este egala cu patru unghiurĭ drepte.* Fie d. e. dreptele AB, AC, AD, AE, AF, AG, care toate trec prin A ; avem șese unghiurĭ cu vîrful în A. Prelungim d. e. EA, și avem de o parte a drepteĭ EH unghiurile EAF, FAG, GAB și BAH a căror sumă este doă unghiurĭ drepte ; de ceialaltă parte a drepteĭ EH avem unghiurile EAD, DAC și CAH a căror sumă este iarăși doă unghiurĭ drepte; acum făcând suma tutùror acestor șapte unghiurĭ, avem toate unghiurile ce am format în jurul punctuluĭ A, și această sumă va fi prin urmare egală cu de doă-orĭ doă unghiurĭ drepte, saŭ cu patru unghiurĭ drepte.

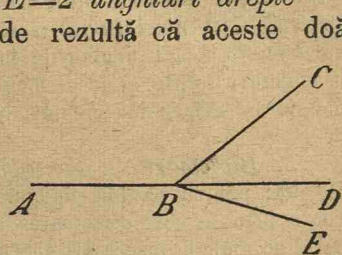


14. TEOREMĂ.— *Dacă doă unghiurĭ adiacente ABC și CBD sînt suplementare, laturile lor necomune AB, BD sînt în linie dreaptă.*

Dacă BD nu este prelungirea drepteĭ AB, atuncĭ fie BE această prelungire. Avem :

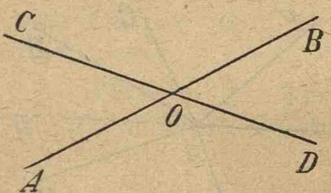
unghiu ABC+unghiu CBD=2 unghiurĭ drepte prin ipoteză, și

unghiu ABC+unghiu CBE=2 unghiurĭ drepte prin construcțiune ; de unde rezultă că aceste doă sumĭ să fie egale între ele, ca fiind fie-care egală cu doă unghiùrĭ drepte. Insă aceste doă sumĭ aŭ un unghiu ABC comun, rămâne dar ca unghiurile CBE și CBD să fie egale între ele, ceia ce nu este în realitate, căcĭ videm că unghiul CBD este cuprins în



unghiul CBE. Tot la un asemene rezultat absurd am ajunge, orĭ-ce altă direcţiune am presupune că ie prelungirea drepteĭ AB, afară de direcţiunea BD ; rămâne dar că, singura direcţiune ce poate să iee prelungirea luĭ AB este BD.

15. TEOREMĂ.—*Când doă liniĭ drepte AB, CD se întretae în un punct O, unghiurile opuse la vîrf sînt egale între ele.* Să luăm d e. unghiurile COB și AOD opuse la vîrf unul altuia. Suma unghiurilor adiacente AOC și COB este egală cu doă drepte (§. 10) ; de asemene, suma unghiurilor adiacente AOC și AOD este iarășĭ egală cu doă drepte: prin urmare aceste doă sumĭ sînt egale ; scoțînd din aceste sumĭ unghiul comun AOC, rămâne că unghiurile COB și AOD opuse la vîrf, sînt egale între ele.



16. **Probleme.**— Se numește *bisectoara* unuĭ unghiu, dreapta ce împarte unghiul în doă părțĭ egale.

1. *Bisectoarele a doă unghiurĭ adiacente și suplementare sînt perpendiculare una pe alta* ; căci câte o jumătate din cele doă unghiurĭ fac la un loc un unghiu drept, și unghiul bisectoarelor considerate se compune tocma din câte o jumătate de-a celor doă unghiurĭ adiacente date.

2. *Când patru unghiurĭ adiacente fac la un loc patru unghiurĭ drepte, dacă cel întâĭ este egal cu al treilea și al doilea cu al patrulea, atuncĭ laturile acestor unghiurĭ sînt doă câte doă în linie dreaptă* ; căcĭ unghiurile întâĭ și al doilea vor trebui să facă doă unghiurĭ drepte, și de-asemene unghiurile întâĭ și al patrulea vor trebui iarășĭ să facă doă unghiurĭ drepte; prin urmare rezultă ceia ce se cere.

3. *Bisectoarele a doă unghiurĭ opuse la vîrf sînt în linie dreaptă* ; pentru că doă unghiurĭ opuse la vîrf aŭ acelașĭ suplement și prin urmare bisectoarea acestuĭ suplement va fi perpendiculară pe ambele bisectoare a-le unghiurilor opuse la vîrf.

CAPITULUL II

TRIUNGHIURĬ

17. Figura formată de treĭ liniĭ drepte care se întretae doă căte doă în căte un punct, se numeşte *triunghiu*; punctele de intersecţiune sînt *vîrfurile* triunghiuluĭ: unghiurile de la vîrfurĭ sînt *unghiurile* triunghiuluĭ şi porţiunile de liniĭ drepte cuprinse între vîrfurĭ se numesc *laturile* triunghiuluĭ.

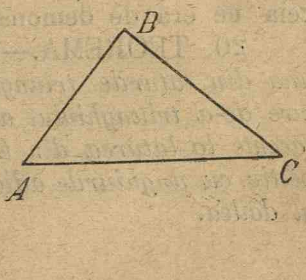
Cănd un triunghiu are doă laturĭ egale între ele, se numeşte *isoscel*; dacă are tustrele laturile egale între ele se numeşte *ecvilateral* şi dacă are tustrele unghiurile egale între ele se numeşte *ecviunghiu*.

Cănd un triunghiu are un unghiu drept, se numeşte *dreptunghic*; laturea opusă unghiuluĭ drept se numeşte *ipotenuză* şi celelalte doă laturĭ sînt *catetele* triunghiuluĭ dreptunghic.

Perpendiculara dusă prin unul din vîrfurile triunghiuluĭ pe laturea opusă, se numeşte *înălţimea* triunghiuluĭ şi laturea opusă vîrfuluĭ considerat este *baza*. Un triunghiu videm că poate ave treĭ înălţimì şi la fie-care înălţime corespunde o bază.

La un triunghiu isoscel să ie totdeauna ca bază, laturea neegală cu celelalte.

18. TEOREMĂ.—*In un triunghiu oare-care, una din laturĭ este maĭ mică de căt suma celorlalte doă.*



Linia AC fiind o linie dreaptă, este cea maĭ scurtă distanţă dintre punctele A şi C (§. 3); linia ABC este o linie frăntă maĭ lungă de căt AC; însă această linie frăntă este tocma suma laturilor AB şi BC a-le triunghiuluĭ ; aşa dar putem scri

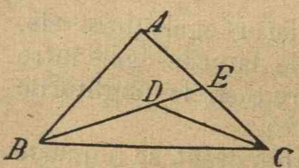
$$AC<AB+BC.$$

Corolar. Să scădem din ambiĭ membri aĭ acesteĭ neegalităţĭ pe BC, avem :

$$AB-BC<AB$$

aceasta din urmă neegalitate ni spune că : *o lature a unuĭ triunghiu oare-care este maĭ mare de căt diferenţa celorlalte doă.*

19. TEOREMĂ.—*Dacă din un punct D situat în interiorul unuĭ triunghiu ABC, se duc dreptele DB, DC la extremităţile uneia din laturile BC a triunghiuluĭ, suma DB+DC maĭ este mică de căt suma celorlalte doă laturĭ AB, AC a-le triunghiuluĭ.* Prelungesc d.e. BD pănă la întîlnire în E cu AC;



în virtutea Teoremeĭ precedente, în triunghiul ABD, în care laturea BE este compusă din bucăţile BD şi DE, avem

$$BD+DE<AB+AE,$$

şi în triunghiul CDE avem

$$CD<DF+EC.$$

Avem doă neegalităţĭ de acelaşĭ senz ; le adunăm membru cu membru, suprimăm terminul DE comun la ambiĭ membrĭ, şi avem următoarea neegalitate

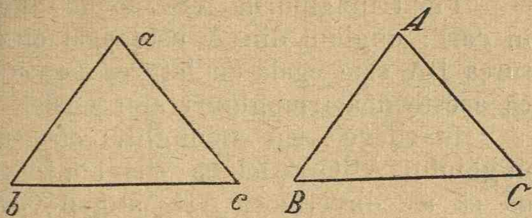
$$BD+CD<AB+AE+EC;$$

saŭ, fiind-că $AE+EC=AC$,

avem $$BD+CD<AB+AC;$$

ceia ce era de demonstrat.

20. TEOREMA.—*Doă triunghiurĭ sînt egale dacă una din laturile triunghiuluĭ întăĭ este egală cu o lature de-a triunghiuluĭ al doilea, şi dacă unghiurile adiacente la laturea din triunghiul întăĭ, sînt egale respectiv cu unghiurile adiacente la egala eĭ din triunghiul al doilea.*



Fie triunghiurile ABC şi *abc* în cari: laturea BC este egală cu laturea *bc*, unghiul din B egal cu unghiul din *b* şi unghiul din C egal cu unghiul din *c*; dic că aceste doă triunghiurĭ sînt egale.

In adevĕr, ieŭ triunghiul *abc* şi'l suprapun triunghiuluĭ ABC, astfel ca punctul *b* să vină în B, *c* în C. atuncĭ laturea *bc* va coincide exact cu BC; apoĭ, fiind că unghiul B este egal cu unghiul *b*, laturea *ba* va lua direcţiunea BA; de asemene unghiul *c* fiind egal cu C, laturea *ca* va lua direcţiuneà CA; punctul *a*, care se află la intersecţiunea laturilor *ba* şi *ca*, după suprapunere, va veni la intersecţiunea direcţiunilor luate de aceste doă laturĭ, adică la intersecţiunea laturilor BA, CA, prin urmare în A. Aşa dar aceste doă triunghiurĭ coincid în toate părţile lor şi prin urmare sînt egale.

Corolar.—De căte-orĭ doă triunghiurĭ se vor afla în condiţiunile enunciuluĭ acesteĭ Teoreme, ele vor fi egale şi prin urmare vom zice că *ab* este egal cu AB, *ac* egal cu AC şi unghiul din *a* egal cu unghiul din A. De unde videm că în triunghiurĭ egale, *laturile care se opun la unghiurĭ egale, sînt egale*; de asemene, *unghiurile opuse la laturĭ egale sînt egale.*

21. TEOREMĂ.— *Doă triunghiurĭ sînt egale dacă unul din unghiurile triungaiuluĭ întâĭ. este egal cu un unghiu de al triunghiuluĭ al doilea, şi dacă laturile care formează unghiul considerat în triunghiul întâĭ sînt egale cu laturile care formează egalul aceluĭ unghiu în triunghiul al doilea.*

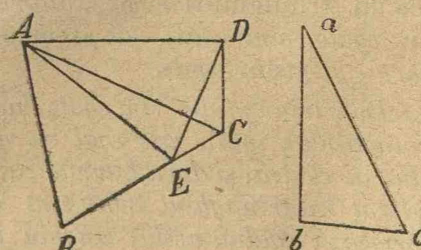
Fie triunghiurile ABC și *abc* (figura de maĭ sus) în cari: unghiul din A este egal cu unghiul din *a*, laturea BA este egală cu laturea *ba* și CA cu *ca*; ḑic că aceste doă triunghiurĭ sînt egale.

In adevĕr, ieŭ triunghiul *abc* și'l suprapun triunghiuluĭ ABC astfel ca vîrful *a* să vină în A, laturea *ab* să iee direcțiunea AB, atuncĭ vîrful *b* va veni în B fiind-că *ab* este egală cu AB, laturea *ac* va lua direcțiunea AC, căcĭ unghiul din *a* este egal cu unghiul din A și prin urmare *c* va căde în vîrful C căcĭ laturea *ac* este egală cu laturea AC; în fine capetile latureĭ *ac* căḑănd unul în B și altul în C, laturea *bc* însășĭ va căde exact pe laturea BC. Așa dar aceste doă triunghiurĭ coincid în toate părțile lor și prin urmare sînt egale.

Corolarul teoremeĭ precedente se aplică și la teorema aceasta.

22. TEOREMĂ.— *Dacă doă laturĭ ale unuĭ triunghiu sînt egale respectiv cu doă laturĭ ale unuĭ alt triunghiu, și dacă unghiul format de cele întâĭ doă laturĭ este maĭ mare de căt unghiul format de cele de al doilea doă laturĭ, atuncĭ și laturea a treia din triunghiul întăĭ va fi maĭ mare de căt laturea a treia din triunghiul al doilea*(*).

Fie triunghiurile ABC și *abc*, în care avem: AB=*ab*, AC=*ac* și unghiul A > unghiul *a*; ḑic că laturea BC va fi maĭ mare de cât *bc*.



Fac în A, unghiul CAD egal cu unghiul *bac*, ieŭ AD egal cu *ab* și unesc C cu D; am triunghiul CAD egal cu triunghiul *bac*, fiind-că

*). Această Teoremă constitue o Lemmă pentru Teorema următoare.

aceste doă triunghiurĭ îndeplinesc condiţiunile enunciate în Teorema precedentă, şi prin urmare dacă sînt egale rezultă că CD este egal cu bc. Este dar de ajuns să demonstrăm că BC este maĭ mare de căt CD.

Pentru aceasta, împart unghiul BAD în doă părţĭ egale, ducându-ĭ bisectoara AE: această bisectoară se va afla în unghiul CAD; duc dreapta ED; triunghiurile BAE şi EAD sînt egale fiind că aŭ laturea AE comună, AB=AD prin construcţiune şi unghiul BAE egal cu unghiul EAD iar prin construcţiune: rezultă prin urmare că laturea BE este egală cu laturea ED. Apoĭ, triunghiul EDC dă (§. 18):

$$CD<ED+EC;$$

însă am demonstrat că

$$ED=BE,$$

prin urmare avem

$$CD<BE+EC \text{ saŭ } CD<BC. \text{ c. c. e. d. d.}$$

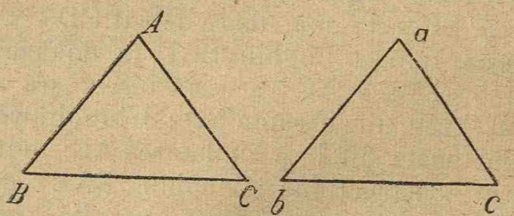
23. Reciproca acesteĭ Teoreme este adevĕrată, adică: *dacă laturile BA, CA a triunghiuluĭ ABC sînt egale respectiv cu laturile ba, ca a triunghiuluĭ abc, şi daca laturea a treia BC a triunghiuluĭ întăĭ este maĭ mare de căt laturea a treia bc a triunghiuluĭ al doilea, atuncĭ unghiul BAC va fi maĭ mare de cât unghiul bac*; căcĭ dacă unghiul BAC ar fi maĭ mic de căt bac, în virtutea Teoremeĭ demonstrate ar rezulta ca BC, să fie maĭ mic de căt bc, ceia ce este contrar ipotezeĭ; şi dacă unghiul BAC ar fi egal cu unghiul bac atuncĭ ar rezulta (§. 21) că laturea BC să fie egală cu bc, ceia ce este iarăşĭ contrar ipotezeĭ; rămăne dar că BC să fie maĭ mare de căt bc.

24. TEOREMĂ.—*Doă triunghiurĭ sînt egale da ă trustrele laturile triunghiuluĭ întâĭ sînt egale una cât una cu trustrele laturile triunghiuluĭ al doilea.*

Fie triunghiurile ABC şi abc in care avem:

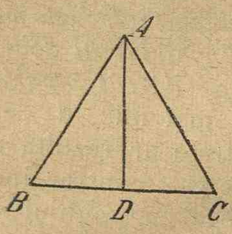
$$AB=ab,\ BC=bc \text{ şi } CA=ca;$$

ḑic că aceste doă triunghiurĭ sînt egale. In adevăr laturile AB, AC fiind egale respectiv cu laturile *ab*, *ac*,



dacă unghiul din A ar fi maĭ mare de căt unghiul din *a*, atuncĭ (§. 22) şi laturea BC ar fi maĭ mare de căt laturea *bc*, ceia ce este contrar ipotezeĭ; dacă unghiul din A ar fi maĭ mic de căt cel din *a*, atuncĭ şi BC ar fi maĭ mic de căt *bc*, ceia ce este iar contrar ipotezeĭ; rămăne dar că unghiul din A să fie egal cu unghiul din *a*. Tot asemene se va demonstra că unghiul din B este egal cu unghiul din *b* şi unghiul din C este egal cu unghiul din *c*.

25. TEOREMĂ.— *In un triunghiu isoscel unghiurile opuse laturilor egale sînt egale.*



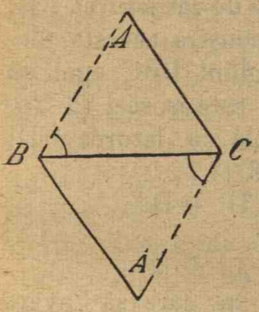
Fie triunghiul ABC, în care laturea BA este egală cu laturea CA; ḑic că unghiul din B este egal cu unghiul din C. Pentru a demonstra aceasta, unesc vîrful A al triunghiuluĭ cu mijlocul D al latureĭ opuse BC care este baza triunghiuluĭ, şi am format ast-fel doă triunghiurĭ BAD şi CAD care sînt egale fiind că aŭ tustrele laturile lor egale una cu alta şi anume: BA=AC prin ipoteză, AD=AD ca comună, şi BD=CD prin construcţiune; rezultă, din egalitatea acestor triunghiurĭ, că unghiul B este egal cu unghiul C, ceia ce era de demonstrat.

Corolar I.—Din egalitatea triunghiurilor BAD şi DAC maĭ rezultă că unghiul BAD este egal cu unghiul

CAD şi că unghiul ADC este egal cu suplementul seŭ ADB. Prin urmare ḑicem: *linia dreaptă care uneşte vîrful unuĭ triunghiu isoscel cu mijlocul bazeĭ luĭ, este bisectoara unghiuluĭ din acel vîrf, şi este tot odată perpendiculară pe baza triunghiuluĭ.*

Corolar II. — *Un triunghiu ecvilateral este şi ecviunghiu,* fiind-că unghiurile unuĭ asemenea triunghiu se opun la laturĭ egale.

26. TEOREMĂ.—Reciproca teoremeĭ precedente constitue o noă Teoremă adică: *Daca un triunghiu are doă unghiurĭ egale între ele, şi laturile opuse acestor unghiurĭ sînt egale între ele: triunghiul este isoscel.*

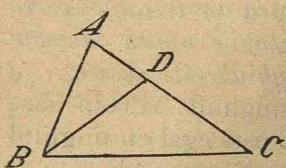


Fie triunghiul ABC în care unghiul ABC este egal cu unghiul ACB; ḑic că laturea AB este egală cu laturea AC. Pentru a demonstra aceasta, formăm pe laturea BC în partea opusă triunghiuluĭ ABC, un alt triunghiu ast-fel că unghiul BCA′ să fie egal cu unghiul CBA şi laturea CA′ să fie egală cu BA; atuncĭ rezultă că laturea BA′ este egală cu laturea AC şi unghiul CBA′ egal cu unghiul BCA şi prin urmare şi cu unghiul ABC; va maĭ rezulta încă că şi unghiurile BCA, şi BCA′, să fie egale între ele.

Aşa fiind, să îndoim triunghiul BCA în jurul latureĭ sale BC; laturea BA′ va lua direcţinnea BA din cauza egalităţeĭ unghiurilor CBA′ şi CBA, şi laturea CA′ va lua direcţiunea CA din cauza egalităţeĭ unghiurilor BCA′ şi BCA. Prin urmare vîrful A′ cade în A şi laturea CA′ se aplică exact peste CA; însă CA′ este egală cu BA prin construcţiune, prin urmare şi CA este egală cu BA; c. c. e. d. d.

Corolar.—*Un triunghiu ecviunghiu este ecvilateral;* fiind-că laturile unuĭ asemenea triunghiu se opun la unghiurĭ egale.

27. TEOREMĂ.—*Dacă considerăm doă laturĭ a-le unuĭ triunghiu, aceia care se opune la un unghiu maĭ mare, este maĭ mare de cât acea care se opune la un unghiu maĭ mic; și dacă considerăm doă unghiurĭ, acel care se opune la o lature maĭ mare este maĭ mare de cât acel care se opune la o lature maĭ mică.*



1°. Fie triunghiul ABC în care să avem; unghiul ABC> unghiul ACB; ḑic că laturea AC este maĭ mare de cât laturea AB. Pentru a demonstra aceasta, formez în B unghiul DBC egal cu unghiul C; triunghiul format DBC este isoscel (§. 26) şi are prin urmare laturea BD egală cu laturea CD; celalalt triunghiu ABD ni dă (§. 18):

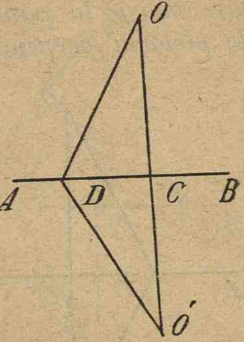
$$AB < BD + DA, \text{ saŭ } AB < DC + DA,$$

saŭ în fine,

$$AB < AC.$$

2°. Fie tot triunghiul ABC, în care să avem AC>AB; ḑic că unghiul ABC este maĭ mare de cât unghiul ACB; căcĭ dacă întâiul unghiu ar fi maĭ mic de cât al doilea, ar urma, după cele arătate maĭ sus, ca laturea AC să fie maĭ mică de cât laturea AB, ceia ce este contrar ipotezeĭ; dacă acest doă unghiurĭ ar fi egale între ele, ar urma ca AC să fie egal cu AC, ceia ce este iarăşĭ contrar ipotezeĭ; rămăne dar că unghiul ABC să fie maĭ mare de cât ACB.

28. TEOREMĂ.— *La o dreaptă, din un punct ce nu'ĭ situat pe ea, se poate duce o perpendiculară și numaĭ una.*



Fie AB dreapta şi O punctul.

1°. Invîrtesc partea planuluĭ care'ĭ deasupra drepteĭ AB şi în jur de această dreaptă, pănă ce coincide cu partea de desubt; fie O' locul ocupat de O după această învîrtire. Rădic înapoĭ porţiunea de plan, şi duc dreapta OO'; această dreaptă este perpendiculară pe AB, în punctul C; căcĭ dacă îndoesc planul în jur de AB, dreapta CO se aplică peste CO' pentru că, prin ipoteză, punctul O se aplică pe O'; aşa dar unghiurile adiacente ACO şi ACO' coincid, şi dreapta OO' este perpendiculară pe dreapta AB.

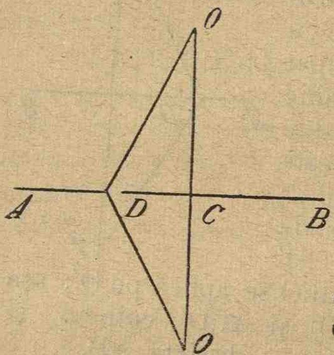
2°. Această dreaptă OO' ḑic că este singura perpendiculară ce se poate duce din O pe dreapta AB. In adevăr, fie OD o altă dreaptă dusă prin punctul O; unesc D cu O' şi îndoesc figura în jur de AB; punctul O vine în O' şi prin urmare dreapta OD va coincide cu O'D, şi ast-fel videm că unghiurile CDO şi CDO' sînt egale între ele, însă nu sînt şi suplementare, căcĭ DO nu poate fi prelungirea drepteĭ O'D, din cauză că drumul cel maĭ scurt de la O la O' este OCO' iar nu ODO'. Unghiurile CDO şi CDO' fiind egale şi nefiind suplementare, ele nu pot fi drepte şi prin urmare dreapta OD este o oblică pe dreapta AB.

29. TEOREMĂ.—*Dacă din un punct, ce nu'ĭ situat pe o dreaptă dată, se duce perpendiculara la dreaptă şi maĭ multe oblice avem :*

1°. Perpendiculara este maĭ scurtă de căt orĭ-ce oblică,

2°. Doă oblice,, duse la puncte de pe dreaptă, egal depărtate de piciorul perpendicularei, sînt egale.

3°. Dintre doă oblice oare-care, aceia este maĭ mare *care merge la punctul de pe dreaptă cel maĭ depărtat de piciorul perpendiculareĭ.*



Fie AB dreapta dată şi O punctul dat, nesituat pe dreaptă.

1°. Duc perpendiculara OC şi oblica OD; ḑic că OC este maĭ mic de căt OD. Pentru aceasta, prelungesc OC sùb AB de o lungime egală adică $CO=CO'$; unesc DO' şi am doă triunghiurĭ OCD şi $O'CD$ care sìnt egale ca avĕnd unghiul $OCD =$ unghiu $O'CD$ ca drepte, $CD=CD$ ca comună şi $OC=O'C$ prin construcţiune: prin urmare rezultă că: $OD=O'D$,

Insă linia dreaptă OO' este maĭ mică de căt linia frăntă ODO', adică avem

$$OC+O'C<OD+O'D,$$

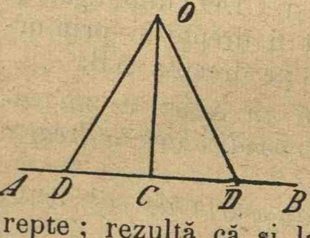
saŭ

$$2\,OC<2OD,$$

saŭ în fine

$$OC<OD. \qquad \text{c. c. ę. d. d.}$$

2°. Luăm doă puncte D şi D' pe dreapta AB egal depărtate de piciorul C al perpendiculareĭ dusă din O la AB. Ḑic că oblicile OD şi OD' sìnt egale; căcĭ triunghiurile ODC şi $OD'C'$ sìnt egale ca avĕnd:

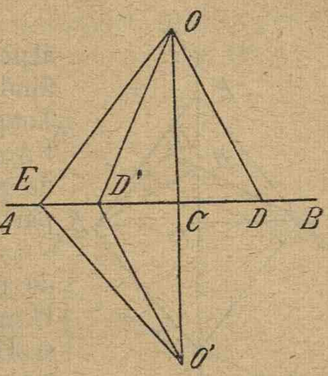


$OC=OC$ ca comun,

$CD=CD'$ prin construcţiune

şi ung. $OCD=$ ung. OCD' ca drepte; rezultă că şi laturile OD, OD' opuse unghiurilor drepte să fie egale între ele.

3°. Luăm pe dreapta AB doă puncte D şi E aşa ca EC să fie maĭ mare de căt DC: ḑic că oblica OE este maĭ mare de căt OD. Pentru aceasta, ieŭ



CD'=CD și duc oblica OD'; în urma celor precedente vom ave OD=OD'. Prelungesc OC de o lungime egală CO' și unesc O' cu D' și E. Vom demonstra ca maĭ sus că; OE=O'E și OD'=O'D'.

Acum dacă considerăm triunghiul OEO', în interiorul seŭ avem punctul D' care este unit cu extremitățile latureĭ OO'; în virtutea Teoremeĭ de la § 19 avem:

$$OE+O'E'>OD'+O'D',$$

saŭ 2 OE>2 OD' pentru că OE=O'E și OD=O'D'

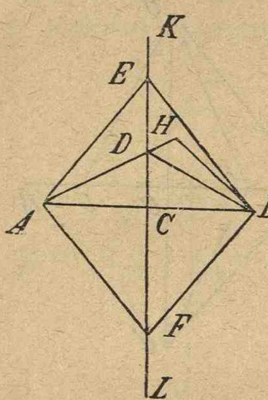
saŭ în fine OE>OD pentru că OD=OD', c. c. e. d. d.

Corolar I.—*Distanța de la un punct la o dreaptă este lungimea perpendiculareĭ de la punct la dreaptă* căcĭ această lungime este maĭ scurtă de căt orĭ-care oblică.

Corolar II.—*Din un punct nu se poate duce la o dreaptă de căt doă obilce egale*, căcĭ dacă s'ar pute duce treĭ, atuncĭ am ave de aceiașĭ parte a perpendiculareĭ doă oblice egale, ceia ce nu se poate.

30. TEOREMĂ.—*Dacă prin mijlocul unuĭ segment de dreaptă, rădicăm perpendiculara pe segment atuncĭ: 1⁰ orĭ-ce punct de-a perpendiculareĭ va fi egal depărtat de extremitățile segmentuluĭ și 2⁰ orĭ-ce punct care nu'ĭ pe perpendiculară va fi neegal depărtat de extremitățile segmentuluĭ.*

Fie AB segmentul de dreaptă, C mijlocul eĭ și KL perpendiculara la AB dusă în mijlocul eĭ C.



1°. Consider d. e. punctul D. al perpendicularei: avem DA=DB, fiind-că am luat AC=CB (§. 29.2°). Tot pentru acelaşi cuvênt AE=BE, FA=FB... aşa dar orĭ-care punct de pe KL este de o potrivă depărtat de A şi B.

2°. Fie H un punct în afară de perpendiculara KL; dacă unesc H cu A şi B, am lungimele HA şi HB care dic că nu pot fi egale între ele. In adevăr, una din dreptele HA, HB va trebui să întâlnească perpendiculara în un punct, în figura noastră HA o întâlneşte în D; unesc D cu A şi B şi avem DA=DB. Insă avem

$$HB < DH + DB,$$

şi fiind-că DB=DA putem scri

$$HB < DH + DA,$$

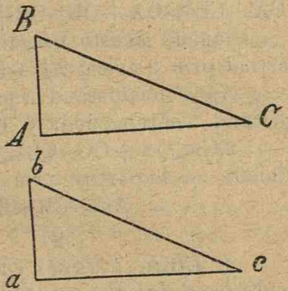
saŭ în fine $HB < AH.$

Tot ast-fel vom face cu orĭ-care alt punct luat în afară de perpendiculara KL.

31. **Observaţiune.**—Numim *loc geometric* al unuĭ punct. linia a căreĭ puncte se bucură de o aceiaşĭ proprietate geometrică. Ast-fel din Teorema precedentă, videm că toate punctele perpendiculareĭ KL aŭ proprietatea comună că ele sînt de-o potrivă depărtate de extremităţile A şi B a-le segmentuluĭ dat AB; prin urmare putem zice: *locul geometric al punctelor cari sînt egal depărtate de doă puncte date A şi B, este perpendiculara rădicată pe mijlocul distanţeĭ între A şi B.*

32. Aceste Teoreme privitoare la perpendiculară şi oblice ne permit, a demonstra cazurile de egalitate a triunghiurilor dreptunghice în mod maĭ simplu.

33. TEOREMĂ.— *Doă triunghiurĭ dreptunghice sînt egale, dacă aŭ ipotenuzile lor egale și căte un unghiu egal unul cu altul.*



Fie triunghiŭrile ABC şi *abc* dreptunghice în A şi *a* şi care aŭ ipotenuzele lor BC şi *bc* egale între ele precum şi uunghiurile C şi *c* iarăşĭ egale între ele: dic că aceste doă triunghiurĭ sînt egale. Suprapun triunghiul *abc* peste triunghiul ABC, aşa că ipotenuza *bc* să vină exact peste BC, atuncĭ laturea *ca* va lua direcţiunea CA din cauza egalităţeĭ unghiurilor C şi *c*, iar laturea *ba* perpendiculară pe *ac*, se va aplica peste BA care'ĭ perpendiculară pe AC. Aceste triunghiurĭ coincid şi prin urmare sînt egale.

34. TEOREMĂ.— *Doă triunghiurĭ dreptunghice sînt egale, dacă aŭ ipotenuzele lor egale și căte o lature egală una cu alta.*

Fie iarăşĭ triunghiurile dreptunghice de dineoare, cari să presupunem că aŭ ipotenuzele lor BC şi *bc* egale între ele, precum şi laturile BA şi *ba* iarăşĭ egale între ele; dic că aceste doă triunghiurĭ sînt egale între ele. Suprapun triunghiul *abc* peste triunghiul ABC aşa că laturea *ba* să coincidă cu BA; laturea *ac* perpendiculară pe *ab* în *a* va lua direcţiunea AC ccre'ĭ perpendiculară pe AB în A, şi atuncĭ ipotenuza *b* se aplică peste BC din cauză că ele sînt doă oblice egale şi situate de aceiaşĭ parte a perpendicularеĭ AB. Aceste triunghiurĭ coincid şi prin urmare sînt egale.

35. **Probleme.**—*1. Suma liniilor drepte care unesc un punct din interiorul unuĭ triunghiu, cu cele treĭ vîrfurĭ, este maĭ mică de căt perimetrul triunghiuluĭ și maĭ mare de căt jumătatea acestuĭ perimetru.*

(Se numeşte *perimetru* unuĭ triunghiu suma laturilor triunghiuluĭ).

Fie A, B, C, vîrfurile triunghiuluĭ şi O punctul luat în interior. Teorema de la §. 19 ni dă:

$CA+CB>OA+OB$, $CB+BA>OC+OA$, $BA+AC>OB+OC$; adunănd aceste neegalitățĭ carĭ sînt de acelaşĭ senz şi împărțiud prin 2 avem: $AB+BC+CA>OA+OB+OC$.

Apoĭ considerăud a parte triunghiurile AOC, COB, BOA ş aplicând Teorema de la §. 18 avem:

$AC<OA+OC$, $CB<OC+OB$, $BA<OB+OA$, de unde prin adunare şi împărțire prin 2 aflăm:

$$\frac{AC+CB+BA}{2}<OA+OB+OC.$$

2. *Linia dreaptă care uneşte un vîrf al unuĭ triunghiu cu mijlocul latureĭ opuse, este maĭ mică de cât jumĕtatea sumeĭ celorlalte doă laturĭ, însă maĭ mare de căt jumĕlatea excesuluĭ acesteĭ sumĭ peste laturea a treia.*

Fie AD dreapta dusă din A, prin mijlocul latureĭ BC; prelungesc AD de o lungime egală DE, unesc B cu E; se formează doă triunghiurĭ egale, din care se scoate uşor ceia ce se cere.

Apoĭ, $AD>AB-BD$ şi $AD>AC-DC$, adunăm şi împărțim prin 2 ceia ce dă; $AD>\frac{AB+AC-BC}{2}$

3. *Dacă se prelungesc laturile BA, CA a triunghiuluĭ BAC dincolo de vîrful A şi luam AB′, AC′ respectiv egale cu AB, AC şi dacă ducem dreapta B′C′, avem: 1⁰. mijlocurile liniilor CB, CB′ şi vîrful A sînt în linie dreptă şi 2⁰ vîrful A este în mijlocul distanțeĭ celorlalte doă.*

Fie I şi K mijlocurile dreptelor CB, C′B′. Problema se rezolveşte cu ajutorul triunghiurilor BAC şi B′AC′ care sînt egale între ele şi a triunghiurilor BAI şi B′AK care iarăşĭ sînt egale între ele.

4. *Se dă un unghiu ABC pe lature BA să ieŭ doă lungimĭ CD BE şi pe ceialaltă lature să ieŭ doă lungimĭ BD′ şi BE′ respectiv egale cu BD şi BE; se uneşte D cu E′ şi D′ cu E. A arată că dreptele DE′ şi D′E se întâlnesc pe bisectoara unghiuluĭ A.*

Fie I punctul de intersecțiune a acestor drepte. Avem întâĭ triunghiurile BED′ şi BDE′ egale între ele, din care rezultă egalitatea triunghiurilor DIE şi D′IE′ şi din aceste a triunghiurilor BDI şi BD′I şi prin urmare a unghiurilor DBI şi D′BI; aşa dar dreapta BI împarte unghiul ABC în doă părțĭ egale.

Aceasta constitue un mijloc de-a construi bisectoara unuĭ unghiu.

5. *Perpendicularele duse din vîrfurile unuĭ triunghiu ecvilateral pe laturile opuse sînt egale.*

Pentru că sînt înălţimile a treĭ triunghiurĭ isoscele egale.

6. *Perpendicularele duse din extremităţile bazeĭ unuĭ triunghiu isoscel pe laturile opuse sînt egale.*

Pentru că se formează doă triunghiurĭ dreptunghice egale.

7. *Perpendicularele duse pe laturile unuĭ triunghiu şi prin mijlocurile acestor laturĭ, se întâlnesc în un acelaşĭ punct.*

Pentru că acest punct considerat ca intersecţiune a doă din perpendiculare, se vede că este de o potrivă depărtat de cele treĭ laturĭ ale triunghiuluĭ, şi prin urmare perpendiculara dusă din el pe laturea a treia va trece prin mijlocul acesteĭ laturĭ.

8. *Bisectoarele unghiurilor unuĭ triunghiu se întâlnesc în un acelaşĭ punct.*

Pentru că luând punctul de intersecţiune a doă din bisectoare, se vede că acest punct este de o potrivă depărtat de cele treĭ laturĭ ale triunghiuluĭ, prin urmare trebue să aparţină şi bisectoareĭ a treia.

9. *Se daŭ doă puncte A, B şi o linie dreaptă XY; a găsi pe XY un punct C aşa că suma CA+CB să fie cât se poate de mică.* Dacă A şi B sînt de o parte şi de alta a drepteĭ XY, nu avem de cât să unim AB şi unde AB întâlneşte pe XY, este punctul căutat C; dacă A şi B sînt de aceiaşi parte, atuncĭ să ie simetricul A′ a luĭ A în privirea drepteĭ XY; punctul de întâlnire al drepteĭ A′ B cu XY este punctul căutat.

10. *Fiind aceleaşĭ date ca în problema precedentă, se cere ca diferenţa CA—CB să fie cât se poate de mare.* Aceiaş construcţiune.

11. *Se daŭ doă drepte XX′ YY′ şi doă puncte A, B; a se găsi un punct M de o potrivă depărtat de A şi B şi dreptele XX′ şi YY′.*

Punctul căutat se află la intersecţiunea perpendiculareĭ la AB dusă în mijlocul acestuĭ segment, cu bisectoarele unghiurilor formate de dreptele date. Sînt doă soluţiunĭ.

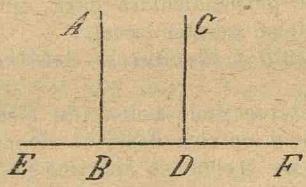
12. *Dacă un triunghiu are doă înălţimĭ egale între ele, triunghiul este isoscel.* Se formează doă triunghiurĭ dreptunghice egale, din carĭ rezultă egalitatea a doă unghiurĭ de a triunghiuluĭ.

CAPITULUL III

PARALELE

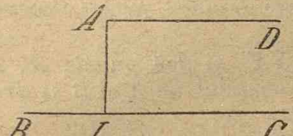
Doă liniĭ drepte situate în un plan, sînt *paralele* între ele, dacă nu se întâlnesc orĭ cât de mult le-am prelungi în un sens saŭ în altul.

36. TEOREMĂ.—*Doă liniĭ drepte AB, CD perpendiculare la o aceiașĭ dreaptă EF, sînt paralele.*



In adevĕr, dacă liniile drepte AB, CD s'ar întâlni unde-va, în un punct, atuncĭ am ave din acel punct doă perpendiculare la dreapta EE, ceia ce ştim că este imposibil. (§ 28).

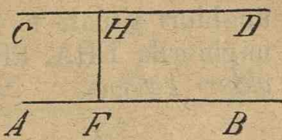
37. TEOREMĂ.—*Prin un punct A, ce nu'ĭ situat pe o linie dreaptă BC, se poate duce o paralelă la acea dreaptă.* Pentru aceasta duc din punctul A dreapta AI perpendiculară la BC, şi apoĭ duc perpendiculara AD la AI în punctul A; dreptele AD şi BC sînt paralele căcĭ sînt perpendiculare la aceiaşĭ dreaptă AI (§. 36).



Vom admite ca *axiomă* că prin punctul A nu se maĭ poate duce o altă paralelă cu BC, adică vom ḑice: *că prin un punct se poate duce numaĭ o singură dreaptă paralelă la o altă dreaptă dată.*

38. TEOREMĂ.—*Dacă doă drepte AB, CD sînt paralele între ele atuncĭ orí-ce linie dreaptă FH perpendiculară pe una din ele, este perpendiculară și pe ceialaltă.*

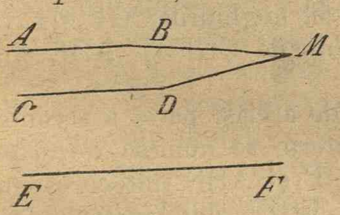
Fie dreapta FH perpendiculară pe AB; dic că FH trebue să fie perpendiculară şi pe CD.



Maĭ întăĭ, este evident că FH trebue să întîlnească pe CD, căcĭ dacă nu o întîlneşte trebue să'ĭ fie paralelă şi atuncì am ave duse prin punctul F doă paralele cu CD, ceia ce nu se poate.

Apoĭ, CD trebue să fie perpendiculară de FH căcĭ dacă nu, va fi oblică, şi atuncĭ prin H şi pe FH vom maĭ pute duce o perpendiculară, alta de căt CD, şi acea perpendiculară va trebui să fie paralelă cu AB; am ave ast-fel doă drepte paralele cu AB şi amăndoă trecănd prin punctul H, ceia ce am admis că nu e cu putinţă.

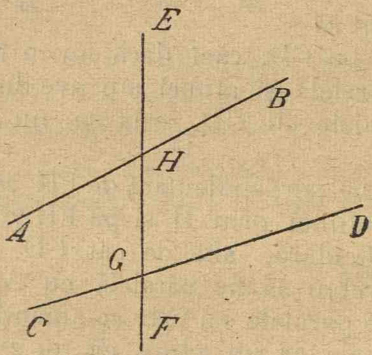
39. TEOREMA.—*Doă drepte paralele cu o a treia sînt paralele şi între ele.*



Fie dreptele AB, CD paralele cu dreapta EF; dic că dreptele AB, CD sînt paralele între ele; căcĭ dacă nu ar fi paralele, s'ar întălni în un punct oare-care M; am ave dar prin punctul M duse doă paralele cu EF, ceia ce am admis că nu e cu putinţă.

40. **Definiţiunĭ.**—Să luăm doă drepte AB, CD, pe cari să le tăiem cu o a treia dreaptă EF; fie G şi H punctele de intersecţiune a celor doă drepte cu dreapta secantă.

Se formează opt unghiurĭ, din cari patru între cele doă drepte şi care sînt: unghiurile AHF, BHF, CGE şi DGE; şi se numesc *unghiurĭ interne*; celelalte patru unghiurĭ situate în afara celor doă drepte, şi anume: unghiurile EHA, EHB, CGF şi DGF se numesc *unghiurĭ externe.*



Doă unghiurĭ interne şi ne-adiacente, se numesc *alterne-interne* saŭ *interne de aceiaşĭ parte*, după cum sînt de o parte şi de alta a secanteĭ EF, saŭ numaĭ de o parte. Ast-fel, unghiurileCGEşiBHF sînt alterne-interne, şi unghiurile CGE şi AHF sînt interne de aceiaşĭ parte.

De asemene, doă unghiurĭ externe ne-adiacente se numesc *alterne extērne* saŭ *externe de aceiaşĭ parte*, după cum sînt de o parte şi de alta a secante EF saŭ numaĭ de o parte. Ast-fel unghiurile CGF şi EHB sînt alterne-externe şi unghiurile CGF şi AHE sînt externe de aceiaşĭ parte.

Doă unghiurĭ, situate de aceiaşĭ parte a secanteĭ însă unul intern şi altul extern, se numesc *corespondente.* Ast-fel unghiurile CGF şi AHF sînt corespondente; unghiurile EHB şi EGD sînt corespondente; etc.

41. TEOREMĂ.—*Dacă doă liniĭ drepte sînt paralele între ele şi le tăem cu o secantă, se vor forma:*

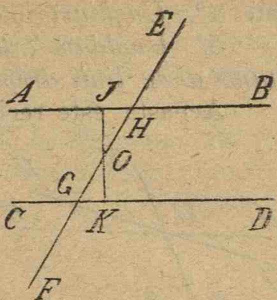
1°. Unghiurĭ alterne-interne egale;

2°. Unghiurĭ alterne-externe egale;

3°. Unghiurĭ corespondente egale;

4°. Unghiurĭ interne de aceiaşĭ parte, suplementare.

5°. Unghiurĭ externe de aceiaşĭ parte, suplementare.



Fie paralelele AB, CD, tăete de secanta EF, fie G şi H punctele de intersecţiune a paralelelor cu secanta.

1°. Prin mijlocul O, al porţiuneĭ de secantă GH cuprinsă între paralele, duc dreapta IK perpendiculară pe AB care va fi perpendiculară şi pe CD (§. 38). S'aŭ format doă triunghiurĭ dreptunghice IOH şi GOK, care sînt egale (§. 33), căcĭ aŭ ipotenuzele lor OH şi OG egale ca date, şi unghiurile IOH şi GOK egale ca opuse la vîrf ; aceste triunghiurĭ fiind egale, rezultă că unghiurile alterne-interne IHO şi KGO să fie egale între ele.

De asemenea unghiurile alterne-interne BHF şi CGE sînt egale, ca suplementare de unghiurĭ egale.

2°. Egalitatea între unghiurile alterne externe, rezultă din aceia că ele sînt unghiurĭ opuse la vîrf, unghiurilor alterne-interne

3°. Unghiurile corespondente, d. e. EGD şi EHB sînt egale căcĭ acest din urmă este egal cu alternul-intern al celuĭ dintăĭ.

4°. Unghiurile interne de aceiaşĭ parte, d. e. EGD şi BHF, sînt suplementare căcĭ acest din urmă este suplementul alternuluĭ-intern celuĭ dintăĭ.

5°. Unghiurile externe de aceiaşĭ parte, d. e. EHB şi FGD, sînt suplementare, căcĭ acest din urmă este suplementul alternuluĭ-extern al celuĭ dintăĭ.

42. TEOREMĂ.—*Dacă doă liniĭ drepte, tăete de o secantă fac:*

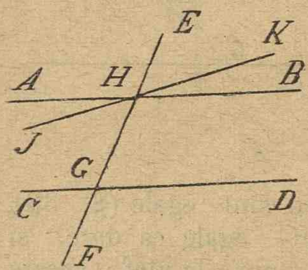
1°. Unghiurĭ alterne-interne egale,

saŭ *2°. Unghiurĭ alterne-externe egale,*

» *3°. Unghiurĭ corespondente egale,*

saŭ 4°. *Unghiurĭ interne de aceiașĭ parte suplementare,*
» 5°. *Unghiurĭ externe de aceiașĭ parte suplementare,*
atuncĭ acele liniĭ drepte sînt paralele între ele.

Aceasta este reciproca Teoremeĭ precedente.



Fie dreptele AB, CD, tăete de secanta EF în punctele G și H.

1°. Să presupunem că unghiurile alterne-interne AHF și EGD sînt egale; dic că dreptele AB și CD sînt paralele între ele. Dacă dreptele AB, CD nu ar fi paralele între ele, atuncĭ prin punctul H trebue să putem duce o dreaptă care să fie paralelă cu CD; fie IK această paralelă. Dreptele IK și CD fiind paralele, unghiurile alterne-interne IHF și DGE rezultă că să fie egale între ele; însă prin ipoteză unghiul DGE este egal cu unghiul AHF, prin urmare am ave: *unghiu* AHF=*unghiu* IHF, ceia ce nu se poate, căcĭ videm că unghiul IHF este o parte din unghiul AHF.

2°. Dacă unghiurile alterne-externe EHB, CGF sînt egale, opusele lor la vîrfurĭ sînt unghiurĭ alterne-interne egale, și prin urmare sîntem în cazul precedent.

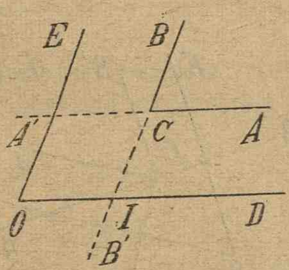
3°. Dacă unghiurile corespondente EHB, EGD sînt egale, atuncĭ avem că opusul la vîrf al unghiuluĭ EHB este altern-intern și egal cu unghiul EGD, prin urmare va rezulta că dreptele sînt paralele.

Tot ast-fel se va urma cu demonstrațiunea și în celelalte doă cazurĭ.

Observațiune.—Este de ajuns ca una din cele cincĭ condițiunĭ din această Teoremă să fie îndeplinită, pentru ca dreptele să fie paralele.

43. TEOREMĂ.—*Dacă doă unghiurĭ sînt ast-fel că laturile unuia sînt paralele respectiv cu laturile celuialalt, atuncĭ acele unghiurĭ sînt egale saŭ suplementare.*

Să ni dăm un unghiu DOE, şi să comparăm cu el cele patru unghıurĭ formate în jurul unuĭ punct C, de doă liniĭ drepte AA', BB', paralele respectiv cu laturile OD şi OE a-le unghiuluĭ dat.



1°. Unghiurile ACB şi DOE care videm că'şĭ aŭ laturile lor *paralele şi îndreptate în acelaşĭ senz*, ḑic că sînt egale între ele. In adevăr, fie I punctul de întîlnire al drepteĭ BB' cu OD, unghiurile ACB şi DIB sînt egale ca corespondente, formate de paralelele A'A, OD tăete de secanta BB', (§. 41); apoĭ unghiurile DIB şi DOE sînt egale iarăşĭ ca corespondente formate de paralelele BB', OE tăete de secanta OD; prin urmare unghiurile ACB şi DOE sînt egale între ele.

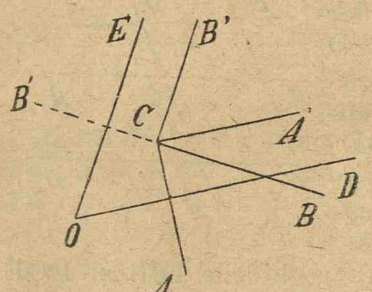
2° Unghiurile A'CB' şi DOE, care videm că'şĭ aŭ laturile lor *paralele şi îndreptate în senzurĭ contrare*, ḑic că sînt egale între ele; căcĭ unghiul A'CB' este egal cu unghiul ACB ca opuse la vîrf; unghiul ACB am văzut dineoare că este egal cu DOE; prin urmare unghiul A'CB' este egal cu unghiul DOE.

3°. Unghiurile ACB' şi DOE, care videm că aŭ laturile CA şi OD *paralele şi de acelaşĭ senz*, iar laturile CB' şi OE *paralele şi de senz contrar*, ḑic că sînt suplementare; căcĭ unghiul ACB' este suplementul unghiuluĭ ACB, şi acest din urmă am văzut că este egal cu unghiul DOE; prin urmare ACB' va fi suplement şi unghiuluĭ DOE.

44. **Observaţiune**.— Observăm că doă unghiurĭ cu laturĭ paralele, sînt egale dacă sînt de acelaşĭ fel adică saŭ amăndoă ascuţite sau amăndoă obtuze, şi sînt suplementare în caz contrar.

45. TEOREMĂ. — *Doă unghiurĭ a căror laturĭ, saŭ prelungirile lor, sînt respectiv perpendiculare una pe alta, sînt egale saŭ suplementare.*

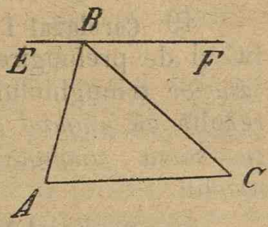
Să luăm unghiurile DOE şi ACB astfel ca laturea AC să fie perpendiculară pe laturea OD şi laturea CB prelungită în senz opus, adică CB, să fie perpendiculară pe OE; dic că aceste doă unghiurĭ sînt egale saŭ suplementare. Să invîrtim unghiul ACB în jurul luĭ C de un unghiŭ drept; laturea CA va lua o poziţiune CA′ perpendiculară pe CA şi prin urmare paralelă cu OD, iar laturea CB va lua o poziţiune CB′ perpendiculară pe CB şi prin urmare paralelă cu OE; avem unghiul ACB egal cu A′CB′, şi acest din urmă avînd laturile paralele cu ale unghuluĭ DOE, rezultă că acest din urmă va fi egal saŭ suplementar (§. 43) cu unghiul ACB.



46. *Observaţiune.* — Doă unghiurĭ ce'şĭ aŭ laturile lor perpendiculare respectiv una pe alta, se observă că sînt egale, dacă amăndoă sînt în acelaşĭ timp ascuţite saŭ obtuze, şi sînt suplementare dacă unul este ascuţit şi celalalt obtuz.

47. TEOREMĂ. — *Intr'un triunghiu oare-care, suma celor treĭ unghiurĭ este egală cu doă unghiurĭ drepte.*

Fie triunghiul ABC; duc prin unul din vîrfurĭ, d. e. B, paralela cu laturea opusă AC; avem în partea dreptei despre triunghiu, treĭ unghiurĭ şi anume: unghiul EBA, unghiul ABC şi unghiul CBF; însă: *unghiu EBA = unghiu BAC* ca alterne-interne, în privirea paralelelor EF, AC tăete de secanta AB; *unghiu FBC = unghiu BCA* ca alterne-interne, în privirea aceloraşĭ paralele tăete de secanta BC; aşa dar suma celor treĭ unghiurĭ a-le triunghiuluĭ adică:



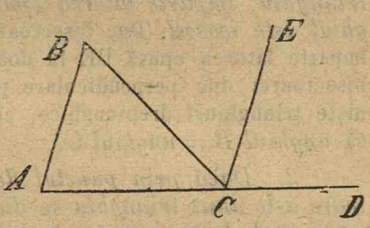
unghiu BAC + unghiu ABC + unghiu BCA,

este egală cu suma

unghiu EBA + unghiu ABC + unghiu FBC;

însă suma din urmă este egală cu 2 unghiurĭ drepte. fiind că sînt de aceiaşĭ parte a drepteĭ EF în jurul punctuluĭ B (§. 12): aşa dar şi suma celor treĭ unghiurĭ a-le triunghiuluĭ este egală cu doă unghiurĭ drepte.

48. *Altfel.* Prin vîrful C duc CE paralelă cu laturea opusă AB şi prelungesc laturea AC. Unghiurile ABC şi BCE sînt egale ca alterne-interne în privirea paralelelor AB, CE tăete de secanta BC: unghiurile BAC şi ECD sînt egale ca corespondente în privirea aceloraşĭ paralele tăete de secanta AD. Aşa dar suma celor treĭ unghiurĭ a-le triunghiuluĭ:



unghiu CAB + unghiu ABC + unghiu BCA

este egală cu suma celor treĭ unghiurĭ adiacente:

unghiu ACB + unghiu BCE + unghiu CED

formate de aceiaşĭ parte a drepteĭ AD şi prin urmare egală cu 2 unghiurĭ drepte (§. 12).

49. **Corolarul I**. Unghiul BCD, format de o lature BC şi de prelungirea uneĭ alteia, se numeşte *unghiu exterior* triunghiuluĭ. Din demonstraţiunea precedentă rezultă că *unghiul exterior al unuĭ triunghiu, este egală cu suma unghiurilor interioare neadiacente aceluĭ unghiu.*

50. **Corolarul II** Un unghiu al triunghiuluĭ este suplementul sumeĭ celorlalte doă unghiurĭ. Prin urmare: *Dacă doă unghiurĭ a-le unuĭ triunghiu sînt egale respectiv cu doă unghiurĭ a-le unuĭ alt triunghiu şi al treilea unghiu a triunghiuluĭ întăĭ este egal cu al treilea unghiu al triunghiuluĭ al doilea.*

51. **Corolarul III.** *Un triunghiu nu poate ave maĭ mult de un unghiu drept saŭ obtuz; în acest caz, celelalte doă unghiurĭ a-le triunghiuluĭ sînt ascuţite.—Unghiurile ascuţite a-le triunghiuluĭ dreptunghic sînt complementare.*

52. **Exerciţiĭ.**—*1. Dacă bisectoarea unuĭ unghiu în un triunghiu, împarte laturea opusă în doă părţĭ egale, triunghiul este isoscel.* Duc bisectoara unghiuluĭ A care presupun că împarte laturea opusă BE în doă părţĭ egale ; din piciorul D al bisectoareĭ duc perpendiculare pe laturile opuse, se formează nişte triunghiurĭ dreptunghice, cu ajutorul cărora se arată uşor că *unghiul B = unghiul C.*

2. Dacă prin punctul de întîlnire a celor treĭ bisectoare a-le unuĭ triunghiu se duce paralela cu una din laturĭ, segmentul de pe această paralelă cuprins între celelalte doă laturĭ a triunghiuluĭ, este egal cu suma segmentelor de pe aceste doă laturĭ cuprinse între cele doă paralele. Fie ABC triunghiul, O punctul de intersecţiune al bisectoarelor, DE paralela dusă prin O la AC ; se formează triunghiurile ADO şi CEO isoscele din cauza egalităţeĭ unghiurilor DOA cu OAC şi EOC cu OCA.

3. Dacă prin vîrfurile unuĭ triunghiu se duc paralele *cu laturile opuse, aceste paralele formează un triunghiu care'i de patru orĭ maĭ mare de cât triunghiul dat.* Fiind că în interiorul acelor paralele se formează pe lăngă tiunghiul dat încă treĭ triunghiurĭ egale între ele şi egale cu triunghiul dat.

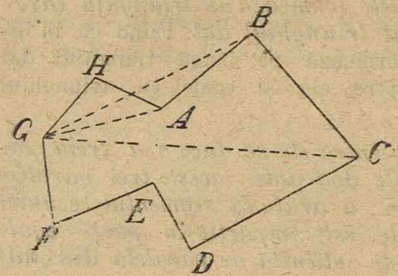
4. *Se daŭ doă paralele; între ele se duce o a treia paralelă la egală distanţă de cele doă date; aceste treĭ paralele se taie de o secantă oare-care; a arăta ca segmentul secanteĭ cuprins între cele doă paralele, este împărţit în părţi egale de punctul în care secanta este întîlnită de paralela din mijloc.* Prin acest punct de întîlnire se duce perpendiculara pe paralele; se formează doă triunghiurĭ dreptunghice, din care rezultă ceia ce se cere.

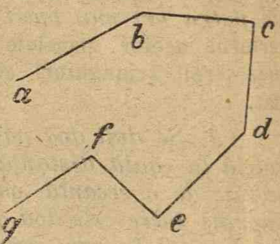
5. *Perpendicularele duse din vîrfurile unuĭ triunghiu pe laturile opuse se întîlnesc în un acelaşĭ punct.* Aceasta se demonstrează cu ajutorul problemeĭ anteprecedente; căcĭ dacă se formează triunghiul despre care este vorba acolo, atuncĭ perpendicularele în chestiune trec prin mijlocul laturilor acestuĭ triunghiu mare şi că ast-fel trebue să se întîlnească în un punct, (§. 36. 7.5).

CAPITULUL IV.

POLIGOANE.

53. **Definiţiunĭ.**—O figură compusă din segmente de linie dreaptă carĭ se ţin unul de altul se numeşte *poligon*; d. e. ABCDEFGH saŭ *abcdefg*. Segmentele din care se compun poligonul sînt *laturile* luĭ; punctele de intersecţiune ale laturilor, doă căte doă, sînt *virfu-*





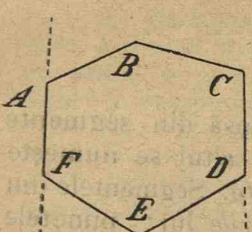
rile poligonuluĭ ; fie-care din unghiurile formate de doă laturĭ consecutive este un *unghiu* de-a poligonuluĭ ; linia dreaptă care uneşte doă vîrfurĭ neconsecutive, este o *diăgonala* a poligonuluĭ ; ast-fel sînt dreptele GA, GB, GC...

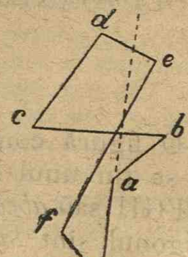
Suma laturilor unuĭ poligon se numeşte *perimetrul* luĭ.

54. Dacă un poligon este ast-fel că ultima lature se termină în punctul în care începe întâia, atuncĭ avem un *poligon închis* saŭ un poligon propriŭ ḑis, precum este poligonul ABCDEFGH ; în caz contrar avem un poligon deschis saŭ o linie frăntă precum este *abcdefg*.

Orĭ-care din laturile unuĭ poligon poate fi considerată ca întăia ; cănd însă am ales una ca întăia, rangul celorlalte este hotărît.

55. Poligoanele se deosebesc în poligoane *convexe* şi *concave*.





Un poligon se ḑice că este *convex* atuncĭ, cănd prelungindu-se, una orĭ-care din laturile luĭ, în amăndoă senzurile, poligonul se aflà cu totul de aceiaşĭ parte a aceleĭ laturĭ ; ast-fel este poligonul ABCDEF în care videm că dacă prelungim d. e. pe AF, saŭ pe CD, tot poligonul rămăne de o parte: iar poligonul *abcdefg* este concav, căcĭ videm că dacă prelungim pe *ga*, o porţiune a poligonuluĭ rămăne de o parte a drepteĭ şi altă porţiune de ceialaltă parte.

Poligoanele convexe se deosebesc în *regulate* şi *neregulate*. Un poligon se zice că este *regulat* atuncĭ cănd laturile luĭ sînt egale între ele şi unghiurile luĭ sînt iarăşĭ egale între ele; în caz contrar poligonul este *neregulat*.

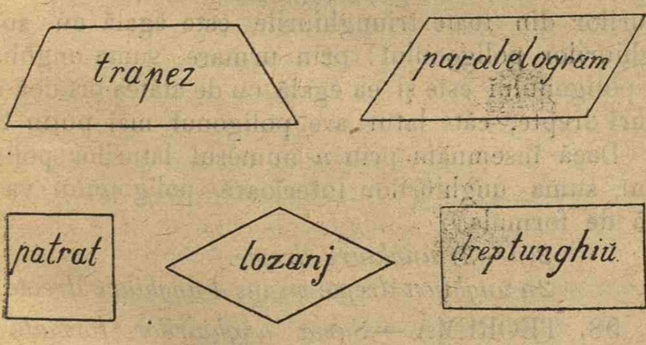
Vom reveni maĭ tărziŭ asupra poligoanelor regulate.

56. Cel maĭ simplu poligon este *triunghiul*. Ne-am ocupat de triunghiŭ în capitulile precedente.

După triunghiŭ, vine *patrulaterul* adică poligon cu patru laturĭ.

Un patrulater cu doă laturĭ paralele se numeşte *trapez*.

Un patrulater al căruĭ laturĭ sînt paralele doă căte doă, se numeşte *paralelogram*.

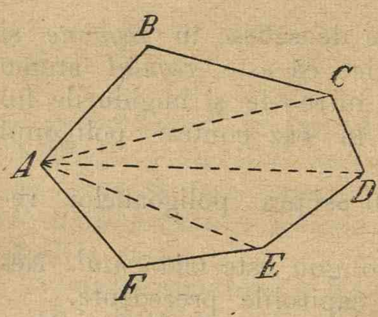


Un paralelogram a căruĭ unghiurĭ sînt fie-care egale cu un unghiu drept, se numeşte *dreptunghiŭ*.

Un dreptunghiŭ cu laturĭ egale între ele, se numeşte *patrat*.

Un paralelogram a căruĭ laturĭ sînt egale între ele se numeşte *lozanj* saŭ *romb*.

57. TEOREMĂ.—*Suma unghiurilor interioare ale unuĭ poligon convex, este egala cu de atătea-orĭ doă unghiurĭ drepte căte laturĭ are poligonul maĭ puţin doă.*



Unesc unul din vîrfurile poligonuluĭ, d. e. A, cu toate celelalte: se formează nişte triunghiurĭ cari aŭ un vîrf comun în A şi a căror baze sînt toate laturĭ de-a poligonuluĭ, afară de cele doă ce trec prin A; aşa dar sînt atătea triunghiurĭ căte laturĭ are poligonul, maĭ puţin 2. In fie-care triunghiu suma unghiurilor ştim că este egală cu doă unghiurĭ drepte (§. 48) şi prin urmare suma totală a unghiurilor din toate triunghiurile, va fi egală cu de atătea orĭ doă unghiurĭ drepte căte laturĭ sînt, maĭ puţin 2. Se maĭ vede că suma unghiurilor din toate triunghiurile este egală cu suma unghiurilor poligonuluĭ: prin urmare, suma unghiurilor poligonuluĭ este şi ea egală cu de atătea orĭ doă unghiurĭ drepte, căte laturĭ are poligonul maĭ puţin 2.

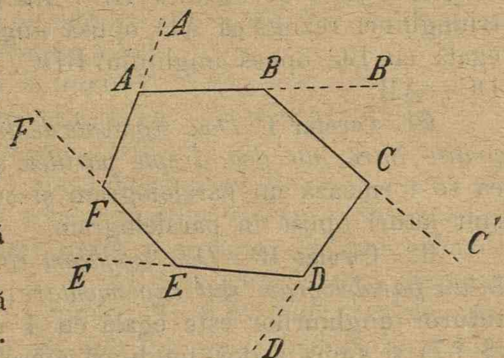
Dacă însemnăm prin n numĕrul laturilor poligonuluĭ, suma unghiurilor interioare poligonuluĭ va fi dată de formula

$2(n-2)$ *unghiurĭ drepte,*

saŭ $2n$ *unghiurĭ drepte minus 4 unghiurĭ drepte.*

58. TEOREMĂ.—*Suma unghiurilor, formate în exteriorul unuĭ poligon convex prin prelungirea laturilor luĭ în acelaşĭ senz, este egală cu patru unghiurĭ drepte, orĭ-căte laturĭ ar avea poligonul.* Fie poligonul

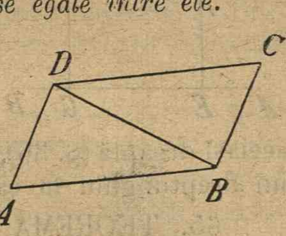
convex ABCDEF de n laturĭ, pe carĭ le-am prelungit în senzul AB, BC, CD...... Fie-care vîrf a poligonuluĭ este vîrful unuĭ unghiu interior și a unuĭ unghiu exterior poligonuluĭ, și amândoă aceste unghiurĭ fac la un loc doă unghiurĭ drepte. Prin urmare suma tuturor unghiurilor interioare și exterioare va fi egală cu $2n$ *unghiurĭ drepte*; dacă din această sumă scădem suma uughiurilor interioare care am văzut că este $2n—4$ *unghiurĭ drepte*, ni rămâne just 4 *unghiurĭ drepte.*



59. **Corolar.** Un poligon convex nu are maĭ mult de treĭ unghiurĭ interne ascuțite, căcĭ nu poate ave maĭ mult de treĭ unghiurĭ externe obtuze.

60. Orĭ-ce paralelogram are: *1°. unghiurile opuse egale între ele; 2°. laturile opuse egale între ele.*

1°. Unghiurile opuse DAB și DCB sînt egale, căcĭ 'șĭ aŭ laturile respectiv paralele doă câte doă și de senzurĭ contrare (§. 44); tot pentru aceia și unghiurile ADC și ABC sînt egale între ele.



2°. Să ducem diagnola DB; ni s'aŭ format doă triunghiurĭ BAD, DCB carĭ sînt egale între ele, pentru că aŭ laturea DB comună, unghiurile BDC și DBA egale între ele ca alterne-interne, formate de paralelele DC, AB tăete de secanta DB; unghiurile ADB și DBC egale iarăşĭ ca alterne-interne formate de paralelele AD, BC tăete de secanta DB ; din egalitatea acestor triunghiurĭ rezultă că AD, opusă unghiuluĭ DBA, este egală cu BC opusă unghiuluĭ BDC, şi de asemene DC=AB.

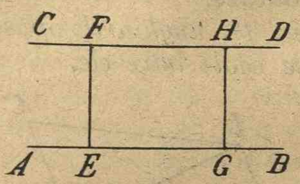
61. **Corolar I** *Doă segmente de drepte paralele, cuprinse între alte doă drepte paralele sînt egale ;* pentru că se formează un paralelogram şi cele doă segmente sînt laturĭ opuse în paralelogram.

62. **Corolar II.**—*Doă unghiurĭ consecutive interne, în un paralelogram sînt suplementare*; pentru că suma tuturor unghiurilor este egală cu 4 unghiurĭ drepte, (§. 57) şi suma a doă unghiurĭ consecutive este jumătate din suma totală a unghiurilor.

63. **Corolar III.** *Dacă unul din unghiurile unuĭ paralelogram este un unghiu drept, atuncĭ fie-care din celelalte treĭ unghiurĭ este drept, şi figura este un dreptunghiu.*

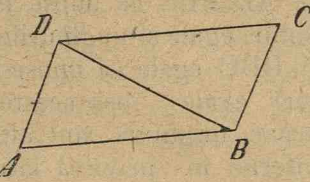
64. *Distanţa dintre doă paralele este peste tot locul aceiaşĭ.*

Această distanţă este dată de lungimea perpendicularei dusă din un punct al uneia din paralele la ceialaltă. Fie AB, CD doă paralele ; EF şi GH doă perpendiculare duse din E şi G pe CD ; aceste drepte vor fi paralele ca fiind perpendiculare la aceiaşĭ dreaptă (§. 36), şi prin urmare figura EFHG este un dreptunghiu în care avem EF=GH.



65. TEOREMĂ.—*Dacă un patrulater este ast-fel că unghiurile luĭ interne opuse sînt egale între ele, saŭ laturile luĭ opuse sînt egale între ele, atuncĭ patrulaterul este un paralelogram.*

1°. Fie *unghiu ADC= unghiuABC= și unghiuDAB:=unghiu DCB:* dic că figura este un paralelogram. Suma tuturor unghiurilor fiind egală cu 4 unghiri drepte din ipoteză rezultă că *unghiuBAD+unghiuADC*



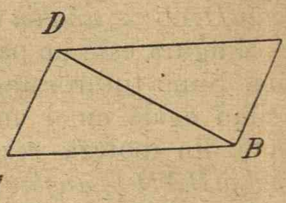
= 2 ungh.drept; adică unghiurile din A și D sînt suplementare: însă aceste unghiurĭ sînt între laturile DC și AB și de aceiașĭ parte a secanteĭ AD prin urmare (§. 42.) dreptele DC și AB sînt paralele; tot asemene se va vide că și dreptele AD și BC sînt paralele; patrulaterul are dar laturile luĭ opuse paralele doă câte doă, prin urmare este un paralelogram.

2°. Fie AB=CD și AD=BC: dic că figura este un paralelogram. Duc diagonala DB și formez triunuhiurile ABD și DCB care sînt egale intre ele pentru că aŭ toate laturile lor egale una cu alta; din aceasta rezultă că unghiurile BDC și DBA sînt egale intre ele, și aceste unghiurĭ videm că sînt alterne-interne în privirea greptelor AB, DC tăete de secanta BD, prin urmare aceste drepte AB, DC sînt paralele între ele (§. 43); de asemene din cauza egalităţeĭ celor doă triunghiurĭ rezultă egalitatea unghiurilor ADB și DBC și prin urmare sînt paralele dreptele AD, BC. Așa dar figura este un paralelogram.

66. **Corolar.** —*Lozanjul este un paralelogram* fiind că este un patrulater cu laturĭ opuse egale între ele.

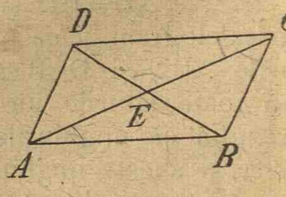
67. TÉOREMĂ. — *Un patrulater care are doă laturĭ opuse paralele și egale între ele, este un paralelogram.*

Fie patrulaterul ABCD în care să avem AB=DC și AB || DC. Duc diagonala DB, și formez astfel doă triunghiurĭ ADB și BDC egale ca avînd unghiul BDC egal cu DBA ca alterne-interne, apoĭ laturea DB li este comună şi AB=BC prin ipoteză; din aceasta rezultă că AD=BC că oupse la unghiurĭ egale şi unghiŭrile ADB şi DBC egale ca opuse la laturĭ egale; însă aceste din urmă unghiurĭ sînt alterne-interne în privirea laturilor AD şi BC tăete de secanta DB, şi fiind că unghiurile sînt egale, rezultă că laturile sînt paralele Prin urmare figura este nn paralelogram.



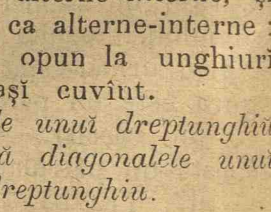
68. TEOREMA. — *In un paralelogram, diagonalele se taie mutual în doă părțĭ egale.*

Fie paralelogramul ABCD, în care ducem diagonalele AC, DB; se formează mai multe triunghiurĭ, din cari considerăm doă şi anume AEB şi DEC; aceste triunghiurĭ sînt egale intre ele fiind că aŭ laturile AB şi DC egale între ele ca laturĭ opuse a le paralelogramuluĭ, unghiurile EDC, şi EAB egale ca alterne interne, şi unghiurile ECD, EAB egale iarăşĭ ca alterne-interne: prin urmare ED=EB fiind că se opun la unghiurĭ egale, şi EC=EA tot pentru acelaşĭ cuvînt.



69. TEOREMĂ. — *Diagonalele unuĭ dreptunghiŭ sînt egale între ele, şi reciproc dacă diagonalele unuĭ paralelogram sînt egale atuncĭ e dreptunghiŭ.*

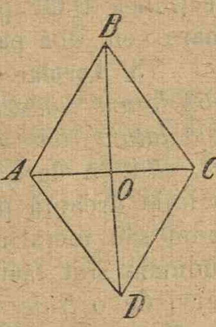
1°. Triunghiurile dreptunghice DAB şi CAB, sînt egale între ele fiind că aŭ o latura comună AB, şi laturile AD şi BC egale între ele; prin urmare ipotenuzele lor AC, BD, care sînt diagonalele dreptunghiuluĭ, sînt egale între ele.



2°. Dacă presupunem AC=BD, atuncĭ triunghiurile DAB și CBA sînt egale fiind că aŭ trustrele laturile lor egale între ele; rezultă că unghiurile DAB și CBA sînt egale între ele, ca opuse la laturĭ egale; însă aceste unghiurĭ sînt suplementare (§. 63) prin urmare fie-care din ele este egal cu un unghiu drept, și figura este un dreptunghiu.

70. TEOREMĂ. — *In un lozanj, diagonalele sînt perpendiculare între ele, și reciproc un paralelogram cu diagonalele perpendiculare una pe alta este un lozanj.*

1°. Fie lozanjul ABCD: triunghiul ABC este isoscel, O este mijlocul bazeĭ AC, prin urmare BO este perpendiculară pe AC; așa dar diagonalele BD și AC sînt perpendiculare una pe alta



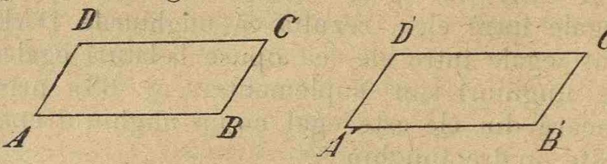
2°. Să presupunem că diagonalele paralelogramuluĭ ABCD sînt perpendiculare între ele: dic că paralelogramul este un lozanj. Laturile consecutive AB, BC sînt egale ca oblice duse din un punct B al perpendicularei BO la punctele A și C, egal depărtate de piciorul perpendicularei; de asemene BC=CD, CD=DA, DA=AB; așa dar figura este un lozanj.

71. **Corolar.**—*Diagonalele unuĭ patrat se taie în parțĭ egale, sînt egale între ele și perpendiculare una pe alta;* fiind-că patratul este și dreptunghiu și lozanj.

72. TEOREMĂ.—*Dacă doă paralelograme sînt ast-fel că doă laturĭ consecutive a-le unuia, sînt egale respectiv cu doă laturĭ consecutive a-le celuialalt, și unghiurile cuprinse de acele laturĭ sînt egale între ele, atuncĭ paralelogramele sînt egale între ele.*

Fie ABCD și A′B′C′D′ doă paralelograme avînd laturile AB, AD egale respectiv cu laturile A′B′, A′D′.

şi unghiul A egal cu A′; ḑic că aceste doă paralelograme sînt egale.



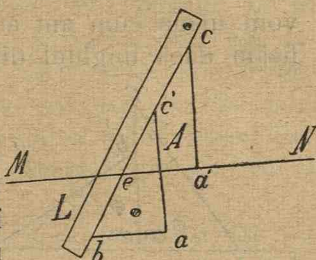
In adevăr, aplic paralelogramul ABCD peste paralelogramul A′B′C′D′, aşa că laturile AB, A′B′ să coincidă. Find că unghiurile A şi A′ sînt egale, laturea AD se va aplica exact pe A′D′, şi punctul D va veni în D′; laturea DC paralelă cu AB, va lua direcţiunea B′C′: punctul C va veni just în C′: prin urmare cele doă paralelograme vor coincide.

73. **Corolar.**—*Doă dreptunghiurĭ sînt egale, dacă doă laturĭ consecutive a-le unuia sînt respectiv egale cu doă laturĭ consecutive ale celuialalt.*

74. **A duce o linie dreaptă pe hărtie.** Pentru a duce o linie dreaptă pe hărtie, ne servim de o vergea de lemn saŭ metal numită *linie*, ale căreĭ marginĭ longitudinale sînt tăete în linie dreaptă. Inainte de a ne servi de o *linie*, trebue maĭ întăĭ să ne încredinţăm dacă marginea longitudinală este tăetă exact în linie dreaptă; pentru aceasta procedăm cum urmează: se pune linia pe hărtie şi cu un creion bine ascuţit se duce o trăsătură urmănd exact marginea linieĭ şi se însamnă doă puncte A, B pe trăsătură; se întoarce de ceia parte a trăsătureĭ, aşezăndu-se aşa ca aceiaşĭ margine să treacă prin punctele A şi B şi iarăşĭ se duce o trăsătură cu creionul. Dacă această a doa trăsătură coincide cu cea dintăĭ, atuncĭ linia este bună.

Se maĭ poate verifica şi alt-fel: după ce am dus trăsătura întăia pe care am însemnat punctele A şi B, lunec linia pe hărtie, în direcţiunea trăsătureĭ sprijinindu-se necontenit pe punctele A şi B, şi în o altă poziţiune a linieĭ duc trăsătura cu creionul. Dacă aceasta a doa trăsătură coincide exact cu întâia, atuncĭ linia este bună.

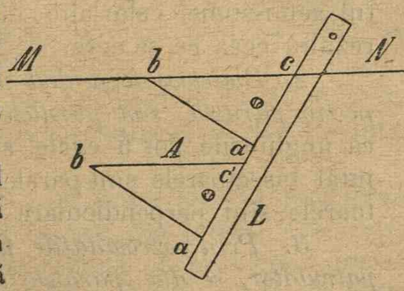
75. **A duce pe hârtie o perpendiculară la o dreaptă.** Pentru a duce pe hârtie o perpendiculară la o dreaptă ne servim de *echer*, care este o linie în formă de triunghiu dreptunghic, a-le căruĭ laturĭ sînt tăiete exact în linie dreaptă. Fie să ducem perpendiculara prin A la dreapta MN. Aşez echerul pe hârtie astfel ca una din laturile unghiuluĭ drept, d. e. *ab*, să coincidă cu dreapta MN; apoĭ, apăsând cu



mâna dreaptă echerul pe hârtie pentru ca să nu lunece, cu mâna stângă aplicăm o linie L pe ipotenuza echeruluĭ; în fine apăsăm cu mâna stângă pe linia L ca să nu se mişte, facem să lunece echerul cu ipotenuza pe linie până ce laturea sa va trece prin punctul A; în această poziţiune ducem o trăsătură cu creionul, ea va fi perpendiculară căutată.

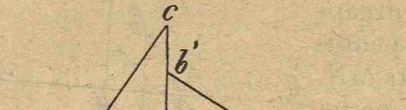
Vom vide maĭ la vale un alt mod precis de a duce o perpendiculară

76. **A duce pe hârtie o paralelă cu o dreaptă.** Să ducem prin punctul A paralela la dreapta MN. Aşez echerul astfel ca una din laturile luĭ, d. e. ipotenuza *bc*. să coincidă cu dreapta MN; apăs pe echer şi pe marginea luĭ *ac* aplic o linie L; fixez apoĭ această linie cu mâna. şi lunec echerul de-a lungul linieĭ până ce laturea *bc* trece prin punctul A; în această



poziţiune, duc o trăsătură cu creionul ; aceasta va fi paralela căutată,

77 **Verificarea echeruluĭ**—Pentru a ne încredinţa că laturile echeruluĭ sînt tăiete exact în liniĭ drepte vom urma cum am arătat la §. 74. Rămăne să verificăm dacă unghiul din a este drept.



Pe marginea uneĭ liniĭ L, aplic una din laturile echeruluĭ d e. ab, şi duc o trăsătură pe ac; apoĭ fără a schimba faţa care era pe hărtie, aduc echerul ast-fel ca ceialaltă lature cu vîrful a' să coincidă cu a şi laturea $a'c'$ să se aplice pe marginea linieĭ; în această poziţiune duc o trăsătura de-a lungul latureĭ $a'b'$; dacă această din urmă trăsătură coincide cu cea dintăĭ, atuncĭ unghiul din a este drept.

78. **Exerciţiĭ şi probleme.**—1. *Bisectoarele unghiurilor unuĭ patrulater convex, formează un alt patrulater a căruĭ unghiurĭ opuse sînt suplementare.* Făcînd figura se vede uşor că unghiul a doă bisectoare consecutive, este suplementul semi-sumeĭ unghiurilor respective a-le patrulateruluĭ ; şi semi-suma a doă unghiurĭ consecutive de-a patrulateruluĭ este suplementul semi-sumeĭ celorlalte doă unghiurĭ ; din aceasta rezultă ceea ce se cere.

2. *Bisectoarele a doă unghiurĭ cu laturile respecpectiv paralele, sînt paralele saŭ perpendiculare* pentru că unghiurile pot fi egale saŭ suplementare ; în cazul întăĭ bisectoarele sînt paralele,. în cazul al doilea bisectoarele sînt perpendiculare între ele.

3. *Prin extremităţile fie-căreĭ diagonale a unuĭ patrulater, se duc paralele la ceialaltă diagonală ; se formează astfel un paralelogram de doă orĭ maĭ mare*

de cat patrulaterul. Făcîndu-se figura se formează opt triunghiurĭ egale doă căte doă, din care rezultă ceia ce se cere.

4. *Orĭ-ce dreaptă care trece prin punctul de intersecțiune a diagonalelor unuĭ paralelogram, este împărțită de acest punct în doă părțĭ egale, și paralelogramul este împărțit prin acea dreaptă în doă părțĭ egale.* Aceasta rezultă din egalitatea a doă triunghiurĭ ce se formează ducăndu-se o dreaptă prin punctul de intersecțiune al diagonalelor.

5 *Diagonalele a doă paralelograme înscrise unul în altul, adică astfel ca vîrfurile unuia să fie pe laturile altuia, trec prin un acelașĭ punct.* Fie ABCD un paralelogram înscris în paralelogramul EFGH şi O punctul de intersecţiune a diagonalelor EG, HF; diagonalele AC, BD trebuind să se împartă mutual în părţĭ egale, tot odată fiind nişte drepte cuprinse între laturile paralelogramuluĭ EFGH în virtutea Teoremeĭ precedente, ele nu se pot tăie de căt în punctul O.

6. *Suma distanțelor unuĭ punct de pe baza unuĭ triunghiu isoscel la cele doă laturĭ este constantă.*

Fie K un punct luat pe baza BC a unuĭ triunghiu isoscel, KL şi KM perpendicularele duse din K pe AC şi BC; duc prin K paralela cu BA, şi prin C perpendiculara CI pe BA. Se formează un dreptunghiu şi un alt triunghiu isoscel, în care uşor se vede că KL+KM este egal cu CI.

Dacă punctul să ie pe prelungirea bazeĭ, d. e. la stănga luĭ B, atuncĭ diferenţa între acele doă distanţe este egală cu CI.

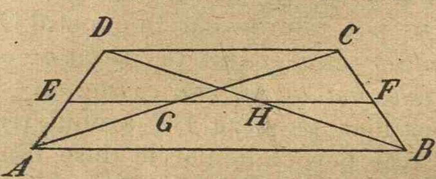
7. *Suma distanțelor unuĭ punct luat în interiorul unuĭ triunghiu ecvilateral la cele treĭ laturĭ, este constantă.* Demonstrațiunea se razimă pe problema precedentă. Se găseşte că suma căutată este egală cu înălţimea triunghiuluĭ.

Dacă punctul este exterior, atuncĭ una din distanţe trebue scăzută din suma celorlalte doă şi rezultatul este egal tot cu înălţimea triunghiuluĭ.

8. Dreapta care uneşte mijolcurile a doă laturĭ a-le unuĭ triunghiu, este paralelă cu laturea a treia şi egală cu jumatatea din ea.

Fie ABC triunghiul: prin mijlocul D al latureĭ AB duc DE paralelă cu BC, prin E duc EF paralelă cu AB: se formează triunghiurile ADE şi EFB care este uşor de vădut că sînt egale şi din ele rezultă AE=EC şi apoĭ DE=BE.

9. Dacă unim mijlocurile laturilor neparalele ale unuĭ trapez, avem: 1°. această dreaptă este paralelă cu celelalte doă laturĭ ale trapezuluĭ şi trece prin mijlocurile diagonatelor luĭ; 2°. segmentul aceşteĭ drepte, cuprins între laturile neparalele, este egal cu semi-suma laturilor paralele, şi segmentul cuprins între cele doă diagonale este egal cu semi-diferenţa acelor laturĭ.



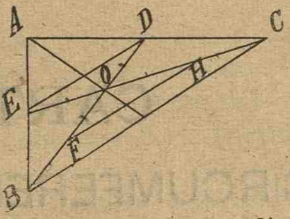
Fie trapezul ABCD; 1°. Prin mijlocul E al latureĭ AD duc paralela EF la AB şi DC; aplicănd Teorema precedentă la triunghiurile ADC, ADB şi DBC. rezultă că G, H, G sînt respectiv în mijlocul dreptelor AC, BD şi BC.

2°. Avem apoĭ $EG=\frac{DC}{2}=HF$ şi $EH=\frac{AB}{2}=GF$; prin urmare

$$EF=EG+GF=\frac{AB+DC}{2}, GH=EH-EG=\frac{AB-CD}{2}.$$

10. Medianele unuĭ triunghiu se întînlesc în un acelaşĭ punct. Se numeşte *mediană* în un triunghiu, dreapta care uneşte un vîrf cu mijlocul latureĭ opuse.

Fie BD şi CE doă mediane, O punctul lor de intersecţiune; să luăm mijlocurile F şi H a bucăţilor de mediane OB şi OC: ED şi FH sînt paralele cu BC şi fac căt jumatate din BC; aşa dar figura EDHF este un paralelogram; OD este jumătate din BO şi o treime din BD. Aşa dar medianele trec prin punctul O, care se găseşte la o treime din lungimea fie-căreia cu începere de la laturĭ.



Punctul O se numeşte *centru de gravitate* a triunghiuluĭ AB.

CARTEA II.

CIRCUMFERENTA DE CERC

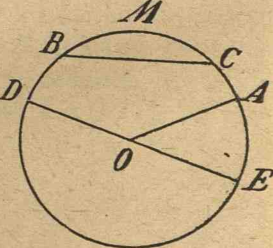
CAPITULUL I

CIRCUMFERENȚĂ, ARCURÏ, COARDE.

79. **Definițiunï.**—*Circumferența este locul geometric al punctelor din plan carĭ se află la aceiașĭ distanță de la un acelașĭ punct, numit* **centru.**

Porțiunea de plan limitată de circumferență se numește **cerc.**

Dreapta care unește centrul cu un punct A al circumferențeĭ se numește *radă*; din definițiunea circumferențeĭ rezultă că toate radele uneĭ circumferențe sînt egale între ele. Orĭ-ce punct exterior circumferențeĭ este la o distanță de la centrul eĭ, maĭ mare de căt rada; orĭ-ce punct interior este la o distanță de la centru maĭ mică de căt rada.



O porțiune de circumferență cum este BMC se numește *arc*; dreapta care unește capetele unuĭ arc se nnmește *coarda*. La orĭ-ce arc corespunde o coardă, și se ḑice că o coardă *sub-întinde* arcul corespunḑetor, şi că arcul este *sub-întins* de coarda corespunḑĕtoare.

Porţiunea de plan cuprinsă între un arc şi coarda corespunḑetoare, se numeşte *segment* de cerc.

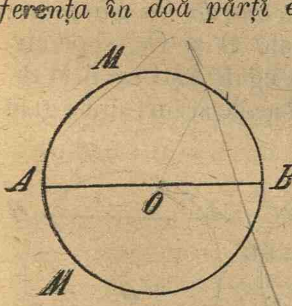
Porţiunea de plan cuprinsă între între doă raḑe şi arcul cuprins între ele, se numeşte *sector* ; porţiunea AOE este un sector cercular.

Orĭ-ce coardă ce trece prîn centru este un *diametru* ale circumferenţeĭ ; DE este un diametru Toţĭ diametriĭ sînt egalĭ între iĭ, fiind-că fie-care face căt doă raḑe.

Doă arcurĭ de aceiaşĭ raḑă sînt *egale* dacă se pot suprapue.

80. TEOREMĂ.—*O linie dreaptă nu poate întîlni o circonferenţă în maĭ mult de doă puncte,* fiind că din centru se pot duce la o dreaptă numaĭ doă oblice egale cu raḑa.

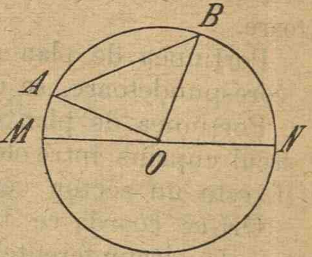
81. TEOREMĂ.—*Orĭ-ce diametru, împarte circumferenţa în doă părţĭ egale.*



Fie AB un diametru; întorc partea AMB a figureĭ în jurul diametruluĭ AB, pentru a o abate peste partea AM'B. Un punct oare-care M a arculuĭ AMB are să se aşeḑe pe arcul AM'B pentru că el trebue să rămănă la aceiaşĭ distanţă de centru ; prin urmare toate punctele arculuĭ AMB, adică însuşĭ întreg acest arc, va coincide cu arcul AM'B, de unde rezultă că diametrul AB împarte circumferenţa şi cercul în doă prăţĭ egale.

82. TEOREMĂ.— *Diametrul este cea maĭ mare coardă posibilă.*

Fie MN un diametru şi AB o coardă care nu trece prin centru. Duc raḑele AO,BO ; linia frăntă AO+OB este maĭ mare de căt linia dreaptă AB ; însă AO+OB este suma a doă raḑe, şi prin urmare egală cu diametrul MN : aşa dar diametrul MN este maĭ mare de căt coarda AB.

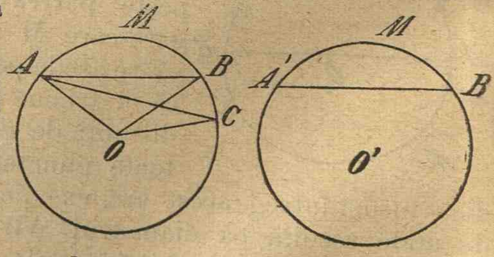


Observaţiune.—O coardă care nu trece prin centru, împarte circumferenţa în doă arcurĭ neegale, unul maĭ mic de căt o semi-circumferenţă, şi celalalt maĭ mare: ea sub-întinde pe amăndoă aceste arcurĭ : de ordinar se consideră ca arc sub-întins coardeĭ, cel maĭ mic din aceste arcurĭ.

83. TEOREMĂ.—*In acelaşĭ cerc, saŭ în cercurĭ egale 1°. doă arcurĭ egale sînt sub-întinse de coarde egale ; 2°. doă arcurĭ neegale şi maĭ micĭ fie-care de căt o semi-circumferenţă, sînt sub-întinse de coarde neegale ; arcul cel maĭ mare este sub-întins de coarda cea maĭ mare:*

1°. Să luăm doă cercurĭ egale O şi O', şi pe circumferenţele lor să luăm arcurile egale AMB şi A'M'B', coardele AB şi A'B' carĭ sub-întind acele arcurĭ sînt egale

In adivăr, să punem cercul O peste egalul seŭ O', aşa ca centrul O să cadă în O': ambele cercurĭ vor coincide. Să învărtim cercul O' în jurul punctuluĭ O aşa ca să aducem A' peste A ; atuncĭ cercurile coincidănd arcul A'B se va aplica exact peste egalul seŭ arc AB, punctul B' va căde tocma în B, şi prin urmare coarda A'B' va coincide cu coarda AB. Aşa dar cele doă coarde sînt egale.



2° Tot in figura aceasta, să luăm în cercul O arcul AMC maĭ mare de căt A'M'B' şi maĭ mic de căt o semi-circumferenţă ; coarda AO este maĭ mare de căt coarda A'B'.

In adevăr, să punem cercul O peste egalul seŭ O', aşa ca centrele să coincidă şi punctul A' să cadă în A. Punctul B', va căde pe arcul AMC, între A şi C, d. e. în B ; atuncĭ coardele AB şi A'B' vor fi egale. Ducem radele OA, OB, OC. Triunghiurile AOC şi AOB aŭ doă laturĭ egale una cu alta şi fac între ele unghiurĭ neegale, adică ; OA lature comună, OC egal cu OB ca rade şi unghiul AOC este evident că'ĭ maĭ mare de căt AOB ; prin urmare laturea a treia AC din triunghiul întăĭ, este maĭ mare de căt laturea a treia AB din al doilea triunghiu.

84 Dacă arcurile considerate sînt pe un acelaşĭ cerc, ne putem imagina că de pe acest cerc se deslipeşte un cerc egal, rămâind unul din arcurĭ pe unul din cercurĭ şi celalalt arc pe celalalt cerc, şi atuncĭ n'avem de căt să repetăm aceiaşĭ demonstraţiune, pentru ambele părţi a-le Teoremeĭ.

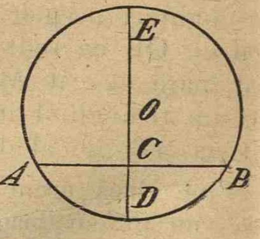
85. Dacă luăm în un cerc, arcul AMB maĭ mic de căt o semi-circumferenţă, atuncĭ arcul AMB şi coarda care'l sub-întinde sînt doă mărimĭ cari variază în acelaşĭ senz ; cănd arcul creşte şi coarda creşte ; dacă arcul ajunge egal cu o semi-circumferenţă de cerc, coarda devine egală cu diametrul. Dacă arcul creşte peste o circumferenţă, atuncĭ arcul şi coarda care'l sub-întinde sînt doă mărimĭ cari variază în senz contrar ; cănd arcul creşte, coarda se micşurează, Din cauza acestor legăturĭ între arc şi coardă putem ḑice :

In un acelaşĭ cerc saŭ în cercurĭ egale : 1° doă coarde egale sub-întind arcurĭ egale, 2° doă coarde neegale sub-întind arcurĭ neegalĭ maĭ micĭ de căt o semi-circumferenţă, şi cea maĭ mare coardă sub-întinde arcul *cel maĭ mare. Dacă luăm ambele arcurĭ maĭ marĭ de cât o semi-circumferență atuncĭ coarda cea maĭ mică sub-întinde arcul cel maĭ mare.*

Aceste propozițiunĭ, constitue reciproca Teoremelor de la §. 83.

86. TEOREMĂ.—*Diametrul perpendicular pe o coardă, împarte în doă părțĭ egale coarda și arcul sub-întins de ea.*

Fie coarda AB și ED diametrul perpendicular pe AB în punctul C. Intorc în jurul diametruluĭ ED, partea figureĭ care'ĭ la dreapta luĭ ED, ca să o aplicăm peste partea din stănga. Semi-circumferența EBD va coincide exact cu semi-circumferența EAD; porțiunea de coardă CB fiind perpendiculară în C pe ED va lua direcțiunea CA care'ĭ perpendiculară pe ED tot în C;



punctul B, intersecțiunea semi-circumferențeĭ EBD cu CB, va cădé în punctul A intersecțiunea semi-circumferențeĭ EAD cu direcțiunea luată de CB după învîrtire. Din aceasta rezultă că CB este egală cu CA și *arc* DB este egal cu *arc* AD.

87. **Corolar I.**— *Centrul unuĭ cerc, mijlocul uneĭ coarde și mijlocul arculuĭ sub-întins de coardă, sînt în linie dreaptă.* Aceasta se vede de acolo, că în timpul și după învîrtirea semi-circumferențeĭ EBD în jur de ED, aceste treĭ puncte rămăn în loc, pe diametrul ED.

Fiind-că o linie dreaptă este complect determinată prin doă puncte, saŭ prin un punct și condițiunea de a fi perpendiculară la o dreaptă dată, apoĭ videm că Corolarul acesta dă loc la următoarele 5 propozițiunĭ :

1°. Perpendiculara pe o coardă în mijlocul eĭ, trece prin centrul cerculuĭ și prin mijlocul arculuĭ sub-întins de coardă.

2°. *Perpendiculara dusă din mijlocul unuĭ arc pe coarda luĭ, trece prin mijlocul coardeĭ și prin centrul cerculuĭ.*

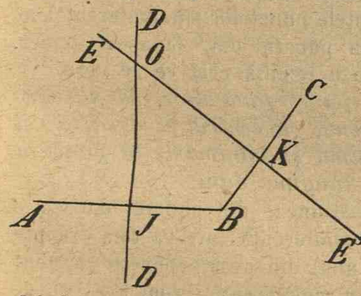
3°. *Rađa dusă prin mijlocul uneĭ coarde este perpendiculară pe coardă și împarte atăt coarda căt și arcul sub-întins de ea, în doă părțĭ egale.*

4°. *Rađa dusă prin mijlocul unuĭ arc. împarte în doă părțĭ egale coarda acestuĭ arc, șĭ'ĭ este perpendiculară.*

5°. *Linia dreaptă dusă prin mijlocurile unuĭ arc și a coardeĭ luĭ trece prin centrul cerculuĭ și este perpendiculară pe coardă.*

88. *Locul geometric al punctelor din mijloc a uneĭ seriĭ de coarde paralele cu o direcțiune dată, este diametrul perpendicular pe acea direcțiune*, fiind-că toate arcurile sub-întinse de aceste coarde paralele, aŭ același mijloc.

89. TEOREMĂ.—*Prin treĭ puncte, carĭ nu sînt în linie dreaptă, putem duce o circumferență și numaĭ una.*



Fie A, B, C cele treĭ puncte. Unesc A cu B și B cu C; duc prin mijlocul I a luĭ AB perpendiculara DD′ pe AB, și prin mijlocul K, a luĭ BC perpendiculara EE′ pe BC. Dreptele DD′ și EE′ formează între ele un unghiŭ egal saŭ suplementar unghiuluĭ ABC și prin urmare ele nu pot fi paralele. Fie O punctul lor de intersecțiune; acest punct se află la distanțe egale de punctele A, B, C. Așa dar dacă din punctul O ca centru și cu OA ca rađă se descrie o circumferență, aceasta va trece prin punctele A, B și C.

Đic că nu maĭ poate fi o altă circumferență, care să treacă prin acele treĭ puncte. Pentru că orĭ-ce circumferenţă ce trece prin A şi B îşĭ are centrul pe DD′ (§. 87, 1°) şi orĭ-ce circumferenţă ce trece prin B şi C îşĭ are centrul pe EE′; prin urmare circumferenţa ce trece prin trustrele punctele A, B, C îşĭ va ave centrul la intersecţiunea dreptelor DD′ şi EE′ care este un punct unic O: aşa dar orĭ-ce circumferenţă ce trece prin A, B, C trebue să'şĭ aibă centrul în O, şi raḑa eĭ ne poate fi de cât OA saŭ OB saŭ OC, care lungimĭ sînt toate egale între ele. Din aceasta rezultă că orĭ-ce circumferenţă ce trece prin A, B, C, coincide cu acea descrisă din O ca centru cu OA ca rază.

91. Corolar. —*Doă circumferenţe nu pot ave mai mult de doă puncte comune*; căcĭ dacă ar ave treĭ puncte comune, atuncĭ ar coincide.

91. Exerciţiĭ—1° *Fiind date o circumferenţa şi un punct: distanţa cea maĭ mică si cea maĭ mare de la punct la circumferenţă, se află pe diametrul circumferenţeĭ ce trece prin punct.* Se va compara distanţa orĭ-căruĭ punct al circumferenţeĭ la punctul dat, cu distanţele punctelor circumferenţeĭ aflătoare pe diametrul ce trece prin punctul dat, la acest punct, şi din triunghiurile carĭ se formează rezultă ceia ce se cere.

2. *O linie dreaptă şi un punct fiind date, să se descrie cu o raḑă dată o circumferenţă cu centrul pe dreaptă, şi astfel ca suma distanţelor maximă şi minimă de la punct la circumferenţă să fie egală cu o lungime dată.*

Fie r raḑa şi l suma în chestiune; din punctul dat cu o raḑă egală cu $l-r$ descrim o circumferenţă care va tăia dreapta dată în doă puncte A şi B; din unul din aceste puncte ca centru şi cu raḑa dată r descrim o circumferenţă; vom ave ceia ce căutăm.

3. *Să ie pe o circumferenţă doă arcurĭ AB, CD egale între ele; coardele acestor arcurĭ fiind prelungite se întîlnesc în un punct M; unind cruciş extremitaţile arcurilor avem AC şi BD carĭ se taie în un punct N; a arăta că M şi N sînt pe un diametru*; pentru că M şi N trebue să se afle pe bisectoara unghiuluĭ M şi această bisectoară trece prin centrul circumferenţeĭ.

4. *Ă descri cu o raḑă dată o circumferenţă care să treacă prin doă puncte date.* Se vor uni cele doă puncte prin

o dreaptă; în mijlocul acesteĭ drepte se va duce perpendiculara; din unul din punctele date ca centru cu rada dată, se va descri un arc de cerc care va tăia perpendiculara în doă puncte; unul din aceste puncte va fi centrul căutat. Pentru ca problema să aibă soluțiune, trebue ca rada dată să fie egală saŭ maĭ mare de căt distanța între cele doă puncte date.

5. *Prin un punct dat să se ducă o circumferență care să fie la aceiașĭ distanță de treĭ puncte date în linie frăntă.*

Fie M punctul întăĭ, A, B, C punctele cele treĭ din urmă. Determinez centrul O al circumferențeĭ ce trece prin A, B, C și din O ca centru cu OM ca radă descriŭ circumferența și avem ceia ce se cere.

6. *Fiind date pe hărtie patru puncte din care treĭ nu sînt în linie dreaptă, a duce un drum circular care să treacă la egală distanță de fie-care acele patru puncte.*

Fie A, B, C treĭ puncte ce nu sînt în linie dreaptă și D al patrulea punct; fie O centrul circumferențeĭ ce trece prin A, B, C. Circumferența descrisă cu $\frac{OA+OD}{2}$ ca radă va fi drumul căutat. Este loc a se discuta numĕrul soluțiunilor.

7. *A descri cu o radă dată, o circumferență care să intercepteze pe doă liniĭ drepte niște coarde de lungimì date.*

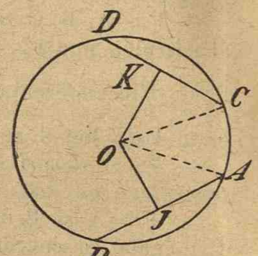
Fie A și B dreptele date; luăm pe dreapta A, o lungime CD egală cu coarda dată respectiv; fie r rada dată; determinez centrul O al circumferențeĭ ce trece prin C și D de radă r (a vide problema 4 de maĭ sus) și prin punctul O duc paralela cu A. Fac acelașĭ lucru cu coarda a doa aședată pe B: fie O′ centrul circumferențeĭ respective; prin O′ duc paralela cu B. Punctul de întîlnire al paralelelor duse prin O și O′ este centrul circumferențeĭ căutate.

8. *O linie dreaptă, mobilă în plan, poate fi adusă din o pozițiune în alta, prin o rotațiune în jurul unuĭ punct din plan, numaĭ căt cele doă pozițiunĭ a linieĭ drepte să nu fie paralele și de acelașĭ senz.* Problema se rezolvește ca precedenta, luăndu-se pe cele doă pozițiunĭ de dreaptă, coarde egale.

CAPITULUL II

TANGENTĂ, UNGHIURĬ ÎNSCRISE

92. TEOREMĂ.—*In un acelașĭ cerc, saŭ în cercurĭ egale: 1⁰. doă coarde egale sînt egal departate de centrul cerculuĭ; 2⁰ din doă coarde neegale, cea maĭ mare este maĭ aproape de centru.*

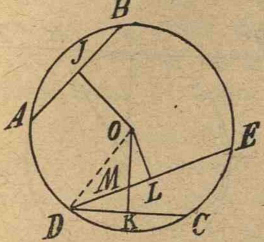


1⁰. Fie în cercul O, doă coarde AB, CD egale între ele; ḑic că ele sînt egal depărtate de centrul O. Duc din centru, perpendicularele OI şi OK pe cele doă coarde, care ştim că sînt distanţele centruluĭ la coarde; duc şi raḑele OA, OC. Triunghiurile dreptunghice OAI şi OCK sînt egale ca avînd ipotenuzele OA şi OC egale între ele ca raḑe, precum şi laturile IA şi CK iarăşĭ egale între ele ca jumătăţĭ de coarde egale. Din aceasta rezultă că OI=OK.

Dacă coarda a doa este pe o altă circumferenţă egală cu cea dintăĭ, atuncĭ demonstraţiunea se face prin suprapunere.

2⁰ Fie acum doă coarde AB, DE neegale şi anume DE maĭ mare de căt AB: ḑic că DE este maĭ aproape de centru de căt AB.

Cu începere de la D duc spre E un arc DC egal cu AB: fiind-că arcul AB este maĭ mic de căt arcul DE, punctul C va căde între D şi E, coarda DC şi centru vor fi de o parte şi de alta a coardeĭ DE. Duc din O perpendiculare pre cele treĭ coarde; OI este



egală cu OK find-că coardele respective AB, DC sînt egale Perpendiculara OK va tăie coarda DE în un punct M, şi avem că perpendiculara OL este maĭ scurtă de căt oblica OM şi cu atăt maĭ mult va fi maĭ scurtă de căt OM+MK saŭ OK: şi fiind că OK este egală cu OI, rezultă că OL este maĭ mică de căt OI.

93. *Observaţiune.*—In un cerc, lungimea uneĭ coarde şi distanţa centruluĭ la ea, sînt doă mărimĭ carì variază în sens invers; cănd una creşte ceialaltă se micşorează. Conchidem reciproca Teoremeĭ precedente: *în un acelaşĭ cerc saŭ în cercurĭ egale, coardele egal depărtate de centru sînt egale între ele. şi coarde neegal depărtate de centru nu sînt egale între ele.*

94. **Definiţiunĭ.**— O linie dreaptă este numită *tangentă* în un punct A al uneĭ circumferenţe. cănd acea dreaptă nu are comun cu circumferenţa, de căt numaĭ acel punct. Punctul comun al tangenteĭ cu circumferenţa se numeşte *punct de contact.* Dreapta perpendiculară pe tangentă şi în punctul de contact se numeşte *normală* la cicumferenţă.

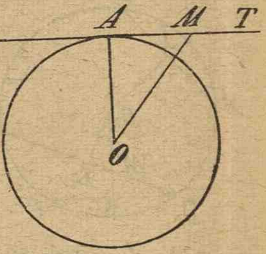
Orì-ce dreaptă, care are de comun cu circumferenţa doă puncte, este o *secantă* a circumferenţeĭ

Un unghiu cu vîrful în centrul uneĭ circumferenţe poartă numirea de *unghiu la centru.*

Un unghiu cu vîrful în un punct al circumferenţeĭ poartă numirea de *unghiu inscris* in circumferenţă.

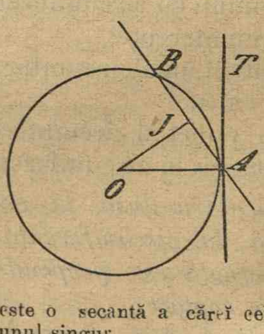
95. TEOREMA.—*Perpendiculara dusă la extremitatea unei rade, este tangentă la circumferenţă* şi reciproc: *tangentă la o circumferenţă este perpendiculară pe rada dusă la punctul de contact.*

1° Consider rada OA şi în A duc perpendicularara TT′ la OA; dic că TT′ este tangentă la circumferenţa în A. In adevăr, dacă luăm un punct oare-care M al tangenteĭ, videm că nu poate fi pe circumferenţă căcĭ distanţa sa la centru, OM, ca oblică faţă cu perpendiculara OA, este maĭ mare de căt OA.



De aicĭ rezultă că dreapta TT′ nu întîlneşte circumferenţa de căt în singurul punct A şi prin urmare'ĭ este tangentă şi punctul de contact este A. (*).

2⁰. Reciproc, dacă TT′ este tangentă în A la circumferenţă, ḑic că ea este perpendiculară pe raḑa OA. In adevăr, dreapta TT′ nu poate ave nicĭ un punct în interiorul circumferenţeĭ, căcĭ atuncĭ ar întîlni o în maĭ mult de un punct. Aşa dar orĭ-care punct al eĭ, afară de A, este exterior circumferenţeĭ, şi prin urmare la o distanţă de la centru maĭ mare de căt OA. Rezultă dar că OA este cea maĭ scurtă distanţă a punctuluĭ O la dreapta TT′ şi prin urmare raḑa OA este perpendiculară la TT′.



*). *O tangentă în un punct A al circumferenţeĭ, poate fi considerată ca limita uneĭ secante mobile, ce trece prin punctul A şi prin un alt punct oare-care B de-a circumferenţeĭ, cănd acesta se confundă cu cel d'ĭntăĭ.*

In adivĕr, să considerăm secanta AB şi să o învîrtim în jurul punctuluĭ A, aşa ca al doilea punct de intersecţiune B să se apropie de A; punctul I, mijlocul coardeĭ AB se va apropia şi el de punctul A, şi dreapta OI va rămăne în fie-care poziţiune a secanteĭ, perpendiculară pe această secantă. Aşa dar, la limită, cănd punctul B se confundă cu A, secanta AB se aşaḑă pe perpendiculara OA în A, şi se confundă cu tangenta în A. Se poate ḑicé dar că o tangentă este o secantă a căreĭ cele doă puncte de intersecţiune se confundă în unul singur.

96. **Corolar I**—*Prin un punct luat pe circumferență nu se poate duce de cât o singură tangentă la circumferență*; pentru că știm că în un punct pe o dreaptă, nu se poate duce de cât o perpendiculară.

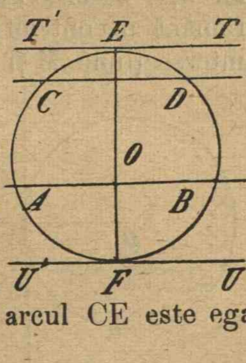
97 **Corolar II.**—*Dacă ducem o serie de coarde paralele cu o tangentă, toate aceste coarde sînt împărțite în părțĭ egale prin diametrul ce trece prin punctul de contact*; pentru că acest diametru fiind perpendicular pe acele coarde, trebue să le impartă în părțĭ egale.

98. **Corolar III**—*O normală la circumferența trece prin centru*; pentru că fiind perpendiculară pe tangentà în punctul de contact, normala va conține rada ce merge la acest punct de contact.

99. TEOREMĂ.—*Doă liniĭ drepte paralele între ele, intercepteazā pe circumferența, arcurĭ egale.*

Cele doă drepte paralele pot fi saŭ secante amăndoă, saŭ tangente amăndoă, saŭ una secantă și una tangentă.

1°. Fie dreptele AB, CD amăndoă secante; diametrul EF cari le este perpendicular, imparte în părțĭ egale arcurile sub-întinse de aceste drepte. Așa dar arcul CE este egal cu arcul DE și arcul AE este egal cu arcul BE; prin urmare arcul AC, diferența între arcurile AE și CE, este egal cu arcul BD diferența între arcurile BE și DE.

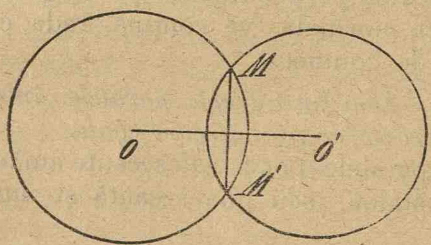


2°. Să luăm împreună tangenta TT în E și secanta CD paralele între ele. Rada care merge la E fiind perpendiculară pe CD știm că împarte coarda CD și arcul sub-întins CED în doă părțĭ egale; așa dar arcul CE este egal cu arcul DE.

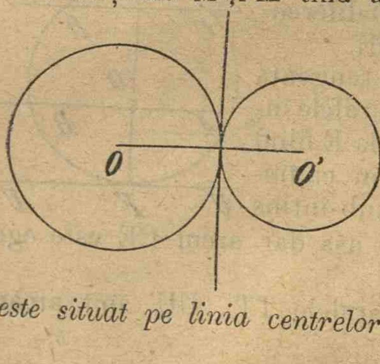
3°. Dacă cele doă paralele TT', UU' sînt amăndoă tangente la circumferenţă, atuncĭ raḑele OE şi OF respectiv perpendiculare pe cele doă tangente sînt una în prelungirea alteia şi linia EOF este un diametru, care ştim că împarte circumferenţa în doă părţĭ egale (§. 86).

100. TEOREMĂ.—*Dacă doă circumferenţe aŭ doă puncte comune, coarda comună este perpendiculară pe dreapta centrelor, şi este împărţită de aceasta din urmă în doă părţĭ egale.*

Fie doă circŭmferenţe cu centrele în O şi O′ care aŭ de comun punctele M şi M′; punctul O este egal depărtat de punctele M şi M′; punctul O′ este de asemene egal depărtat de aceleaşĭ puncte; aşa dar dreapta OO′ este locul geometric al punctelor egal depărtate de M şi M′ şi prin urmare dreapta OO′ este perpendiculară pe MM′ în punctul din mijloc al acesteĭ drepte.



101. Corolar.—Dacă presupunem că una din circumferenţe, d. e. O′, se mişcă astfel că centrul eĭ O′, să rămână necontenit pe dreapta OO′, atuncĭ punctele de intersecţiune M şi M′ tind a se confunda în unul singur; dreapta ce trece prin punctele M şi M′ tinde a deveni tangentă la ambele circumferenţe în punctul lor comun, rămăind perpendiculară pe linia centrelor. Aşa dar : *când doă circumferenţe aŭ un singur punct comun, acest punct este situat pe linia centrelor, şi circumferenţele aŭ ace-*

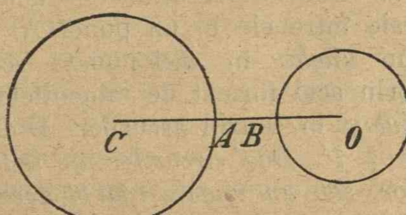


iașĭ tangentă în punctul lor comun, adică sînt tangente una alteia.

Tot astfel se întîmplă și cănd prin mișcarea imprimată, circumferența cea mică intră cu totul în cea mare:

102. Doă circumferențe pot ave: saŭ doă puncte comune, saŭ numaĭ unul, saŭ nicĭ unul: în aceste doă din urmă cazurĭ, circumferențele pot fi exterioare și interioare una alteia. Prin urmare doă circumferențe pot ave, una în privirea celeialalte, cincĭ pozițiunĭ diferite cărora corespund următoarele cincĭ teoreme.

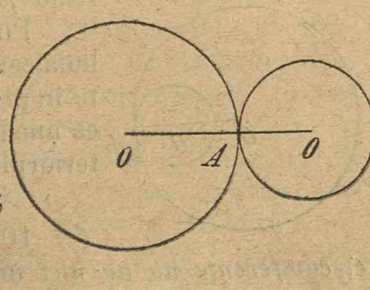
103. TEOREMĂ.—*Dacă doă circumferențe, nu aŭ nicĭ un punct comun și sînt exterioare una alteia, atuncĭ distanța centrelor este maĭ mare de căt suma radelor.*



Linia dreaptă OO′ care unește centrele‘ taie pe una din circumferențe în punctul A. și pe ceialaltă în punctul B, prin urmare este egală cu suma razelor OA, O′B, plus distanța între punctele A și B: prin urmare avem

$$OO' < OA + O'B.$$

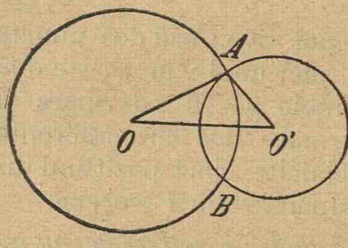
104. TEOREMA.—*Dacă doă circumferențe se ating exterior, distanța între centre este egală cu suma radelor.*



Am vădut (§. 101) că punctul de contact A se află pe linia centrelor OO′ și este cuprins între aceste doă centre, fiind că circumferențel sînt exterioare una alteia; prin urmare avem

$$OO' = OA + O'A.$$

105. TEOREMĂ.—*Dacă doă circumferențe se întretaie, distanța între centre este maĭ mică de cât suma razelor și maĭ mare de cât diferența între acele raḑe.*



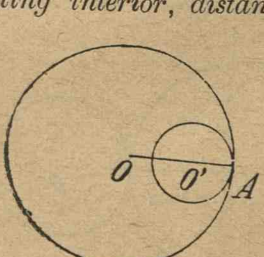
Fie A unul din punctele de intersecţiune a doă circumferenţe O şi O'; acest punct A nefiind pe linia centrelor, raḑele OA şi O'A formează cu linia centrelor OO' un triunghiu, în care ştim că o lature, d. e. OO', este maĭ mică de cât suma celorlalte doă OA şi O'A şi maĭ mare de cât diferenţa lor.

106. *Observațiune.*—Când doă arcurĭ de cerc se taie între ele în un punct A, se ḑice că ele formează un *unghiu* în acel punct: acest *unghiu* se măsoară prin acel format de tangentele la arcurĭ duse în *vîrful* şi în senzul arcurilor. Din acestea rezultă că:

1°. Doă circumferențe se taie în un punct comun lor, sub un unghiu egal cu acel al razelor duse la punctul comun și prelungite dincolo de punct.

2°. *Când doă circumferențe se întretaie, unghiul este același în amândoă punctele de intersecțiune.*

107. TEOREMĂ.—*Dacă doă circumferențe se ating interior, distanța între centre este egală cu diferența raḑelor lor.*



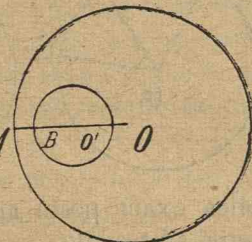
Punctul de contact A se află pe linia centrelor OO' şi de aceiaşĭ parte în privirea acestor centre, fiindcă una din circumferenţe este în interiorul celeialalte; aşa dar avem:

$$OO' = OA - O'A.$$

108. TEOREMĂ.— *Dacâ doă circumferențe nu aŭ nicĭ un punct comun, și una este*

în interiorul celeialalte, distanța între centre este maĭ mică de cât diferența radelor lor.

Prelungesc dreapta OO′ până în afară de circumferența interioară: această dreaptă întâlneşte cele doă circumferențe în B şi A şi videm că OO′ este egal cu diferența între radele OA şi OB minus BA: aşa că dacă nu scădem pe BA vom ave



OO′<OA—O′B.

108. **Corolar.** Reciprocele acestor cincĭ teoreme sînt adevěrate şi se deduc din ele imediat, pentru că condiţiunile relative la fie-care caz se exclud mutual.

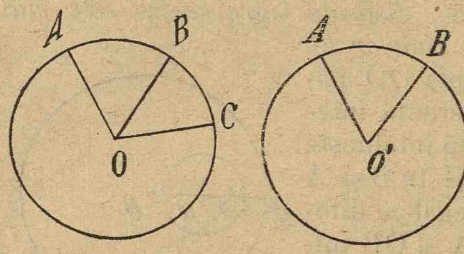
Să demonstrăm d. e că *dacă distanța centrelor este maĭ mica de cât suma radelor și maĭ mare de cât diferența lor, circumferențele se întretaie.*

In adevăr, circumferenţele nu pot fi nicĭ exterioare, nicĭ tangente exterior, pentru că distanţa centrelor este maĭ mică de cât suma radelor; ele nu pot fi nicĭ tangente interior, nicĭ interioare una alteia, pentru că distanţa centrelor este maĭ maĭ mare de cât diferenţa radelor. Rămâne dar că circumferenţele să fie secante între ele.

Tot astfel se va demonstra şi reciprocele celorlalte patru teoreme.

109. TEOREMĂ.—*In un acelașĭ cerc saŭ în cercurĭ egale, 1°. doă unghiurĭ la centru egale, intercepteazà arcurĭ egale; 2°. doă unghiurĭ la centru neegale, interceptează arcurĭ neegale, cel maĭ mare unghiu la centru interceptează arcul cel maĭ mare.*

1°. Să luăm cercurile egale O şi O′ unghiurile la centru AOB şi A′O′B′ egale între ele. Să transportăm cercul O′ peste cercul O, aşa ca centrele să coincidă; să învărtim apoĭ cercul O′ în jurul punctuluĭ



O, până ce rada O'A' vine pe rada OA; fiind că unghiul A'O'B', este egal cu unghiul AOB apoĭ rada O'B' va lua direcţiunea OB şi arcul A'B' se va aplica exact peste arcul AB; prin urmare aceste doă arcurĭ sînt egale.

2°. Să luăm în cercurile egale O şi O' unghiurile la centru AOC şi A'O'B' neegale, şi fie unghiul AOC maĭ mare de cât A'O'B'. Să transportăm iarăşĭ cercul O' peste cercul O aşa ca centrele să coincidă; să învărtim apoĭ cercul O' în jurul punctuluĭ O până ce rada O'A' vine pe rada OA; fiind că unghiul A'O'B' este maĭ mic de cât unghiul AOC, rada O'B' va căde în interiorul unghiuluĭ AOC, d. e. pe OB, punctul B este situat pe circumferenţa O între punctele A şi C. Din acestea rezultă că arcul AC este maĭ mare de cât arcul AB: însă arcul AB este egal cu arcul A'B' prin urmare arcul AC este maĭ mare de cât arcul A'B'.

110. Reciprocele acesteĭ teoreme sînt adevĕrate; adică: *1°. la doă arcurĭ egale corespund unghiurĭ la centru egale; 2°. la doă arcurĭ neegale corespund unghiurĭ la centru neegale; la arcul cel maĭ mare corespunde cel maĭ mare unghiu la centru.* Demonstraţiunea se face uşor tot prin suprapunere.

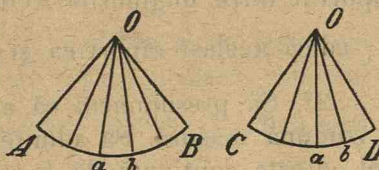
111. **Corolar.**—*Doĭ diametri perpendicularĭ împart circumferenţa în patru arcurĭ egale*; pentru că aceştĭ doĭ diametri formează la centru patru unghiurĭ egale, cărora li corespund prin urmare arcurĭ egle.

Se dă numele de *cadran*, sfertuluĭ de circumferenţă.

112. **Măsurarea unghiurilor.** Dependenţa dintre unghiurĭ la centru şi arcurile cuprinse între laturile un-

ghiuluĭ în o aceiaşĭ circumferenţă, conduce la înlocuirea măsurăreĭ directe a unghiurilor prin măsurarea de arcurĭ de circumferenţă; căcĭ deşi unghiurile şi arcurile de circumferenţă nu sînt mărimĭ de aceiaşĭ specie însă Teorema următoare ni permite de a cunoaşte raportul între doă unghiurĭ, dacă cunoaştem raportul dintre arcurile corespunzĕtoare.

113. TEOREMĂ.—*Dacă din vîrfurile a doă unghiurĭ ca centre, discrim cu o aceiaşĭ radă cîte un arc de cerc, raportul între unghiurĭ este egal cu raportul arcurilor cuprinse între laturile respective a celor doă unghiurĭ.*



Din vîrfurile O şi O′ a unghiurilor AOB şi COD ca centre, cu o aceiaşĭ radă,, descrim arcurile de cerc AB, CD: ḑic că raportul

$$\frac{\textit{ungh.}\ \mathrm{AOB}}{\textit{ungh}\ \mathrm{CO'D}} \text{ este egal cu raportul } \frac{\textit{arc.}\ \mathrm{AB}}{\textit{arc.}\ \mathrm{CD}}.$$

Doă cazurĭ se pot prezenta: saŭ arcurile sînt comensurabile între ele, saŭ sînt necomensurabile între ele (*).

---

*). Doă mărimĭ A şi B de aceiaşĭ specie, sînt ***comensurabile*** între ele, atuncĭ cănd se poate găsi o a treia mărime C care să se cuprindă de un numĕr exact de orĭ în A şi B; d. e. A cuprinde pe C de 7 orĭ şi B de 3 orĭ, avem $\frac{A}{B}=\frac{3}{7}$. In acest caz videm că mărimile admit o *comună măsură* şi raportul lor este un numĕr bine determinat, care poate fi întreg saŭ fracţionar.

Observăm că dacă A şi B admit ca comună măsură pe C, vor admite si pe o parte alicvotă a luĭ C; d. e. jumătatea, saŭ sfertul, saŭ a zecea parte a luĭ C, etc.

Doă mărimĭ A şi B de aceiaşĭ specie, sînt ***necomensurabile*** între ele atuncĭ cănd nu se poate stabili între ele o comună măsură. Să luăm o a treia mărime C, care nu se cuprinde exact nicĭ în A nicĭ în B şi să figurăm prin liniĭ drepte aceste treĭ lungimĭ, şi să presupunem că C intră de patru orĭ în A şi maĭ rămăne porţiunea $a' a''$ şi de treĭ orĭ în B şi

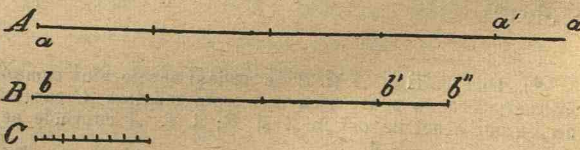
1°. Să admitem că arcurile AB și CD aŭ o comūnă măsură, adică d. e. arcul *ab* este conținut de 5 orĭ în arcul AB și de 4 orĭ în arcul CD; raportul între arcurĭ este $\frac{5}{4}$.

Să ducem din centre, rade la punctele arcurilor AB și DC determinate de arcul *ab*. Unghiurile ABB și CO′D, sînt cu chipul acesta împărțite în unghiurĭ egale cu unghiul *aOb*; fiind că am văḑut că la arcurĭ egale corespund la centru unghiurĭ egale. Unghiul AOB conține 5 unghiurĭ egale cu *aOb* și unghiul CO′D conține 4 de aceste unghiurĭ; prin urmare raportul între unghiurile AOB și CO′D este egal cu $\frac{5}{4}$, adică acelașĭ raport ca și între arcurĭ.

2°. Să presupunem că arcurile AB și CD nu aŭ o comună măsură. Să admitem că a n^a parte din arcul *ab* este conținută de *k* orĭ în arcul AB și maĭ rămâne ceva; de asemenea a n^a parte din arcul *ab* să admitem că este conținută de *l* orĭ în arcul CD și maĭ

---

maĭ rămăne porțiunea *b′b″*. Să luăm d. e. a ḑecea parte din *C*; aceasta se cuprinde în *A* de *40* orĭ pănă în *a′* și încă de *6* orĭ d. e. în *a′ a″*, maĭ rămăind încă o porțiune; în *B* se cuprinde de *30* orĭ și încă de *7* orĭ în *b′b″* maĭ rămăind încă o porțiune;



vom ave neegalitățile:

$$46\frac{C}{10}<A<47\frac{C}{10} \quad \text{și} \quad 37\frac{C}{10}<B<38\frac{C}{10}.$$

Cănd vom lua în loc de *A* pe $46\frac{C}{10}$ saŭ pe $47\frac{C}{10}$, comitem o eroare asupra adevăratei valorĭ a luĭ A în maĭ puțin saŭ în maĭ mult, maĭ mică de căt $\frac{C}{10}$; de asemene cănd vom lua în loc de B pe $37\frac{C}{10}$ saŭ pe $38\frac{C}{10}$, comitem o eroare asupra adevărateĭ valorĭ a luĭ B, în maĭ puțin rămăne ceva. Arcurile AB şi CD vor fi foarte aproape egale respectiv cu $k\frac{\text{arc. } ab}{n}$ şi $l\frac{\text{arc. } ab.}{n}$, prin urmare raportul $\frac{\text{arc. AB}}{\text{arc. CD}}$ va fi foarte aproape egal cu $\frac{k}{l}$, dacă vom lua pe n destul de mare. Dacă prin vîrfurile O şi O′ ducem rade la punctele de diviziune determinate de arcul $\frac{ab}{n}$ pe arcurile AB şi CD, unghiurile AOB şi CO′D vor fi descompuse respectiv în k şi l unghiurĭ egale între ele, căcĭ toate aŭ acelaşĭ arc $\frac{ab}{n}$, între laturĭ, şi va maĭ rămăne căte un mic unghiu atăt în AOB căt şi în CO′D, care va fi cu atăt maĭ mic cu căt n va fi maĭ mare; prin urmare raportul $\frac{\textit{ungh.} \text{ AOB}}{\textit{ungh.} \text{ CO'D}}$ va fi foarte aproape egal cu $\frac{k}{l}$, adică egal cu raportul între arcurĭ

114. După ce am constatat ce fel este dependenţa între unghiurĭ şi arcurĭ de circumferenţă, adică *proporţionalitatea*, putem preciza maĭ bine chestiunea mă-

---

saŭ în maĭ mult, maĭ mică de căt $\frac{C}{10}$; prin urmare raporturile $\frac{46\frac{C}{10}}{37\frac{C}{10}}$ şi $\frac{47\frac{C}{10}}{38\frac{C}{10}}$, egale respectiv cu $\frac{46}{37}$ şi $\frac{47}{38}$, nu vor reprezenta adevărata valoare a raportuluĭ $\frac{A}{B}$, dar căte o valoare foarte apropiată de cea adevărată.

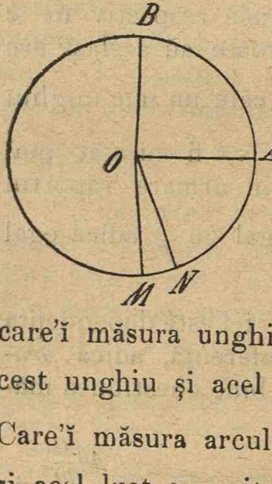
Dacă acum, vom lua a n-*a* parte a luĭ C, n fiind numĕr îndestul de mare, şi admiţănd $\frac{C}{n}$ se coprinde de k orĭ în A maĭ rămăind ceva, şi de l orĭ în B, maĭ rămăind iarăşi ceva, vom ave

$$k\frac{C}{n} < A < k+1)\frac{C}{n} \quad \text{şi} \quad l\frac{C}{n} > B > (l+1)\frac{C}{n},$$

surărei unghiurilor, modificând cum urmează enunciul Teoremeĭ precedente, care poate fi considerat ca o noă Teoremă

115. TEOREMĂ.—*Dacă pe o circumferență oare-care, să ie ca unitate de arc acel cuprins între laturile unghiuluĭ la centru luat ca unitate de unghiu, atuncĭ măsura unuĭ unghiu oare-care la centru, este aceiașĭ ca și măsura arculuĭ cuprins între laturile luĭ.*

Fie MON unghiul luat ca unitate de unghiu și AOB unghiul ce voim să măsurăm. Din punctul O ca centru și cu o rază oare-care descrim o circumferență; între laturile unghiuluĭ MON avem *arc*. MN, și între laturile unghiuluĭ AOB avem *arc*.AB; dic că măsura unghiuluĭ AOB este aceiașĭ ca și măsura arculuĭ AB, dacă luăm ca unitate de arc, arcul MN. In adivăr,



care'ĭ măsura unghiuluĭ AOB? este raportul între acest unghiu și acel luat ca unitate, adică: $\frac{ungh\ \text{AOB}.}{ungh.\ \text{MON}}$ Care'ĭ măsura arculuĭ? este raportul între acest arc și acel luat ca unitate, adică $\frac{arc\ \text{AB}.}{arc\ \text{AM}}$ Insă, în virtutea

---

diferențele între numeriĭ carĭ cuprind pe A și B este $\frac{C}{n}$, carĭ poate devine orĭ cât de mică am vroi, luând pe n destul de mare; prin urmare în loc de A putem lua $k\frac{C}{n}$ saŭ $(k+1)\frac{C}{n}$ și în loc de B putem lua $l\frac{C}{n}$ saŭ $(l+1)\frac{C}{n}$ fără să comitem erorĭ însemnate, și atuncĭ valoarea numerică a raportuluĭ $\frac{A}{B}$ va fi saŭ $\frac{k}{l}$ saŭ $\frac{k+1}{l+1}$.

Așa dar raportul între doă mărimĭ necomensurabile nu este exact determinat ci numaĭ aproximativ. Raportul însușĭ $\frac{A}{B}$ în acest caz este numit *raport necomensurabil*.

Teoremeĭ precedente, aceste raporturĭ sînt egale; prin urmare, măsura unghiuluĭ AOB este aceiaşĭ ca şi a arculuĭ AB

Această Teoremă fiind foarte des aplicată, pentru uşurinţă i s'a schimbat enunciul eĭ în următorul: *un unghiu la centru, are drept măsură arcul cuprins între laturile sale;* rămâne sub-înţăles că: cuvintele „*are drept măsură*“ exprimă acelaşĭ lucru ca şi „*are aceiaşĭ măsură ca*“ şi că unitatea de arc corespunde unităţeĭ de unghiu.

116. Pentru a măsura un arc, şi prin urmare un unghiu, se împarte circumferenţa în 360 părţĭ egale numite *grade*; fie-care grad este împărţit în 60 *minute* şi fie-care minută în 60 *secunde*. Prin urmare o semi-circumferenţă conţine 180 grade. Semnele pentru grade minute şi secunde sînt: ^{o}, $'$, $''$ care se pun sus la dreapta numĕruluĭ; d. e. un arc de 76 grade 35 minute 57 secunde se scrie: $76^{o}35'57''$.

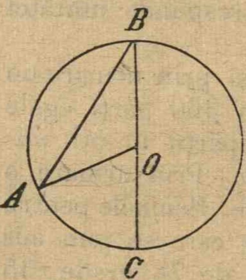
Acum, vom ave unghiŭ la centru de un grad, acel a căruĭ laturĭ cuprind pe circumferenţă un arc de 1^{o}; vom ave unghiu la centru de o minută, de o secundă, acele cari cuprind pe circumferenţă arcurĭ de $1'$ de $1''$. Un unghiu de un grad face căt 60 unghiurĭ de o minută şi căt 60×60 saŭ 3600 unghiurĭ de o secundă. Un unghiu la centru a căruĭ laturĭ cuprind un arc de $76^{o}35'57''$, este un unghiu de $76^{o}35'57''$.

Am văzut că doĭ diametri perpendicularĭ împart circumferenţa în patru părţĭ egale; un unghiu drept a căruĭ vîrf este în centrul uneĭ circumferente, cuprinde între laturile luĭ un arc de un sfert de circumferenţă, adică un arc de 90^{o}, prin urmare un unghiu drept face 90^{o}. Din aceasta deducem că: *doă unghiurĭ complementare fac la un loc 90^{o}; doă unghiurĭ suplementare fac la un loc 180^{o}; suma celor treĭ unghiurĭ a-le unuĭ triunghiu este egală cu 180^{o}; în un tri-*

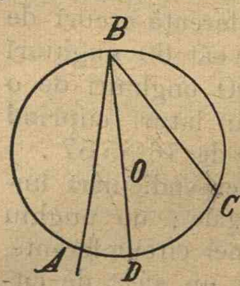
unghiu ecvilateral, fie-care unghiu este de câte 60°, în un triunghiu dreptunghic, suma celor doă unghiurĭ ascuțite face 90°.

117. TEOREMĂ.— *Un unghiu înscris în o circumferență, are drept măsură jumătatea arculuĭ cuprins între laturile luĭ.* Treĭ cazurĭ se pot prezenta :

1°. Centrul este pe una din laturile unghiuluĭ d. e. BC. Duc rada AO; triunghiul AOB este isoscel, pentru că are laturile sale AO și BO egale între ele ca rade : de unde rezultă că unghiurile OAB și ABO sînt egale. Insă AOC este un unghiu exterior triunghiuluĭ AOB, și ca astfel este egal cu suma unghiurilor OAB și ABO (§. 49, I), și fiind că aceste din urmă unghiurĭ sînt egale între ele, rezultă că unghiul ABO singur, este jumătatea din unghiul AOC. Unghiul la centru AOC are drept măsură arcul AC ; prin urmare unghiul înscris ABO, saŭ ABC, va ave drept măsură jumătatea din arcul AC.

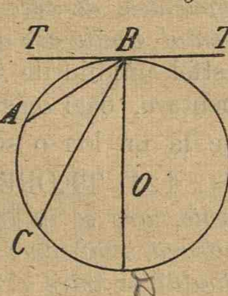


2°. Centrul O se află între laturile unghiuluĭ. Duc diametrul *BOD*; unghiul ABD are drept măsură jumătatea din jumătate din arcul AD, unghiul DBC are drept măsură jumătate din arcul DC. Prin urmare unghiul înscris ABC; care videm că este egal cu suma celor doă unghiurĭ, va ave drept măsură jumătatea din arcul AC.



3°. Centrul este exterior laturilor unghiuluĭ. Duc diametrul BOD (fig. următoare); aicĭ unghiul ABC este diferența între unghiurile ABD și CBD, a-le căror măsurĭ respective sînt jumătate din arcul AD și jumătate din arcul CD; prin urmare unghiul însuşĭ ABC va ave drept măsură jumătate din arcul AC.

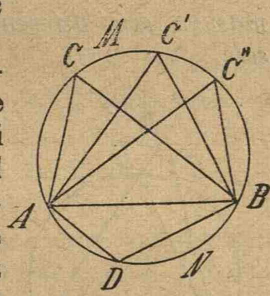
118. **Corolarul I.** *Un unghiu format de o tangentă TT' şi de o coardă BC ce trece prin punctul de contact B, are drept masură jumatate din arcul sub-întins de coardă.*



Ducem secanta BA; unghiul înscris ABC are drept măsură jumătate din arcul AC. Să învărtim secanta BA, în jur de B pănă ce devine tangentă în B; în toate poziţiunile secanteĭ BA, unghiul înscris ABC va ave drept măsură jumătate din arcul AC; aşa dar la limită, adică unghiul TBC, al tangenteĭ în B cu coarda BC, va ave drept măsură jumătate din arcul BC.

Aceasta se poate demonstra şi direct, considerănd unghiul TBC ca diferenţă între unghiul drept TBD şi unghiul CBD.

119. **Corolarul II.** *Toate unghiurile înscrise în un acelaşĭ segment de cerc, sînt egale între ele.*



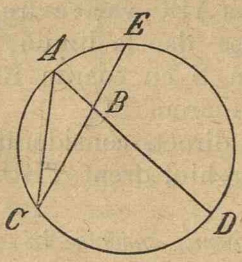
Fie AMB segmentul; unghiurile ACB, AC'B, AC"B... sînt toate egale între ele, fiind că toate aŭ drept măsură jumătate din arcul ANB. Dacă segmentul este un semi-cerc, unghiurile înscrise sînt drepte fiind că aŭ drept măsură un sfert de circumferenţă. Dacă segmentul este maĭ mare saŭ maĭ mic de căt un semi-cerc, unghiurile înscrise sînt ascuţite saŭ obtuze, fiind că aŭ drept măsură un arc maĭ mic saŭ maĭ mare de căt o semi-circumferenţă.

Un segment de cerc este numit *capabil de un un-*

ghiu dat, cănd toate unghiurile înscrise în el, sînt egale cu unghiul dat.

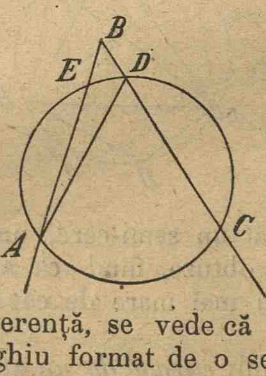
120. **Corolarul III.** *Un unghiu înscris în unul din segmentele de cerc determinate de o coardă, este suplementul unuia din unghiurile înscrise în celalalt segment.* Astfel unghiurile ACB şi ADB (fig. prec.) sînt suplementare, căcĭ măsurile lor, $\frac{1}{2}$ arc. ANB şi $\frac{1}{2}$ arc. AMB, fac la un loc o semi-circumferenţă.

121. TEOREMĂ. — *Un unghiu format de doă secante care se întîlnesc în interiorul cerculuĭ, are drept măsură semi-suma arcurilor cuprinse între laturile unghiuluĭ şi între prelungirile acestor laturĭ.*



Unesc A cu C, văd că unghiul CBD este egal cu suma unghiurilor CAD şi ACE, şi aceste unghiurĭ au respectiv drept măsurĭ $\frac{1}{2}$arc. CD şi $\frac{1}{2}$arc. AE.

122. TEOREMĂ. — *Un unghiu format de doă secante, care se întîlnesc în afară de cerc, are derpt măsură semi-diferenţa arcurilor cuprinse între laturile sale.*

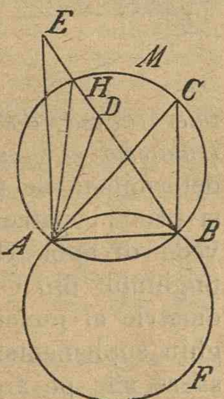


Fie unghiul ABC; unesc A cu D şi avem: unghiul ABC este egal cu diferenţa între unghiurile ADC şi EAD; prin urmare unghiul ABC va ave drept măsură diferenţa

$\frac{1}{2}$ arc. AC—$\frac{1}{2}$arc. ED.

Invărtind în jur de B una din laturĭ saŭ chiar amăndoă, până ce devin tangente la circumferenţă, se vede că Teorema este aplicabilă la un unghiu format de o secantă şi o tangentă precum şi la un unghiu format de doă tangente.

123. **Corolar**. *Locul geometric al punctelor din plan, din cari un segment de dreaptă se vede sub un unghiu dat se compune din doă arcurĭ de circumferență egale, sub-întinse amăndoă de segmentul de dreaptă ca coarda, și așeḑate de o parte și de alta a aceste̱ĭ coarde.*

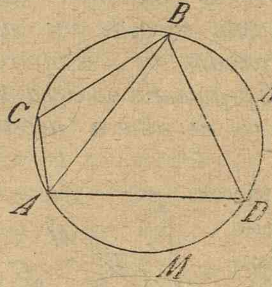


Fie AB segmentul de dreaptă; fie C un punct din care se vede AB sub unghiul dat. Ducem circumferența ce trece drin A, B, C. Din orĭ-care punct H al arculuĭ AMB, dreapta AB se vede sub un unghiu egal cu ACB. Dacă îndoim figura în jurul drepteĭ AB, videm că şi de pe arcul AFB egal cu AMB, dreapta AB se vede sub acelaşĭ unghiu. Din orĭ-care alt punct, care n'ar fi pe arcul AMB saŭ pe arcul AFB, nu s'ar vide sub unghiul dat ACB. In adevăr, să luăm punctul D în interiorul arculuĭ; unghiul ADB este maĭ mare de căt ACB, fiind că are drept măsură $\frac{1}{2}$arc. ANB plus un alt arc. Să luăm punctul exterior E: unghiul AEB este maĭ mic de căt unghiul ACB, căcĭ are drept măsură $\frac{1}{2}$arc.ANB minus un alt arc

Rămăne dar că locul geometric căutat se compune din arcurile AMB şi AFB egale între ele.

Observațiune. Dacă unghiul considerat este drept, atuncĭ arcurile AMB şi AFB sînt semi-circumferențe descrise pe AB ca diametru. Aşa dar: *locul geometric al punctelor din cari o dreaptă se vede sub un unghiu drept, este cercul descris pe acea dreaptă ca diametru.*

124. TEOREMĂ.—*In un patrulater convex, înscris în o circumferență de cerc, unghiurile opuse sînt suplementare.*



Să considerăm d. e. unghiurile opuse C şi D; coarda AB determină doă segmente de cerc ACB şi ADB şi am văzut (§ 120) că orĭ-ce unghiu C înscris în întăiul segment este suplementul unuĭ unghiu D înscris în al doilea segment de cerc.

Reciproc, *dacă în un patrulater convex, doă unghiurĭ opuse sînt suplementare, patrulaterul este inscriptibil*; cu alte cuvinte circumferenţa determinată de treĭ din punctele patrulateruluĭ, va trece şi prin al patrulea punct. In adevăr, din vîrful D se vede dreapta AB sub un unghiu care'ĭ suplementar unghiuluĭ din C, şi arcul AMNB este tocma locul geometric al punctelor din cari AB se vede sub un unghiu suplementar unghiuluĭ din C; aşa dar D trebue să se afle pe arcul AMNB.

125. **Exerciţiĭ**—1. *Locul geometric al punctelor din mijloc a tuturor coardelor uneĭ circumferenţe, egale cu o lungime dată, este o circumferenţă*; pentru că coardele fiind egale între ele, ele sînt egal depărtate de centrul circumferenţeĭ.

2. *A duce o circumferenţă care să treacă prin un punct dat şi să atingă o dreaptă dată în un anume punct al eĭ.* In acest din urmă punct se rădică perpendiculara pe dreapta dată; se unesc cele doă puncte şi prin mijlocul segmentuluĭ format de aceste puncte se duce perpendiculara; punctul de întîlnire al acelor doă perpendiculare este centrul circumferenţeĭ căutate.

3. *A duce o circumferenţă care să treacă prin doă puncte date, şi să admită ca tangentă o paralelă la dreapta ce uneşte cele doă puncte date.* Fie A şi B punctele date şi MN dreapta paralelă cu AB: prin mijlocul luĭ AB rădic perpendiculara care întîlneşte pe MN în C, acesta este punctul de contact; prin mijlocul luĭ AC rădic iar perpendiculara; punctul de întîlnire a celor doă perpendiculare este centrul circumferenţeĭ căutate.

4 *A descrie o circumferenţă care să intercepteze coarde de lungimĭ date pe doă drepte paralele.* Se vor lua pe para-

lelele date lungimile de coarde respective, așa ca mijlocul acestor coarde să se afle pe o perpendiculară comună la cele doă drepte; circumferența dusă prin treĭ din cele patru capete a-le coardelor va fi cea căutată.

5. *Liniile drepte care unesc extremitățile a doă coarde paralele se taie pe diametrul perpendicular la aceste coarde.* Fie AB, CD coardele; I punctul de intersecțiune al dreptelor AD, BC; coardele AD, BC sînt egale ca sub-întinzând arcurĭ egale; AC și BD sînt egale tot pentru acelașĭ cuvânt; din aceste rezultă CI=ID și AI=IB; prin urmare I se află pe perpendiculara dusă prin mijlocul coardelor AB, CD, care perpendiculară este prin urmare un diametru.

6. *Dacă prin unul din punctele de intersecțiune a doă circumferențe, se duce paralela la linia centrelor, suma coardelor interceptate pe această paralelă, este egală cu de doă orĭ distanța centrelor.* Fie O și O′ centrele circumferențelor, C punctul lor de intersecțiune, A și B celelalte capete a coardelor. Ducând din O și O′ perpendiculare pe coarde ce vede ușor ceia ce se cere.

7. *Care'ĭ locul geometric al centrelor circumferențelor descrise cu aceiașĭ radă, și care taie sub un unghiu dat o circumferență dată?* Este o circumferență concentrică cu cea dată, a căreĭ radă este egală cu laturea a treia a triunghiuluĭ format de cele doă rade date inclinate între ele sub unghiul dat.

8. *Care'ĭ locul geometric al centrelor circumferențelor descrise cu aceiașĭ rază, carĭ împart în doă părțĭ egale o circumferență dată?* Este o circumferență concentrică cu cea dată și cu o radă egală cu o laturе a unuĭ triunghiu dreptunghic a căreĭ ipotenuză este rada dată, și ceialaltă lature este rada circumferențeĭ date.

9. *A descri o circumferență care să treacă prin un punct dat și să atingă o circumferență dată în un anume punct al eĭ.* Fie O centrul circumferențeĭ date, B punctul de contact al acesteia cu acea care trebue dusă și A punctul dat. Se duce OB și prin mijlocul luĭ AB se duce perpendiculara care întîlnește OB în C; acesta este centrul circumferențeĭ căutate și rada este CA saŭ CB.

10. *A descri cu o rază dată o circumferență care să treacă prin un punct dat și distanța între acea circumferență și o altă circumferență fixă să fie egală cu o lungime dată.* Fie A punctul dat, r, R, razele circumferențelor, a lungimea dată. Din centrul circumferențeĭ fixe, se descrie o alta concentrică cu

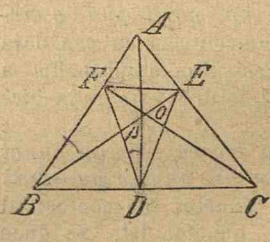
rada $r+a+R$; apoĭ din A ca centru cu radă R, se descrie altă circumferență, care taie pe ceialaltă în doă puncte; unul saŭ altul din aceste doă puncte este centrul circumferenței căutate.

11. *Dacă un poligon convex, inscris în un cerc, are un număr pămreche de laturĭ, suma unghiurilor luĭ de rang păreche este egală cu suma unghiurilor de rang nepăreche.* Aceasta se vede unindu-se vîrful 1 (care poate fi orĭ-care) cu al 4-lea, 1 cu al 6-lea, 1 cu al 8-lea; vom ave patrulatere înscrise, cu ajutorul cărora ușor se demonstrează ceia ce se cere.

12. *Prin un punct exterior uneĭ circumferențe se duc secante; care'ĭ locul geometric al punctelor din mijloc de pe toate coardele interceptate de circumferențe pe secante?* Fie A punctul dat și O centrul circumferențeĭ date; locul geometric căutat este circumferența descrisă din A ca centru cu OA ca radă; pentru că toate perpendicularele duse din O pe coarde cad în mijlocul acestor coarde

13. *Dacă treĭ puncte A, B, C împart o circumferență în treĭ părțĭ egale, distanța unuĭ punct oare-care M a arculuĭ AB la punctul C este egală cu suma distanțelor luĭ M la A și B.* Prin A duc paralela la BM care taie pe MC în I; triunghiul MAI este ecviunghiu și prin urmare ecvilateral; prin urmare MA=MI; apoĭ triunghiurile MBA și AIC, este ușor de vădut că, sînt egale și prin urmare BM=IC.

14. *Picioarele perpendicularelor duse din vîrfurile unuĭ triunghiu pe laturile opuse, sînt vîrfurile unuĭ al doilea triunghiu, a căruĭ unghiurĭ aŭ ca bisectoare înălțimile celuĭ întăĭ.* Patrulaterul BFOD este inscriptibil pe BO ca diametru; rezultă ungh. ABE=ungh. FDO. Circumferența descrisă pe AB ca diametru trece prin E și D; rezultă ungh. ABE=ungh. EDO; așa dar ungh. FDO=ungh. EDO.



CAPITULUL III

PROBLEME ELEMENTARE.

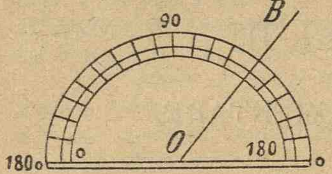
126. **Compas**—Instrumentul cu care putem desina circumferențe, se numește *compas*.

Compasul se compune din doă bețișoare metalice, ascuțite bine la unul din capete, iar celelalte capete sînt reunite între ele prin un cuiŭ, care în acelașĭ timp servește ca axă în jurul căruia se pot învîrti cele doă bețișoare. Invîrtirea aceasta trebue să se facă cu oare care greutate, așa că dându-se compasuluĭ o deschidere să nu se poate închide cu ușurință; pentru aceasta cuiul de reunire este cu șurub, căruia i se aplică o mutelcă, așa că învîrtind mutelca, contactul între capetele bețișoarelor poate deveni cât de puternic, saŭ cât de slab am vroi, și prin urmare frìcțiunea între porțiunile ce sînt în contact, împedecă maĭ mult saŭ maĭ puțin învîrtirea în jurul cuiuluĭ.

Pentru a desina o circumferență a căreĭ centru este un punct O și cu o rață egală cu o linie dată AB, se deschide compasul așa ca vîrfurile ascuțite să stee în A și B: apoĭ unul din vîrfurĭ se fixează în O, iar pe celalalt vîrf îl facem să se miște pe hărtie; urma lăsată de acest din urmă vîrf este o circumferență.

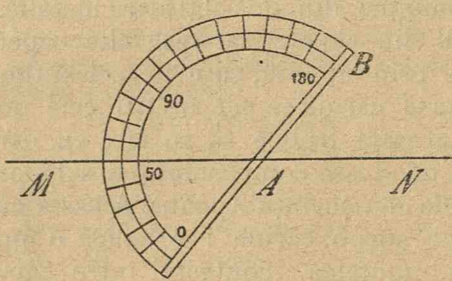
127. **Raportor**. Instrumentul cu ajutorul căruia putem măsura saŭ desina unghiurĭ, se numește *raportor*.

Raportorul este un semi-cerc, de metal saŭ de materie de corn, a căruĭ semi-circumferență este împărțită în 180^0, însemnate prin niște trăsăturĭ; nume-



rotaţiunea este făcută în doă senzurĭ ; centrul este însemnat prin un punct la mijlocul dreptei ce uneşte trăsăturile $0-180^0$.

Pentru a măsura unghiul format de doă drepte OA, OB, se aşază raportorul cu centrul în vîrful unghiuluĭ, îndreptănd diametrul $0—180^0$ pe dreapta OA, apoĭ cetim pe circumferenţă numĕrul de grade conţinute pe arcul cuprins între laturile unghiuluĭ.



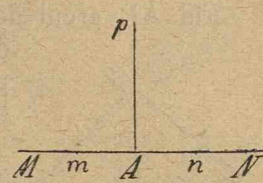
Să ni propunem a duce în un punct A, situat pe o dreaptă MN, o altă dreaptă care să facă cu MN un unghiu de 50^0. Se aşază raportorul aşa ca centrul şi trăsătura de 50^0 să coincidă cu dreapta MN ; apoĭ lunecăm raportorul pe hârtie, menţinănd această coincidenţă, pănă ce marginea bazeĭ raportoruluĭ trece prin A, şi cu un creion tragem o linie pe această margine ca linie : această urmă prelungită AB, este o linie dreaptă care face în A un unghiu de 50^0 cu MN.

PERPENDICULARE. PARALELE. UNGHIURI.

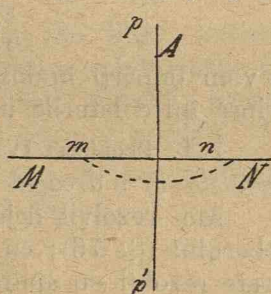
128. **Problema I.**—*A duce prin un punct dat, perpendiculara la o dreaptă dată.*

Fie MN linia dreaptă dată şi A punctul dat ; avem doă cazurĭ de deosebit, după cum punctul A se află pe MN saŭ afară de MN.

1^0. Punctul A se află pe dreapta MN. De o parte şi de alta a punctuluĭ A, ieŭ doă lungimĭ egale între ele $mA = nA$; apoĭ din punctul m ca centru şi cu o rază maĭ mare de căt mA descriŭ un arc de cerc, şi fac acelaşĭ lucru în punctul n: cele doă arcurĭ se taie în un punct p pe care'l unesc cu A; dreapta pA prelungită în sus şi în jos este perpendiculara cerută, şi este uşor de văḑut pentru ce.

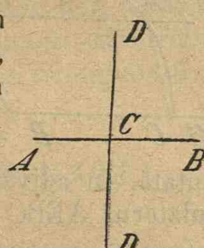


2°. Punctul A nu se află pe dreapta MN. Din punctul A ca centru şi cu o raḑă oare-care, descriŭ o circumferenţă care să taie dreapta MN în doă puncte oare-care m şi n; apoĭ din m, n ca centre cu o aceiaşĭ raḑă maĭ mare de căt jumĕtate mn, descriŭ căte un arc de cerc deasupra şi dedesubtul drepteĭ MN, care se vor tăie respectiv în p şi p'. Dreapta pp', care este uşor de văḑut că trebue să treacă prin A, este perpendiculara căutată.



129. **Problema II.**— *A rădica perpendiculara în mijlocul unuĭ segment de dreaptă.*

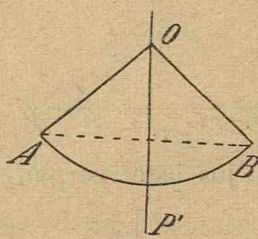
Fie AB segmentul de dreaptă. Din A şi B ca centre şi cu o aceiaşĭ raḑă, maĭ mare de căt jumătate AB, descrim arcurĭ de circumferenţe de o parte şi de alta a drepteĭ; aceste arcurĭ se întretaie în căte un punct D şi D'; dreapta DD' este perpendiculara căutată.



Observăm că în acest mod putem împărţi un segment de dreaptă în doă părţĭ egale.

130. **Problema III.**—*A împărţi un arc de cerc în doă părţĭ egale.*

Fid AB arcul de cerc dat. Ducem coarda AB, pe care o împărţim în doă părţĭ egale prin construcţiunea indicată în problema precedentă.

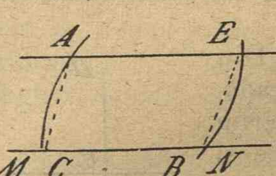


Ca aplicaţiune a problemeĭ acesteia, este construcţiunea bisectoareĭ unuĭ unghiu AOB; vom descri din vîrful unghiuluĭ O, cu o radă oare-care OA un arc de cerc, şi vom împărţĭ în doă părţĭ egale porţiunea de arc cuprinsă între laturile unghiuluĭ.

131. **Problema IV.**— *Prin un punct dat, să se ducă paralela la o dreaptă dată.*

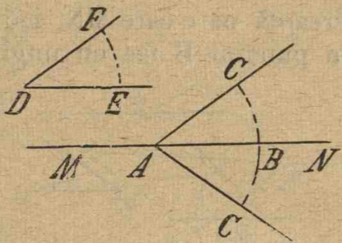
Am rezolvit deja această problemă cu ajutorul echeruluĭ (§. 76); cu maĭ multă exactitate grafică se poate rezolvi cu ajutorul compasuluĭ şi a linieĭ.

Fie MN dreapta dată şi A punctul prin care se cere a se duce paralela la MN. Din un punct B, al drepteĭ MN ca centru şi cu o radă egală cu BA, descrim un arc de cerc care întîlneşte dreapta MN în punctul C; apoĭ din punctul A ca centru şi cu AB ca radă, derscrim un arc de cerc, şi iar din B ca centru cu o deschidere de compas egală cu AC, duc un arc de cerc care va întîlni de cel precedent în un punct E; cu ajutorul linieĭ ducem dreapta ce trece prin A şi E; aceasta va fi paralela căutată. In adivăr, după construcţiune se vede că patrulaterul AEBC este un paralelogram.



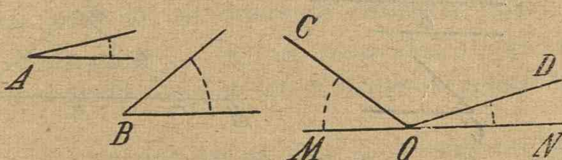
132. **Problema V.**—*Prin un punct situat pe o dreaptă dată, a se duce o linie dreaptă care să facă cu dreapta dată un unghiu dat.*

Fie A punctul dat pe dreapta MN, şi D unghiu dat. Din punctul D ca centru cu o radă oare-care, descrim un arc de cerc care taie laturile unghiuluĭ în E şi F. Din punctu A ca centru cu o aceiaşĭ radă, descrim un arc de cerc care taie dreapta MN în punctul B; ieŭ o deschidere de compas egală cu EF şi din B ca centru descriŭ o circumferenţă care va tăie arcul dus prin B în doă puncte C şi C′; unim A cu C şi cu C′, avem unghiurile CAB şi C′AB, ambele egale cu unghiul D.



133. **Problema VI.**— *Cunoscîndu-se doă unghiurĭ ale unuĭ tniunghiu, să construim pe al treilea.*

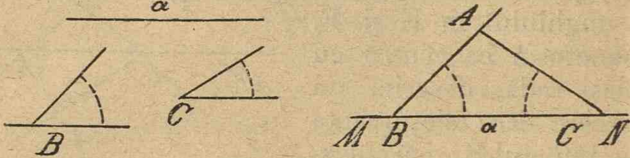
Fie A şi B unghiurile date. Luăm o dreaptă oare-care MN şi pe dănsa un punct O; în acest punct construim, ca în problema precedentă, unghiurile COM şi DON egale respectiv cu unghiurile A şi B; unghiul căutat este COD, căcĭ acesta dinpreună cu celelalte doă, fac la un loc doă unghiurĭ drepte, adică condiţiunea care trebue să o îndeplinească unghiul al treilea al triunghiuluĭ.



CONSTRUCŢIUNĬ DE TRIUNGHIURĬ.

134. **Problema I.** — *Să se construiască un triunghiu cunoscăndu-i-se o lature şi cele doă unghiurĭ adiacente la lature.*

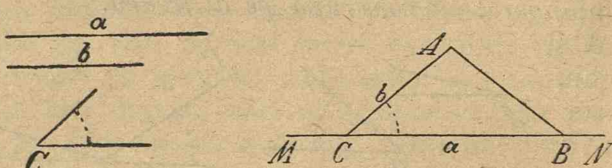
Fie *a* laturea dată, B şi C unghiurile date.—Pe o dreaptă oare-care MN, ieŭ o lungime BC egală cu a; în punctul B fac un unghiu ABC egal cu B, în pun-



ctul C fac un unghiu ACB egal cu C; triunghiul ABC format ast-fel este triunghiul cerut.

135. **Problema II.**—*Să se construiască un triunghiu cunoscându-i-se doă laturĭ și unghiul cuprins.*

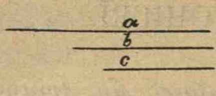
Eie a, b laturile date și C unghiul dat. Pe o dreaptă



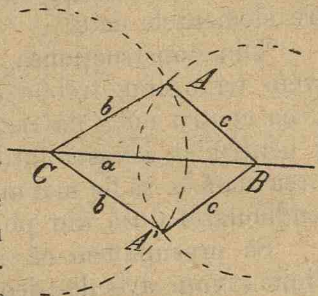
MN, ieŭ o lungime CB egală cu a; în punctul C fac un unghiu egal cu unghiul dat C, și pe laturea care limitează acest unghiu ieŭ cu începere de la C. o lungime CA egală cu b; unesc apoĭ A cu B, ABC este triunghiul cerut.

136. **Problema III.**—*Să se construiască un triunghiu cunoscându-i-se cele treĭ laturĭ.*

Fiă a, b, c cele treĭ laturĭ date. Ieŭ întâĭ lungimea CB=a; apoĭ din punctul C ca centru și cu o rază egală cu b descriŭ o circumferență: din punctul B ca centru cu o rază egală cu c descriŭ



o altă circumferență. Dacă aceste circumferențe se taie avem punctele A și A, cari unite cu C și B daŭ doă triunghiurĭ cari amândoă aŭ cele treĭ laturĭ egale res-



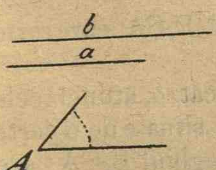
pectiv cu *a, b, c*. Observăm însă că aceste triunghiurĭ sînt egale, şi prin urmare avem numaĭ o soluţiune. Dacă circumferenţele nu se taie problema este imposibilă.

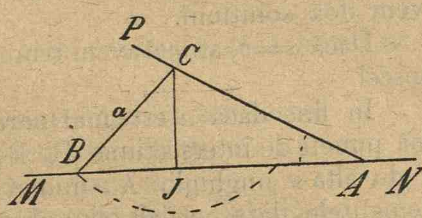
Aşa dar, pentru că să se poată construĭ un triunghiu care să aibă ca laturĭ treĭ lungimĭ date, trebue ca *una din laturĭ să fie maĭ mică de cât suma celorlalte doă, şi maĭ mare de cât diferenţa lor.*

Putem ḑice numaĭ că: *cea maĭ mare dintre cele treĭ lungimĭ date, să fie maĭ mică de cat suma celorlalte doa.* căcĭ cea maĭ mare dintre lungimĭ este totdeauna maĭ mare de cât diferenţa celorlalte doă.

137. **Problema IV**.— *Să se construiască un triunghiu, cunoscăndu-i-se doă laturĭ şi unghiul opus la una din ele.*

Fie *a*, *b*, cele doă laturĭ date şi A unghiul opus latureĭ *a*. Orĭ cum ar fi unghiul A, construcţiunea triunghiuluĭ se face în modul următor: în un punct A al uneĭ drepte oare-care M, se construeşte un unghiu egal cu unghiul dat A, pe laturea AP care mărgineşte



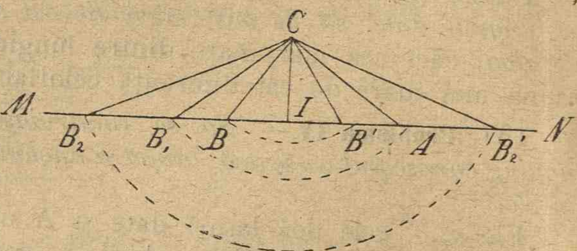


acest unghiu să ie o lungime AC egală cu *b*, apoĭ din punctul C ca centru şi cu o rază egală cu *a*, se descrie o circumferenţă. Fie B un punct de întîlnire al acesteĭ circumferenţe cu dreapta MN; triunghiul ABC are elementele date.

Din construcţiunea aceasta videm că pentru ca să avem triunghiu, trebue ca circumferenţa descrisă din C ca centru cu a ca rază, să întîlnească dreapta MN, şi pentru ca această întîlnire să aibă loc, trebue ca laturea dată a să fie maĭ mare saŭ egală cu lungimea perpendiculareĭ dusă din punctul C pe dreapta MN.

Să presupunem că această condiţiune este îndeplinită; vom ave de deosebit treĭ cazurĭ în privirea mărimeĭ unghiuluĭ A.

1°. *Unghiul A este ascuţit.* Dacă a=CI, circumferenţa în chestiune este tangentă la dreapta MN în I şi avem triunghiul dreptunghic CIA care are elementele date. Dacă a este maĭ mare de cât CI şi maĭ mic de cât b, atuncĭ circumferenţa taie dreapta MN în doă puncte B şi B′ situate de aceiaşĭ parte a punctuluĭ A: aceste amăndoă puncte fiind unite cu C ni daŭ triunghiurile BCA şi B′CA carĭ aŭ elementele date; avem doă soluţiunĭ.

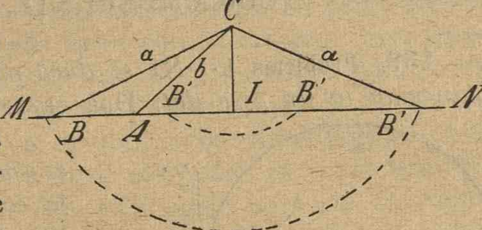


Dacă $a=b$, atuncĭ avem triunghiul B_1CA care este isoscel.

In fine dacă a este maĭ mare de cât b, atuncĭ cele doă puncte de intersecţiune B_2 B'_2 sînt situate de o parte şi de alta a unghiuluĭ A; numaĭ triunghiul B_2CA are elementele date, celalalt triunghiu B'_2CA are laturile a şi b însă nu are unghiul A, ci suplementul luĭ; avem o singură soluţiune.

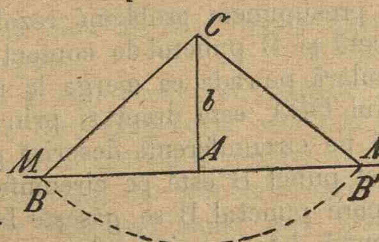
2°. *Unghiul A este obtuz.* Dacă a este maĭ mare de cât b, circumferenţa întîlneşte dreapta MN în B şi

B′ situate de o parte şi de alta a punctuluĭ A ; numaĭ triunghiul BCA este admisibil: avem o soluţiune. Dacă $a=b$ atuncĭ triunghiul se reduce la o linie dréptă. Dacă a este maĭ mic de căt b, ambele



puncte de intersecţiune B_1, B'_1 sînt pe porţiunea AN a drepteĭ MN : nicĭ unul din triunghiurile B_1CA saŭ B'_1CA, nu admite unghiul obtuz A, prin urmare problema este cu neputinţă.

3°. *Unghiul A este drept.* Dacă a este maĭ mare de căt b, circumferenţa taie dreapta MN în doă puncte B, B′, carĭ unite cu C daŭ doă triunghiurĭ dreptunghice BAC şi B′AB amăndoă admisibile; avem însă numaĭ o soluţiune, căcĭ triunghiurile sînt egale. Dacă $a=b$, triunghiul se reduce la o



dreaptă CA. Dacă a este maĭ mic de căt b, circumferenţa nu întîlneşte pe MN ; nu avem nicĭ o soluţiune.

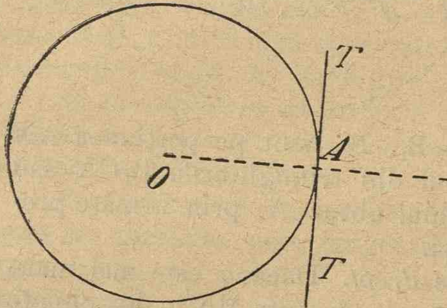
Toată discuţiunea este rezumată în tabloul următor :

$a<CI$ . . . . nu avem nicĭ o soluţiune.

$$a>CI\left\{\begin{array}{ll} A<90^0 & \left\{\begin{array}{ll} a<b & \text{avem doă soluţiunĭ.} \\ a>b & \text{avem una soluţiune.} \end{array}\right. \\ A>90 & \left\{\begin{array}{ll} a<b & \text{nu avem nicĭ o soluţiune.} \\ a>b & \text{avem una soluţiune.} \end{array}\right. \\ A=90 & \left\{\begin{array}{ll} a<b & \text{nu avem nicĭ o soluţiune.} \\ a>b & \text{avem una soluţiune.} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

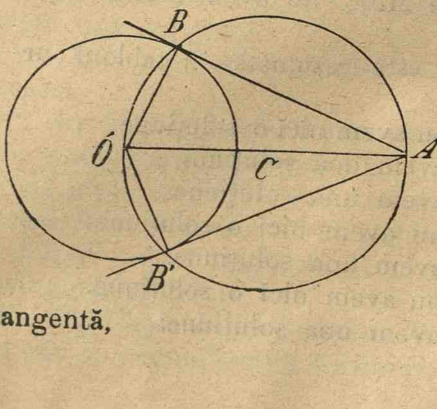
CONSTRUCȚIUNĬ DE TANGENTĂ LA CIRCUMFERENŢE.

138. **Problema I.**—*Să se ducă prin un punct dat o tangentă la un cerc dat.* Doă cazurĭ se pot prezenta:



1°. Punctul dat A se află pe circumferenţa cerculuĭ dat. Pentru a construi tangenta, duc raḑa OA şi în punctul A duc perpendiculara TT' la OA; TT' este tangenta căutată.

2°. Punctul dat A este în afară de cerc. Să presupunem problema rezolvită; fie AB tangenta cerută şi B punctul de contact. Tangenta fiind perpendiculară pe raḑa ce merge la punctul de contact, unghiul OBA este drept şi prin urmare punctul B se află pe circumferenţa descrisă pe OA ca diametru; tot acest punct B este pe circumferenţa cerculuĭ O: prin urmare punctul B se găseşte la intersecţiunea circumferenţeĭ date cu circumferenţa descrisă pe OA ca diametru. De aicĭ rezultă construcţiunea următoare: pe OA ca diametru descrim o circumferenţă, unim punctul A cu punctul B, de intersecţiune a celor doă circumferenţe, şi AB este tangenta căutată. Cele doă circumferenţe se maĭ tae în un alt punct B'; AB' este o a doa tangentă,



139. **Corolar**. *Tangentele duse din un punct exterior la un cerc, sînt egale între ele și dreapta care unește punctul cu centrul cercului, este bisectoara unghiului format de cele doă tangente.* Raportându-ne la figura precedentă, videm că triundhiurile dreptunghice ABO și AB′O sînt egale între ele, căcĭ aŭ ipotenuza OA comună și laturile OB, OB′ egale între ele ca raḑe a cercului O: prin urmare rezultă AB=AB′ și unghiurile BAO și B′AO egale între ele.

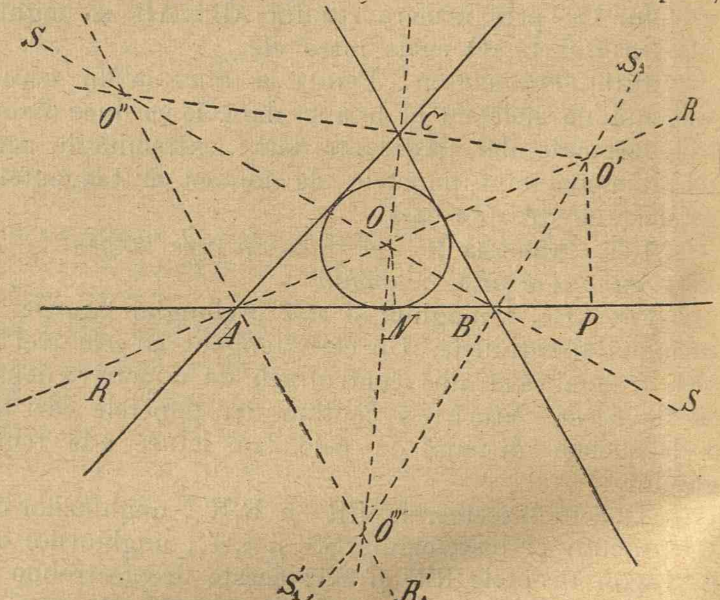
140. *Observațiune*. Pentru a duce la un cerc o tangentă paralelă cu o dreaptă dată, se va duce diametrul perpendicular pe dreapta dată: extremitățile acestuĭ diametru sînt punctele de contact al tangentelor paralele cu dreapta dată.

141. **Problema II**.—*A duce un cerc tangent la cele treĭ laturĭ a-le unuĭ triunghiu.*

Fie ABC triunghiul și să'ĭ prelungim laturile în amândoă direcțiunele. Un cerc tangent la cele treĭ laturĭ trebue să'șĭ aibă centrul seŭ de o potrivă depărtat de aceste laturĭ. Să căutăm dar punctele cari pot fi la aceiașĭ distanță de cele treĭ laturĭ a-le triunghiuluĭ.

Ducem bisectoarele RR′ și $R_1R'_1$, unghiurilor din A, precum și bisectoarele SS′ și $S_1S'_1$, unghiurilor din B. Luăm dreptele RR′ și SS′; aceste drepte trebue să se întîlnească în un punct O de aceiașĭ parte cu C în privirea drepteĭ AB, fiind că secanta AB formează cu aceste drepte, înspre C, doă unghiurĭ interne ABC și BAR a căror sumă este maĭ mică de cât un unghiu drept, căcĭ aceste doă unghiurĭ fac $\frac{1}{2}(A+B)$ și suma $(A+B)$ este maĭ mică de cât 2 unghiurĭ drepte: așa dar punctul O se află în interiorul unghiurilor CAB și CBA, adică în interiorul triunghiuluĭ. Acest punct O este de o potrivă depărtat de cele treĭ laturĭ a-le triunghiuluĭ dat; așa dar dacă din O ca centru cu ON (perpendiculara dusă din O pe AB) ca radă descrim o circumferenţă, aceasta va fi tangentă la laturile triunghiuluĭ.

Să luăm acum dreptele RR′ şi $S_1S'_1$; aceste drepte se întîlnesc în un punct O′ situat deiaceaşĭ parte cu punctul C în privirea dreptei AB, fiind că unghiurile interne RAB şi S_1BA, formate de cele doă drepte şi



secanta AB, fac la un loc $\frac{1}{2}$(A+B)+1 ungh. drept. Punctul O′ se află dar în unghiul exterior din B, prin urmare putem dice că se află în unghiul A afară din triunghiu. Acest punct O′ este iarăşĭ de o potrivă depărtat de cele treĭ laturĭ a-le triunghiuluĭ dat; aşa dar dacă din O′ ca centru cu O′P (perpendiculara dusă din O′ pe AB) ca radă descrim o circumferenţă, aceasta va fi tangenta la BC între B şi C şi în prelungirile laturilor AC şi AB.

Tot în modul acesta găsim punctele O″ şi O‴ centrele altor doă circumferenţe tangente la laturile triunghiuluĭ

Cercul O se ḑice că este *înscris* triunghiuluĭ, iar cercurile O′, şi O″ şi O‴ sînt *ex-înscrise.*

142. *Observaţiune.* Din problema precedentă, scoatem că punctul O, fiind egal depărtat de cele treĭ laturĭ a-le triunghiuluĭ, aparţine şi bisectoareĭ unghiuluĭ C. Aşa că putem ḑice:

Cele treĭ bisectoare a unghiurilor unuĭ triunghiu se taie în un acelaşĭ punct.

Examinănd poziţiunile celorlalte treĭ puncte, O′, O″ şi O‴ faţă cu laturile triunghiuluĭ videm că:

Bisectoarea unuĭ unghiu din un triunghiu şi bisectoarele unghiurilor exterioare triunghiuluĭ, neadiacente cu acel unghiu, se taie în un acelaşĭ punct.

143. **Problema III**.— *Să se contruiască pe o linie dreaptă de lungime dată, un segment de cerc capabil de un unghiu dat.*

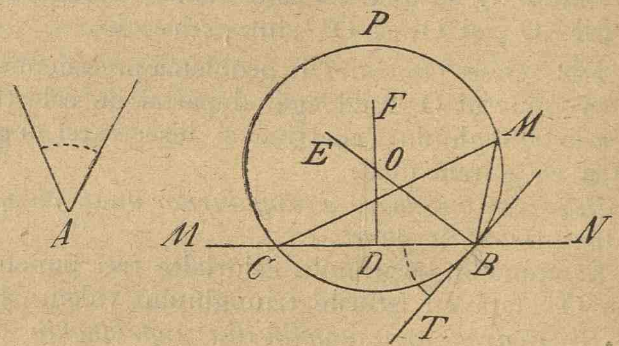
Fie CB dreapta dată; să ni propunem a descri segmentul cerut în partea de deasupra a drepteĭ BC.

Fie A unghiul dat.

Să presupunem problema rezolvită. Fie BMPC segmentul căutat şi O centrul luĭ. Punctul O videm că se află pe perpendiculara DF dusă prin mijlocul D al drepteĭ CB şi pe perpendiculara BE dusă pe tangenta BT la arc, în punctul B. Pe de altă parte unghiul CBT are drept măsură jumătate din arcul CNB întocma ca şi unul oare-care din unghiurile a căror vîrfurĭ sînt pe arcul CBMP precum este d. e. unghiul CMB; aşa dar unghiul CBT este egal cu unghiul dat A.

Din acestea rezultă construcţiunea următoare: în un capăt al dreptei CB, d. e. în B, ducem dreapta

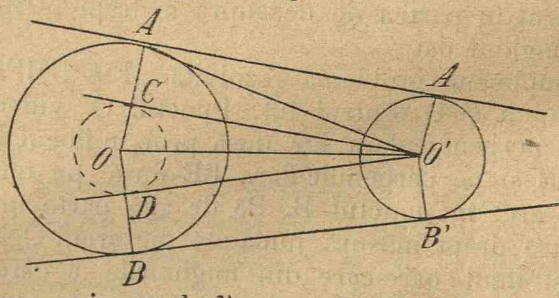
BT care să facă cu BC un unghiu egal cu unghiul dat A; ducem în B perpendiculara pe BT, şi prin mijlocul D al dreptei date BC, perpendiculara la această



dreaptă; punctul O de întîlnire al celor doă perpendiculare este centrul segmentuluĭ de cerc capabil de unghiul dat.

144. **Problema IV.**—*Să se ducă o tangentă la doă circumferenţe de cerc.*

Să presupunem problema rezolvită.



1°. Fie AA′ o tangentă comună *exterioară*, adică în privirea căreia amăndoă cercurile sînt de aceiaş parte. Ducem prin unul din centri, d. e. O′, paralela O′C cu tangenta, care prin urmare este perpendiculara pe rada OA; unghiul OCO′ fiind drept, dreapta O′C va fi tangentă în C la circumferenţa descrisă din O ca centru cu OC ca radă. Insă figura ACO′A′ fiind un dreptunghiu, avem $O'A'=CA$ şi prin urmare $OC=OA-CA$ $=OA-O'A'$.

Din aceste rezultă construcţiunea următoare: din O ca centru şi cu o rață OC egală cu diferenţa razelor cercurilor date, descrim o circumferenţă; din O' ducem o tangentă la această circumferenţă auxiliară, unim punctul de contact al acesteĭ tangente cu O, prelungim OC până ce întîlneşte circumferenţa dată în A, ducem O'A' paralel cu OA şi în fine unind AA', avem tangenta cerută.

Pentru ca problema să fie posibilă videm că'ĭ de ajuns să putem duce din O' o tangentă la cercul auxiliar OC, şi pentru aceasta trebue ca punctul O' să nu fie în interiorul acestuĭ cerc auxiliar, adică să avem:

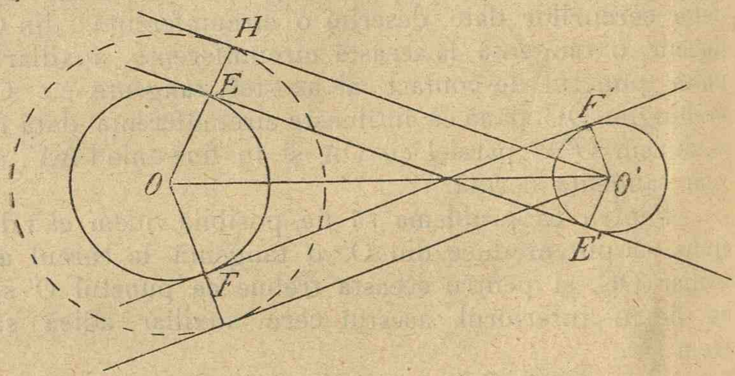
$$OO' \geqq OC, \text{ saŭ } OO' \geqq OA-O'A',$$

care condiţiune însemnează că cercurile O şi O' să nu fie interioare unul altuia.

Dacă cele doă cercurĭ O şi O' sînt exterioare saŭ tangente exterior, orĭ secante, atuncĭ O' este exterior cerculuĭ auxiliar şi putem duce din O' doă tangente la acest cerc; prin urmare şi cercurile date vor admite doă tangente comune exterioare.

Dacă cercurile date sînt tangente interior, atuncĭ $OO'=OA-O'A'$; punctul O' se află pe circumferenţa auxiliară; în acest caz prin O' se poate duce o singură tangentă la cercul auxiliar şi punctul de contact este însuşĭ punctul O'; cele doă cercurĭ aŭ o singură tangentă comună exterioară.

2°. Fie acum EE' o tangentă comună *interioară*, adică în privirea căreia cercurile sînt de o parte şi de alta. Să ducem prin O' paralela O'H la EE': videm, ca şi maĭ sus, că această paralelă este tangentă la o circumferenţă concentrică cu O şi cu rața egală cu suma, OE+O'E', radelor date. Scoatem construcţiunea următoare: din O ca centru cu o radă egală cu suma radelor cercurilor date, descrim o circumferenţă, şi din



O' ducem o tangentă O'H la această circumferenţă; unim OH care taie circumferenţa O în E; ducem O'E' paralelă cu OE; unim E cu E' şi avem tangenta cerută.

Pentru ca problema să fie posibilă videm că'ĭ de ajuns ca O' să nu fie în interiorul cercului auxiliar, adică să avem

$$OO' \geqq OH, \text{ saŭ } OO' \geqq OE + O'E',$$

care condiţiune însemnează că cercurile O şi O' pot fi numaĭ exterioare saŭ tangente exterior.

In cazul întâĭ punctul O' este exterior cercului auxiliar şi vom pute duce prin el doă tangente la acest cerc; prin urmare şi cercurile date vor admite doă tangente comune interioare.

In cazul al doilea, punctul O' este chiar pe circumferenţa auxiliară; nu putem duce prin el de cât o singură tangentă la acest cerc şi punctul de contact este însuşĭ O'; cele doă cercurĭ nu admit de cât o singură tangentă comună interioară.

145. **Exerciţiĭ.**—1. *A construi un trapez cunoscându-i-s laturile.* Se construeşte maĭ întâĭ un triunghiu auxiliar a căru

laturī sînt cele doă neparalele a-le trapezuluī şi diferenţa între cele paralele ; după aceasta este uşor de format trapezul.

2. *Se daŭ, un punct şi doă drepte paralele ; a se duce prin punct o secantă astfel ca porţiunea cuprinsă între cele doă paralele să fie de o lungime dată.* Fie A punctul dat ; din un punct M de pe una din drepte şi cu radă egală cu lungimea dată descrim o circumferenţă care va tăie pe ceialaltă dreaptă în doă puncte B şi B' ; dreptele duse prin A paralele cu MB şi MB' sînt secantele căutate.

3. *A construi un triunghiu cunocăndu-i-se baza, înălţimea şi lungimea medianeĭ corespunzetoare bazeĭ.* Fie BC baza, AH înălţimea şi AM mediana ; construesc maĭ întâĭ triunghiul dreptunghic AMH căruia i se cunoaşte ipotenuza AM şi laturea AH ; prelungesc MH în amăndoă direcţiunile şi port începînd de la M la dreapta şi la stănga lungimĭ egale cu jumătatea bazeĭ şi am triunghiul.

4. *A construi un triunghiu cunoscăndu-i-se doă unghiurĭ şi una din înălţimĭ.* Ieŭ doă paralele MN, PQ astfel ca distanţa între ele să fie egală cu înălţimea AH ; fac în A unghiurile MAB şi NAC egale respectiv cu cele doă unghiurĭ date, şi triunghiul ABC îndeplineşte condiţiunile problemeĭ. (Discuţiune).

5. *A construi un trapez cunoscăndu-i-se diagonalele şi laturile paralele.* Construesc un unghiŭ auxiliar ABC, a-le căruĭ laturĭ să fie AB, BC egale respectiv cu diagonalele date şi AC egală cu suma AD+DC a laturilor paralele ; prin B duc paralela la bază, BE egală cu DC, şi în senz opus ; unesc EA şi BD şi am trapezul cerut.

6. *A înscri în un cerc un unghiu dat, aşa ca una din laturile luĭ să treacă prin un punct dat şi ceialaltă lature să fie paralelă cu o dreaptă dată.* Fie A punctul, BC dreapta şi O cercul. In un punct M pe BC fac unghiul BMN egal cu unghiul dat ; prin A duc paralela cu MN care taie circumferenţa în doă puncte D şi E, prin care ducem paralele cu BC, aceste paralele fac cu ADE unghiurile cerute. (Discuţiune).

7. *A descri, cu o rază dată, o circumferenţă tangentă la o dreaptă dată şi la o circumferenţă dată.* Duc o paralelă MN cu dreapta dată AB, şi din centrul O al circumferenţeĭ date, cu o radă egală cu suma razelor circumferenţelor date descrim o circumferenţă care taie pe MN în doă puncte ; orĭ-care din aceste puncte poate fi centrul circumferenţeĭ căutate. (Discuţiune).

8. *A construi un paralelogram cunoscăndu-i-se diagonalele şi unghiul.* Se poate construi unul din cele patru triunghiurĭ

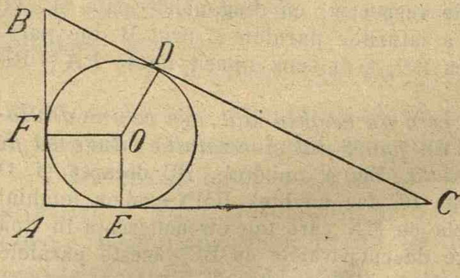
format de diagonale și din cunoștința acestuĭ triunghiu se deduce ușor paralelogramul.

9. *A construi un triunghiu cunoscându-i-se unghiurile și suma a doă laturĭ.* Se presupune problema rezolvită. Fie ABC triunghiul căutat; dacă prelungesc AB de o lungime BD egală cu BC, pot forma triunghiul ADC care are ca latură AD=AB+BC, unghiul din A și unghiul din D egale cu $^1/_2$B. Așa dar triunghiul ADC se poate construi; din el voiu deduce pe ABC.

10. *A construi un triunghiu cunoscându-i-se unghiurile și perimetru.* Construesc un triunghiu auxiliar DAE cu baza DE egală cu perimetrul dat, și unghiurile D și E egale respectiv cu jumătățile a doă din unghiurile date; apoĭ fac în A, în interiorul triunghiuluĭ, un unghiu DAB egal cu D și un unghiu EAC egal cu E, triunghiul BAC căpătat este triunghiul căutat.

11. *A duce o secantă comună la doă circumferențe, astfel ca coardele interceptate să fie egale cu niște lungimĭ date.* Inscriŭ în cercurile date O și O′ coardele date AB, A′B′; apoĭ descriŭ respectiv circumferențe concentrice cu cele date și tangente la aceste coarde; o tangentă comună la aceste din urmă circumferențe este secanta căutată. (Discuțiune).

12. *Diametrul cercului înscris în un triunghiu dreptunghic este egal cu diferența între suma catetelor și ipotenuză.*



Videm pe figură că BF=BD și CE=CD de unde BF+CE=BC; prin urmare suma catetelor maĭ puțin *AF* și AE face cât ipotenuza; însă AF=AE=diametrul cerculuĭ; așa dar, etc. etc.

CARTEA III.

FIGURI ASEMENE

CAPITULUL I

LINII PROPORȚIONALE

146. Definițiunĭ.—Să considerăm doă cantitățĭ variabile X şi Y, a căror valorĭ să atîrne de o a treia cantitate Z, aşa fel că, la diverse valorĭ

$$Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 \ldots$$

ce s'ar da luĭ Z, să corespundă pentru X şi Y nişte anumite valorĭ d. e.

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \ldots$$
$$Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 \ldots$$

Cantitățile X şi Y, se numesc *proporționale* între ele, atuncĭ cănd raportul a doă valorĭ a-le cantitățeĭ X este egal cu raportul valorilor corespundătoare a-le cantitățeĭ Y, adică dacă avem d. e.

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2};$$

această expresiune poartă numele de *proporțiune*.

Dacă se întâmplă ca X_2 să fie egal cu Y_1, atuncĭ proporțiunea precedentă se scrie

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{X_2}{Y_2},$$

în acest caz se ḑice că X_2 est *medie proporțională* între X_1 și Y_2; iar Y_2 este o a *treia proporțională* între X_1 și X_2.

Proporțiunea formată cu cele patru valorĭ a-le cantităților X și Y se poate înlocui prin proporțiunea formată cu numeriĭ carĭ exprimă măsurile acelor cantitățĭ.—In adevăr, fie x și y unitățile de măsură pentru cantitățile de specia X și Y respectiv și să luăm în special valorile X_1, X_2, Y_1, Y_2: avem d. e.

$$X_1 = xx_1,\ X_2 = xx_2,\ Y_1 = yy_1,\ Y_2 = yy_2;$$

x_1, x_2, I_1, I_2 sînt numeriĭ carĭ reprezintă măsurile respective a-le acelor patru cantitățĭ; videm că avem

$$\frac{X_2}{X_2} = \frac{xx_1}{xx_2} = \frac{x_1}{x_2} \text{ și } \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{yy_1}{yy_2} = \frac{y_1}{y_2}$$

și prin urmare proporțiunea

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2}$$

se poate înlocui prin proporțiunea

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}.$$

147. **Lemmă.**—*Dacă pe o linie dreaptă luăm doă puncte fixe A și B, exista pe acea dreaptă alte doă puncte, și numaĭ doă, astfel că raportul între distanțele orĭ-căruia din ele, la cele doă puncte fixe, să fie egal cu un raport dat. Unul din aceste puncte se află între A și B și celalalt în afară pe prelungirea segmentuluĭ AB.*

Să căutăm maĭ întăĭ dacă între A și B este un punct care să respundă la chestiune. Fie $\frac{5}{3}$ raportul dat. Impărțim distanța AB în 5+3 adică 8 părțĭ egale și punem la a cincea trăsătură litera C; punctul C respunde la chestiune căcĭ avem:

$$\frac{CA}{CB} = \frac{5}{3}.$$

Punctul C este singurul situat între A şi B a căruĭ raport de distanţe la A şi B este egal cu $^5/_3$, căcĭ să imaginăm un punct mobil M care să plece din A şi să meargă spre B, şi în fie-care poziţiune să considerăm raportul $\frac{MA}{MB}$; M îndepărtându-se de A, MA numĕrătorul raportuluĭ se măreşte, şi MB numitorul raportuluĭ se micşurează; raportul merge dar tot crescând şi prin urmare nu poate avea de cât o singură dată valoarea $\frac{5}{3}$.

Să căutăm acum în afară de A şi B dacă este un punct D care iar să respundă la chestiune. Vom deosebi doă cazurĭ, după cum raportul dat este maĭ mare saŭ maĭ mic de cât 1.

Să luăm cazul întâĭ, raportul maĭ mare de cât 1 d. e. $^5/_3$. Punctul D fiind maĭ departe de A de cât de B,

el nu se poate afla de cât în direcţiunea AB dincolo de B: împărţim pe AB în 5—3, saŭ 2 părţĭ egale şi purtăm treĭ de aceste părţĭ până în D; vom ave $\frac{DA}{DB}=\frac{5}{3}$. Punctul D este singurul situat în prelungirea luĭ AB a căruĭ raport de distanţă la A şi B să fie egal cu $^5/_3$; căcĭ să imaginăm iarăşĭ un mobil care pleacă din B şi se îndepărtează în direcţiunea BD şi să considerăm raportul $\frac{MA}{MB}$. Putem scri

$$\frac{MA}{MB}=\frac{MB+BA}{MB}=1+\frac{BA}{MB};$$

de unde videm că raportul $\frac{MA}{MB}$ este egal cu 1 plus raportul $\frac{BA}{MB}$; acest din urmă raport se micşurează necontenit când M se îndepărtează de B, prin urmare şi raportul $\frac{MA}{MB}$ se va micşura şi el necontenit cu îndepărtarea luĭ M de B, şi nu va ave de cât o singură dată valoarea $\frac{5}{3}$.

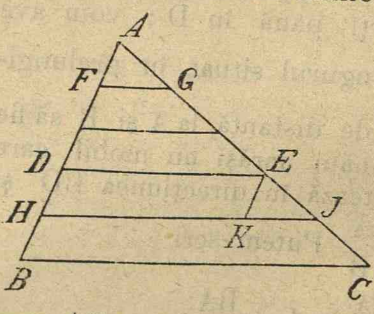
In caz când raportul dat este maĭ mic de că 1, se va vide, în acelaşĭ mod, că punctul căutat se află la stânga luĭ A.

148. TEOREMĂ.— *O paralelă dusă la o lature a unuĭ triunghiu, împarte celelalte doă laturĭ în părţĭ proporţionale.*

Fie DE o paralelă cu laturea BC a triunghiuluĭ ABC ; ḑic că avem

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}.$$

Să admitem că liniile BD şi DB aŭ o comună măsură AF, conţinută de 3 orĭ în AD şi de 2 orĭ în DB, raportul $\frac{AD}{DB}$ va fi egal cu $^2/_3$. Prin punctele de diviziune a latureĭ AB, duc paralele cu BC:



aceste paralele împart laturea AC în segmente egale între ele. In adevăr, să luăm d. e. segmentele AG şi EI şi să arătăm că sînt egale; duc EK paralelă cu AB; dreptele FK şi DH sînt egale ca paralele cuprinse între paralele, însă DH este egal cu AF prin construcţiune, aşa dar EK=AF. Apoĭ triunghiurile AFG şi FKI aŭ laturea FK egală cu AF unghiurile AFG și EKI egale între ele ca avănd laturile lor paralele și de același senz (§. 43) și unghiurile FAG și KEI egale între ele ca corespundetoare; așa dar aceste triunghiurĭ sînt egale, și prin urmare AC este egală cu EI. Tot astfel se va demonstra și egalitatea celorlalte segmente. AE conține de 3 orĭ pe AG și EC de 2 orĭ, și atuncĭ raportul $\frac{AE}{EC}$ este egal cu $\frac{2}{3}$ adică egal cu raportul $\frac{AD}{DB}$.

Dacă AD și DB nu aŭ o comună măsură, atuncĭ pentru formarea raporturilor $\frac{AD}{DB}$, și $\frac{AE}{EC}$ se va urma cum se arată la nota 1 §. 113. și se va vide că și în acest caz cele doă raporturĭ sînt egale.

149. **Corolar I**. Dacă luăm proporțiunea de maĭ sus

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$

și'ĭ schimbăm interniĭ între iĭ, avem

$$\frac{AD}{AE}=\frac{DB}{EC};$$

știm din Aritmetică că : *Suma antecedenților se rapoartă la suma consecvenților, precum un antecedent la consecventul seŭ* *; aplicănd la proporțiunea aceasta avem :

$$\frac{AD}{AE}=\frac{DB}{EC}=\frac{AD+DB}{AE+EC}$$

și înlocuind AD+DB prin AB și AE+EC prin AC ni vine

$$\frac{AD}{AE}=\frac{DB}{EC}=\frac{AB}{AC},$$

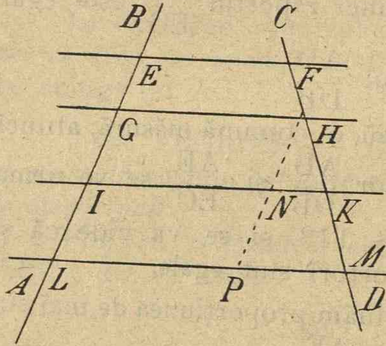
egalitatea acestor raporturĭ ni arată că :

Daca taiem doă laturĭ a-le unuĭ triunghiu prin o paralelă cu laturea a treia, raportul între cele doă din-

*) A vide Aritmetica pag. 197.

tăĭ laturĭ este egal cu raportul segmentelor cuprinse între vîrf şi secantă, şi cu raportul segmentelor cuprinse între secantă şi laturea a treia.

150. *Observaţiune.*—Teorema şi Corolarul precedent se aplică şi în cazul când secanta, în loc de a tăia chiar laturile triunghiuluĭ, taie prelungirile lor, şi demonstraţiunile se fac în acelaşĭ mod.



151. **Corolar II.** *Fiind date doă drepte oarecare, tăiete de maĭ multe secante paralele, segmentele cuprinse între paralele sînt proporţionale.*

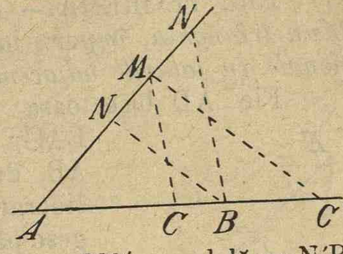
Fie dreptele AB, CD tăete de secantele EF, GH, IK, LM... dic că avem d. e.

$$\frac{GI}{IL}=\frac{HK}{KM}.$$

Duc paralela HP la BA; avem triunghiul HPM a-le căruĭ laturĭ sînt tăiete de NK paralelă la PM.

Aplicând acestuĭ triunghiu teorema precedentă avem
$$\frac{HN}{NP}=\frac{HK}{KM},$$
însă HN şi NP sînt egale respectiv cu GI şi IL, ca paralele cuprinse între paralele, aşa dar înlocuind ni vine,
$$\frac{GI}{IL}=\frac{HK}{KM}.$$

152. **Aplicaţiune.**—Teorema precedentă ni permite de a determina pe o dreaptă ce trece prin doă puncte A şi B, alte doă puncte C şi C′ aşa ca raporturile $\frac{CA}{CB}$ şi $\frac{C'A}{C'B}$ să fie egale cu raportul a doă lungimĭ date *m* şi *n*.



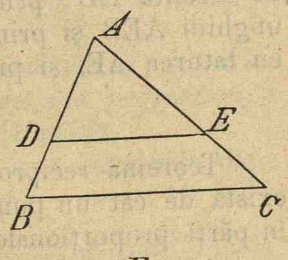
Ducem prin A o dreaptă oare-care şi luăm pe ea cu începere de la punctul A o lungime AM egală cu m şi apoĭ de o parte şi de alta a punctuluĭ M luăm MN, şi MN′ egale cu n: unim N cu B şi ducem MC paralelă cu NB; unim N′ cu B şi ducem MC′ paralelă cu N′B. Punctele C şi C′ sînt cele căutate, căcĭ avem,

$$\frac{CA}{CB}=\frac{MA}{MN}=\frac{m}{n} \text{ şi } \frac{C'A}{C'B}=\frac{MA}{MN'}=\frac{m}{n}.$$

153. TEOREMĂ.—*Dacă o linie dreaptă împarte doă laturĭ a-le unuĭ triunghiu în segmente proporţionale, ea este paralelă cu laturea a treia.*

Aceasta este reciproca Teoremeĭ precedente. Presupun că dreapta DE, împarte laturile AB şi AC în segmente porporţionale, aşa că avem:

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC},$$

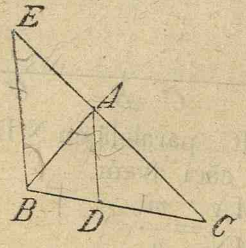


dic că DE este paralelă cu BC. În adevăr, dacă prin D duc palela la BC, această paralelă va împărţi pe AC în doă părţĭ proporţionale cu AD şi DB; însă E este singurul punct între A şi C care împarte pe AC în raportul de AD la DB (§. 147); aşa dar paralela dusă prin D va trece prin E.

154. *Observaţiune.* Teorema se aplică şi se demonstrează în acelaşĭ mod şi în cazul când punctele D şi E sînt pe prelungirile laturilor BA, CA, cu condiţiune numaĭ că amândoă punctele să fie de aceiaşĭ parte a luĭ A.

155. TEOREMĂ. — *Bisectoarea unuĭ unghiu dintr'un triunghiu, împarte laturea opusă în părţĭ proporţionale cu laturile adiacente.*

Fie AD bisectoarea unghiuluĭ A din triunghiul BAC; prin extremitatea B a latureĭ AB, duc paralela la bisectoarea considerată, şi laturea CA o prelungesc până ce întilneşte paralela în E.



Avem triunghiul BCE cu paralela AD la laturea BE: această paralelă AD împarte laturile CB, CE în părţĭ proporţionale, adică avem,

$$\frac{BD}{DC}=\frac{AE}{AC}.$$

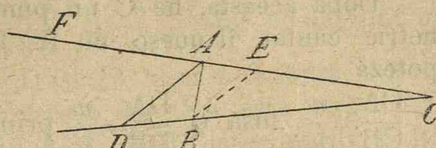
Insă triunghiul EAB este isoscel, căcĭ unghiul din E este egal cu unghiul DAC ca corespondente, în privirea paralelelor BE, DA şi a secanteĭ CE; apoĭ unghiul DAC este egal cu unghiul BAD prin construcţiune şi în fine unghiul BAD este egal cu unghiul ABE ca alterne-interne în privirea aceloraşĭ paralele tăiete de secanta AB; prin urmare unghiul ABE este egal cu unghiul AEB şi prin urmare şi laturea AB este egală cu laturea AE, şi proporţiunea de maĭ sus devine,

$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}.$$

Teorema reciprocă acesteia, rezultă din aceia că nu există de căt un punct D pe BC, care să o împartă în părţĭ proporţionale cu laturile AB, AC.

156. TEOREMĂ. — *Bisectoara unuĭ unghiu exterior la un triunghiu, determinează pe laturea opusă prelungită, un punct a căruĭ distanţe la extremităţile aceşteĭ laturĭ. sînt proporţionale cu laturile adiacente.*

Fie AD bisectoara unghiuluĭ FAB exterior unghiuluĭ BAC; prin extremitatea B a uneia din laturile AB, AC a unghiuluĭ, duc paralela la bisectoara considerată, care întîlneşte laturea AC în E. Avem triunghiul CDA cu paralela BE la DA ; această paralelă împarte laturile AC, DC în părţi proporţionale, adică avem



$$\frac{DC}{DB}=\frac{AC}{AE}.$$

Ca şi la Teorema precedentă, se va vide că triunghiul ABE este isoscel, de unde urmează că AE este egală cu AB, şi atuncĭ proporţiunea aceasta devine.

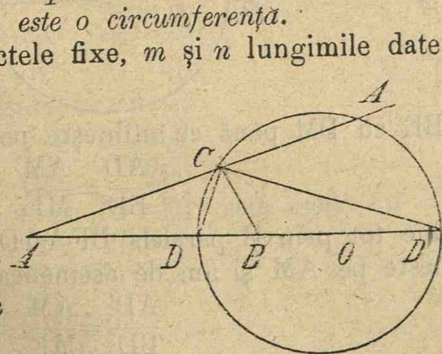
$$\frac{DC}{DB}=\frac{AC}{AB}.$$

Reciproca acesteia este şi ea adivărată pentru că ştim (§. 147) că în prelungirea latureĭ CB nu există de căt un singur punct al căruĭ raport de distanţe la C şi B, să fie egal cu raportul laturilor AB, AC.

157. *Observaţiune.*—Din cele doă Teoreme precedente rezultă: *Bisectoara unuĭ unghiu din un triunghiu şi bisectoara unghiuluĭ exterior adiacent, împart laturea opusă în segmente proporţionale.*

158. TEOREMA.— *Locul geometric al punctelor a căror distanţe, la doă puncte date, sînt proporţionale cu nişte lungimĭ date. este o circumferenţă.*

Fie A şi B punctele fixe, m şi n lungimile date. Ştim (§. 147) că avem pe dreapta AB doă puncte D şi D′ a căror raporturĭ de distanţe la A şi B sînt egale cu raportul dat $\frac{m}{n}$; aceste puncte fac parte din locul geometric căutat.



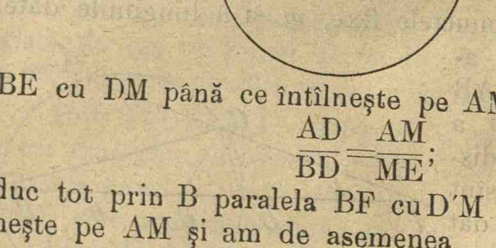
După aceasta, fie C un punct de a locului geometric căutat, îl unesc cu A, D, B, D'; avem prin ipoteză

$$\frac{CA}{CB}=\frac{m}{n},\ \text{însă şi}\ \frac{DA}{DB}=\frac{m}{n}\ \text{prin urmare}\ \frac{CA}{CB}=\frac{DA}{DB};$$

din această din urmă proporţiune rezultă (§. 155) că CD este bisectoara unghiuluĭ ACB din triunghiul ACB.

Dar maĭ avem şi $\frac{D'A}{D'B}=\frac{CA}{CB}$, ca fiind ambele rapoturĭ egale cu $\frac{m}{n}$; din această din urmă proporţiune rezultă că CD' este bisectoara unghiuluĭ BCA' care'ĭ exterior triunghiuluĭ ACB şi adiacent unghiuluĭ ACB din acest triunghiu. Insă unghiul DCD' este drept, fiind că'ĭ jumătate din suma unghiurilor ACB şi BCA' formate de o parte a drepteĭ AA'; aşa dar C se află pe circumferenţa descrisă pe DD' ca diametru.

159. Reciproc, *orĭ-ce punct de-al circumferenţeĭ descrisă pe DD' ca diametru, face parte din locul geometric căutat.*



Fie M un punct de-al circumferenţeĭ, dic că o să avem

$$\frac{AM}{BM}=\frac{AD}{BD}=\frac{AD'}{BD'}.$$

Pentru a demonstra aceasta duc prin B paralela BE cu DM până ce întîlneşte pe AM şi avem

$$\frac{AD}{BD}=\frac{AM}{ME};$$

duc tot prin B paralela BF cu D'M iar până ce întîlneşte pe AM şi am de asemenea

$$\frac{AD'}{BD'}=\frac{AM}{MF}.$$

Insă raporturile $\frac{AD}{BD}$ şi $\frac{AD'}{BD'}$, sînt egale, fiind că prin ipoteză punctele D şi D' împart dreapta AB în segmente proporţionale: aşa dar ME este egală MF.

Insă în triunghiul EBF, avem laturile BE şi BF paralele respectiv cu laturile unghiuluĭ drept DMD'; prin urmare unghiul EBF este şi el drept; mijlocul M al ipotenuzeĭ EF este egal depărtat de F, B, E. Putem dar înlocui în cele doă din urmă proporţiunĭ ME şi MF prin MB şi avem ceia ce se cere.

160. TEOREMĂ,—*Dacă o dreaptă este împărţită în segmente proporţionale prin doă puncte, jumătatea drepteĭ este medie proporţională între distanţele mijloculuĭ eĭ la cele doă puncte.*

Fie AB dreapta, C şi D cele doă puncte, I mijlocul drepteĭ AB.

Avem prin ipoteză proporţiunea:

$$\frac{AD}{AC}=\frac{BD}{BC}.$$

Se ştie din Aritmetică că: *suma antecedenţilor se rapoartă la suma consecvenţilor precum diferenţa antecedenţilor la diferenţa consecvenţilor**). Aplicând aceasta proporţiuneĭ precedente avem

$$\frac{AD+BD}{AC+BC}=\frac{AD-BD}{AC-BC}$$

saŭ, uitându-ne pe figură videm că

$$\frac{2IB+2BD}{2IB}=\frac{2IB}{2IC},$$

factorul 2 dispare şi suma IB+BD este egală cu ID şi ni vine

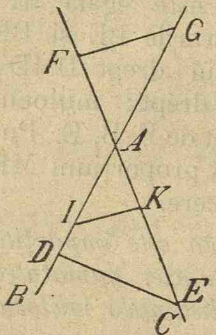
$$\frac{ID}{IB}=\frac{IB}{IC}$$

ceia ce demonstrează Teorema.

*) A vide Aritmetica pag. 197.

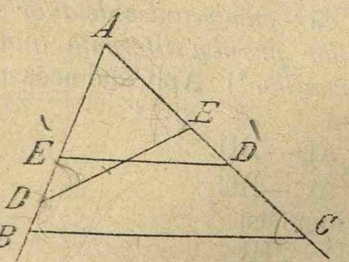
Reciproca Teoremeĭ este adivărată, căcĭ din proporţiunea din urmă se poate deduce proporţiunea dintăĭ.

161. **Definiţiune.**—*Doă drepte cuprinse între laturile unuĭ unghiu saŭ a-le opusuluĭ seŭ la vîrf, se ḑic* **anti-paralele**, *dacă cea dintâĭ dreaptă face cu una din laturile unghiuluĭ dat, un unghiu egal cu acel făcut de a doa dreaptă cu ceialaltă lature.*



Ast-fel, fiind dat unghiul BAC, dreptele DE, IK sînt *anti-paralele* în privirea unghiuluĭ BAC, dacă unghiul ADE este egal cu unghiul AKI; de asemene dreptele DE, FG sînt *anti-paralele*, dacă unghiul ADE este egal cu unghiul AFG.

162. TEOREMĂ —*Dacă doă laturĭ a-le unuĭ unghiu sînt taiete de doă drepte anti-paralele, productul distanţelor de la vîrful unghiuluĭ până la cele doă puncte de întîlnire a uneĭ laturĭ cu cele doă anti-paralele, este constant.*



Fie BC şi DE doă anti-paralele în unghiul BAC; ḑic că avem relaţiunea

$$AB \times AD = AC \times AE.$$

In adivăr, ieŭ $AD' = AD$ şi $AE' = AE$ şi duc $D'E'$. Din egalitatea triunghiurilor ADE, $AD'E'$, carĭ aŭ un unghiu egal cuprins între laturĭ egale, rezultă că unghiurile ADE şi $AD'E'$ sînt egale. Apoĭ, unghiurile ADE şi ACB sînt egale prin ipoteză, prin urmare unghiurile corespunzătoare $AD'E'$ şi ACB sînt egale şi atuncĭ BC şi $E'D'$ sînt paralele, şi avem proporţiunea (§. 148).

$$\frac{AB}{AE'}=\frac{AC}{AD'}$$

în care dacă înlocuim AE și AD′ prin egalele lor AE, AD ni vine

$\frac{AB}{AE}=\frac{AC}{AD}$, saŭ $AB\times AD=AC\times AE$, ceia ce demonstră Teorema.

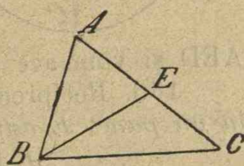
Tot astfel se face demonstrațiunea, cînd DE s'ar afla în opusul la vîrf al unghiuluĭ BAC.

163. Reciproc, dacă avem $AB\times AD=AC\times AE$, saŭ

$$\frac{AB}{AE}=\frac{AC}{AD},$$

atuncĭ dreptele BC și DE sînt anti-paralele. In adivăr, să ne imaginăm că ducem prin E anti-paralela la BC în privirea unghiuluĭ BAC; această dreaptă tae laturea AB în un punct a căruĭ distanță la vîrful A va fi o a patra proporțională la AB, AE, AC. Apoĭ, AD este tocma această a patra proporțională după cum se vede din proporțiunea de maĭ sus.

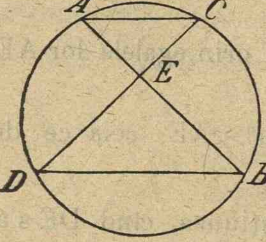
164. **Corolar**. Dacă punctul D și B se confundă atuncĭ avem $\overline{AB}^2=AC\times AE$. Așa dar:



Dacă doă drepte anti-paralele în un unghiu, aŭ un punct comun pe o lature a unghiuluĭ, distanța vîrfuluĭ unghiuluĭ la acel punct comun este medie proporțională între distantele vîrfuluĭ la punctele în carĭ laturea a doa întîlnește dreptele anti-paralele

Reciproca aceste proposițiunĭ este evidentă.

165. TEOREMĂ.—*Dacă din un punct dat, ducem secante la un cerc, productul distanțelor de la punct și până la punctele de intersecțiune a fie-căreĭ secante cu circumferența este constant, orĭ-care ar fi direcțiunea secanteĭ.*

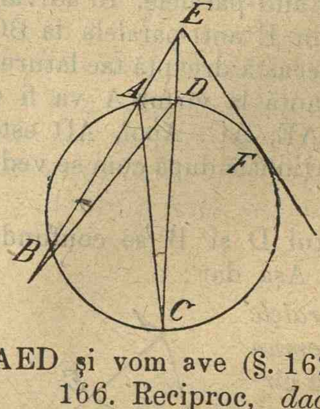


Punctul dat poate fi interior circumferenţeĭ saŭ exterior.

*1*⁰. Fie E un punct interior circumferenţeĭ prin care ducem secantele AB, CD; avem de demonstrat că

$$EA \times EB = EC \times ED.$$

Ducem coardele AC, şi CD, unghiurile ACD şi ABD sînt egale între ele ca avănd aceiaşĭ măsură adică jumătatea arculuĭ AD; atuncĭ dreptele AC, BD sînt antiparalele în privirea unghiuluĭ AEC şi avem ceia ce se cere.



*2*⁰. Fie E un punct exterior circumferenţeĭ, prin care ducem secantele EAB, EDC. Ducem coardele AC, BD; unghiurile ACD şi ABD sînt egale între ele, ca avănd aceiaşĭ măsură adică jumătatea arculuĭ AD; atuncĭ dreptele AC, BD sînt anti-paralele în privirea unghiuluĭ AED şi vom ave (§. 162). $EA \times EB = ED \times EC$.

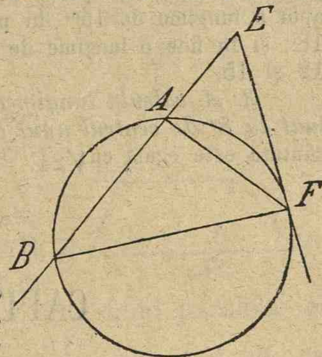
166. Reciproc, *dacă doă drepte AB, CD se taie în un punct E astfel ca să avem relaţiunea*

$$EA \times EB = ED \times EC,$$

atuncĭ punctele A, B, C, D sînt situate pe o aceiaşĭ circumferenţă.

In adivăr, relaţiunea aceasta probează că dreptele AC, BD sînt anti-paralele în privirea unghiuluĭ AED, şi că prin urmare unghiurile ACD şi DAB sînt egale; astfel fiind, dacă pe AD ca coardă se descrie un segment capabil de unghiul ACD, circumferenţa care trece prin A, D, C va trece şi prin punctul B.

167. **Corolar.** In cazul punctuluĭ exterio. să presupunem că secanta EDC se întoarce în jurul punctuluĭ E pănă ce coincide cu tangenta EF; secanta întreagă EC şi partea sa externă ED devin ambele egale cu EF, care'ĭ lungimea tangenteĭ dusă din E la circumferenţă, şi relaţiunea respectivă devine:



$$EA \times EB = \overline{EF}^2,$$

care ni spune că: *dacă, prin un punct exterior unuĭ cerc, se duce la acest cerc o secantă şi o tangentă, tangenta este medie proporţională între secanta întreagă şi partea eĭ exterioară.*

Se poate face şi demonstraţiunea directă a acesteĭ Teoreme.

168. Reciproc, *dacă treĭ puncte A, B, F sînt aşezate, cele doă dintâĭ A şi B, pe una din laturile unghiuluĭ E şi al treilea F pe ceialaltă lature, şi dacă avem relaţiunea:*

$$\overline{EF}^2 = EA \times EB,$$

circumferenţa care trece prin aceste treĭ puncte este tangentă în F la laturea EF.

In adevĕr, relaţiunea aceasta probează că dreptele AF, BF sînt anti-paralele în privirea unghiuluĭ E; unghiurile AFE şi EBF sînt egale; astfel fiind dacă descrim o circumferenţă care să treacă prin A şi F şi să fie tangentă în F la EF, această circumferenţă va trece prin punctul B.

169. **Exerciţiĭ si probleme.**—*1. Dacă se unesc punctele din mijloc a laturilor consecutive a-le unuĭ patrulater, se formează un paralelogram;* pentru că liniile duse sînt paralele doă câte doă cu diagonalele paralelogramuluĭ.

2. A calcula cu aproximaţiune de $0^m,001$ segmentele for-

mate de bisectoarele unghiurilor unuĭ triunghiu, a căruĭ laturĭ sînt 12^m, 15^m, şi 18^m. Cestiune revine la: a împărţi o lungime de 12^m, în părţĭ proporţionale cu numeriĭ 15 şi 18; apoĭ o lungime de 15^m în părţĭ proporţionale cu numeriĭ 12 şi 18; şi în fine o lungime de 18^m în părţĭ proporţionale cu nume- 12 şi 15.

3. *A calcula lungimea tangenteĭ duse din un punct situat la 8^m de centrul unuĭ cerc a căreĭ rază este 6^m.* Lungimea căutată este egală cu $\sqrt{24}$.

CAPITULUL II

POLIGOANE ASEMENE.

---

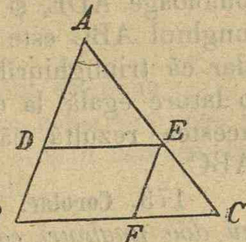
170. **Definiţiunĭ.**—Doă poligoane de un acelaşĭ număr de laturĭ, sînt *asemene* între ele, dacă aŭ unghiurile lor egale unul cu altul şi laturile adiacente la unghiurĭ egale sînt proporţionale şi aşezate în aceiaşĭ ordine.

Doă puncte, doă liniĭ saŭ doă unghiurĭ se ḑic *omoloage,* când se corespund în doă figurĭ asemene. adică punct la punct, linie la linie, şi unghiu la unghiu. Astfel, vîrfurile a doă unghiurĭ egale sînt puncte omoloage; diagonalele determinate de vîrfurĭ omoloage sînt liniĭ omoloage.

Se numeşte *raport de similitudine* a doă poligoane, raportul constant a doă laturĭ omoloage; Dacă acest raport este egal cu 1, cele doă poligoane sînt egale, şi se pot face să coincidă prin suprapunere, fiind că în acest caz toate părţile lor (laturĭ şi unghiurĭ) sînt egale una cu alta şi aşezate în aceiaşĭ ordine.

171. TEOREMĂ.—*Tăind un triunghiu cu o paralelă la laturile sale, se formează un al doilea triunghiu asemenea cu cel dintăĭ.*

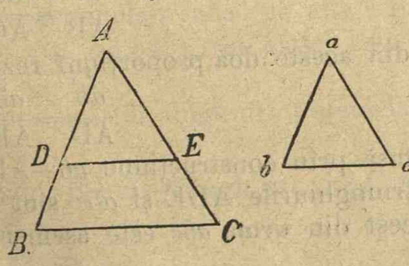
Fie DE paralela cu laturea BC a triunghiuluĭ ABC ḑic că triunghiul ADE este asemene cu triunghiul ABC.



In adivăr, aceste triunghiurĭ aŭ unghiul A comun, unghiurile ADE şi ABC egale între ele ca corespundente în privirea paralelelor DE, BC tăiete de secanta AB, unghiurile AED şi ACB sînt de asemene egale între ele. Apoĭ, DE fiind paralelă cu BC avem (§. 148) că raportul $\frac{AD}{AB}$ este egal cu raportul $\frac{AE}{AC}$; maĭ rămâne să arătăm că, unul din aceste raporturĭ este egal cu raportul $\frac{DE}{BC}$. Pentru aceasta ducem EF paralelă cu AB: această dreaptă împarte laturile AC, BC în segmente proporţionale şi avem: $\frac{AE}{AC}=\frac{BF}{BC}$ saŭ egal cu $\frac{DE}{BC}$ pentru că DF=DE.

Aşa dar triunghiurile ADE, ABC aŭ unghiurile lor egale unul cu altul şi laturile lor omoloage proporţionale: prin urmare sînt asemene.

172. TEOREMĂ.—*Doă triunghiurĭ, a căror unghiurĭ sînt egale unul cu altul sînt asemene.*



Fie triunghiurile ABC, *abc* astfel că unghiurile *a*, *b*, *c*, a-le celuĭ de al doilea sînt egale respectiv cu A,B,C a-le celuĭ dintăĭ.

Ḑic că aceste doă triunghiurĭ sînt asemene. Pentru a demonstra aceasta, ieŭ pe AB o lungime AD egală cu *ab*, şi prin D duc paralela DE cŭ BC. Triunghiurile ADE, şi ABC sînt asemene şi unghiurile lor omoloage ADE, şi ABC sînt egale. Insă prin ipoteză unghiul ABC este egal cu unghiul *abc*. Acum videm dar că triunghiurĭle ADE şi *abc* sînt egale ca avînd o lature egală la doă unghiurĭ adiacente egale; din acestea rezultă că triunghiul *abc* este asemene cu ABC.

173. **Corolar**. *Doă triunghiurĭ sînt asemene dacă aŭ doă unghiurĭ egale unul cu altul,* căcĭ atuncĭ şi al treilea unghiŭ din triunghiul întăĭ, este egal cu al treilea unghiu din triunghiul al doilea.

174. TEOREMĂ.—*Doă triunghiurĭ, carĭ aŭ un unghiu egal cuprins între doă laturĭ proporţionale sînt asemene.*

Fie iarăşĭ triunghiurile de maĭ sus ABC şi *abc* a căror unghiurĭ din A şi *a* sînt egale intre ele, şi laturile AB, AC, sînt proporţionale cu laturile *ab*, *ac*; ḑic că aceste triunghiurĭ sînt asemene. Construesc ca şi dineoare triunghiul ADE, care este asemene cu triunghiul ABC şi prin urmare laturile omoloage al acestor doă triunghiurĭ sînt proporţionale adică avem:

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC};$$

însă prin ipoteză avem proporţiunea:

$$\frac{ab}{AB}=\frac{ac}{AC};$$

din aceste doă proporţiunĭ rezultă dar:

$$\frac{ab}{AD}=\frac{ac}{AE};$$

însă prin construcţiune ab=AD, aşa dar şi ac=AE şi triunghiurile ADE şi *abc* sînt egale şi prin urmare acest din urmă *abc* este asemene cu ABC.

175. TEOREMĂ.—*Doă triunghiurĭ, carĭ aŭ laturile lor omoloage proporționale, sînt asemene.*

Considerăm tot figura de maĭ sus și presupunem că avem:

$$\frac{ab}{AB}=\frac{ac}{AC}=\frac{bc}{BC};$$

ḑic că triunghiurile ABC și *abc* sînt asemene.

Triunghiul auxiliar ADE prin construcțiunea luĭ este asemene cu triunghiul ABC, și prin urmare laturile lor omoloage sînt proporționale:

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}=\frac{BC}{DE};$$

din proporțiunile aceste și cele precedente scoatem:

$$\frac{ab}{AB}=\frac{ac}{AC}=\frac{bc}{BC}.$$

Insă prin construcțiune, AD este egală cu *ab*; rezultă că și AE este egală cu *ac* și DE egală cu *bc*; prin urmare triunghiurile ADE și *abc* sînt egale între ele și atuncĭ acest din urmă rezultă că este asemene cu ABC.

176. TEOREMĂ.—*Când doă triunghiurĭ sînt astfel că laturile unuia sînt paralele respectiv cu laturile celuialalt, saŭ dacă laturile celuĭ dintăĭ sînt perpendiculare pe laturile celuĭ de al doilea, atuncĭ acele triunghiurĭ sînt asemene între ele.*

Fie ABC, A′B′C′ doă triunghiurĭ în condițiunile enunciuluĭ. Unghiurile A și A′ avînd laturile lor paralele între ele saŭ perpendiculare una pe alta, sînt egale saŭ suplementare (§§. 43, 45); tot astfel este și cu unghiurile B, B′ și C, C′.

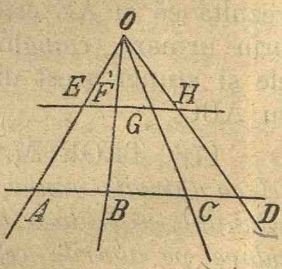
Prin urmare asupra acestor unghiurĭ putem face următoarele patru ipoteze:

1°. $A+A'=2$ungh.dr., $B+B'=2$ungh.dr., $C+C'=2$ ungh.dr;

2°. $A + A' = 2$ungh.dr, $B = B' = 2$ungh.dr., $C = C'$;
3°. $A + A' = 2$ungh.dr., $B = B'$ $C = C'$;
4°. $A = A'$ $B = B'$ $C = C'$.

Cele doă dintăĭ ipoteze nu sînt admisibile, fiind că suma unghiurilor celor doă triunghiurĭ nu poate fi maĭ mare de căt 4 unghiurĭ drepte. Din ipoteza a treia rezultă în mod implicit că unghiurile A şi A′ să fie drepte, căcĭ triunghiurile ABC, A′B′C′, avînd doă din unghiurile lor egale unul cu altul, şi al treilea unghiurĭ A şi A′ sînt egale între ele; prin urmare ipoteza intră în a patra. Rămăne că triunghile ABC, A′B′C′ aŭ unghiurile lor egale unul cu altul, şi prin urmare sînt asemene.

177. TEOREMĂ.—*Liniile drepte carĭ pornesc din un punct, interceptează părţĭ proporţionale pe doă secante paralele.*



Fie dreptele OA, OB, OC, OD.. tăiete de secantele AD, EH. Avem triunghiurile OAB şi OEF asemene între ele şi ni daŭ:

$$\frac{EF}{AB}=\frac{OF}{OB};$$

apoĭ triunghiurile OBC şi OFG sînt iarăşĭ asemene între ele şi ni daŭ:

$$\frac{FG}{BC}=\frac{OF}{OB};$$

din aceste doă proporţiunĭ rezultă:

$$\frac{EF}{AB}=\frac{FG}{BC}.$$

Tot asemene vom proba că avem:

$$\frac{FG}{BC}=\frac{GH}{CD},\ \text{etc.}$$

Aşa dar dreptele eşite din O împart paralelele AD, EH în părţĭ proporţionale.

178. Reciproc, *dacă liniile drepte AE, BF, CG, DH, împart paralelele AD, EH, în părțĭ proporționale atuncĭ acele drepte se întîlnesc în un punct.*

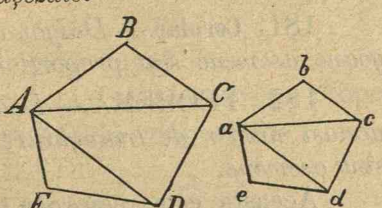
Fie O punctul de intersecţiune a doă din aceste drepte, d. e. DH, BF; unesc O cu G şi zic că dreapta OG prelungită trece prin C.

Dreptele OF, OG, OH, eșite din O, în virtutea Teoremeĭ precedente, împart paralelele FH, BD în părţĭ proporţionale. Dreapta OG prelungită, trebue să treecă prin urmare prin punctul C, fiind că, prin ipoteză, acesta este punctul care împarte pe BD în un raport egal cu FG la GH, şi nu maĭ este un altul.

Tot asemene se va demonstra că dreapta AE prelungită trece prin O.

179. *Observațiune.*—Cele doă paralele pot fi de o parte și de alta a punctuluĭ O; demonstraţiunea teoremelor se face în acelaşĭ mod.

180. TEOREMĂ —*Doă poligoane asemene, se pot descompune în un acelașĭ numĕr de triunghiurĭ asemene unul cu altul și asemene așezate.*



Fie poligoanele asemene ABCDE şi *abcde*. Din vîrfurile omoloage A şi *a* duc diagonalele omoloage AC, *ac* şi AD, *ad*. Aceste diagonale împart poligoanele în un acelaşĭ număr de triunghiurĭ asemene aşezate. Să arătăm că aceste triunghiurĭ sînt asemene, doă câte doă.

1°. Triunghiurile ABC, *abc* aŭ, prin ipoteză, unghiurile din B şi *b* egale şi cuprinse între laturĭ AB BC şi *ab*, *bc* proporţionale, după cum rezultă din asemenimea poligoanelor; prin urmare aceste doă triunghiurĭ sînt asemene.

2°. Triunghiurile ACD şi *acd* sînt iarăşĭ asemene, pentru că aŭ un unghiu egal cuprins între laturĭ proporţionale. In adivăr, unghiul ACD este egal cu diferenţa între unghiurile BCD şi BCA; însă unghiul BCD este egal cu unghiul *bcd* prin ipoteză, şi unghiul BCA este egal cu unghiul *bca* pentru că sînt omoloage în triunghiurile asemene ABC, *abc*; aşa dar unghiul ACD este egal cu diferenţa unghiurilor *bcd* şi *bca*, adică cu unghiul *acd*.

Apoĭ raporturile: $\frac{AC}{ab}$ şi $\frac{BC}{bc}$, sînt egale din cauza similitudineĭ triunghiurilor ABC, *abc*, şi raporturile $\frac{BC}{bc}$, $\frac{CD}{cd}$ sînt egale prin ipoteză; aşa dar vom ave $\frac{AC}{ac}=\frac{CD}{cd}$, adică laturile carĭ cuprind unghiurile egale ACD şi *acd* sînt proporţionale. Prin urmare triunghiurile ACD şi *acd* sînt asemene.

Tot astfel se demonstrează similitudinea celorlalte triunghiurĭ,

181. **Corolar**. — *Diagonalele omoloage a doă poligoane asemene sînt proporţionale cu laturile omoloage.*

182. TEOREMĂ. — *Doă poligoane compuse din un acelaşĭ numĕr de triunghiurĭ asemene şi asemene aşezate sînt asemene.*

Aceasta este reciproca teoremeĭ precedente. Considerăm figura de maĭ sus, şi presupun că poligoanele ABCDE, *abcde* sînt compuse din un acelaşĭ număr de triunghiurĭ asemene şi asemene aşezate. Dic că aceste doă poligoane sînt asemene.

1°. Raportul de similitudine a triunghiurilor ABC şi *abc* este egal cu $\frac{AC}{ac}$, tot acest raport de similitudine îl aŭ şi triunghiurile ACD, *acd*. Raportul de similitudine a triunghiurilor ACD, *acd* precum şi acel al triunghiurilor ADE, *ade* sînt egale, căcĭ fie-care este egal cu $\frac{AD}{ad}$; prin urmare poligoanele date aŭ laturile lor omoloage proporţionale.

2°. Unghiurile poligoanelor sînt egale unul cu altul, fie ca unghiurĭ omoloage a doă triunghiurĭ asemene, fie ca compuse din unghiurĭ egale; astfel unghiurile B şi *b* sînt egale ca unghiurĭ omoloage a triunghiurilor asemene ABC *abc*: unghiul BCD este egal cu suma unghiurilor BCA, ACD carĭ sînt respectiv egale cu unghiurile *bca*, *acd*, aşa dar este egal cu unghiul BCD.

Din aceste conchidem că cele doă poligoane sînt asemene, fiind că aŭ unghiurile egale unul cu altul şi laturile omoloage proporţionale.

183. TEOREMĂ.— *Perimetrele a doă poligoane asemene, sînt proporţionale cu laturile omoloage.*

Fie doă poligoane asemene, ABCDE... A'B'C'D'E'... avem:

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DE}{D'E'}=\ldots$$

Aplicăm o teoremă de Aritmetică asupra proporţiunilor *) şi formăm următoarea proporţiune:

$$\frac{AB+BC+CD+DE+\ldots}{A'B'+B'C'+C'D'+D'E'+\ldots}=\frac{AB}{A'B'}.$$

Numărătorul AB+BC+CD+DE+... este perimetrul poligonuluĭ întâĭ, şi numitorul A'B'+B'C'+C'D'+D'E'+... este perimetrul poligonuluĭ al doilea. Insemnând aceste perimetre, respectiv cu P şi P' avem:

*) A vide Aritmetica pag. 198.

$$\frac{P}{P'}=\frac{AB}{A'B'}.$$

184. *Observațiune importantă.*—Teoremele de la §. 165 pănă la §. 170, privitoare la liniĭ proporționale în cerc, se pot demonstra cu ajutorul teoremelor asupra triunghiurilor asemene.

185. **Exercițiĭ.**—*1. Fiind dat un triunghiu ABC, se micșurează laturea AC de o lungime arbitrară AA', și se mărește laturea BC, de o lungime BB' egală cu AA'. A demonstra că A'B' este tăietă de AB în raport invers cu laturile AC BC.* Se duce prin B' paralela B'D la AC și se formează niște triunghiurĭ asemene carĭ daŭ ceia ce se cere.

2. *Fie ABC, A'B'C' doă triunghiurĭ asemene, a căror laturĭ omoloage BC, B'C' sînt paralele; dacă triunghiul A'B'C' se întoarce în jurul vîrfuluĭ A, se cere locul geometric descris de punctul de intersecțiune a dreptelor care unesc extremitățile omoloage a laturilor AB, B'C'.* Fie AB″C″ o altă pozițiune a luĭ AB'C'; duc BB″, CC″ care se taie în I; triunghiurile ABB″, ACC″ sînt asemene; duc AI; patrulaterul ABCI este inscriptibil, căcĭ segmentul de cerc capabil de unghiul ABI și descris pe coarda AI trebue să treacă prin vîrful C a unghiuluĭ ACI, care este egal cu ABI. Prin urmare locul geometric al punctuluĭ I este circumferența cercului circumscris la triunghiul fix ABC.

3. *A înscri un patrat în un semi-cerc.* A'A fiind diametrul, și OH rada perpendiculară pe diametru, un vîrf C a patratuluĭ face parte din locul geometric a punctelor a căror distanțe la dreptele OA, OH sînt raportul de 2 la 1. Trebue găsit punctul de pe circumferență care să satisfacă la aceasta; duc prin A tangenta AM=2 ori raza cercului; punctul C unde OM întîlnește circumferența este punctul căutat.

4. *A înscri în un cerc un triunghiu isoscel, în care suma saŭ diferința între bază și înălțime este egală cu o lungime dată.* Fie BC+AD suma bazeĭ cu înălțimea egală cu *m*; ieu pe prelungirea luĭ AD lungimea DE egală cu lungimea BC; duc EB care întîlnește în F pe tangenta dusă în punctul A. Din triunghiurile asemene formate AEF, BDE, rezultă că AF este egală cu jumătate din AE saŭ *m*, din aceasta rezultă construcțiunea triunghiuluĭ ABC.

5. *A găsi locul geometric al punctelor din cari doă cercurĭ sînt văzute sub unghiurĭ egale.* Fie A, B centrele cercu-

rilor date şi P un punct de a locului geometric căutat; duc tangentele PC, PD la cele doă cercurĭ. Din condiţiunile problemeĭ rezultă că unghiurile APC şi BPD sînt egale, şi prin urmare aceste triunghiurĭ sînt asemene şi avem $\frac{PA}{PB}=\frac{AC}{BD}$; aşa dar locul geometric căutat este acelaşĭ ca şi a punctelor a căror distanţă la A şi B sînt proporţionale cu razele AC, BD; acest loc este dar o circumferenţă de cerc.

6. *Dacă, din un punct dat, se duc liniĭ drepte la diferite puncte a uneĭ circumferenţe şi dacă se împart fie-care din aceste drepte în raportul a doă liniĭ date* m *şi* n, *se cere locul geometric a punctelor de împărţire.*

Fie A punctul dat în afară de cercul BC; pe AC trebue determinat un punct P aşa ca să avem $\frac{AP}{PC}=\frac{m}{n}$ saŭ $\frac{AP}{AC}=\frac{m}{m+n}$.

Duc AB, CB şi PD paralel cu BC. Triunghiurile asemene ABC, APD daŭ $\frac{AD}{AB}=\frac{PD}{BC}=\frac{AP}{AC}=\frac{m}{m+n}$; prin urmare PD este constantă; punctul P se află pe circumferenţa descrisă din D ca centru cu $BC\times\frac{m}{m+n}$ ca raza.

7. *Se daŭ treĭ laturĭ, AB, BC, CD a-le unuĭ patrulater, precum şi diagonala AC, se cere; 1⁰. locul geometric a vîrfuluĭ al patrulea D; 2⁰. locul geometric al mijlocului diagonaleĭ BD. şi 3⁰. locul geometric al mijlocului linieĭ drepte care uneşte mijlocurile diagonalelor.*

1⁰. După cum se vede, triunghiul ABC se poate construi fiindu'ĭ cunoscute toate laturile; vîrful al patrulea D rămâne dar ca să se afle la o distanţă constantă de C, el descrie dar o circumferenţă cu CD ca rază.

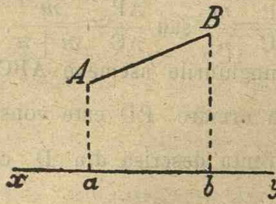
2⁰. Diagonala BD uneşte un punct fix B cu un punct D al circumferenţeĭ de dineoare, mijlocul M al drepteĭ AD va descri, în virtutea problemeĭ precedente, o circumferenţă.

3⁰. Fi M′ mijlocul diagonaleĭ AC, dreapta M′M uneşte şi ea un punct fix M′ cu un punct al circumferenţeĭ precedente, prin urmare locul geometric a punctuluĭ P, mijlocul luĭ M′M este iarăşĭ o circumferenţă.

CAPITULUL III

RELAŢIUNĬ METRICE ÎNTRE OARE-CARE LINIĬ DIN TRIUNGHIU.

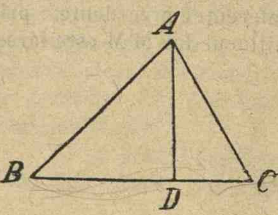
186. **Definiţiunĭ.**—Fiind dată o linie dreaptă xy şi un punct A, dacă din A ducem perpendiculara pe xy, piciorul a al perpendiculareĭ poartă numele de *proecţiunea* punctuluĭ A pe acea dreaptă; dreapta xy se numeşte *axa de proecţiune.*



Dacă din extremităţile unuĭ segment de dreaptă AB se duc perpendiculare pe axa de proecţiune, porţiunea ab, cuprinsă între picioarele perpendicularelor, poartă numele de *proecţiunea liniei* AB pe xy.

187. TEOREMĂ.—*Dacă din vîrful unghiuluĭ drept at unuĭ triunghiu dreptunyhic se duce perpendiculara pe ipoteouză, atuncĭ: 1°, fie-care catetă este medie proporţională între ipotenuză şi segmentul de pe ea, adiacent catetei; 2°. perpendiculara dusă din vîrful unghiuluĭ drept pe ipotenuză, este medie proporţională între cele doă segmente formate pe ipotenuză.*

Sa considerăm triunghiul ABC dreptunghic în A şi să ducem din A perpendiculara AD pe ipotenuză.



1°. Avem triunghiurile ABD şi ABC carĭ, sînt asemenea între ele pentru că sînt ambele dreptunghice, aŭ unghiul din B comun şi prin urmare şi unghiul BAD este egal cu unghiul ACB. Aceste triunghiurĭ fiind asemene, aŭ laturile lor omoloage proporţionale; comparănd laturile omoloage găsim:

$$\frac{BC}{AB}=\frac{AB}{BD} \text{ saŭ } \overline{AB}^2=BC\times BD,$$

de unde videm că AB este medie proporţională între BC şi BD.

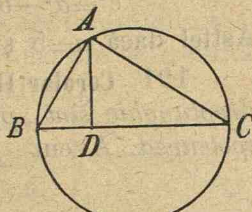
Tot asemene se vede că triunghiurile ADC şi ABC sînt iarăşĭ asemene, şi din comparaţiunea laturilor lor omoloage rezultă că AC este medie proporţionale între BC şi DC.

2°. Triunghiurile BAD şi CAD asemene amăndoă cu trunghiul ABC, aŭ unghiurile lor omoloage egale, şi sînt prin urmare asemene; şi iarăşĭ din comparaţiunea laturilor lor omoloage scoatem:

$$\frac{BD}{AD}=\frac{AD}{DC} \text{ saŭ } \overline{AD}^2=BD\times DC.$$

de unde videm că perpendiculara AD este medie proporţională între segmentele BD şi CD de pe ipotenuză.

188. **Corolar.**—Dacă pe ipotenuza BC ca diametru descrim o circumferenţă, această curbă va trece prin vîrful A al unghiuluĭ drept, şi Teorema precedentă poate fi enunciată în modul următor:



1. O coardă de cerc, este medie proporţională între diametru, care trece prin una din extremităţile eĭ şi proecţiunea eĭ pe acest diametru.

2. Perpendiculara dusă din un punct oare-care a uneĭ circumferenţe pe un diametru, este medie proporţionata între segmentele formate de piciorul perpendiculareĭ pe acest diametru.

189. TEOREMĂ.— *In un triunghiu dreptunghic, patratul ipotenuzeĭ este egal cu suma patratelor catetelor.* Unitatea de lungime cu care măsurăm laturile este aceiaşĭ pentru trustrele laturile.

Considerăm figura de la §. 187 şi aplicănd Teorema aceia avem :

$$\overline{AB}^2=BC\times BD \text{ şi } \overline{AC}^2=BC\times CD;$$

adunând aceste egalităţĭ între ele, avem :

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=BC\times(BD+DC)$$

saŭ

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2,$$

relaţiune care demonstrează Teorema.

190. **Corolar I.**—Cu ajutorul acesteĭ Teoreme, putem calcula una din laturile triunghiuluĭ dreptunghic, când se cunosc celelalte doă.

Să însemnăm prin $a, b, c,$ numeriĭ care reprezintă rezultatul măsurăreĭ ipotenuzeĭ şi a catetelor prin unitatea de lungime ; în virtutea teoremeĭ avem :

$$a^2+b^2=c^2 \text{ de unde } a=\sqrt{b^2+c^2}.$$

Astfel dacă catetele aŭ valorile $b=3$ şi $c=4$, atuncĭ $a=\sqrt{9+16}=5$.

Dacă cunoaştem ipotenuza şi una din catete, b, d. e. putem determina pe ceialaltă catetă, căcĭ din relaţiunea principală deducem :

$$c^2=a^2-b^2 \text{ de unde } c=\sqrt{a^2-b^2}.$$

Astfel dacă $a=5$ şi $b=3$, avem $c=\sqrt{28=9}=\sqrt{16}=4$.

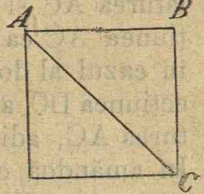
191 **Corolar II.**—*Patratele catetelor unuĭ triunghiu dreptunghic sînt proporţionale cu proecţiunile lor pe ipotenuză.* Avem

$$\overline{AB}^2=BC\times BD$$
$$\overline{AC}^2=BC\times DC$$

de unde, prin împărţire ni vine :

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}=\frac{BD}{DC}$$

192. **Corolar III.**—*Raportul între diagonala unuĭ patrat și laturea luĭ este egal cu* $\sqrt{2}$.



Considerăm triunghiul ABC care'ĭ dreptunghic în B: avem:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2,$$

însă AB=BC fiind că figura este un patrat; prin urmare:

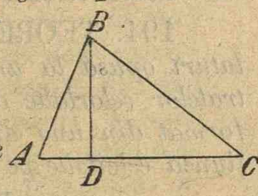
$$\overline{AC}^2 = 2\overline{AB}^2$$

de unde prin extragere de rădăcină ni vine:

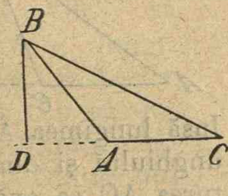
$$\frac{AC}{AB} = \sqrt{2}.$$

Se știe din Aritmetică că nu există nicĭ un numĕr întreg saŭ fracționar care rădicat la patrat să dee 2: din relațiunea precedentă conchidem că *diagonala și laturea patratuluĭ sînt doă liniĭ necomensurabile între ele.*

193. TEOREMĂ.—*In un triunghiu, patratul uneĭ laturĭ opusă la un unghiu ascuțit, este egal cu suma patratelor celor l'alte doa laturĭ, minus de doa orĭ productul format din una din acesĭ laturĭ înmulțită prin proecți unea celeĭlalte pe aceasta.*



Fie ABC un triunghiu care are un unghiu ascuțit căruia se opune laturea AB. Din una din extremitățile acesteĭ laturĭ, B, d. e., duc perpendiculara BD pe laturea AC; această perependiculară BD se va afla in triunghiu saŭ în afară de triunghiŭ, după cum unghiul BAC va fi ascuțit saŭ obtuz. In amăndoă cazurile triunghiul ABD este dreptunghic în D și dă:



$$\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2;$$

însă în cazul întăĭ AD este egală cu diferenţa între laturea AC şi proecţiunea DC a latureĭ BC pe direcţiunea AC ca axă de proecţiune, adică $AD = AC - DC$; în cazul al doilea, AD este egală cu diferenţa între proecţiunea DC, a latureĭ BC pe direcţiunea AC ca axă şi laturea AC, adică $AD = DC - AC$.

In amăndoă cazurile, dacă rădicăm la patrat avem (*)

$$\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{DC}^2 - 2\, AC \times DC.$$

Substituim această valoare a luĭ $\overline{AD}^2$, în întăia egalitate, şi avem

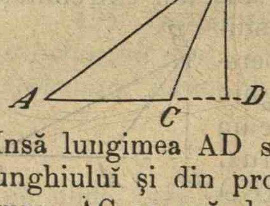
$$\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{DC}^2 - AC \times DC\ ;$$

în fine observăm că triunghiul BDC este dreptunghic şi prin urmare $\overline{BD}^2 + \overline{DC}$ se poate înlocui prin $\overline{BC}^2$, şi avem relaţiunea:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2AC \times DC$$

care demonstrează Teorema.

194. TEOREMĂ. — *In un triunghiu, patratul uneĭ laturĭ opusă la un unghiu obtuz, este egal cu suma patratelor celorlalte doă laturĭ, plus de doă-orĭ productul format din una din aceste laturĭ, înmulţită prin proecţiunea celeilalte pe aceasta,*



Fie ABC un triunghiu care are un unghiu obtuz C, căruia se opune laturea AB.

Duc perpendiculara BD pe AC; triunghiul dreptunghic că:

$$\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2.$$

Insă lungimea AD se compune din laturea AC a triunghiuluĭ şi din proecţiunea CD a latureĭ BC pe laturea AC ca axă de proecţiune. In cazul în care ne

---

*. Admitem ca cunoscute propoziţiunile următoare de Aritmetică: *1. Patratul sumeĭ a doĭ numerĭ este egal cu suma patratelor numerilor, plus de doă-orĭ productul lor. 2. Patratul diferenţeĭ a doĭ numerĭ este egal cu suma patratelor numerilor, minus de doă-orĭ productul lor.*

ocupăm, perpendiculara BD cade totdeauna afară din triunghiu. Avem dar

$$\overline{AD}^2=\overline{AC}^2+\overline{CD}^2+2AC\times CD;$$

şi substituind în egalitatea de sus, ni vine:

$$\overline{AB}^2=\overline{BD}^2+\overline{AC}^2+\overline{CD}^2+2AC\times CD.$$

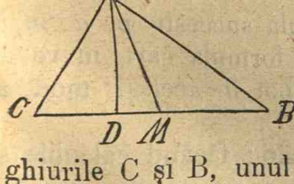
In fine observăm că triunghiul BDC este dreptunghic şi prin urmare $\overline{BD}^2+\overline{CD}^2$ se poate înlocui prin $\overline{BC}^2$ şi avem relaţiunea

$$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2+2AC\times CD$$

care demonstrează teorema.

195. **Corolar I.**—Din cele treĭ teoreme precedente rezultă că: *în un triunghiu, patratul uneĭ laturĭ este maĭ mic egal saŭ maĭ mare de cât suma patratelor celorlalte doă laturĭ, după cum unghiul opus latureĭ întâia este ascuţit, drept saŭ obtuz*: şi reciproc, *un unghiu al unuĭ triunghiu este ascuţit, drept saŭ obtuz după cum patratul latureĭ opusă unghiuluĭ este maĭ mic, egal saŭ maĭ mare de cât suma patratelor celorlalte doă laturĭ.*

196. **Corolar II.**— Teoremele precedente ni daŭ mijlocul de a calcula proecţiunea uneĭ laturĭ a unuĭ triunghiu pe una din celelalte doă, dacă se cunosc măsurile celor treĭ laturĭ a-le triunghiuluĭ, şi apoĭ cu ajutorul acestor proecţiunĭ se pot calcula înălţimile triunghiuluĭ; iată cum:



Fie triunghiul ABC: să însemnăm prin a, b, c, lungimile laturilor opuse respectiv la unghiurile A, B, C; să însemnăm prin h înălţimea AD eşită din vîrful A. Dintre unghiurile C şi B, unul cel puţin este ascuţit; fie B, acest unghiu ascuţit.

Avem maĭ întâĭ, din triunghiul dreptunghic ADC,

$$h^2=b^2-\overline{CD}^2;$$

apoĭ triunghiul ABC, dă (§. 193):

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \times CD,$$

din aceasta scoatem

$$CD = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a},$$

şi întâia relaţiune devine

$$h^2 = b^2 - \frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2} = \frac{4a^2b^2 - (a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2}$$

saŭ, în virtutea uneĭ propoziţiunĭ algebrice (*):

$$h^2 = \frac{(2ab+a^2+b^2-c^2)(2ab-a^2-b^2+c^2)}{4a^2} =$$

$$\frac{[(a+b)^2-c^2][c^2-(a-b)^2]}{4a^2} = \frac{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}{4a^2}.$$

Să însemnăm prin p semi-perimetrul triunghiuluĭ ABC adică să punem

$$a+b+c=2p\,;$$

avem succesiv:

$$b+c-a=2p-2a=2(p-a)$$
$$a+c-b=2p-2b=2(p-b)$$
$$a+b-c=2p-2c=2(p-c)$$

şi purtănd aceste expresiunĭ în valoarea luĭ h, şi extrăgând rădăcina patrată găsim:

$$h = \frac{2}{a}\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}.$$

Schimbând aceasta formulă succesiv pe a în b, pe b în c şi pe c în a, avem formula carı ni va da înălţimea eşită din vîrful B, apoĭ în acelaşĭ mod, avem înălţimea eşită din vîrful C.

Exemplu: $a=13$, $b=9$, $c=6$; făcănd calculile se găseşte că cele treĭ înălţimĭ sînt:

$$h=3{,}641, \qquad h'=5{,}259, \qquad h''=7{,}886.$$

---

*)) Vezĭ Algebra, ed. IV pag. 25.

197. TEOREMĂ.—*Suma patratelor a doă laturĭ a-le unuĭ triunghiu este egală cu de doă-orĭ patratul jumătățeĭ latureĭ a treia, plus de doă-orĭ patratul medianeĭ corespunḑĕtoare la vîrful opus latureĭ a treia.*

Fie în triunghiul ABD, (figura precedentă). AM mediana corespunḑetoare la vîrful A : aceasta împarte triunghiul dat în alte doă triunghiurĭ BAM și CAM, a căror unghiurĭ adiacente în M sînt suplementare. Duc din vîrful A perpendiculara pe BC și aplic triunghiuluĭ BAM, care are un unghiu obtuz în M, Teorema respectivă (§. 194) și avem

$$\overline{AB}^2=\overline{AM}^2+\overline{MB}^2-2BM\times MD;$$

aplic de asemene triunghiuluĭ ACM, a căruĭ unghiu din M este ascuțit, Teorema respectivă (§. 193) și avem :

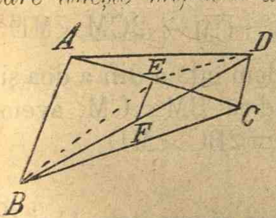
$$\overline{AC}^2=\overline{CM}^2+\overline{MA}^2-2CM\times MD.$$

Observăm că : BM=CM, și atuncĭ prin adunare avem :

$$\overline{AC}^2+\overline{AB}^2=2\overline{AM}^2+2\overline{CM}^2$$

ceia ce demonstrează Teorema.

198. TEOREMĂ.—*Intr'un patrulater, suma patratelor celor patru laturĭ este egala cu suma patratelor celor doă diagonale, plus de patru-orĭ patratul drepteĭ care unește mijlocul diagonalelor.*



Fie ABCD un patrulater ; duc diagonalele AC, BD și unesc punctele E și F, mijlocurile acestor diagonale. Aplic succesiv la triunghiurile ABC și ADC, Teorema precedentă și avem :

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=2\overline{AE}^2+2\overline{BE}^2$$

$$\overline{CD}^2+\overline{AD}^2=2\overline{AE}^2+2\overline{DE}^2;$$

adun aceste doă egalitățĭ, și pentru prescurtare însemn cu S suma patratelor celor patru laturĭ a patrulateruluĭ

$$S=4\overline{AE}^2+2(\overline{BE}^2+\overline{DE}^2).$$

Insă, în triunghiul BED, F este mijlocul latureĭ BD, şi aplicându-ĭ Teorema precedentă avem

$$\overline{BE}^2+\overline{ED}^2=2\overline{BE}^2+2\overline{EF}^2;$$

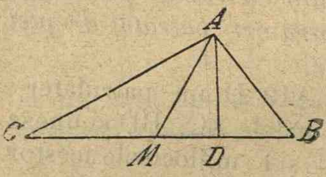
prin urmare, înlocuind această sumă în valoarea luĭ S avem

$$S=4\overline{AE}^2+4\overline{BE}^2+4\overline{EF}^2=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2+4\overline{EF}^2,$$

fiind-că $AC=2AE$ şi $BD=2BF$, şi prin urmare $\overline{AC}^2=4\overline{AE}^2$ şi $\overline{BD}^2=4\overline{BF}^2$.

199. **Corolar.**—Dacă patrulaterul este un paralelogram, atuncĭ lungimea EF este nulă şi prin urmare: *în orĭ-ce paralelogram, suma patratelor laturilor este egală cu suma patratelor diagonalelor*: şi reciproc *dacă suma patratelor laturilor unuĭ patrulater este egală cu suma patratelor celor doă diagonale, acel patrulater este un paralelogram.*

200. TEOREMĂ.—*Diferența patratelor a doă laturĭ a-le unuĭ triunghiu, este egală cu de doă-orĭ laturea a treia, înmulțită prin proecțiunea medianeĭ corespunzatoare aceestĭ laturĭ.*



Avem egalitățile:

$$\overline{AB}^2=\overline{AM}^2+\overline{BM}^2-2BM\times MD$$

$$\overline{AC}^2=\overline{AM}^2+\overline{CM}^2+2CM\times MD.$$

Scădem întâia din a doa şi observând că $BM=CM$, avem

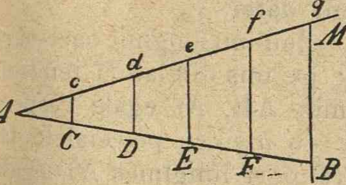
$$\overline{AC}^2-\overline{AB}^2=4BM\times MD=2BC\times MD$$

ceia ce demonstrează Teorema.

201. **Corolar.**—Să presupunem că punctele C şi B sînt fixe, iar punctul A se mişcă în plan astfel ca diferența $\overline{AC}^2-\overline{AB}^2$ să rămână constantă; atuncĭ relațiunea precedentă ni arată că în aceste condițiunĭ de mişcare a punctuluĭ A, proecțiunea MD a medianeĭ nu se schimbă, adică proecțiunea D a punctuluĭ mobil

A este fixă pe dreapta BC. Punctul A descrie o perpendiculară pe BC.

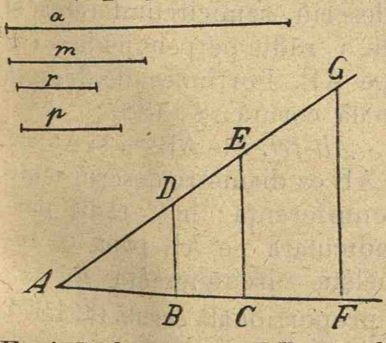
202. **Problema I.**—*A împărți o linie dreaptă în un număr oare-care de părți egale.*



Fie AB dreapta de împărţit, d. e. în cincĭ părţĭ geale.

Duc prin A o dreaptă oare-care AM, pe care port de cincĭ-orĭ o lungime arbitrară Ac : am astfel punctele de împărţire c, d, e, f, g; unesc g cu B şi apoĭ prin celelalate puncte duc dreptele fF, eE, dD, cC, paralele cu gB. Punctele C, D, E, F împart pe AB în cincĭ părţĭ egale, pentru că toate porţiunile AC, CD, DE, EF, FB sînt egale între ele; în adevĕr, fiind că Ac=cd apoĭ şi AC=CD din cauza similitudineĭ triunghiurilor ACc, ADd; apoĭ Ad fiind egal cu de doă-orĭ de, şi AD este egal cu de doă-orĭ DE şi prin urmare AC=CD=DE; etc.

203. **Problema II.**—*Să se împartă o linie dreaptă în părți proporționale cu treĭ lungimĭ date.*

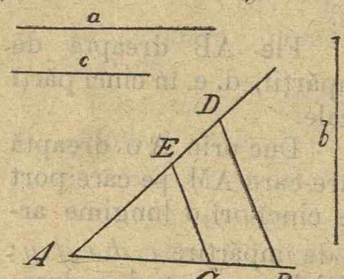


Fie a linia dreaptă dată şi m, r, p cele treĭ lungimĭ date.

Consider un unghiu oare-care A; pe una din laturile luĭ ieŭ o lungime AF=a şi pe ceialaltă lature port succesiv lungimile AD=m, DE=n şi EG =p; unesc FG şi prin E şi D duc EC, şi DB paralele cu GF.

Din cauza similitudineĭ triunghiurilor formate, segmentele AB, BC, CF sînt proporţionale cu AD, DE, EG saŭ cu m, r, p.

204. **Problema III.**—*A construi o a patra proporțională cu treĭ lungimĭ date.*



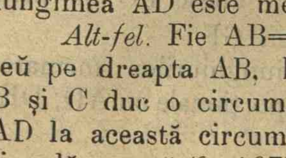
Fie a, b, c cele treĭ lungimĭ date.

Ieŭ un unghiu oare-care A: pe una din laturĭ ieŭ lungimile AB, AC egale respectiv cu a şi c; pe ceialaltă lature port lungimea AD egală cu b: duc BD şi prin C duc paralela cu BD: porțiunea AE este a patra proporțională căutată; căcĭ avem

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AE} \text{ saŭ } \frac{a}{c}=\frac{b}{AE}.$$

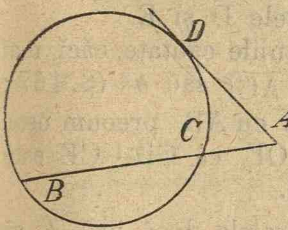
205. **Problema IV.**—*A construi media proporțională între doă lungimĭ date.*

Fie a şi b lungimile date. Ieŭ lungimile AC$=a$ şi CB$=b$ una în prelungirea celeilalte; pe AB ca diametru descriŭ semicircumferența şi în C rădic perpendiculara CD pe AB. Porțiunea de dreaptă DC este media proporțională cerută (§. 188).



Alt-fel. Fie AB$=a$ şi AC$=b$ pe AB ca diametru descriŭ semicircumferența; în C rădic perpendiculara pe AB până ce întilnelşte circumferența în D: lungimea AD este media proporțională cerută (§. 187);

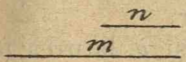
Alt-fel. Fie AB$=a$ cea maĭ mare dintre lungimĭ: ieŭ pe dreapta AB, lungimea AC$=b$; prin punctele B şi C duc o circumferență şi din A duc o tangentă AD la această circumferență; AD este media proporțională cerută (§. 167).



206. **Problema V.**—*A construi punctele cari împart o dreaptă dată în segmente proporționale cu doă lungimĭ date.*

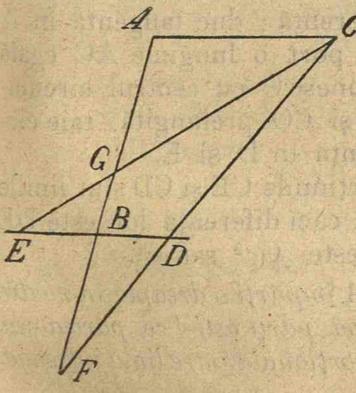
Fie AB dreapta dată, m și n cele doă lungimĭ date, (figura următoare).

Prin A, duc o dreaptă AC egelă cu m; prin B duc paralela cu AC, pe care ieŭ de o parte și de alta a punctuluĭ B, lungimile BD și BE egale cu n; duc dreptele CD și CE, carĭ întîlnesc pe AB în F și G: aceste sînt punctele căutate



In adevĕr, triunghiurile ACG și BEG sînt asemene și daŭ

$$\frac{GA}{GB}=\frac{AC}{BE};$$



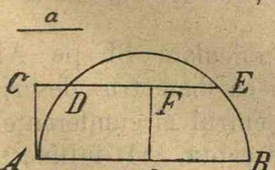
triunghiurile ACF, BDF sînt și ele asemene, și daŭ

$$\frac{FA}{FB}=\frac{AC}{BD}$$

și prin urmare din cauza egalitățeĭ liniilor BD, BE avem

$$\frac{GA}{GB}=\frac{FA}{FB}=\frac{m}{n}.$$

207. **Problema VI.**—*A construi doă liniĭ drepte cunoscându-se suma și productul lor.*



Fie AB suma liniilor drepte și a laturea patratuluĭ egal cu productul lor.

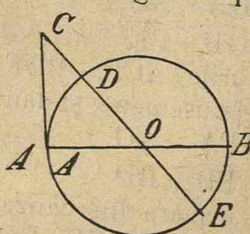
Pe AB ca diametru descriŭ o semi-circumferență: duc tangenta în A pe care ieŭ o lungime AC egală cu a: prin C duc paralela cu AB, care taie circumferenţa în punctele D şi E.

Porţiunile CE şi CD sînt liniile căutate, căcĭ maĭ întăĭ productul lor este egal cu $\overline{AC}^2$ saŭ a^2 (§. 167); apoĭ suma acestor liniĭ este egală cu AB, precum uşor se vede, ducând perpendiculara OF, că CD+CE este egală cu de doă-orĭ CF saŭ AB.

Observaţiune. Pentru ca paralela dusă prin C să întîlnească circumferenţa, este necesar ca AC să fie maĭ mică de căt jumătate din suma AB a liniilor date, saŭ cel mult egală cu această jumătate.

208. **Problema VII.**—*A construi doă liniĭ drepte cunoscându-se diferenţa şi productul lor.*

Fie AB diferenţa liniilor drepte şi a laturea patratuluĭ egal cu productul lor.



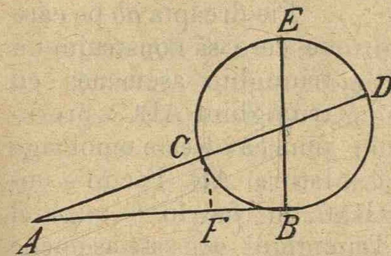
Pe AB ca diametru, descriŭ o circumferenţă; duc tangenta în A pe care port o lungime AC egală cu a; unesc C cu centrul circumferenţeĭ şi CO prelungită, taie circumferenţa în D şi E.

Porţiunile CE şi CD sînt liniile căutate; căcĭ diferenţa lor este DE saŭ AB, iar productul lor este $\overline{AC}^2$ saŭ a^2.

209. **Problema VIII.**—*A împărţi o dreaptă în medie şi extrema raţiune, adica în doă părţi astfel ca partea cea maĭ mare sa fie medie proporţională între linia întreaga şi partea cea maĭ mica.*

Fie AB dreapta de împărţit în medie şi extremă raţiune.

In punctul B rădic perpendiculara BE pe AB şi ieŭ BE egal cu AB: pe BE ca diametru descriŭ circumferenţa; unesc A cu O centrul circumferenţeĭ, şi fie C şi D punctele în carĭ dreapta AO întîlneşte



circumferența: în fine ieŭ eo dreapta AB lungimea $\overline{\text{AF}}$ egală cu AC. Dreapta AB este împărțită în punctul F în medie și extremă rațiune, adică avem:

$$\overline{\text{AF}}^2 = \text{AB} \times \text{BF}$$

In adevăr, AB fiind tangentă la cerc în punctul B, avem

$$\overline{\text{AB}}^2 = \text{AC} \times \text{AD};$$

Insă $\text{AB} = \text{AF} + \text{FB}$ și $\text{AD} = \text{AC} + \text{CD} = \text{AF} + \text{AB}$.

Dacă, în egalitatea precedentă, înlocuim $\overline{\text{AB}}^2$ prin $\text{AB} \times (\text{AF} + \text{FB})$ și $\text{AC} \times \text{AD}$ prin $\text{AF} \times (\text{AF} + \text{AB})$ această egalitate devine

$$\text{AB} \times (\text{AF} + \text{FB}) = \text{AF} \times (\text{AF} + \text{AB}):$$

facem înmulțirile indicate, și scădem din ambiĭ membrĭ aĭ acesteĭ egalitățĭ productul $\text{AB} \times \text{AF}$, avem

$$\text{AB} \times \text{BF} = \overline{\text{AF}}^2$$

ceia ce era de arătat.

210. *Observațiune*. Să însemnăm prin a lungimea dată AB; avem

$$\text{AF} = \text{AO} - \text{OC}:$$

însă AO este ipotenuza triunghiuluĭ dreptunghic AOB și OD este jumătate de AB saŭ $\frac{a}{2}$, prin urmare

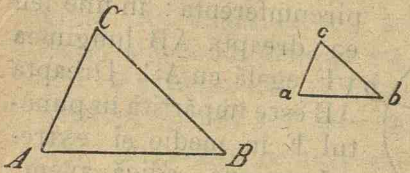
$$\text{AO} = \sqrt{\overline{\text{AB}}^2 + \overline{\text{BO}}^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = a\frac{\sqrt{5}}{2}$$

și prin urmare

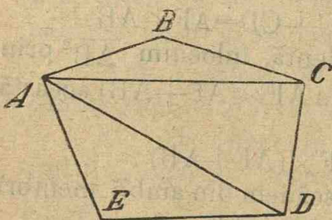
$$\text{AF} = a\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

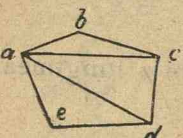
Aceasta este formula care dă partea cea maĭ mare a lungimeĭ a împărțită în medie și extremă rațiune.

211. **Problema IX.** — *A construi pe o lungime de dreaptă dată, un triunghiu saŭ un poligon asemene cu un triunghiu saŭ un poligon dat.*



Fie dreapta *ab* pe care se cere să construim un triunghiu asemenea cu triunghiul ABC; presupun că *ab* este omoloaga latureĭ AB. Fac în *a* unghiul *bac* egal cu unghiul BAC, şi fac în *b* unghiul *abc* egal cu unghiul ABC. Triunghiul *abc* este asemene cu triunghiul ABC fiind-că aceste triunghiurĭ aŭ doă unghiurĭ egale.

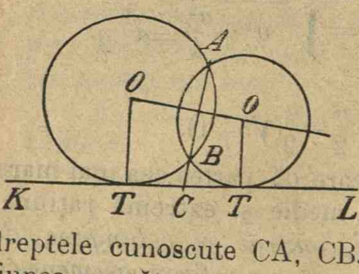




Fie încă dreapta *ab* pe care se cere să construim un poligon asemenea cu poligonul ABCDE; presupun că *ab* este omoloagă latureĭ AB a poligonuluĭ dat ABCDE. Descompun poligonul în triunghiurĭ; apoĭ construesc pe *ab* un triunghiu asemenea cu ABC, pe *ac* un triunghiu asemenea cu ACD, etc.

212. **Problema X.**—*A descri o circumferență care sa treacă prin doă puncte date și sa fie tangentă la o dreaptă dată saŭ la o circumferență de cerc dată*

1°. Fie A, B cele doă puncte date şi KL dreapta dată.



Prelungim AB pănă în C unde întîlneşte pe KL. Dacă T este punctul în care cercul necunoscut atinge dreapta KL, atuncĭ CT va fi media proporţională între dreptele cunoscute CA, CB. De aicĭ rezultă construcţiunea următoare:

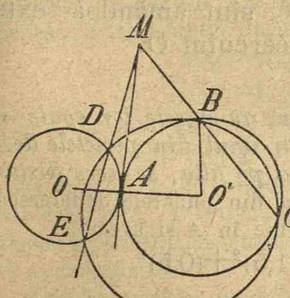
Duc AB până ce întîlneşte pe KL în un punct, C; determin media proporţională între CB şi CA şi port pe dreapta KL, lungimea CT egală cu această medie proporţională. In punctul T rădic perpendiculara TO pe KL şi o prelungesc până ce întîlneşte dreapta OO′ perpendiculară pe AB în mijlocul eĭ; O este centrul cerculuĭ căutat.

Purtând media proporţională CT la stânga luĭ C, avem a doa soluţiune.

Dacă AB este paralelă cu KL, punctul de contact se află la întîlnirea perpendiculareĭ dusă prin mijlocul drepteĭ AB cu dreapta KL; avem o singură soluţiune.

Este vizibil că problema este imposibilă dacă cele doă puncte A şi B sînt de o parte şi de alta a drepteĭ KL.

2°. Fie B, C cele doă puncte date şi C circumferenţa dată.



Presupun problema rezolvită şi fie A punctul în care cercul O′ atinge cercul O; problema este rezolvită dacă cunoaştem punctul M în care tangenta MA întîlneşte dreapta BC prelungită. Ducem prin B şi C o circumferenţă auxiliară care taie circumferenţa O în doă puncte D şi E; coarda DE prelungită va trece prin M. In adevăr, să însemnăm pentru moment prin E_1 punctul în care MD taie circumferenţa O; vom ave

$$MD \times ME_1 = \overline{MA}^2 = MB \times MC.$$

Aşa dar punctul E_1 este pe circumferenţa de cerc determinată de punctele D, B, C care nu'ĭ alt-ceva de căt circumferenţa auxiliară; acest punct E_1 este dar însuşĭ punctul E; din aceste deducem construcţiunea următoare ;

Prin punctele B şi C, ducem o circumferenţă oare-care care taie circumferenţa dată O în doă puncte D şi E, şi din punctul M, intersecţiunea dreptelor BC şi ED, ducem o tangentă MA la cercul O. Punctul A va fi punctul de contact al cerculuĭ O cu cercul ce se caută: centrul O′ al acestuĭ cerc se găseşte la intersecţiunea linieĭ OA prelungită cu perpendiculara dusă prin mijlocul luĭ BC.

A doa tangentă dusă din M la cercul O va da o a doa soluţiune.

Dacă punctele B şi C ar fi de o portivă depărtate de centrul O, atuncĭ dreptele BC şi DE ar fi paralele: ar fi de ajuns atuncĭ să ducem la cercul O o tangentă paralelă cu BC; sînt tot doă soluţiunĭ.

Este vizibil că problema nu'ĭ posibilă de căt numaĭ întru căt punctele B şi C sînt amăndoă exterioare, saŭ amăndoă interioare cerculuĭ O.

213. Exerciţiĭ. *1. Doă cercurĭ aŭ razele lor egale respectiv cu $0{,}5^m$ şi $1{,}5^m$; tangentele în unul din punctele de intersecţiune, sînt perpendiculare una pe alta, se cere distanţa centrelor.* Fie O, O′ centrele, A unul din punctele de intersecţiune; triunghiul OAO′ este dreptunghic în A şi avem

$$\overline{OO'}^2=\overline{OA}^2+\overline{O'A}^2=\overline{(1{,}5)}^2+\overline{(0{,}5)}^2$$

de unde $OO'=1{,}581^m$.

2. Razele a doă cercurĭ concentrice sînt 36^m şi 20^m; se duce o coardă în cercul cel mare tangentă la cercul cel mic; să se calculeze lungimea coardeĭ.

Făcănd figura se vede că coarda căutată este dată de formula $2\sqrt{(R-r)\times(R\times r)}$ în care R şi r sînt razele celor doă cercurĭ. Se găseşte $59{,}867.^m$

3. A calcula lungimea coardeĭ comune la doă cercurĭ de raze 12^m şi 15^m, ştiind că distanţa centrelor este de 18^m.

Chestiunea revine la a calcula înălţimea unuĭ triunghiu a căruĭ rază este 18^m, şi celelalte doă laturĭ căte 12^m şi 15^m.

4. *A duce prin doă puncte A, B o circumferență care să împarta în părți egale o circumferență dată.* Fie O centrul circumferenței date. Presupun problema rezolvită și O' cercul căutat care trece prin doă puncte C și D diametralminte opuse. Avem.

$$OE \times OA = OC \times OD = \overline{OC}^2$$

de unde $OE = \frac{\overline{OC}^2}{OA}$. Dacă punctul E este cunoscut, atunci circumferența căutată este aceia care trece prin A, B, E. Pentru a construi OE, duc un diametru oare-care FG în O și prin A, F, G duc o circumferență care taie pe AO prelungită în E; acestaĭ punctul cautat.

5. *A duce prin un punct dat o circumferență care să fie tangentă la doă drepte date.*

Presupun că dreptele se întîlnesc în A, și fie BAC unghiul care conține punctul dat D ; duc bisectoara unghiuluĭ ; duc DE perpendiculară pe bisectoară și o prelungesc de o lungime egală ED; chestiunea revine la a duce o circumferență prin D, D', și tangentă la AB.

6. *Locul geometric al punctelor, din cari se pot duce tangente egale la doă cercurĭ date, este o perpendiculară pe linia centrelor cercurilor.* Fie M un punct al locului, A și A' punctele de contact a tangentelor duse din M la cercurile O și O'. Avem

$$\overline{OM}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AM}^2$$

și

$$\overline{O'M}^2 = \overline{O'A'}^2 + \overline{A'M}^2;$$

scădănd una din alta, și fiind că AM=A'M, avem

$$\overline{OM}^2 - \overline{O'M}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{O'A'}^2$$

ceia ce însemnează că diferența patratelor distanțelor luĭ M la O și O' este constantă ; acest loc geometric este dar o linie dreaptă perpendiculară pe OO'. Această dreaptă poartă numele de *axa radicală* a cercurilor.

7. *Locul geometric al centrelor cercurilor care taie sub un unghiu drept, doă cercurĭ date, este axa radlcală a acestora.* Se vede ușor pe figură.

8. *Din extremitatea A a diametruluĭ AB a unuĭ cerc, să se ducă o secantă ast-fel ca suma saŭ diferența distanțelor punctuluĭ A la cele doă puncte D și C în cari această secantă taie cercul și tangenta în B, să fie egală cu o linie dată 2l.* După enunciu avem

$$AD + AC = 2l,$$

apoĭ triunghiul dreptunghic ABC, din vîrful căruia am dus perpendiculara BD pe AC, dă :

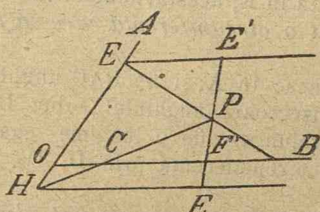
$$AD \times AC = \overline{AB}^2.$$

Chestiunea revine la a construi doă liniĭ cunoscăndu-se suma și productul lor.

9. *Prin un punct din planul unuĭ unghiu să se ducă o dreaptă care să fie împărțită în un raport dat de punctul dat și laturile unghiuluĭ prelungite și dincolo de vîrf dacă este necesitate.*

Trebue să avem $\frac{PE}{PF} = \frac{m}{n}$.

Dacă facem abstracțiune de dreapta OA, punctul E nu maĭ



este supus de căt la condițiunea de maĭ sus, prin urmare E face parte din locul geometric al punctelor carĭ se capătă ducăndu-se prin punctul P niște drepte PF pănă la întîlnirea cu dreapta OB și pe care să ie, cu începere de la punctul P, o lungime PE care să satisfacă condițiuneĭ precedente. Acest loc geometric se compune din doă liniĭ drepte paralele cu OB, pe care ca să-l construim ducem o dreaptă oare-care PF′ pe care determinez punctul E′ prin o a patra proporțională la liniile n, m, PF′, și port de o parte și de alta a punctuluĭ P, lungimea PE′, și apoĭ prin E′ duc paralele cu OB, aceste paralele întîlnesc laturea OA în E și H, ceia ce dă doă pozițiunĭ PH, PE a drepteĭ căutate.

CAPITULUL IV

POLIGOANE REGULATE

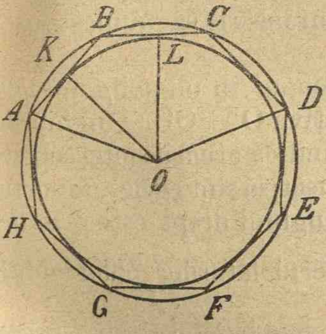
214. **Definițiunĭ.**—Se numeşte *poligon regulat* orĭ-ce poligon, convex saŭ concav, care are toate laturile egale între ele, şi toate unghiurile egale între ele. Astfel, triunghiul ecvilateral şi patratul sînt poligoane regulate.

215. Un poligon se ḑice că'ĭ *înscris* în un cerc, când toate vîrfurile luĭ se găsesc pe circumferența aceluĭ cerc. Cercul este *circumscris* poligonuluĭ.

Un poligon se ḑice că'ĭ *circumscris* la un cerc, dacă toate laturile luĭ sînt tangente la circumferența aceluĭ cerc. Cercul este în acest caz *înscris* în poligon.

216. TEOREMĂ.—*Orĭ-ce poligon regulat poate fi înscris în un cerc şi poate fi circumscris la un cerc.*

Fie ABCDEFGH un poligon regulat.



1°. Ḑic că circumferența dusă prin treĭ vîrfurĭ consecutive A, B, C, trece şi prin vîrful următor D. Prin mijlocurile laturilor AB şi BC a poligonuluĭ, duc perpendicularele pe aceste laturĭ care se taie în un punct O şi care punct este centrul circumferențeĭ dusă prin A, B, C. Pentru a arăta că OD este egală cu raḑa circumferențeĭ, suprapun patrulaterile OLBA şi OLCD, îndoind figura de-a lungul drepteĭ

OL ; fiind-că unghiurile OLB şi OLC sînt drepte, laturea LC ie direcţiunea LB şi punctul C vine în B, fiind că L este la mijlocul laturei BC. De asemene, unghiul LCD fiind egal cu unghiul LBA ca unghiurĭ a poligonuluĭ regulat, laturea CD ie direcţiunea BA, şi fiind că CD este egală cu BA, ca laturĭ a-le poligonuluĭ regulat, punctul D vine în A, şi OD coincide exact cu OA ; prin urmare circumferenţa descrisă din O ca centru cu raḑa OA va trece prin D.

Tot astfel se va demonstra că acea circumferenţă trece şi prin celelalte vîrfurĭ a-le poligonuluĭ.

Aşa dar poligonul poate fi înscris în cerc.

2°. Laturile AB, BC, CD, fiind coarde egale în cercul circumscris, perpendicularele OK, OL... duse din centrul O pe aceste coarde sînt toate egale între ele. Circumferenţa descrisă din O ca centru cu OK ca raḑă, este tangentă la fie-care din aceste laturĭ, în punctul lor din mijloc.

Aşa dar poligonul poate fi circumscris unuĭ cerc.

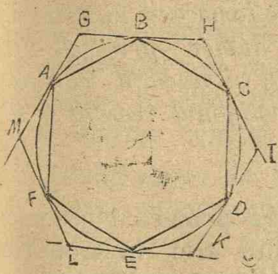
217. *Observaţiune.* Punctul O, centrul cercurilor înscris şi circumscris, este numit *centrul* poligonuluĭ regulat. Raḑa cercului circumscris, este şi *raḑa* poligonuluĭ regulat: raḑa cerculuĭ înscris se numeşte *apotema* poligonuluĭ regulat.

Se numeşte *unghiu la centru* în un poligon regulat, unghiul a doă raḑe consecutive OA, OB. Unghiurile la centru sînt egale între ele, fiind-că arcurile interceptate de ele pe circumferenţa circumscrisă sînt egale. Raportul unuia din aceste unghiurĭ la unghiul drept este prin urmare egal cu $\frac{4}{n}$, n fiind numĕrul laturilor poligonuluĭ.

218. TEOREMĂ. *Dacă împărţim o circumferenţă în un numĕr oare-care de arcurĭ egale: 1°. coardele acestor arcurĭ formează un poligon regulat convex, înscris în circumferenţă; 2°. tangentele duse la punctele de*

împărțire, formează un poligon regulat convex, circumscris la circumferență.

1°. Fie AB, BC, CD... arcurile egale între ele ; coardele acestor arcurĭ sînt și ele egale între ele și prin urmare poligonul înscris ABCDEF are laturile sale egale între ele.



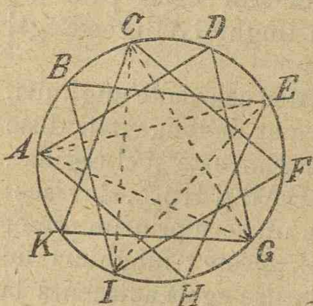
Să arătăm că și unghiurile luĭ sînt egale între ele. Unghiul înscris ABC are drept măsură jumătatea sumeĭ arcurilor AF, FE, ED, DC : unghiul înscris BCD are drept măsură jumătatea sumeĭ arcurilor BA, AF, FE, ED ; aceste doă sumĭ sînt egale prin urmare și unghiul ABC este egal cu unghiul BCD.

Tot astfel se va demonstra și egalitatea celorlalte unghiurĭ.

2°. Poligonul GHIKLM format de tangentele duse la circumferență în punctele A, B, C... este și el regulat. Observ maĭ întâĭ că triunghiurile GAB și HBC.. sînt isoscele, pentru că tangentele duse la un cerc prin un punct exterior sînt egale (§. 140): apoĭ, aceste triunghiurĭ dic că sînt egale pentru că aŭ căte o lature egală adiacentă la doă unghiurĭ egale unul cu altul. Așa, să luăm d. e. triunghiurile AGB și CID: laturile AB, CD sînt egale între ele prin ipoteză; unghiul GAB, are drept măsură jumătate din suma arcurilor AF, FE, ED, DC și BC; unghiul ICD are drept măsură jumătate din suma arcurilor CB, BA, AF, FE, ED; însă aceste doă sumĭ sînt egale între ele, și prin urmare și unghiurile GAB, ICD sînt egale între ele. Tot astfel se va demonstra egalitatea și a celorlalte unghiurĭ între ele. Triunghiurile fiind egale, rezultă: egalitatea unghiurilor G, H, I... între ele, și egalitatea tangentelor GB, BH, HC, CI... între ele și prin urmare și a laturilor poligonuluĭ GHIKLM, care prin urmare este regulat.

219. **Corolar.**— *Dacă se împarte o circumferență în un numĕr oare-care de părțĭ egale, d. e. în zece părțĭ și cu începere de la un vîrf, punctele de împărțire le unim între ele din doă în doă, saŭ din treĭ în treĭ... în general, din n în n, prin liniĭ drepte, cu condițiune ca n să fie un numĕr întreg maĭ mic de cât jumătatea numĕruluĭ laturilor poligonuluĭ; se formează un poligon regulat de 10 laturĭ, dacă n este numĕr prim cu 10. Dacă însă n nu este prim cu 10, și dacă d este cel maĭ mare divizor comun al lor, poligonul regulat ce se formează, are* $\frac{10}{d}$ *laturĭ.*

Să luăm $n=3$, și prin urmare prim cu 10; unesc vîrfurile din treĭ în treĭ, cu începere de la A, adică ieŭ arcurĭ egale cu AD care reprezintă treĭ zecimĭ din circumferență, și duc coardele acestor arcurĭ Fiind că 3 și 10 sînt numerĭ primĭ între eĭ, cel maĭ mic multiplu comun al lor este 30; prin urmare suma celor 10 arcurĭ egale cu AD, este egală cu de 3 orĭ lungimea circumferențeĭ, și acesta este cel maĭ mic multiplu al arculuĭ AD, care poate conține circumferența un numĕr exact de orĭ. Coardele acestor 10 arcurĭ, formează o linie poligonală închisă, fiind că pleacă din A și să termină în acest punct. Această linie poligonală are 10 laturĭ, și prin urmare 10 vîrfurĭ, care nu sînt alt-ceva de cât cele 10 puncte de împărțire a circumferențeĭ; ea formează dar un decagon regulat, fiind-că laturile luĭ este evident că sînt egale între ele, precum și unghiurile iarășĭ egale între ele; decagonul este concav.



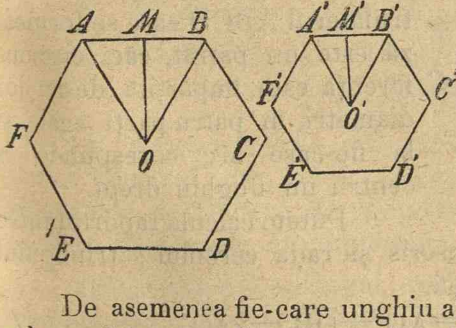
Să luăm $n=4$ și prin urmare ne-prim cu 10;

unesc vîrfurile din patru în patru; dacă plec din A, reviŭ în A după ce am dus coaraele a 5 arcurĭ consecutive egale cu arcul AE care reprezintă $^4/_{10}$ din circumferență, fiind că suma acestor 5 arcurĭ este egală cu de 5 orĭ $^4/_{10}$ de circumferență saŭ de doă orĭ lungimea circumferențeĭ. Poligonul regulaĭ concav format în acest mod are numaĭ 5 laturĭ, adică atîtea cîte unitățĭ sînt în cîtul număruluĭ 10 împărțit prin cel maĭ mare divizor comun 2 a numerilor 10 și 4.

Poligoanele de felul acesta se numesc *stelate*.

220. TEOREMĂ.—*Doă poligoane regulate, de un același numĕr de laturĭ, sînt asemene. Raportul între perimetrele acestor poligoane este egal cu raportul între rađele lor saŭ între apotemele lor.*

1°. Să luăm d. e. doă hexagoane regulate, ABC... A′B′C′... đic că aceste poligoane sînt asemenea.



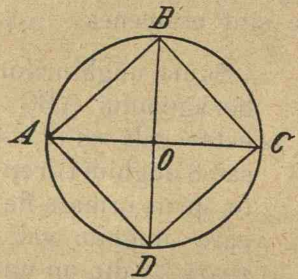
Suma unghiurilor hexagonuluĭ ABC... este egală cu 2×4 saŭ 8 unghiurĭ drepte, prin urmare fie-care unghiu valorează $^8/_6$ din un unghiu drept.

De asemenea fie-care unghiu al hexagonuluĭ A′B′C′ valorează tot $^8/_6$ din un unghiu drept. Așa dar unghiurile acestor doă poligoane sînt egale unul cu altul. Apoĭ, proporționalitatea între laturĭ este evidentă, căcĭ raportul a doă laturĭ din poligonul întăĭ este egal cu 1, și tot cu 1 este egal și raportul între doă laturĭ din poligonul al doilea.

2°. Poligoanele fiind asemene, raportul perimetrelor lor este egal cu raportul dintre doă laturĭ (§. 185) d. e. AB şi A′B′. Apoĭ triunghiurile isoscele AOB şi A′O′B′ sînt asemene între ele fiind că aŭ unghiurile din O şi O′ egale între ele şi cuprinse între laturĭ proporţionale; atuncĭ raportul între AB şi A′B′ este egal cu raportul între OA şi O′A′. Prin urmare şi perimetrele celor doă poligoane sînt între ele ca radele OA şi O′A′.

Apoĭ, este uşor de vădut că triunghiurile dreptunghice AOM şi A′O′M′ sînt asemene şi prin urmare raportul între OA şi O′A′ este egal cu raportul între OM şi O′M′. Aşa dar, perimetrele poligoanelor sînt proporţionale cu apotemele lor OM, O′M′.

221. **Problema I.**—*Să se înscrie un patrat în un cerc dat.* Duc doĭ diametri AC, BD perpendicularĭ unul pe altul, şi unesc extremităţile succesive a diametrilor. Patrulaterul ABCD care se formează este un patrat, căcĭ circumferenţa este împărţită de ceĭ doĭ diametri, în patru părţĭ egale, şi la fie-care arc corespunde la centru un unghiu drept.



Putem calcula raportul între laturea patratuluĭ înscris şi rada cercului; triunghiul dreptunghic AOB dă

$$\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OB}^2 = 2\overline{AO}^2$$

de unde

$$\frac{AB}{AO} = \sqrt{2}.$$

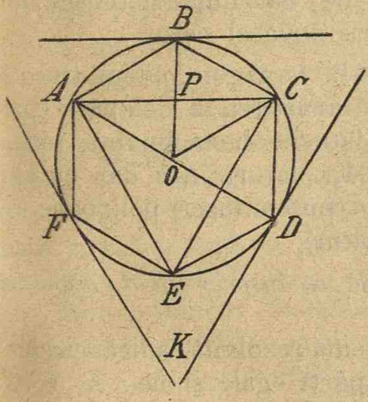
222. **Corolar.**—De la patrat, putem trece la octogonul regulat înscris, împărţind fie-care din arcurile AB, BC, CD, DA în doă părţĭ egale.

De la octogon putem trece la poligonul regulat de 16 laturĭ... şi aşa maĭ departe.

Putem dar, *cu linia şi compasul*, să construim poligoane regulate de 4, 8, 16, 32... laturĭ

223. **Problema II.**—*Să se înscrie un hexagon regulat în un cerc dat.*

Fie AB laturea hexagonuluĭ cerut. Duc rađele OA OB şi formez triunghiul isoscel AOB, în care unghiurile din A şi B sînt egale. Unghiul din O valorează $^4/_6$ saŭ $^2/_3$ de unghiu drept; unghiurile A şi B fac la un loc 2 unghiurĭ drepte minus $^2/_3$ de unghiu drept, saŭ $^4/_3$ de unghiu drept; însă A fiind egal cu B, fie-care valorează $^2/_3$ de unghiu drept: prin urmare triunghiul OAB este ecvilateral şi rezultă că *laturea AB a hexagonuluĭ este egală cu raza OA*. Pentru a construi dar acest poligon, va fi de ajuns să luăm o deschidere de compas egală cu rađa cerculuĭ şi să o purtăm pe circumferenţa cerculuĭ.



224. **Corolar I.**—Unind doă căte doă vîrfurile, căpătăm triunghiul ecvilateral înscris. Pentru a ave raportul între laturea acestuĭ triunghiu şi rađă, observ că triunghiul dreptunghic ACD dă:

$$\overline{AC}^2=\overline{AD}^2-\overline{DC}^2=4\overline{AO}^2-\overline{AO}^2$$

şi prin urmare

$$\frac{AO}{AC}=\sqrt{3}.$$

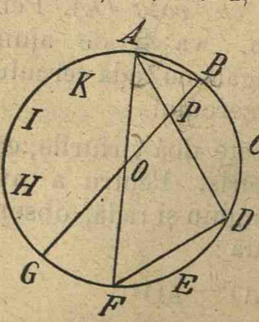
Apotema acestuĭ triunghiu este uşor de vădut că este egală cu jumătatea radeĭ.

225. **Corolar II.**—Ducând tangente prin punctele B, D, F, avem triunghiul ecvilateral IKL circumscris, a căreĭ laturĭ sînt paralele cu acele a-le triunghiuluĭ ACE. Raportul de similitudine între aceste doă triunghiurĭ este egal cu OB la OP adică 2. Aşa dar, o linie oare-care din triunghiul ecvilateral circumscris, este de doă orĭ maĭ mare de cât linia omoloagă din triunghiul ecvilateral înscris în acel cerc.

226. **Corolar III.**—De la hexagon putem trece la dodecagonul regulat, prin împărţirea în doă părţĭ egale a arcurilor sub-întinse de laturile hexagonuluĭ; putem înscri apoĭ poligonul de 24... laturĭ. Aşa dar cu ajutorul *linieĭ şi a compasuluĭ* putem înscri poligoane regulate de 3, 6, 12, 24... laturĭ.

227. **Problema III.**—*Să se înscrie un decagon regulat în un cerc dat.*

Să presupunem problema rezolvită, adică circumferenţa împărţită în zece părţĭ egale şi fie: A, B, C, D, E, F, G, H, I, K punctele de divi̦diune. Unind prin liniĭ drepte punctele de împărţire consecutive, avem decagonul regulat convex; şi unind punctele de împărţire din treĭ în treĭ, avem decagonul regulat stelat. Avem a construi laturile AB şi AD a acestor doă decagoane.



1°. Să considerăm triunghiul isoscel ACB; unghiul din O valorează $^4/_{10}$ saŭ $^2/_5$ de unghiu drept, celelalte doă unghiurĭ A şi B vor valora 2 unghiurĭ drepte minus

$^{2}/_{5}$, adică $^{8}/_{5}$ de unghiu drept, şi B egal iar cu $^{4}/_{5}$ de unghiu drept, adică fie-care din aceste unghiurĭ este de doă orĭ maĭ mare de cât unghiul din O.

Duc bisectoara AP a unghiuluĭ BAO; ea împarte pe OB în părţĭ proporţionale cu OA şi AB, şi avem

$$\frac{AO}{AB}=\frac{OP}{PB}.$$

Dacă acum luăm triunghiul OAP, acesta are unghiurile sale PAO şi AOP egale între ele, fiind că am văḑut că unghiul total BAO este de doă-orĭ maĭ mare de cât unghiul AOP: rezultă că AP este egală cu OP.

Triunghiul ABP este şi el isoscel, fiind că unghiul APB este egal cu suma unghiurilor PAO şi AOP, care ambele sînt egale cu unghiul PAB: aşa dar unghiul considerat APB este dublul unghiuluĭ PAB şi prin urmare egal cu unghiul ABP. Avem dar că laturea AB este egală cu AP.

Putem înlocuì în egalitatea precedentă AB prin OP şi AO prin OB, şi ni vine

$$\frac{OB}{OP}=\frac{OP}{PB}:$$

din aceasta videm că punctul P împarte raḑa OB în medie şi extremă raţiune, şi laturea AB a decagonuluĭ convex regulat înscris este egal cu segmentul cel maĭ mare OP al raḑeĭ. Avem (§. 212).

$$AB=R\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

2°. Să trecem acum la laturea decagonuluĭ stelat. (fig. prec.)

Fie AB laturea decagonuluĭ regulat convex şi AD laturea decagonuluĭ regulat stelat. AD împarte arcul BF în doă părţĭ egale, prin urmare este bisectoara unghiuluĭ BAF; maĭ rezultă din demonstraţiunea precedentă că punctul P, unde AD întîlneşte pe OB, împarte pe OB în medie şi extremă raţiune şi că dreptele OP, AP, AB sînt egale între ele; prin urmare lungimea laturei decagonului stelat trece peste lungimea laturei decagonului convex, cu lungimea PD. Apoĭ triunghiul isoscel AOD are unghiul ADO egal cu unghiul OAD, prin urmare unghiul ADO este egal şi cu unghiul BAD; aşa dar triunghiurile OPD şi APB sînt asemene: însă triunghiul APD este isoscel, atuncĭ şi triunghiul OPD este isoscel şi are PD egală cu OD. Din aceste videm că dacă la lungimea laturei decagonuluĭ convex adăogim o lungime egală cu raza circumferenţeĭ avem laturea decagonuluĭ regulat stelat, adică

$$AD=R\frac{\sqrt{5}-1}{2}+R=R\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

228. **Corolar I.**— Circumfererenţa fiind împărţită în zece părţĭ egale, (fig. prec.) dacă unim punctele de împărţire din doă în doă, avem *pentagonul regulat convex* ACEGIA şi dacă le unim din patru în patru, avem *pentagonul regulat stelat* AEICGA.

Duc diametrul AF; AB şi AD sînt *laturile celor* doă decagoane; FD şi FB sînt laturile *celor* doă pentagoane, pe care voim să le aflăm. Triunghiurile dreptunghice ADF şi ABF daŭ:

$$FD=\sqrt{4R^2-\overline{AD}^2} \text{ şi } FB=\sqrt{4R^2-\overline{AB}^2},$$

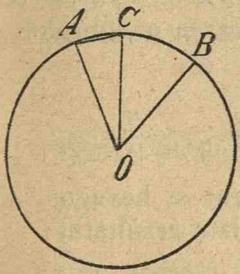
substituind în loc de AD şi AB valorile lor aflate maĭ sus avem

$$FD=\frac{R}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}} \text{ şi } FB=\frac{R}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

229. **Corolar II.**—De la decagonul convex, putem trece la poligonul regulat de 20 laturĭ, apoĭ la acel de

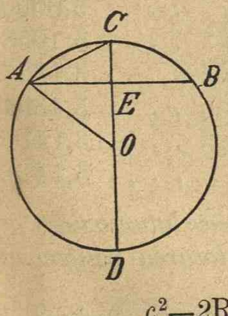
40... Se poate dar, *cu linia și compasul*, înscri poligoane regulate de 5, 10, 20, 40... laturĭ.

230. **Problema IV.**—*Să se înscrie un pentedecagon regulat în un cerc dat.*



Ieŭ un arc AB egal cu a şesa parte din circumferenţa O, şi scad din el arcul BC egal cu a zecea parte din circumferenţă; arcul AC care rămâne va fi a cincĭ-sprezecea parte din circumferenţă. Aşa dar, coarda arculuĭ AC este laturea pentedecagonuluĭ căutat.

231. **Problema V.**— *Cunoscându-se laturea unuĭ poligon regulat înscris în un cerc dat, să se calculeze laturea poligonuluĭ regulat înscris cu un îndoit număr de laturĭ.*



Fie $AB=a$ laturea dată şi R raḑa cercului; CD fiind diametrul perpendicular pe AB, AC va fi laturea căutată; o vom însemna cu litera c.

Coarda AC este medie proporţională între diametrul CD şi proecţiunea eĭ CE=OC—OE, pe acest diametru; avem dar

$$c^2=2R(R-OE)=R(2R-2OE).$$

Insă triunghiul dreptunghic AEO dă

$$OE=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AE}^2}$$

$$\text{saŭ } OE=\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-a^2};$$

subtituind în expresiunea precedentă a luĭ c^2 şi extrăgând rădăcina avem

$$c=\sqrt{R(2R-\sqrt{4R^2-a^2})}.$$

In particular dacă să ie rada ca unitate, avem

$$c=\sqrt{2-\sqrt{4-a^2}}.$$

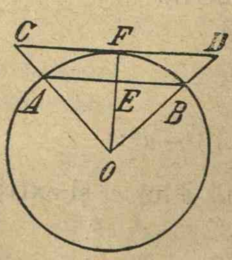
Acesteĭ expresiunĭ i se dă o altă formă maĭ comodă pentru calculul numeric. Inmulţim şi împărţim expresiunea $2-\sqrt{4-a^2}$ de sub radical, prin $2+\sqrt{4-a^2}$, ceia ce nu va schimba întru nimic valoarea membruluĭ al doilea; avem

$$c=\sqrt{\frac{(2-\sqrt{4-a^2})(2+\sqrt{4-a^2})}{2+\sqrt{4-a^2}}}=\frac{a}{\sqrt{2+\sqrt{4-a^2}}}.$$

Să aplicăm această formulă la patrat şi hexagon, înscrişĭ în circumferenţa de rada 1: iată rezultatul:

Numerul laturilor	Semi-perimetrele	Numerul laturilor	Semi-perimetrele
4	2,82842	6	3,00000
8	3,06146	12	3,10582
16	3,12144	24	3,13262
32	3,13654	48	3,13935
64	3,14033	96	3,14103
128	3,14127	192	3,14145

232. **Problema VI.** — *Cunoscându-se laturea unuĭ poligon regulat înscris, să se calculeze laturea poligonuluĭ regulat circumscris asemene.*



Fie $AB=a$ laturea dată şi R rada cerculuĭ: să ducem tangenta CD prin mijlocul F a arculuĭ AB şi să o prelungim până în punctele C şi D, unde întâlneşte razele OA şi OB prelungite. CD va fi laturea căutată; să o însemnăm prin α.

Triunghiurile asemene AOE şi COF daŭ

$$\frac{CF}{AE}=\frac{OF}{OE} \text{ saŭ } \frac{\alpha}{a}=\frac{R}{OE};$$

însă am găsit la Problema V

$$OE=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-a^2};$$

prin urmare rezultă

$$\alpha=\frac{2aR}{\sqrt{4R^2-a^2}}.$$

In particular, dacă să ie rada ca unitate, avem

$$\alpha=\frac{2a}{\sqrt{4-a^2}}.$$

Să aplicăm această formulă la aceleaşĭ poligoane ca şi dineoare:

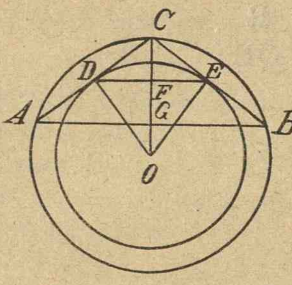
Numerul laturilor	Semi-perimetrele	Numerul laturilor	Semi-perimetrele
4	4,00000	6	3,46411
8	3,31371	12	3,21540
16	3,18260	24	3,15957
32	3,15173	48	3,14609
64	3,14412	96	3,14272
128	3,14223	192	3,14188

233. **Probleme VII.**— *Fiind date rada r şi apotema a, a unuĭ poligon regulat, să se calculeze rada r′ şi apotema a′ a poligonuluĭ regulat care ar ave acelaşĭ perimetru şi un numĕr îndoit de luturĭ.*

Fie AB laturea şi O centrul poligonuluĭ dat; ducem rada OGC perpendiculară pe AB avem

$$OG=r,\ OF=a'.$$

Ducem CA, CB şi unim mijlocurile D şi E acestor doă coarde. Dreapta DE, paralelă cu AB şi egală



cu jumătatea eĭ, va fi laturea poligonuluĭ regulat care are acelaşĭ perimetru şi de doă-orĭ maĭ multe laturĭ de căt cel dintăĭ. Unghiul DOE fiind jumătate din unghiul la centru AOB a poligonuluĭ primitiv, punctul O va fi centru şi nouluĭ poligon şi vom ave

$$OD=r', \ OF=a'.$$

Insă, punctul F este mijlocul luĭ CG, prin urmare

$$OF=\tfrac{1}{2}(OF—OC), \text{ saŭ } a'=\tfrac{1}{2}\ (a+r).$$

Apoĭ, triunghiul dreptunghic CDO dă:

$$\overline{OD}^2=OC\times OF \text{ saŭ } r'=\sqrt{r.\,a'}.$$

234. **Corolar.**—Videm în figură că OF este maĭ mare de căt OG şi OD este maĭ mic de căt OC. Prin urmare *cănd trecem de la un poligon regulat la poligonul regulat izoperimetric de un număr îndoit de laturĭ, apotema creşte şi rada se micşurează,* aşa că diferenţa între radă şi apotemă merge descrescănd. Triunghiul AOG arată că această diferenţă OA—OG este maĭ mică de căt AG, adică de căt jumătatea lutureĭ poligonuluĭ corespondent. Insă, dacă perimetrul unuĭ poligon rămăne constant, atuncĭ valoarea fie-căreĭ din laturĭ tinde către zero, cănd indoim necontenit numărul laturilor. Aşa dar, *diferenţa între rază şi apotemă poate deveni orĭ-căt de mică vom vroi.*

235. **Exerciţiĭ.**—*1. Apotema hexagonuluĭ regulat înscris în un cerc, este egală cu jumătatea latureĭ triunghiuluĭ ecvilateral înscris în acelaşĭ cerc.* Fie A, B, C, D, E, F, vîrfurile succesive a-le hexagonuluĭ; duc OD perpendiculară pe AB şi formez triunghiul ABE; se vede că OD$=\tfrac{1}{2}$ AE.

2. *Dacă distanța centrelor a doă cercurĭ care se taie în unghiu drept este egală cu dublu vneia din raze, coarda comună este laturea hexagonuluĭ regulat înscris în unul din cercurĭ și este totodată și laturea triunghiulrĭ ecvilateral înscris în celalalt cerc.*

Făcându-se figura se vede că coarda în chestiune subîntinde în unul din cercurĭ un arc de 60^0 și un arc de 120^0 în celalalt cerc.

3. *A descri o circumferență ast-fel ca perimetrul patratuluĭ înscris în această curbă, să fie egal cu acela a triunghiuluĭ ecvilateral circumscris la o circumferență dată.*

Fie R rada cerculuĭ dat, și R′ rada cerculuĭ căutat; perimetrele în chestiune sînt $6R\sqrt{3}$ și $4R'\sqrt{2}$; trebue să avem

$4R'\sqrt{2}=6R\sqrt{3}$ de unde $R'=\frac{3R\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$; care se poate scri

$R'=\frac{3R^2\sqrt{3}}{2R\sqrt{2}}$; și acum se vede că R′ este o a patra proporțională cu $R\sqrt{3}$, $\frac{3R}{2}$.

4. *A construi un lozanj a căruĭ lature să aibă o lungime dată și să fie medie proporțională între cele doă diagonale.* Fie ABCD lozanjul; O punctul de întretăere al diagonalelor; duc perpendiculara OM pe AB; avem $\overline{AB}^2=AC\times AD=4AO\times BO$ prin ipoteză; apoĭ triunghiurile dreptunghice ABO, AMO sînt asemene și daŭ

$$\frac{OM}{AO}=\frac{BO}{AB},$$

de unde conchid că $OM=\frac{AO\times BO}{AB}=\frac{AB}{4}$.

Construcțiunea lozanjuluĭ revine prin urmare la construcțiunea triunghiuluĭ dreptunghic ABO în care se cunoaște ipotenuza AB și înălțimea corespunzetoare OM.

CAPITULUL V

MĂSURAREA CIRCUMFERENŢEI

236. **Definiţiunĭ.**—Circumferenţa de cerc fiind o linie curbă, lungimea eĭ saŭ al unuĭ arc al eĭ, nu se poate ave în acelaşĭ mod cum avem lungimea uneĭ liniĭ drepte, adică prin comparaţiunea acesteia cu unitatea de lungime, căcĭ această unitate de lungime este o porţiune de linie dreaptă şi nu poate fi egală cu o lungime de curbă, fiind-că în Geometrie *egalitatea* rezultă din posibilitatea de coincidenţă prin suprapunere; se poate însă ca o lungime de dreapta şi un arc de curbă să fie *echivalente*. Pentru stabilirea acesteĭ echivalenţe, s'a adoptat următoarea definiţiune:

Lungimea unuĭ arc de curbă este limita către care tinde perimetrul uneĭ liniĭ frânte înscrisă în arc, şi a căreĭ laturĭ se micşorează din ce în ce apropiindu-se de zero.

237. Să aplicăm această definiţiune la circumferenţa de cerc, şi să arătăm că limita în chestiune există.

Să imaginăm că se înscrie un poligon regulat în circumferenţă, şi că îndoim necontenit numărul laturilor acestuĭ poligon; vom ave o serie de poligoane a căror perimetri merg crescând, însă nu vor creşte fără limită, pentru că orĭ-care din iĭ este maĭ mic de cât perimetrul unuĭ poligon regulat circumscris. De aicĭ rezultă că perimetrele poligoanelor regulate înscrise succesiv în circumferenţă, tind către o limită pe care nu pot să o ajungă nicĭ odată, dar de care se pot apropia orĭ căt de mult am vroi noĭ ; această limită o numim lungimea circumferenţeĭ Aşa dar : *Lungimea uneĭ circumferenţe este limita cătră care tinde perimetrul unuĭ poligon regulat înscris, cănd numĕrul laturilor acestuĭ poligon se măreşte necontenit.*

Tot astfel vom defini şi lungimea unuĭ arc de cerc.

238. TEOREMĂ.—*Doă circumferenţe sînt proporţionale cu raḑele lor.* Fie R şi R′ raḑele celor doă circumferenţe, a căror lungimĭ să le însemnăm cu C şi C′. Să înscrim în aceste circumferenţe căte un poligon regulat de un acelaşĭ numĕr n de laturĭ, şi fie P, P′ perimetrele acestor poligoane ; avem

$$\frac{P}{P'}=\frac{R}{R'}.$$

Să facem să crească n necontenit, P şi P′ vor varia şi se vor apropia respectiv de C şi C′; după definiţiunea de maĭ sus, şi fiind-că raportul lor este necontenit egal cu raportul dintre raḑe, vom ave

$$\frac{C}{C'}=\frac{R}{R'}.$$

239. Corolar.—*Doă arcurĭ asemene, adică doă arcurĭ carĭ aŭ acelaşĭ numĕr de grade, în circumferenţe deosebite, sînt proporţionale cu raḑele lor.* Fie a şi a' lungimile a doă arcurĭ carĭ fac parte din circumferenţele de lungimĭ C şi C′ şi de raḑe R şi R′, şi fie α numĕrul de grade cuprinse în unghiurile la centru corespundente arcurilor. Ştim că (§. 113) raportul între arcurĭ este egal cu raportul între unghiurile de la centru corespundente ; prin urmare raportul între a şi C va fi egal cu raportul între α şi 360°; adică

$$\frac{a}{C}=\frac{\alpha}{360^0};$$

de asemine, circumferenţa a doa dă :

$$\frac{a'}{C'}=\frac{\alpha}{360^0}$$

de unde $\frac{a}{C}=\frac{a'}{C'}$, saŭ $\frac{a}{a'}=\frac{C}{C'}=\frac{R}{R'}$.

240. TEOREMĂ.—*Raportul între lungimea uneĭ circumferenţe la diametrul eĭ este constant.*

Fie C lungimea uneĭ circumferenţe de rađă R: să o comparăm cu o altă circumferenţă arbitrară de lungime C′ şi de rađă R′ ; avem

$$\frac{C}{C'}=\frac{R}{R'}$$

saŭ

$$\frac{C}{2R}=\frac{C'}{2R'},$$

ceia ce arată că raportul $\frac{C}{2R}$ nu atărnă de circumferenţa considerată.

241. *Observaţiune.*—*Raportul constant între lungimea uneĭ circumferenţe şi diametrul eĭ este un numĕr necomensurabil,* care prin urmare nu poate fi reprezentat prin un număr întreg saŭ fracţionar ; patratul luĭ este şi el necomensurabil ; s'a luat obiceiul a se însemna prin litera grecească π ; astfel avem ca definiţiune :

$$\frac{\text{Circ. R}}{2R}=\pi.$$

S'a calculat valoarea numerică a luĭ π cu un mare numĕr de cifre zecimale ; iată valoarea cu şese-sprezece zecimale :

$$\pi=3,1415926535897932...$$

Archimede a găsit că π este cuprins între $3\,^{10}/_{70}$ şi $3\,^{10}/_{71}$; să ie voloarea $^{22}/_{7}$ ca maĭ comodă pentru calcule în aplicaţiunĭ.

Adrian Metius, geometru din secolul al XVI-lea, a dat ca valoare apropietă pentru π, numĕrul $\frac{355}{113}$.

242. **Corolar I.**—*Lungimea uneĭ circumferențe este dată de formula*

$$C=2\pi R,$$

care rezultă din definițiunea numĕruluĭ π. Este de observat că atăt calcularea lungimeĭ circumferențeĭ cănd se cunoaşte rada, căt şi calcularea radeĭ cănd se cunoaşte lungimea circumferențeĭ, nu se poate face de căt în mod aproximativ.

243. **Corolar II.**—Fie l lungimea unuĭ arc de circumferență de radă R, căreĭ lungimĭ să'ĭ corespundă la centru un unghiu care să aibă drept măsură α; la lungimea πR corespunde 2 *ungh. dr.*, la lungimea l corespunde α şi avem

$$\frac{\pi R}{2\,ungh.dr.}=\frac{l}{\alpha}, \text{ de unde } l=\frac{\pi R\alpha}{2\,ungh.dr.}:$$

aceasta în caz cănd luăm ca unitate de unghiu, unghiul drept. Dacă luăm ca unitate de unghiu gradul, avem

$$\frac{\alpha R}{180^0}=\frac{l}{\pi}, \text{ de unde } l=\frac{\alpha\pi R}{180^0}.$$

Dacă unghiul α conține minute şi secunde, atuncĭ va trebui să transformăm totul în secunde. D. E. lungimea arculuĭ, în circumferența de rada R, căruĭ corespunde la centru $31^0 4' 27'',5$ va fi dată de formula

$$\frac{l}{\pi R}=\frac{[31\times60+4]\times60+27{,}5}{180\times60\times60}.$$

244. **Problema.**—*A calcula raportul circumferențeĭ la diametru.* Formula care defineşte π

$$\pi=\frac{C}{2R}$$

ni spune că pentru a ave π, putem:

saŭ să ni dăm R și să calculăm lungimea circumferenței C; aceasta constitue *metoda perimetrelor*;

Saŭ să ni dăm circumferența C și să calculăm rada R: aceasta constitue *metoda izoperimetrelor*.

$$\pi={}^1/_2C,$$

adică numĕrul π este egal cu jumatate din circumferența de rada 1.

Să căutăm dar a afla valoarea numerică a lungimeĭ $^1/_2C$. Dacă vom înscri în circumferența de rada 1 un poligon regulat de un numĕr care-care de laturĭ, semi-perimetrul aceluĭ poligon este o valoare apropiată de π în minus, și dacă vom circumscri un poligon de un acelașĭ numĕr de laturĭ, semi-perimetrul acestuia va fi iarășĭ o valoare apropiată de π în plus. Astfel dacă înscrim un patrat, și apoĭ cu ajutorul formuleĭ de la Nr. 232, calculăm succesiv semi-perimetrele poligoanelor regulate înscrise de 8, 16, 32, 64... laturĭ, vom ave tot atâtea valorĭ apropiete din ce în ce de π însă în minus; apoĭ dacă cu ajutorul formuleĭ de la Nr. 232 circumscris circumferențeĭ un patrat, apoĭ un poligon regulat de 8, 16, 32, 64... laturĭ, semi-perimetrele acestor poligoane vor fi tot atâtea valorĭ apropiete din ce în ce de π, însă în plus. Așa am văḑut că semi-perimetrele poligoanelor regulate de 128 laturĭ, înscrise și circumscrise, sînt egale respectiv cu 3,14127 și 3,14224; prin urmare valoarea luĭ π este cuprinsă între aceștĭ doĭ numerĭ.

Am pute pleca de la hexagon și a continua cu poligoane de 12, 24, 48... laturĭ.

246. *Metoda izoperimetrelor*.— Această metodă a fost stabilită de geometrul Schwab, în anul 1813; vom da numaĭ o idee de ea.

Să luăm circumferenţa egală cu 2, atuncĭ avem

$$\pi = \frac{1}{R} \quad \text{saŭ} \quad \frac{1}{\pi} = R,$$

de unde videm că numĕrul $\frac{1}{\pi}$ este valoarea raḑeĭ circumferenţeĭ egală cu 2. Prin urmare apotema a şi raḑa r a orĭ-căruĭ poligon regulat de un perimetru egal cu 2, sînt doă valorĭ apropiete de $\frac{1}{\pi}$, una în minus şi alta în plus; căcĭ circumferenţa înscrisă şi circumferenţa circumscrisă la un aşa poligon, fiind una maĭ mică şi ceialaltă maĭ mare de căt 2, raḑele acestor circumferenţe a şi r, vor cuprinde raḑa R a circumferenţeĭ egală cu 2, adică pe numĕrul $\frac{1}{\pi}$.

Aşa fiind, să luăm patratul de lature egal cu $^1/_2$: perimetrul seŭ este 2, apotema luĭ este $a_1 = {}^1/_4$ şi raḑa sa $r_1 = {}^1/_4\sqrt{2}$. Apoĭ cu ajutorul formulelor (§. 233):

$$a' = {}^1/_2\,(a + r) \text{ şi } r' = \sqrt{r_1 a'}\,;$$

să calculăm succesiv raḑele şi apotemele a_2 şi r_2, a_3 şi r_3, a_4 şi r_4... a poligoanelor regulate izoperimetrice de 8, 16, 32... laturĭ.

Dacă considerăm seria

$$a_1, r_1;\ a_2, r_2;\ a_3, r_3;\ \ldots\ a_n, r_n,$$

în virtutea formulelor videm că cu începere de la terminul al treilea, fie-care termin este alternativ, mediŭ aritmetic şi mediŭ geometric între ciĭ doĭ dinaintea luĭ; terminiĭ de rang nepăreche $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$, merg crescănd rămăind sub valoarea numĕruluĭ $\frac{1}{\pi}$: pe cănd terminiĭ de rang păreche $r_1, r_2, r_3 \ldots r_n$, merg descrescănd spre $\frac{1}{\pi}$. Am maĭ văḑut (§. 233) că diferenţa $r_n - a_n$

poate deveni orĭ-căt de mică vom vroi, dacă dăm luĭ n o valoare destul de mare: prin urmare termeniĭ serieĭ considerate fiind alternativ, inferiorĭ şi superiorĭ numĕruluĭ $\frac{1}{\pi}$, aŭ ca limită acest numĕr.

Maĭ observăm că $a_1 = {}^1/_4$ este media aritmetică între 0 şi $^1/_2$, şi că $r_1 = {}^1/_4\sqrt{2}$ este media geometrică între $^1/_2$ şi $^1/_4$, şi atuncĭ putem dice:

Numĕrul $\frac{1}{\pi}$ *este limita cătră care tinde şirul numerilor căpătaţĭ, începănd cu 0 şi* $^1/_2$, *luănd alternativ media aritmetică şi media geometrica între doĭ precedenţĭ.*

Prelungind calculul acestor mediĭ pănă ce vom ave doĭ terminĭ consecutivĭ carĭ să aibă $m+1$ zecimale comune, vom ave $\frac{1}{\pi}$ cu aproximaţiune de ordinul zecimal $m+1$, şi prin urmare împărţind 1 prin numĕrul astfel găsit, vom ave π cu aproximaţiune de ordinul zecimal al m^{lea}.

247. **Exerciţii.**— *1. A calcula, cu aproximaţiune de un milimetru şi fără ajutorul logaritmilor, circumferenţa care are ca radă diagonala unuĭ patrat a căruĭ laturĭ este* 0^m5. Fie c laturea patratuluĭ dat; diagonala luĭ, saŭ diametrul cercului circumscris, este egală cu $2c\sqrt{2}$. Prin urmare circumferenţa cerută este $2\pi c\sqrt{2}$; însă $c=0^m,5$, avem dar de calculat $\pi\sqrt{2}$ cu aproximaţiune de 0,001.

2. A calcula, pănă la secundă, valoarea în grade a unuĭ arc egal cu rada. Ieŭ formula (§. 242).

$$l=\frac{\pi R n}{180}$$

în care fac $l=R$ şi am

$$n=\frac{180^0}{\pi}=\frac{648000''}{\pi}=57^0 17' 44''.$$

3. *A calcula raḑa unuĭ arc de 25°15′ a căruĭ lungime este de 8m,50.* Ieŭ formula

$$l=\frac{\pi R n}{180} \text{ de unde } R=\frac{180\times l}{\pi n};$$

pun în loc de l, $8^m,50$, şi în loc de n, $25^0,15'$ şi am

$$R=\frac{180\times 8.50}{25\ ^1/_4\pi}=\frac{180\times 8,5\times 4}{101\times\pi}=19^m,29.$$

4. *Doă arcurĭ de aceiaşĭ lungime aŭ fost descrise cu razele 0m,25 şi 0m,18. Unul din arcurĭ este egal cu 15°,20′, care'ĭ valoarea în grade a celuialalt?*

Fie R, R′, razele celor doă arcurĭ de aceiaşĭ lungime, n i n' numĕrul de grade conţinute în aceste arcurĭ; avem

$$\frac{\pi R' n'}{180''}=\frac{\pi R n}{180} \text{ de unde } n'=\frac{Rn}{R'};$$

Pun în loc de R, $0^m,25$, în loc de R′ $0^m,18$ şi în loc de n, $15^0,20'$, şi găsesc

$$n'=15^0 20'\times\frac{25}{18}=21^0 17' 46'',67.$$

CARTEA IV.

ARII

CAPITULUL I

ARIA UNUĬ POLIGON

248. **Definițiunĭ.**— Se numeşte *aria* uneĭ figurĭ, porțiunea de suprafața limitată de figură.

Să ie ca *unitate de arie*, aria patratuluĭ construit pe unitatea de lungime; astfel dacă unitatea de lungime este *metrul* unitatea de arie va fi **metrul patrat***).

Doă figurĭ carĭ aŭ aceiaşĭ arie, fără să aibă aceiaşĭ formă sînt *echivalente*.

249. La un paralelogram să ie ca *bază* una oarecare din laturile luĭ, şi lungimea perpendiculareĭ dintre bază şi paralela bazeĭ, este *înălțimea* paralelogramuluĭ.

La un trapez să ie ca *bază* una din cele doă laturĭ paralele, şi *înălțimea* este distanța între laturile paralele.

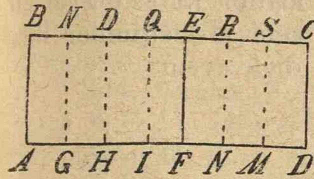
Baza şi înălțimea unuĭ dreptunghiu, sînt numite *dimensiunile* dreptunghiuluĭ.

---

*). Pentru maĭ multe deslușirĭ privitoare la unitatea de arie, a se vide Cursul de Aritmetică, capitulul Sistemul metric.

250. TEOREMĂ—*Doă dreptunghiurĭ carĭ aŭ aceiaşĭ înălţime sînt proporţionale cu bazele lor.*

Observăm maĭ întăĭ că doă dreptunghiurĭ cu aceiaşĭ bază şi înălţime, sînt egale fiind-că se pot suprapune.



Fie ABCD şi ABEF doă dreptunghiurĭ carĭ aŭ aceiaşĭ înălţime AB. Să presupunem că raportul bazelor AD, AF este egal cu $^7/_4$: asta însemnează că bazele aŭ o comună măsură AG care se cuprinde de 7 orĭ în AD şi 4 orĭ în AF. Prin punctele de împărţire a bazelor G, H, I... rădic perpendiculare carĭ împart dreptunghiul ABCD în 7 dreptunghiŭrĭ ABNG, GNPH... toate egale între ele, fiind-că toate aŭ aceiaşĭ bază şi aceiaşĭ înălţime. Dreptunghiul ABEF este şi el împărţit în 4 de aceste dreptunghiurĭ parţiale. Prin urmare, dreptunghiurile date ABCD şi ABEF aŭ o comună măsură ABNG care se cuprinde în ele de atătea orĭ de căte-orĭ bazele lor AD, AF conţin comuna lor măsură AG: aşa dar raportul ariilor acestor dreptunghiurĭ este egal cu $^7/_4$ adică cu raportul $\frac{AD}{AF}$ a bazelor lor.

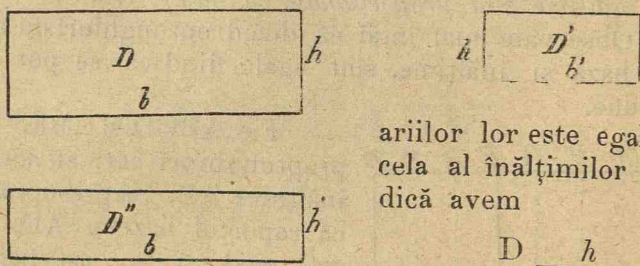
Dacă bazele nu aŭ o comună măsură, atuncĭ se va proceda cum se arată în nota de la (§. 113).

251. **Corolar.**—*Doă dreptunghiurĭ carĭ aŭ aceiaşĭ bază sînt proporţionale cu înălţimile lor*, fiind că baza şi înălţimea unuĭ dreptunghiu se pot schimba între ele.

252. TEOREMĂ.—*Doă dreptunghiurĭ sînt proporţionale cu productele bazelor prin înălţimile lor.*

Fie D şi D′ doă dreptunghiurĭ, *h*, *h′* înălţimile şi *b*, *b′* bazele lor. Consider un dreptunghiu D″ care să aibă aceiaşĭ bază *b* ca D şi aceiaşĭ înălţime *h′* ca D′

Dreptunghiurile D, D″ avînd aceiaşĭ bază b. raportul



ariilor lor este egal cu acela al înălţimilor lor, adică avem

$$\frac{D}{D''}=\frac{h}{h'}.$$

Dreptunghiurile D″ D′, avănd aceeaşĭ înălţime h', raportul ariilor lor este egal cu acela al bazelor lor, adică aveam

$$\frac{D''}{D'}=\frac{b}{b'}.$$

Inmulţind aceste doă egalităţĭ între ele membru cu membru şi suprimănd factorul comun D″, ni vine

$$\frac{D}{D'}=\frac{b\times h}{b'\times h'},$$

egalitate care demonstrează Teorema.

253. TEOREMĂ —*Aria unuĭ dreptunghiu este egală cu productul bazeĭ prin înălţimea lui, dacă se ie că unitate de suprafaţă patratul a căruĭ laturе este egală cu unitatea de lungime.*

Se luăm dreptunghiul D a căruĭ bază este b şi înălţime h; consider patratul construit pe unitatea de lungime şi aria luĭ o ieŭ ca unitate de arie: avem:

dreptunghiul D cu baza b şi înălţimea h,
patratul 1 « « 1 « « 1;

în virtutea Teoremeĭ precedente, avem

$$\frac{D}{1}=\frac{b\times h}{1\times 1},\quad \text{saŭ}\quad D=b\times h.$$

Aicĭ, D, *b* şi *h* sînt numerĭ pentru că sînt rezultatul măsurăreĭ arieĭ, bazeĭ şi înălţimeĭ dreptunghiuluĭ prin unităţile respective ; prin urmare egalitatea din urmă exprimă că : *aria dreptunghiuluĭ este egală cu productul a doĭ numerĭ care reprezintă măsurele bazeĭ şi a înălţimeĭ dreptunghiuluĭ.* Saŭ maĭ pe scurt: *aria unuĭ dreptunghiu este egal cu productul bazeĭ prin înălţimea luĭ.*

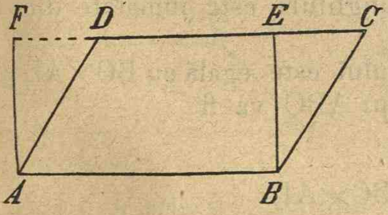
254. **Corolar.**—*Aria unuĭ patrat, este egală cu puterea a doa a latureĭ sale,* fiind că baza şi înălţimea luĭ sînt egale între ele.

Reciproc, *puterea a doa a unuĭ numĕr oare-care poate fi considerată ca aria unuĭ patrat a căruĭ lature este egală cu numĕrul.*

Aceasta explică pentru ce cuvintele *patrat* şi *puterea a doa*, exprimă acelaşĭ lucru.

255. TEOREMA.—*Aria unuĭ paralelogram este egală cu productul bazeĭ prin înălţimea luĭ.*

Să luăm paralelogramul ABCD, a căruĭ bază este AB. Prin punctele A şi B duc perpendiculare la baza AB pănă la întîlnire cu paralela DC ; s'aŭ format doă triunghiurĭ dreptunghice AFD şi BEC care sînt egale fiind că aŭ ipotenuzele AD, BC egale între ele ca laturĭ opuse în paralelogram şi laturele AF, BE iarăşĭ egale între ele ca paralele cuprinse între paralele.



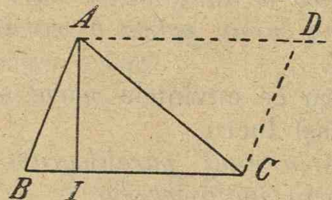
Acum, observ că dacă din patrulaterul ABCF, scad pe rînd, triunghiurile egale între ele BEC şi AFD, resturile căpătate, dreptunghiul ABEF şi paralelogramul ABCD, sînt echivalente între ele. Insă dreptunghiul ABEF are drept măsură productul

$AB \times BE$: prin urmare şi aria paralelogramuluĭ va fi egală cu $AB \times BE$, adică cu productul bazeĭ sale AB prin înălţimea BE.

256. **Corolar.**—*Doă paralolograme cu baze egale, sînt proporţionale cu înălţimile lor.*

Doă paralelograme cu înalţimĭ egale sînt proporţionale cu bazele lor.

257. TEOREMA.—*Aria unuĭ triunghiŭ este egala cu jumătate din productul bazeĭ prin înalţimea luĭ.* Fie triunghiul ABC, în care laturea BC să fie baza luĭ, înălţimea 'ĭ va fi perpendiculara AI scoborîtă din vîrful A pe bază. Duc prin C, paralela CD cu BA şi prin A paralela AD cu BC, şi formăm astfel un paralelogram ABCD care are aceiaşĭ înălţime AI ca şi triunghiul dat ABC.



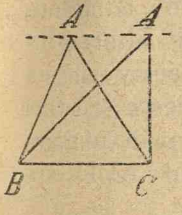
Insă triunghiurile ABC şi ACD sînt egale ca avînd trustrele laturile egale una cu alta, prin urmare fie-care din aceste triunghiurĭ este jumătate din paralelogramul ABCD.

Aria paralelogramuluĭ este egală cu $BC \times AI$, prin urmare aria triunghiuluĭ ABC va fi

$$\frac{1}{2} BC \times AI,$$

ceia ce demonstrează Teorema.

258. **Corolar I.**—*Doă triunghiurĭ, care aŭ bazele lor egale între ele şi înălţimele lor iarăşĭ egale între ele, sînt echivalente.* Din aceasta rezultă că : dacă vîrful A al unuĭ triunghiŭ ABC se mişcă pe o dreaptă paralelă cu BC, aria triunghiuluĭ nu se schimbă.

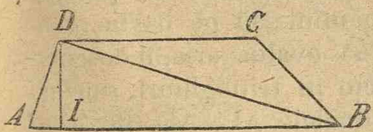


259. **Corolar II.**—*Doă triunghiurĭ cari aŭ aceiaşĭ bază sînt între ele ca înălţimele lor.*

Doă triunghiurĭ cari aŭ aceiaşı înălţime sînt între ele ca bazele lor.

260. **Corolar III.**—Să însemnăm prin c laturea unuĭ triunghiu ecvilateral; înălţimea triunghiuluĭ va fi egală cu $\sqrt{c^2-\frac{c^2}{4}}$, adică $\frac{c\sqrt{3}}{2}$; prin urmare aria triunghiuluĭ ecvilateral are de expresiune $\frac{c^2\sqrt{3}}{4}$.

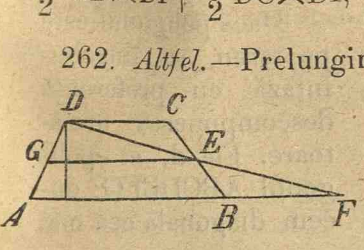
261. TEOREMA.—*Aria unuĭ trapez este egală cu productul înălţimeĭ luĭ prin semi-suma bazelor.* Fie un trapez ABCD. a căruĭ bază este AB şi DI înălţimea.



Duc diagonala BD care împarte trapezul în doă triunghiurĭ a căror sumă formează aria trapezuluĭ. Aria triunghiuluĭ ABD este $\frac{1}{2}AB\times DI$, şi aria triunghiuluĭ DCB este $\frac{1}{2}DC\times DI$, prin urmare aria trapezuluĭ este

$$\frac{1}{2}AB\times DI+\frac{1}{2}DC\times DI, \text{ saŭ } \frac{1}{2}(AB+DC)\times DI$$

262. *Altfel.*—Prelungim baza AB, de o lungime BF egală cu DC şi unim D cu F; s'aŭ format triunghiurile DEC şi BEF cari sînt egale ca avînd

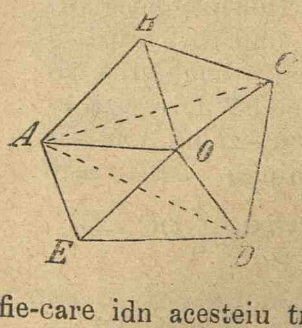


laturea BF egală cu DC, şi unghiurile adiacente acestor laturĭ egale unul cu altul ca alterne-interne. Dacă din figura AFECD scad succesiv aceste triunghiurĭ voiŭ căpăta resturĭ egale; aceste resturĭ sînt triunghiul ADF şi trapezul ABCD; prin urmare ariile acestora sînt echivalente; triunghiul ADF are drept măsură $\frac{1}{2}(AF\times DI$ saŭ $\frac{1}{2}(AB+DC)\times DI$ prin urmare şi trapezul va avea această mĕsură.

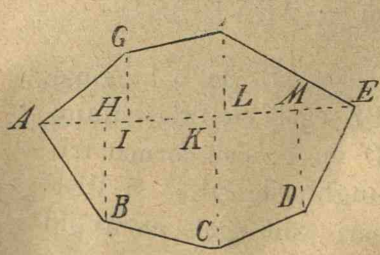
263. **Corolar.**—Luăm punctele G şi E mijlocul laturelor neparalelele AD, BC şi le unim; dreapta GE căpătată este jumătate din AF fiind că trece prin mijlocul laturilor AD şi DF a triunghiuluĭ ADF.

Ast-fel putem zice că aria trapezulul este egală cu $GE\times DI$ adică: *egală cu dreapta care unește mijlocul laturilor, înmnlțită cu înalțimea.*

264. **Problema I.**—*Aria unuĭ poligon oare-care.*

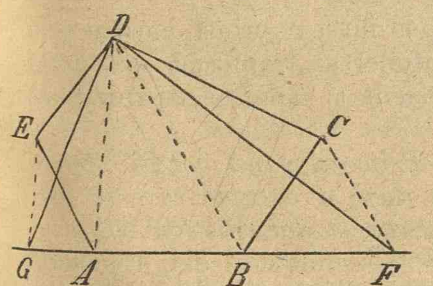


Fie ABCDE un poligon pe pămînt saŭ pe hărtie. Pentru a'ĭ evalua aria, îl descompunem în triunghiurĭ, ducĕnd diagonalele AC, AD, de la unul din vîrfurĭ A la toate celelalte; saŭ unind un punct O din interiorul luĭ cu toate vîrfurile. Se màsoară în parte fie-care idn acesteiu trnghiurĭ, şi prin adunare căpătăm aria totală.



Dacă poligonul este pe teren, se întrebuinţază cu preferenţă descompunerea următoare. Fie d. e. poligonul ABCDEFG; ducem diagonala cea maĭ lungă AE, şi din celelalte vîrfurĭ se duc perpendiculare pe această diagonală. Prin aceste perpendiculare figura se descompune în triunghiurĭ dreptunghice şi în trapeze, a căror ariĭ sînt maĭ uşor de măsurat.

265. **Problema II.**—*A preface un poligon în un triunghiŭ echivalent.* Să considerăm d. e. pentagonul ABCDE, şi să ni propunem a'l preface în un triunghiŭ echivalent. Duc diagonala BD, şi prin vîrful C duc paralela cu BD pănă ce întilneşte pe AB în F, unesc DF; triunghiurile BDC şi BDF sîn echivalente fiind că aŭ aceiaşĭ bază BD şi înălţimĭ egale, vîrfurile lor C şi F aflându-se pe o paralelă la baza BD putem dar substitui pentagonuluĭ ABCDE, patrulaterul AFDE. Triunghiurile AED şi DGA şînt şi ele echivalente fiind că aŭ aceiaşĭ bază AD şi înălţimí egale; putem dară substitui patrulateruluĭ AEDF, triunghiul GFD.



Tot astfel se va procede în mod succesiv şi când poligonul va ave maĭ multe laturĭ.

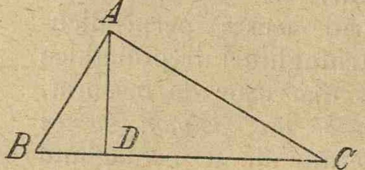
266. **Problema III.**—*A construi un patrat echivalent cu un poligon.* Să considerăm maĭ întăĭ un triunghiŭ ABC şi să însemnăm prin x laturea patratuluĭ echivalent cu triunghiul. Aria triunghiuluĭ este $^1/_2 BC \times AD$ şi aria patratuluĭ este x^2, trebue dar să avem

$$x^2 = {}^1/_2 BC \times AD,$$

de unde

$$\frac{AD}{x} = \frac{x}{{}^1/_2 BC}$$

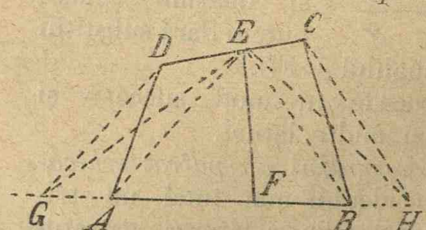
adică laturea patratuluĭ căutat este medie proporţională între înălţimea AD a triunghiuluĭ şi jumătate din baza luĭ. Se va construi această medie proporţională aşa precum se arată în § 205.



Dacă aria poligonuluĭ propus se exprimă prin productul a doă liniĭ drepte date, precum este la paralelogram şi trapez. atuncĭ se va vide ca şi dineoare că laturea patratuluĭ cerut este medie proporţională între doă liniĭ a căror product exprimă măsura arieĭ poligonuluĭ.

Dacă poligonul propus nu se exprimă imediat prin productul a doă liniĭ, atuncĭ se tranformă maĭ întâĭ în un triunghiu echivalent şi apoĭ se opereazâ ca maĭ sus.

267 **Problema IV.**—*Prin un punct dat pe o lature a unuĭ patrulater, să se ducă o dreaptă care să împartă aria figureĭ în un raport dat.* Fie ABCD patrulaterul dat, E punctul de pe DC prin care să se ducă dreapta care trebue să împartă patrulaterul în raportul dat de m la n. Să fie F de pe AB al doilea punct al drepteĭ căutate: patrulaterul dat este descompus de EF în alte doă, AFED şi FBCE; prefacem pe fie-care din aceste patrulatere în triunghiurile echivalente GEF şi FEH; raportul între aceste doă triunghiurĭ să fie egal cu $\frac{m}{n}$ şi fiind-că aŭ aceiaşĭ înălţime, trebue şi este de ajuns să avem



$$\frac{FG}{FH}=\frac{m}{n};$$

prin urmare punctul F împarte pe GH în doă părțĭ a căror raport este egal cu $\frac{m}{n}$; se va construi punctul F cum se arată la §. 152.

268. Exercițiĭ. *1. A calcula aria dreptunghiuluĭ a căruĭ bază este egală cu $10^m,75$ și diagonală cu $15^m,25$.* Insemnez cu b baza și d diagonala; avem

$$h=\sqrt{d^2-b^2}=\sqrt{(d+b)(d-b)};$$

prin urmare aria va fi dată de formula

$$A=b\sqrt{(d+b)(d-b)},$$

în care puind în loc de b și d valorile lor avem

$$A=b10,75\ \sqrt{26\times4,5}\ m.\ p.$$

2. A calcula aria unuĭ lozanj a căruĭ lature este egală cu cea maĭ mică din diagonale. Dacă ABCD este lozanjul și cea maĭ scurtă din diagonale este AC, atuncĭ triunghiul ABC este ecvilateral, și lozanjul este dublul acestuĭ triunghiŭ, adică egal cu $\frac{\overline{AB}^2\sqrt{3}}{2}$.

3. Aria unuĭ trapez este egală cu productul uneia din laturele neparalele prin distanța acesteĭ laturĭ la mijlocul laturei opusă. Pentru că această distanță este jumatate din înălțimea triunghiuluĭ ADF de la §. 262.

4. A transforma un triunghiŭ dreptunghic în un triunghiŭ isoscel care să'ĭ fie echivalent și se aibă un vîrf comun. Trebue ca una din laturile egale ale triunghiuluĭ isoscel să fie medie proporțională între ipotenuză și una din catetele triunghiuluĭ dreptunghic.

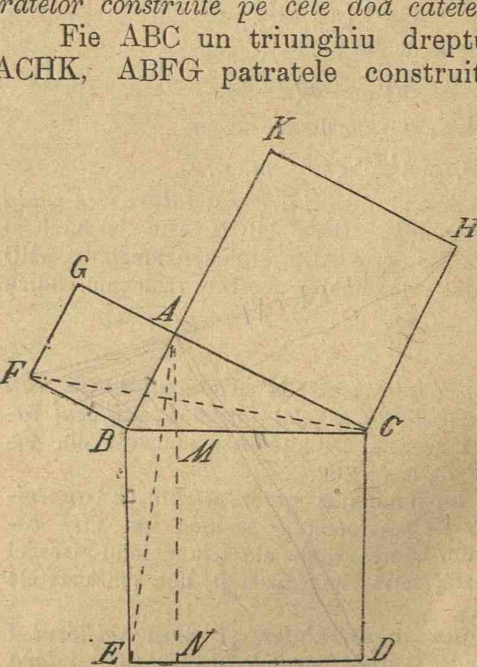
5. Dacă considerăm un patrulater, și prin mijlocul I și K a fie-căreĭ diagonale se duce paralela la ceialaltă, și dacă unim puntul N de întîlnire al acestor paralele cu mijlocurile laturilor patrulateruluĭ, acesta va fi împărțit în patru patrulatere echivalente. Fie ABCD patrulaterul, E, F, G, H mijlocurile laturilor AB, BC, CD, DA. Triunghiurile NFG și IFG sînt echivalente, prin urmare și NFCG este echivalent cu IFCG și acest din urmă este a patra parte din patrulaterul total.

CAPITULUL II

COMPARAŢIUNĬ DE ARIĬ

269. TEOREMĂ.—*Patratul construit pe ipotenuza unuĭ triunghiu dreptunghic este echivalent cu suma patratelor construite pe cele doă catete.*

Fie ABC un triunghiu dreptunghic; şi BCDE, ACHK, ABFG patratele construite respectiv pe laturile BC, AC, AB; dic că patratul BCDE este echivalent cu suma patratelor ACHK şi ABFG.



Duc din vîrful A perpendiculara AM pe ipotenuză; prelungirea eĭ împarte patratul BCDE în doă dreptunghiurĭ BMNE şi MCDN carĭ sînt respectiv echivalente cu patratele ABFG şi ACHK.

In adevĕr, aria dreptunghiuluĭ BMNE este de doă-orĭ maĭ mare de cât aria triunghiuluĭ ABE, pentru că aŭ aceiaşĭ bază BE şi înălţimĭ egale, fiind că vîrful A al triunghiuluĭ se găseşte pe paralela MN la baza BE. De asemene aria patratuluĭ ABFG este de doă-orĭ maĭ mare de cât aria triunghiuluĭ FBC, fiind-că aŭ aceiaşĭ bază FB şi înălţimĭ egale, căcĭ vîrfnl C al triunghiuluĭ FBC se află pe paralela GA la baza FB.

Acum triunghiurile ABF şi FBC sînt egale căcĭ aŭ laturile AB, BE respectiv egale cu laturile FB, BC şi unghiurile FBC şi ABE cuprinse între aceste laturĭ sînt egale între ele ca compuse din căte un unghiu drept plus unghiul ABC.

Aceste triunghiŭrĭ, ABE şi FBC, fiind egale între ele rezultă că şi dreptunghiul BMNE este echivalent cu patratul ABFG.

Tot astfel se va demonstra şi echivalenţa între dreptunghiul MCDN şi patratul ACHK.

Din aceste rezultă că patratul BCDE care este egal cu suma dreptunghiurilor BMNE şi MCDN este egal cu suma patratelor ABFG şi ACHK.

270, **Corolar I.**—*Patratele construite pe cele doă catete a-le unuĭ triunghiu dreptunghic, sînt proporţionale cu proecţiunile lor pe ipotenuză.*

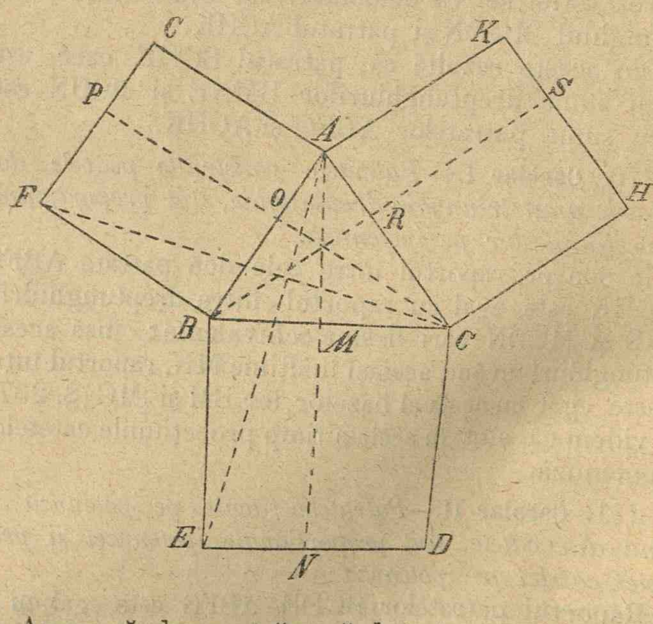
In adevĕr, raportul între cele doă patrate ABFG şi ACHK este egal cu raportul între dreptunghiurile BMNE şi MCDN carĭ li sînt echivalente ; însă aceste dreptunghiurĭ avănd aceiaşĭ înălţime MN, raportul între ele este egal cu acela al bazelor lor BM şi MC (§. 257), carĭ videm că sînt în acelaşĭ timp proecţiunile catetelor pe ipotenuză.

271. **Corolar II.**—*Patratele făcute pe ipotenuză şi pe una din catete, sînt proporţionale ipotenuzeĭ şi proecţiuneĭ cateteĭ pe ipotenuză.*

Raportul patratelor BCDE, ABFG este egal cu al patratuluĭ BCDE şi dreptunghiuluĭ BMNE, însă aceste avănd aceiaşĭ înălţime, raportul lor este egal cu acel al bazelor lor BC, BM.

272. TEOREMĂ.—*In un triunghiu oare-care, patratul construit pe o lature ce se opune la un unghiu ascuțit, este echivalent cu suma patratelor construite pe celelalte doă laturĭ, maĭ puțin de doă-orĭ dreptunghiul a căruĭ dimensiunĭ ar fi una din laturile unghiuluĭ ascuțit și proecțiunea celeĭlalte laturĭ pe aceasta.*

Fie ABC triunghiul în care laturea BC se opune unghiuluĭ ascuțit BAC; construesc patrate pe fie-care din laturile triunghiuluĭ; duc perpendiculare din vîrfurile triunghiuluĭ pe laturile opuse și le prelungesc; aceste sînt: AN, BS, CP; ele împart patratele în șese dreptunghiurĭ.



Avem să demonstrăm că doă dreptunghiurĭ consecutive, și așezate pe laturile aceluiașĭ unghiu sînt echivalente; d. e. BENM este echivalent cu BOPF.

In adevĕr, aria dreptunghiuluĭ BMNE este de doă-orĭ maĭ mare de căt aria triunghiuluĭ ABE, fiind-că aŭ aceiaşĭ bază BE şi înălţimĭ egale, căcĭ vîrful A al triunghiuluĭ se află pe paralela MN la bază; tot pentru acelaşĭ cuvînt dreptunghiul BOPF este de doă-orĭ maĭ mare de căt triunghiul BCF. Acum, triunghiurile ABE şi BFC sînt egale, ca avînd laturile AB, BE egale respectiv cu laturile BF, BC şi unghiurile FBC, ABE cuprinse între aceste laturĭ sînt egale ca compuse fiecare din căte un unghiu drept plus unghiul ABC.

Triunghiurile ABE şi BFC fiind egale şi dreptunghiurile BMNE, BOPF sînt echivalente.

Tot asemene, se va demonstra echivalenţa dreptunghiuluĭ AOPG cu ARSK, şi a dreptunghiuluĭ CRSH cu MCDN.

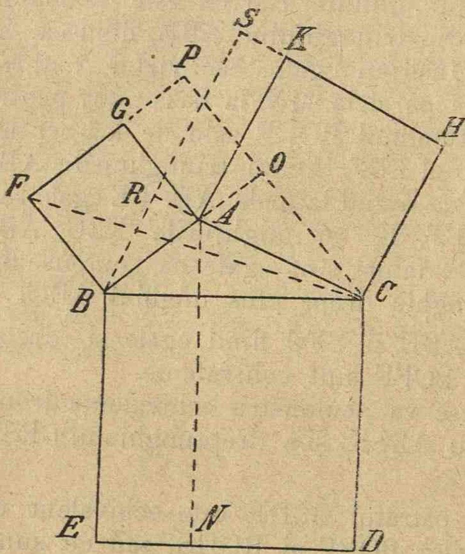
Prin urmare, patratul BCDE este echivalent cu suma dreptunghiurilor BOPF şi RCHS, saŭ cu suma patratelor ABFG şi ACHK maĭ puţin dreptunghiurile echivalente AGPO, AKSR. Insă AGPO are drept măsură productul $AO \times AG$ saŭ $AB \times AO$; aşa dar avem

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2AB \times AO,$$

în care se vede că AO este proecţiunea lătureĭ AC, a unghiuluĭ escuţit A pe laturea AB a aceluiaşĭ unghiu.

273. TEOREMĂ.—*In un triunghiu oare-care, patratul construit pe o lature ce se opune la un unghiu obtuz, este echivalent cu suma patratelor construite pe celelalte doă laturĭ, plus de doă-orĭ dreptunghiul a căruĭ dimensiunĭ ar fi una din laturile unghiuluĭ obtuz şi proecţiunea celeĭlalte laturĭ pe aceasta.*

Fie ABC triunghiul în care laturea BC se opune unghiuluĭ obtuz BAC.



Construesc patrate pe fie-care lature a triunghiuluĭ; duc perpendiculare din vîrfurile triunghiuluĭ pe laturile opuse şi le prelungesc: aceste sînt: AN, BS, CP; aceste perpendiculare şi laturile celor treĭ patrate formează şese dreptunghiurĭ: BMNE, BFPO, AGOP, ARSK, CRSH, CMND. Se va demonstra ca şi în Teorema precedentă echivalenţa a doă dreptunghiurĭ consecutive aşezate pe laturile unuĭ aceluiaşĭ unghiu saŭ pe prelungirile lor.

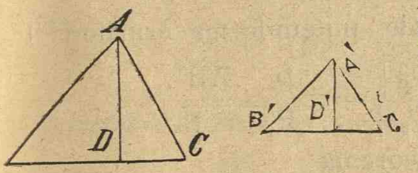
Prin urmare, patratul BCDE este echivalent cu suma dreptunghiurilor BFPO, CRSH, saŭ cu suma patratelor BFGA, ACHK plus dreptunghiurile echivalente AOPG, ARSK. Insă dreptunghiul AOPG are drept măsură productul $AG \times AO$ saŭ productul $AB \times AO$; avem dar:

$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2\times\overline{AC}^2+2AB\times AO,$$

în care se vede că AO este proecţiunea latureĭ AC, a unghiuluĭ obtuz A, pe laturea BA a aceluiaşĭ unghiu.

274. TEOREMĂ.— *Raportul ariilor a doă poligoane asemene, este egal cu patratul raportuluĭ lor de similitudine, saŭ doă poligoane asemene sînt între ele ca patratele laturilor omoloage.*

1°. Să considerăm maĭ întâĭ doă triunghiurĭ asemene ABC, A′B′C′. Triunghiurile fiind asemene, bazele lor sînt proporționale cu doă laturĭ omoloage: avem d. e.



$$\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}.$$

Duc perpendicularele AD, A′D′ din vîrfurile A și A′ pe bazele respective: se formează triunghiurile dreptunghice ACD și A′C′D′ cari sînt asemene și daŭ

$$\frac{AD}{A'D'}=\frac{AC}{A'C'}.$$

Inmulțim aceste doă egalitățĭ, membru cu membru și ni vine

$$\frac{BC\times AD}{B'C'\times A'D'}=\frac{\overline{AC}^2}{\overline{A'C'}^2},$$

Insă aria triunghiuluĭ ABC este egală cu jumătatea productuluĭ BC×AD și aria triunghiuluĭ A′B′C′ este egală cu jumătatea productuluĭ B′C′×A′D′; prin urmare egalitatea din urmă demonstrează Teorema.

2°. Să considerăm acum doă poligoane asemene P și P′.

Raportul de similitudine a celor doă poligoane este egal cu raportul a doă laturĭ omoloage oare-care AB și A′B′; acest raport va fi dar $\frac{AB}{A'B'}$. Știm că poligoanele se pot descompune în triunghiurĭ asemene și asemene așezate și raportul de similitudine între doă triunghiurĭ omoloage va fi egal cu raportul de similitudine a celor doă poligoane; Fie T, T_1, T_2... triunghiurile poligonuluĭ P și T′, T'_1, T'_2... triunghiurile omoloage din poligonul P′; după cele de ma sus avem

$$\frac{T}{T'}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}, \quad \frac{T_1}{T'_1}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}, \quad \frac{T^2}{T^{2\prime}}=\frac{AB^2}{A'B'^2} \ldots;$$

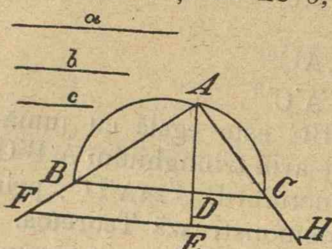
din aceste raporturĭ egale, putem forma următorul [1])

$$\frac{T+T_1+T_2+\ldots}{T'+T'_1+T'_2+\ldots}=\frac{P}{P'}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}$$

ceia ce demonstrează Teorema

275. **Problema.**—*A construi un poligon asemene cu un poligon dat, și astfel ca raportul între poligonul de construit și poligonul dat să fie egal cu raportul a doă liniĭ date.*

1⁰. Să considerăm cazul când poligonul dat este un patrat; fie a laturea patratuluĭ şı x laturea patratuluĭ cerut, şi să fie b, c cele doă liniĭ date. Laturea x se cere să fie determinată prin egalitatea



$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{b^2}{c^2}.$$

Pe o linie dreaptă ieŭ o lungime BD egală cu b şi în prelungirea eĭ o lungime DC egală cu c; descriŭ o semi-circumferenţă pe BC ca diametru şi duc perpendiculara AD la BC; unesc A cu B şi C şi le prelungesc; ieŭ apoĭ pe AC, începând din A, lungimea AH egală cu laturea a a patratuluĭ dat, duc prin H paralela la BC şi o prelungesc până în F unde întâlneşte pe AB. Dreapta AF este laturea patratuluĭ căutat. In adevĕr, triunghiul HAF fiind dreptunghic în A ni dă (§. 271).

$$\frac{\overline{AF}^2}{\overline{AH}^2}=\frac{FE}{EH}.$$

[1]) Veḑĭ Algebra ediţia IV. §. 60.

Insă paralelele FH şi BC, sunt împărţite în părţĭ proporţionale de dreptele AF, AE, AH (§. 177) adică avem

$$\frac{\mathrm{FE}}{\mathrm{EH}}=\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}},$$

prin urmare avem şi

$$\frac{\overline{\mathrm{AF}}^2}{\overline{\mathrm{AH}}^2}=\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}, \text{ saŭ } \frac{\overline{\mathrm{AF}}^2}{a^2}=\frac{b}{c}.$$

2⁰. Să considerăm cazul când poligonul dat este un poligon oare-care P ; fie a una din laturile poligonuluĭ P, x laturea omoloagă a poligonuluĭ căutat X şi b, c doă liniĭ drepte date.

După ipoteză avem

$$\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{P}}=\frac{b}{c}, \text{ şi §.275 } \frac{\mathrm{X}}{\mathrm{P}}=\frac{x^2}{a^2};$$

din aceste reḑultă

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{b}{c};$$

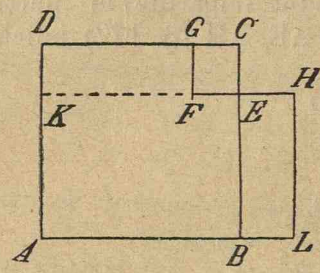
aşa în cât determinaţiunea latureĭ x revine la construcţiunea unuĭ patrat a căruĭ raport la patratul de lature a să fie egal cu raportul liniilor b, c.

Construesc dar linia x ca maĭ sus şi apoĭ pe ea fac un poligon asemene cu poligonul dat P, (§. 211).

276. **Exercitiĭ.**—*1. Patratul făcut pe suma a doă liniĭ drepte este echivalent cu suma patratelor făcute pe fie-care linie plus de doă-orĭ dreptunghiul lor.* Făcându-se figura se vede cu uşurinţă părţile din care se compune patratul cel mare.

2. Patratul făcut pe diferenţa a doă linii drepte este echivalent cu suma patratelor făcute pe fie-care linie minus de doă-ori dreptunghiul lor. Ca precedenta.

3. Dreptunghiul construit pe summa şi diferenţa a doă linii drepte este echivalent cu diferenţa patratelor acelor linii.



Fie ABCD și CEFG doĭ patrațĭ; prelungesc EF pănă ce întîlnește pe AD în K și prelungesc pe AB de o lungime BL egală cu CG; dreptunghiurile EHLB și DKFG sînt egale. Dreptunghiul AKHL este construit pe suma AB+BL și pe diferența CB—CE care sînt aceleașĭ liniĭ; se vede că acest dreptunghiu este egal cu patratul ABCD minus patratul CEFG.

4. *Doă poligoane asemene fiind date, să se construească un poligon asemene cu ele și echivalent cu suma saŭ diferența lor.* Fie a, b, x laturile omoloage a poligoanelor A, B, X; avem

$$X = A \pm B \qquad \frac{X}{x^2} = \frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2}$$

de unde

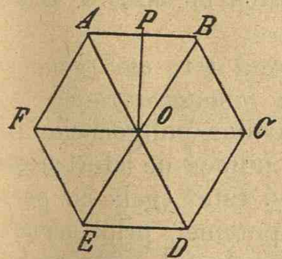
$$\frac{X}{x^2} = \frac{A \pm B}{a^2 \pm b^2}$$

și fiind-că $X = A \pm B$ rezultă $x^2 = a^2 \pm b^2$.

CAPITULUL III

ARII DE POLIGOANE REGULATE. ARIA CFRCULUI

277. TEOREMĂ.—*Aria unuĭ poligon regulat este egală cu productul perimetruluĭ seŭ prin jumătatea apotemeĭ.*



Unesc O cu vîrfurile poligonuluĭ, şi 'l descompun astfel în atâtea triunghiurĭ câte laturĭ sînt; şi aceste triunghiurĭ sînt toate egale între ele. Consider unul din ele, AOB d. e.; aria luĭ este egală cu jumătate din AB înmulţită cu înălţimea OP, care înălţime este apotema poligonuluĭ. Aria poligonuluĭ fiind egală cu suma ariilor tuturor triunghiurilor, videm că această arie se compune din productul perimetruluĭ seŭ înmulţit cu jumătatea apotemeĭ. Insemnând perimetrul prin p, prin a apotema şi prin S aria poligonuluĭ, avem

$$S = {}^1/_2\ p \times a.$$

278. **Corolar.**—*Raportul între ariile a doă poligoane regulate de un acelaşĭ numĕr de laturĭ, este egal cu raportul între patratele apotemelor lor, saŭ al radelor lor.*

Poligoanele avînd acelaşĭ numĕr de laturĭ sînt asemene; prin urmare ariile lor proporţionale cu patratele laturilor omoloage (§ 279). Raportul între laturĭ omoloage este egal cu raportul între perimetrele lor, saŭ cu raportul apotemelor saŭ al radelor lor (§. 220); prin urmare raportul între ariile poligoanelor va fi egal cu raportul între patratele apotemelor lor, saŭ patratele radelor lor; adică avem

$$\frac{S}{S'}=\frac{a^2}{a'^2}=\frac{r^2}{r'^2}.$$

279. **Observațiune.**—*Aria unuĭ poligon oare-care circumscris la un cerc, este egală cu productul perimetruluĭ seŭ prin jumătatea radeĭ cerculuĭ înscris.*

Demonstrațiunea este identică cu acea a Teoremeĭ precedente.

280. TEOREMĂ —*Aria unuĭ cerc este egală cu productul circumferențeĭ luĭ prin jumătatea radeĭ.*

Aria cerculuĭ este limita ariilor poligoanelor regulate înscrise în cerc, a căror numĕr de laturĭ crește necontenit. Aria fie-căruĭ poligon este egală cu perimetrul înmulțit cu jumătatea apotemeĭ, prin urmare și aria cerculuĭ va fi egală cu productul perimetruluĭ adică a circumferențeĭ sale prin jumĕtatea apotemeĭ, care nu'ĭ alt-ceva de căt rada cerculuĭ. Insemnănd prin S suprafața cerculuĭ, prin C și R circumferența și rada luĭ, avem

$$S=\tfrac{1}{2}C\times R$$

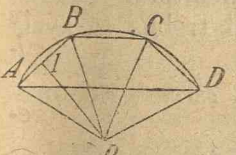
281. **Corolar.**—Inlocuind în relațiunea precedentă prin valoarea sa (§. 244) $2\pi R$, avem

$$S=\pi R^2,$$

formulă care arată: 1^0, *pentru a calcula aria unuĭ cerc a căruĭ rada este cunoscută trebue înmulțit patratul radeĭ prin* π. 2^0 *Pentru a calcula rada unuĭ* *cerc a căruĭ arie este dată, trebue să împărțim prin* π *numĕrul care exprimă ăria, și din căt să extragem rădăcina pătrată.*

282. TEOREMA.—*Aria unuĭ sector cercular este egală cu lungimea arculuĭ seŭ înmulțită prin jumătatea rađeĭ.*

Aria sectoruluĭ cercular este limita ariilor sectorilor poligonalĭ înscrişĭ a căror numĕr de laturĭ creşte necontenit. Inscriŭ în arcul sectoruluĭ o linie frântă regulată d. e. de treĭ laturĭ, şi am un sector poligonal. Aria acestuĭ sector poligonal este egală cu suma ariilor triunghiurilor AOB, BOC, COD; însă aceste triunghiurĭ sînt egale



între ele, prin urmare aria sesctoruluĭ poligonal este:

$$\frac{1}{2}(AB+BC+CD)\times OI\ ;$$

saŭ, însemnând în general prin p perimetrul linieĭ poligonale regulate şi prin a apotema avem

$$\text{aria sect. poligonal} = {}^1/_2\ p\times a.$$

Acum să îndoim necontenit numĕrul laturilor; limita arieĭ secoruluĭ poligonal va fi aria sectoruluĭ cercular, perimetrul p are ca limită lungimea arculuĭ sectoruluĭ şi apotema a are ca limită rađa sectoruluĭ; avem dar

$$\text{aria sect. cercul.} = {}^1/_2\ \text{arc. } AD\times r.$$

283. **Corolar.** Dacă însemnăm prin α numĕrul de grade cuprins în unghiul AOD, avem

$$\text{arc. } AD = \frac{\pi r\alpha}{180},$$

prin urmare $\quad aria sect. cercul. = \pi r^2 \frac{a}{360}.$

284. **Observaţiune.** Aria segmentuluĭ ABCD este egală cu diferenţa între aria sectoruluĭ ABCDO şi aria triunghiuluĭ AOD.

Dacă coarda AD este laturea unuĭ poligon regulat pe care'l ştim înscri, atuncĭ putem calcula această coardă în funcţiune de radă şi putem obţine aria triunghiuluĭ şi prin urmare şi a segmentuluĭ ABCD, numaĭ prin mijloace geometrice. Altfel trebue să avem recurs la Trigonometrie.

285. TEOREMA.—*Ariile a doă cercurĭ sînt proporţionale cu patratele radelor lor.*

Fie doă cercurĭ a căror ariĭ să le însemnăm cu S şi S′, şi radele cu R şi R′ ; avem

$$S = \pi R^2 \text{ şi } S' = \pi R'^2, \text{ de unde } \frac{S}{S'} = \frac{R^2}{R'^2}$$

286. **Corolar I.** *Ariile a doă sectoare asemene, cu arcurĭ asemene, sînt proporţionale cu patratele radelor lor.* Fie doă sectoare s şi s', R şi R′ radele lor şi a numĕrul de grade la centru, care este acelaşĭ pentru amăndoă sectoarele, fiind-că sînt asemene, avem

$$s = \frac{\pi R^2 a}{360} \text{ şi } s' = \frac{\pi R'^2 a}{360}$$

de unde

$$\frac{s}{s'} = \frac{R^2}{R'^2}.$$

287. **Corolar II.**—*Ariile a doă segmente asemene, adică de arcurĭ asemene, sînt proporţionale cu patratele radelor lor.*

Căcĭ sectorul şi triunghiul a căror diferenţă este egală cu unul din segmente, sînt asemene respectiv cu sectorul şi triunghiul cari formează celalalt segment,

288. **Exerciţiĭ**=1. *Un teren are forma unuĭ hexagon regulat şi are o suprafaţă de 34 are şi 19 centiare; se cere lungimea centruluĭ terenuluĭ.* Dacă însemnăm prin c laturea hexagonuluĭ, suprafaţa luĭ este de 6 orĭ aceia a triunghiuluĭ ecvilateral a căruĭ lature este c, adică $S=\frac{c^2\sqrt{3}}{4}\times 6$. Insă $p=6c$ prin urmare $S=\frac{p^2\sqrt{3}}{24}$; de unde $p=2\sqrt{2S\sqrt{3}}$; puind în loc de S, 3419 şi făcînd celculile găsim $p=227^m,60$.

2. *A calcula laturea unuĭ lozanj, ştiind că suprafaţa lozanjuluĭ este echivalentă cu suprafaţa unuĭ cerc de radă egală cu 10^m.*

Cea maĭ mică din diagonale împarte lozanjul în doă triunghiurĭ ecvilaterale egale; însemnănd prin c această diagonală avem în virtutea enunciuluĭ

$$\frac{c^2\sqrt{3}}{2}=\pi.10^2 \text{ de unde } c=10\sqrt{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}}$$

făcînd calculile găsim $c=19^m,05$.

3. *A calcula aria unuĭ cerc, în care o coardă de $0^m,4$ sub-întinde un arc de 120^0.* Numind c coarda, se vede că ea este laturea triunghiuluĭ ecvilateral înscris în cerc, prin urmare rada cerculuĭ este $\frac{c}{\sqrt{3}}$ şi prin urmare aria cerculuĭ este $\frac{\pi c^2}{3}$.

Puind în loc de c, valoarea dată $0^m,4$ găsim *16* decim. patraţĭ şi *75* centim. pătraţĭ pentru aria cerculuĭ.

4. *A calcula ariile sectoruluĭ şi a segmentuluĭ de 30^0 în cercul de rada $5^m,20$.* Aria AOB a sectoruluĭ de 30^0, este a 12-a parte din cerc adică $\frac{\pi R^2}{12}$; aria triunghiuluĭ AOB este $\frac{R^2}{4}$ căcĭ se poate lua ca bază AO; prin urmare aria segmentuluĭ de 30^0 este $\frac{(\pi-3)R^2}{12}$. Puind în loc de R valoarea sa $5^m,20$, găsim că aria sectoruluĭ este $7,^{mp}0791$ şi aceia a segmentuluĭ este $0^{mp}3191$.

5. *Să se calculeze suprafaţa meridianuluĭ terestru.*

Circumferența meridianuluĭ terestru este egală cu 40000 *km*. Avem

$$S=\pi R^2 \text{ și } C=2\pi R$$

prin urmare

$$S=\frac{C^2}{4\pi}.$$

Puind în loc de c valoarea sa 40000 *km*. găsim că suprafața căutată este 127323954*km*.^{2} cu aproximațiune de 1*km*^{2}.

6. *A găsi, cu aproximațiune de un milimetru, rada unuĭ cerc, știind că dacă această radă s'ar mari cu un centimetru, aria cerculuĭ s'ar mări cu un metru patrat.* Fie R rada căutată; aria cerculuĭ este egală cu πR^2. Dacă măresc rada cu 1*cm*., aria cerculuĭ devine $\pi(R+0,01)^2$; prin urmare avem

$$\pi(R+0,01)^2=\pi R^2=1.$$

desvoltând și făcând calculile, se găsește $R=15^m,910$.

7. *Se dă un hexagon regulat ABCDEF, se unesc vîrfurile din doă în doă prin diagonalele AC, BD, CE, DF, EA, FB și se cere: I, a demonstra că poligonul abcdef format prin intersecțiunile diagonalelor consecutive, este regulat; II, a găsi raportul suprafețeĭ acestuĭ poligon la acea a hexagonuluĭ.*

I. Se demonstreadă cu ușurință că *ab* este a treia parte din diagonala AC, și fiind că diagonalele AC, BD.... sînt egele între ele, rezultă că și laturile *ab*, *bc*, *cd*... sînt egale între ele; apoĭ unghiurile din *a*, *b*, c... sînt egale între ele, căcĭ fie-care are drept măsură a treia parte din circumferență; așa dar poligonul *abcdef* este un hexagon regulat.

II. Hexagoanele ABCDEF și *sbcdef* fiind regulate, sînt asemene și suprafețele lor sînt proporționale cu patratele laturilor omoloage. Insă avem

$$ab=\frac{AC}{3}=\frac{AB\sqrt{3}}{3};$$

prin urmare

$$\frac{\overline{ab}^2}{\overline{AB}^2}=\frac{1}{2}.$$

Hexagonul cel mic este a treia parte din cel mare.

8. *Dacă pe catetele unuĭ triunghiu dreptunghic ca dia-*

metri, se descriŭ semi-circumferențe exterioare triunghiuluĭ fie-care din aceste curbe face cu semi-circumferența dusă prin vîrfurile triunghiuluĭ, o figură care are forma unuĭ craiŭ noŭ și care se numește **lunula luĭ Hippocrat.** *A demonstra că suma suprafețelor celor doă lunule este echivalentă cu suprafața triunghiuluĭ dreptunghic.*

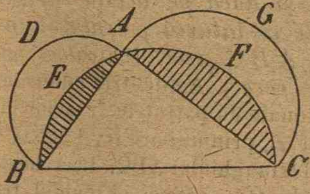


Figura întreagă ADBCG poate fi considerată ca suma celor doă lunele plus semi-cercul BAC, saŭ ca suma cercurilor ADB, și AGC plus triunghiul ABC. Din observațiunea aceasta scoatem ce se cere.

9. *Suprafața cuprinsă între doă circumferențe concentrice este echivalentă cu cercul a căruĭ diametru este o coardă a circumferențeĭ exterioare tangentă la circumferența interioară.* BC fiind coarda, A puntul de contact, O centrul comun avem: expresiunea suprafețeĭ în chestiune este $\pi(\overline{OB}^2—\overline{OA}^2)$; însă $\overline{OB}^2—\overline{OA}^2=\overline{AB}^2$; prin urmare aria este $\pi\ \overline{AB}^2$ care este aceia a unuĭ cerc descris pe BC ca diamntru.

10. *Care este aria dodecagonuluĭ regulat înscris în circumferența de rază R?* Este $3R^2$. Saŭ este echivalentă cu patratul construit pe laturea triunghiuluĭ ecvilateral înscris în acel cerc.

11. *Suma perpendicularelor duse din un punct oare-care interior unuĭ poligon regulat pe toate laturile luĭ este constantă.* Fie P punctul, îl unim cu vîrfurile poligonuluĭ, ceia ce'l descompune în triunghiurĭ de aceiașĭ bază AB. Aria poligonuluĭ este dar

$$\frac{AB}{2}(P_1+P_2+P_3+....P_n)$$

în care P_1, P_2..... sînt lungimele perpendicularelor. Tot suprafața poligonuluĭ este egală cu perimetrul seŭ n. AB, înmulțită cu jumătatea apotemeĭ ; așa dar avem

$$\frac{AB}{2}\ (P_1+P_2+P_3....\ P_n)=n.AB\times\frac{OM}{2},$$

saŭ
$$P_1+P_2+P_3+\ .....\ P_n=n.OM.$$

12. Dacă în un cerc se duc treĭ raḑe OA, OB, OC formând între ele unghiurĭ de 120⁰, şi dacă pe acesta drepte luăm lungimĭ OA′, OB′, OC′ egale cu laturea pătratuluĭ înscris în cerc, triunghiul ecvilateral A′B′C′ este echivalent cu hexagonul regulat înscris în acelaşĭ cerc. Ariile triunghiurilor ecvilaterale A′B′C′, ABC sînt proporţionale cu patratele raḑelor lor OA′, OA. Insă prin ipoteză $OA' = OA\sqrt{2}$, prin urmare $\overline{OA}^2 = 2\overline{OA'}^2$; aşa dar triunghiul A′B′C′ este dublul triunghiuluĭ ABC. Insă hexagonul regulat înscris în cercul de raḑă OA, este şi el dublul triunghiuluĭ ABC; prin urmare triunghiul A′B′C′ este echivalent cu hexagonul.

Finea Geometrieĭ plane

GEOMETRIA IN SPATIU

CARTEA V.

PLANURI SI DREPTE

CAPITULUL I

DETERMINAȚIUNEA UNUI PLAN. DREAPTĂ PERPENDICULARĂ PE PLAN

289. **Definițiunĭ**.—*Planul* este o suprafață astfel că o linie dreaptă ce trece prin doă din punctele eĭ; se așadă toată și în toată lungimea eĭ pe suprafață, saŭ dacă doă din punctele uneĭ drepte sînt pe suprafață, atuncĭ toată dreapta este pe suprafață;

Planul este o suprafață nelimitată; cu toate aceste pentru a'l figura pe tabelă saŭ hărtie sîntem nevoițĭ să'l limităm; îl putem reprezenta prin o figură plană oare-care precum: un triunghiŭ, un poligon, un cerc.....

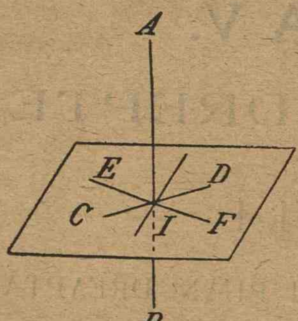
290. Rezultă din definițiune că o dreaptă și un plan pot ave treĭ pozițiunĭ relative:

1. Dreapta are doă puncte comune cu planul; în acest caz dreapta se află cu totul în plan, și'l imparte în doă regiunĭ numite *semi-planurĭ*.

2. *Dreapta are un singur punct comun cu planul*; în acest caz dreapta străbate planul și este împărțită de el în doă porțiunĭ așeḑate de o parte și de alta a planuluĭ.

3. *Dreapta n'are nicĭ un punct comun cu planul* în acest caz, se ḑice că dreapta și planul *sînt paralele*.

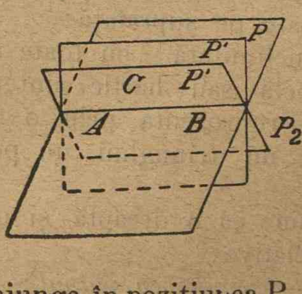
291. O linie dreaptă AB și un plan carĭ se întîlnesc în un punct, sînt *perpendiculare*, una pe altul, dacă dreapta este perpendiculară pe toate liniile drepte CD, EF.... situate în plan și carĭ trec prin punctul I comun drepteĭ AB și planuluĭ; acest punct I, este piciorul perpendiculareĭ.



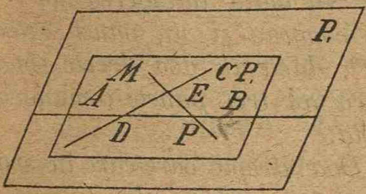
Când o linie dreaptă întîlnește un plan și nu sînt perpendicularĭ, atuncĭ dreapta este *oblică* pe plan.

292. TEOREMA.—*Prin o dreaptă și un punct exterior drepteĭ putem duce un plan și numaĭ unul.*

Fie AB o dreaptă și C un punct ce nu'ĭ așeḑat pe dreaptă. Să imaginăm un plan oare-care P dus prin AB; să învărtim acest plan în jurul drepteĭ AB; în această învărtire, planul P va veni în o pozițiune P_1 așa, ca să conțină punctul C: continuănd invîrtirea, planul P va părăsi punctul C după care apoĭ va ajunge în pozițiunea P_2, în care iarășĭ va conține punctul C; ḑic că planurile P_1 și P_2 coincid adică sînt unul și același plan.



In adevĕr, să luăm a parte planurile P_1 şi P_2; amăndoă conţin dreapta AB şi punctul C. Să unim C cu un punct oare-care D a dreptei AB; dreapta CD avînd doă din punctele eĭ C şi D situate în P_1 şi P_2 ea este situată toată în aceste doă planurĭ. Să luăm un punct oare-eare M din planul P_1 şi să ducem prin el o dreaptă care să nu fie paralelă nicĭ cu AB nicĭ cu CD şi care prin urmare le va întîlni în căte un punct E şi F situate amăndoă în planul P_1. Insă punctele E şi F sînt sttuate în planul P_2, căcĭ dreptele CD şi AB pe care se află aceste puncte sînt în planul P_2; de aicĭ rezultă că toată dreapta MEF şi prin urmare şi punctul M se află în planul P_2. Iată dar că am demonstrat că un punct M de a planuluĭ P_1 se află şi în planul P_2; tot asemene se va demonstra că orĭ-care alt punct de a planuluĭ P_1 se află şi în planul P_2; prin urmare planul P_1 şi planul P_2 formează un singur şi unic plan care conţine pe AB şi trece prin C.



293. **Corolar I** — Un plan maĭ poate fi determinat şi în următoarele treĭ modurĭ:

1°. Prin treĭ puncte care nu sînt în linie dreaptă. Fie treĭ puncte A, B, C carĭ să nu fie în linie dreaptă. Punctele A, B determinează o dreaptă AB care dinpreună cu punctul C, exterior dreptei, determinează un plan şi numaĭ unul.

2°. Prin doă drepte care se întretaie. Fie OA, OB doă drepte care se întretaie în un Punct O. Să luăm un punct B de pe dreapta OB; dreapta OA şi cu punctul B determinează un plan unic, care conţine pe dreapta OB, căcĭ această dreaptă are doă puncte O şi B carĭ se află în acel plan.

3⁰. Prin doă drepte paralele. Prin definiţiune doă drepte paralele sînt aşeḑate în un plan. Acest plan este unic, căcĭ prin una din drepte şi un punct oarecare pe de a doa nu se poate duce de căt un plan.

294. **Corolar II** — Din cele precedente conchidem că: *doă planurĭ coincid în toată întinderea lor; 1⁰. dacă aŭ o linie dreaptă comună şi un punct exterior dreptei iarăşĭ comun; 2⁰, dacă aŭ doă drepte comune paralele saŭ nu; 3⁰, dacă aŭ treĭ puncte comune, care să nu fie în linie dreaptă.*

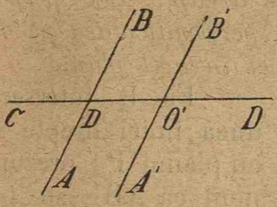
295. **Corolar III.** *Doă drepte oare-care în spaţiŭ, nu sînt în general aşeḑate în acelaşĭ plan.*

Fie A, B doă drepte; prin dreapta A şi un punct *b* al drepteĭ B ducem planul P; acest plan în general, nu va conţine dreapta B, şi va fi numaĭ străbătut de de ea. In acest caz, nicĭ un plan nu ar pute să treacă prin cele doă drepte A, B, ; căcĭ dacă ar exista vre-unul, ar trebui să coincidă cu planul P, fiind că ar conţine în el dreapta A şi punctul *b*. Prin urmare dreapta B ar fi cuprinsă în planul P, ceia ce este contrar ipotezeĭ.

296. **Corolar IV.**—*Un plan poate fi născut prin mişcarea uneĭ drepte în maĭ malte modurĭ, din carĭ iată doă:*

1⁰. O dreaptă OM mobilă în jurul unuĭ punct fix O, şi se razimă pe o dreaptă AB, care nu conţine punctul O, dă naştere în mişcarea eĭ unuĭ plan. In adevĕr, dreapta mobilă este necontenit şi în toată întinderea eĭ în planul determinat de dreapta AB şi punctul O, şi mişcându se continuŭ în jurul punctuluĭ O, trece succesiv prin toate punctele acestuĭ plan.

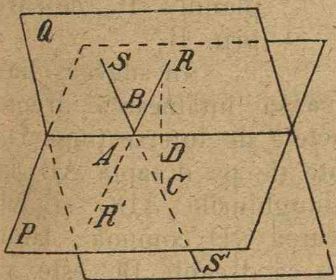
2⁰. O dreaptă mobilă AB, care se mişcă paralel cu ea însaşĭ se razimă pe o dreaptă fixă CD, dă naştere unuĭ plan. In adevĕr, să considerăm dreapta mobilă în doă poziţiunĭ ale eĭ AB, A´B´. Dreptele paralele AB, A'B' determinează un plan: acest plan



conţine dreapta CD fiind că conţine doă din punctele eĭ D şi O'. Aşa dar planul paralelelor coincide cu planul dreptelor AB şi ÇD. Dreapta mobilă rămaind necontenit în planul dreptelor AB şi CD şi în mişcarea eĭ trecînd succesiv prin toate punctele planuluĭ, dă naşcere aeestuĭ plan.

297. TEOREMA—*Doă planurĭ carĭ aŭ un punct comun, se taie în o linie dreaptă ce trece prin acel punct.*

Fie P şi Q doă planurĭ carĭ aŭ un punct comun

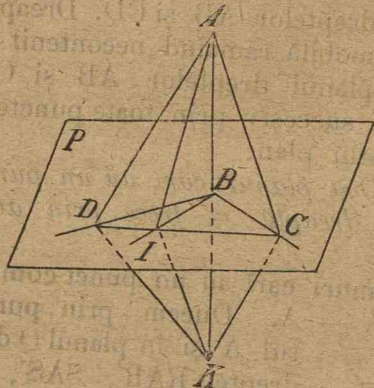


A. Ducem prin punctul A şi în planul Q doă drepte RAR', SAS', a căror porţiunĭ AS, AR, sînt de o parte a planuluĭ P. iar porţiunile AR', AS', sînt de cealaltă parte. Unesc un punct oare-care B de pe AR cu un punct oare-care C de pe AS'; dreapta BC intîlneşte planul P în un punct oare-care D. De altă parte, dreapta BC avînd doă din punctele eĭ B şi C în plauul Q, se află cu totul în acest plan; prin urmare punctul D este şi el în planul Q.

Acum, punctele A şi D aflându-se în acelaşĭ timp în planul P şi în planul Q. dreapta AD, ce trece prin aceste doă puncte, este comună acestor doă planurĭ.

Planurile P şi Q nu maĭ pot avea vre un alt punct comun în afară de AD, căcĭ ar coincide; prin urmare toate punctele lor comune sînt numaĭ pe această dreaptă.

298. TEOREMA.—*O linie dreaptă este perpendiculară pe un plan, dacă este perpendiculară pe doă liniĭ drepte duse prin piciorul eĭ în acel plan.*



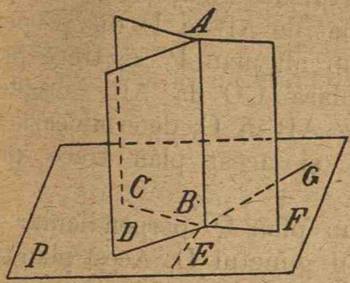
Fie B intersecțiunea liniei drepte AB cu planul P; presupunem că AB este perpendiculară pe dreptele BD, BC din planul P şi care trec prin piciorul drepteĭ AB; dic că AB este perpendiculară pe orĭ-care altă dreaptă BI din planul P ce trece prin B.

In adever, duc în planul P dreapta DC aşa ca să întâlnească dreptele, BD, BC, BI, şi unesc punctele de intersecțiune D, I, C cu punctele A şi K luate de pe dreapta AB, la aceiaşĭ distanță de B. Triunghiurile ADC şi KDC sînt egale pentru că aŭ laturea CD comună; laturile AC şi CK sînt egale pentru că dreapta BC este perpendiculară pe mijlocul drepteĭ AK; laturile AD şi DK sînt egale pentru acelaşĭ cuvînt. Aşa dar unghiurile ACD şi KCD, opuse la laturĭ egale, sînt egale între ele.

Apoĭ, triunghiurile ACI şi KCI, aŭ un unghiŭ egal cuprins între doă laturĭ egale una cu alta; aşa dar AI este egal cu KI. Punctele I şi B fiind egal depărtate de extremitățile drepteĭ AK, dreapta BI este perpendiculară pe AK. Reciproc, AK este perpendiculară pe BI şi prin urmare şi pe planul P.

299. **Corolar.**—*Dacă prin o linie dreapta AB se duc diferite planurĭ ABC, ABD... şi prin punctul B se duc perpendicularele BC, BD... la AB, situate res-*

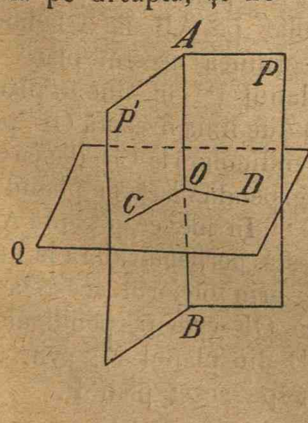
pectiv în căte unul din acele planurĭ, toate aceste perpendiculare sînt în un plan.



Fie P planul determinat de doă din perpendiculare, d. e. BC şi BD; ḑic că acest plan conţine pe toate celelalte perpendiculare. Consider planul ABF care taie planul P de-a lungul drepteĭ BF; observ că AB este perpendiculară pe BF în virtutea Teoremeĭ precedente. Prin urmare, perpendiculara dusă prin punctul B pe dreapta AB în planul ABF se află în planul P. Reciproc, orĭ-care dreaptă ce trece prin B şi'ĭ situată în planul P, este perpendiculară pe dreapta AB. Aşa dar planul P, cuprinde toate perpendicularele în chestiune.

300. TEOREMA. *Prin un punct dat se poate duce un plan perpendicular la o dreaptă dată, şi nu se poate duce de căt numaĭ unu.*

1°. Presupun maĭ întăĭ că punctul dat se află pe dreaptă, şi fie AB dreapta dată şi O punctul dat pe ea.



Prin punctul O duc perpendicularele OC, OD, pe AB în doă planurĭ diferite P şi P′. Planul Q dus prin aceste doă drepte OC, OD va fi perpendicular pe AB.

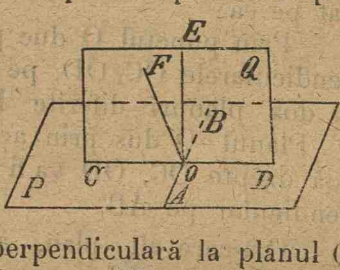
Orĭ-care alt plan, afară de Q dus prin O este oblic pe dreapta AB, fiind că am vĕḑut maĭ sus că numaĭ planul Q conţine toate perpendicularele duse prin punctul O pe această dreaptă AB.

2°. Fie acum D punctul dat ne-aşeḑat pe dreapta AB. In planul P determinat de AB şi D, duc perpendiculara DO la AB: în un alt plan P′ ce trece prin AB să ducem perpendiculara CO la AB · dreptele CO, DO perpendiculare la AB în O, determinează un plan perpendicular la AB, şi acest plan trece prin punctul dat D.

Să imaginăm acum un plan Q perpendicular pe AB, şi care să treacă prin punctul D. Acest plan taie planul P în o dreaptă ce trece prin D şi-ĭ perpendiculară pe AB în O. Aşa dar orĭ-ce plan perpendicular dus prin D, trece prin punctul O al drepteĭ AB şi prin urmare se confundă cu planul dus perpendicularminte pe dreapta AB şi prin punctul O al acesteĭ drepte.

301. TEOREMA.—*Prin ún punct dat se poate duce o linie dreaptă perpendiculară la un plan dat, şi nu se poate duce de căt numaĭ una.*

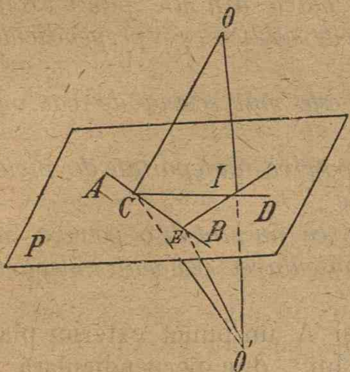
1°. Presupun că punctul dat se află în planul dat şi fie P planul în care se află punctul dat O. Duc prin punctul dat O, o dreaptă AB aşeḑată în planul P; duc apoĭ tot prin acel punct O, planul Q perpendicular pe AB. fie CD intersecţiunea acestuĭ plan cu planul P; în fine în planul Q duc linia dreaptă OF perpendiculară la CD; ḑic că OF perpendiculară pe planul P.



In adevĕr, dreapta AB, perpendiculară la planul Q este perpendiculară la linia dreaptă OF căcĭ este dusă prin piciorul acesteia în plan; şi din acestea videm că OF este perpendiculară pe amăndoă dreptele AB, CD din planul P; prin urmare OF este perpendiculară pe acest plan P.

Altă perpendiculară pe planul P cu piciorul în O, nu poate fi afară de OF, căcĭ orĭ-ce dreaptă OE dusă prin O ve fi oblică cel puţin la una din dreptele AB, CD şi prin urmare nu va fi perpendiculară pe planul P.

2°. Fie acum punctul O dat, în afară de planul P. Ieŭ în planul P o dreaptă oare-care AB, şi duc prin punctul O planul OCD perpendicular pe AB : fie C piciorul perpendicularei AB la acest plan şi CD intersecţiunea tot acestuĭ plan cu planul P. Din punctul O duc linia dreaptă OI perpendiculară pe CD ; dic că OI este perpendiculară pe orĭ-ce linie dreaptă din planul P, şi care trece prin I.



In adevĕr, fie IE o dreaptă în planul P care trece prin I, şi întîlneşte pe AB în E. Prelungesc OI, sub planul P, de o lungime egală IO′, şi apoĭ duc dreptele OC, OE, O′C şi O′E. Dreapta AB fiind prin ipoteză perpendiculară pe planul OCD, unghiurile OCE şi O′CE sînt drepte şi atuncĭ triunghiurile OCE şi O′CE sînt egale ca avănd un unghiu egal cuprins între doă laturĭ egale una cu alta şi anume: laturea CE este comună iar laturile CO şi CO′ sînt egale între ele ca oblice egal depărtate de piciorul I al perpendicularei CI dusă pe OO′. Triunghiurile fiind egale rezultă că OE este egală cu O′E ; atuncĭ triunghiul OEO′ este isoscel, şi dreapta EI care uneşte vîrful E al triunghiuluĭ cu mijlocul I al bazeĭ OO′, este perpendiculară pe OI. Rezultă dar că OO′ este perpendiculară pe planul P.

Orĭ-care altă dreaptă, afară de OI, dusă prin punctul O, d. e. OE, este oblică la plan, căcĭ ŭnind E cu I avem triunghiul OIE dreptunghic în I şi prin urmare unghiul OEI este ascuţit; adică OE este oblică pe planul P.

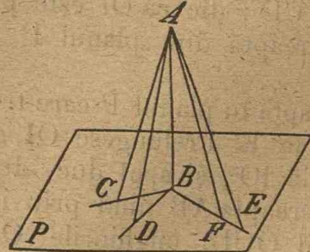
301. TEOREMĂ.— *Dacă din un punct exterior unuĭ plan, se duc diferite oblice şi perpendiculara la plan,*

1°. Perpendiculara este maĭ scurtă de cât orĭ-ce oblică;

2°. Doă oblice de o potrivă îndepărtate de piciorul perpendiculareĭ, sînt egale;

3°. Dintre doă oblice ce nu sînt de o potrivă îndepărtate de piciorul perpendiculareĭ cea maĭ îndepărtată este maĭ mare.

1°. Fie P un plan şi A un punct exterior planuluĭ; duc perpendiculara AB la planul P, şi consider un plan oare-care ABC dus prin AB şi care taie planul P în dreapta BC; dreptele AB şi AC sînt, faţă cu BC, cea întăĭ perpendiculară şi cea de a doa oblică, prin urmare AB este maĭ scurtă de căt AC.



2°. Să luăm doă oblice AC, AD astfel ca picioarele lor C şi D să fie egal depărtate de piciorul B al perpendiculareĭ, adică BC să fie egal cu BD; dic că oblicele AC şi AD sînt egale între ele. In adevĕr, triunghiurile ABC şi ABD sînt dreptunghice în B, aŭ laturea AB comună şi laturile BC şi BD egale între ele prin construcţiune; din aceasta rezultă că ipotenuzile, adică cele doă oblice, AC, AD sînt egale între ele.

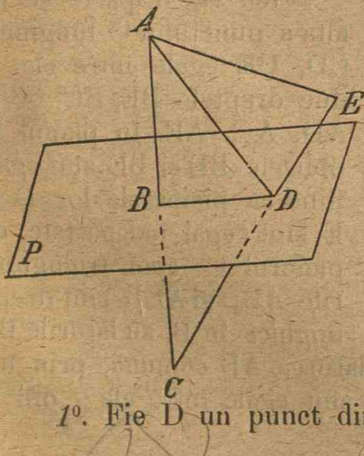
3°. Să luăm oblicele AC, AE astfel ca picioarele lor C şi E să nu fie egal îndepărtate de B, adică să avem, d. e. BC, maĭ mică de căt BE. Port peste BE o lungime BF egală cu BC; oblicele la plan, AC şi AF vor fi egale pentru că prin construcţiune sînt egal depărtate de piciorul B al perpendicularei la plan.

Acum, liniile drepte AB, AF, AE sînt cuprinse în un acelaşĭ plan ABE: cea dintăĭ este perpendiculară la BE, şi celelalte doă sînt oblice pe BE; a doa oblică AE este maĭ lungă de căt întăia AF. Prin urmare oblica la plan, AE, este maĭ mare de căt oblica AC la acelaşĭ plan

302. *Distanța* unuĭ punct la un plan este lungimea perpendicularei dusă din un punct până la plan.

303. Corolar.—Locul geometric al picioarelor tuturor oblicelor la un plan egale între ele, şi care trec prin un acelaşĭ punct, este o circumferenţă a căreĭ centru este piciorul perpendicularei dusă din punct la plan.

304. TEOREMĂ —*Dacă prin mijlocul unuĭ segment de dreaptă, se duce un plan perpendicular la dreapta: 1°. orĭ-care punct al planuluĭ este de o potrivă îndepărtat de extremitățile segmentuluĭ; 2°. orĭ-care punct exterior planuluĭ, nu este de o potrivă depărtat de acele extremitățĭ.*



Fie AC segmentul de dreaptă şi P planul perpendicular pe AC în punctul B, mijlocul segmentuluĭ.

1°. Fie D un punct din planul P; duc dreptele

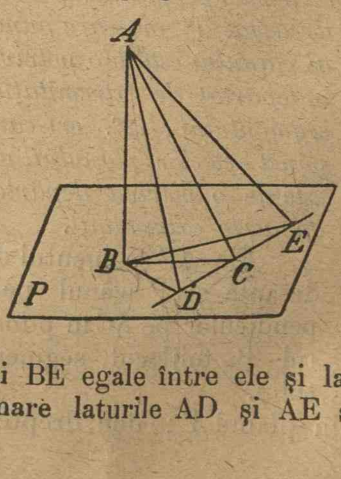
DA, DB, DC şi observ că DB este perpendiculară în mijlocul segmentuluĭ AC, aşa că punctul D este de o potrivă departat de extremităţile AC a-le segmentuluĭ.

2^0. Fie E un punct exterior planuluĭ P; unesc E cu A şi cu C; ḑic că EC nu este egală cu EA. In adevĕr, planul AEC taie planul P în dreapta BD perpendiculară pe AB în mijlocul eĭ: punctul E nefiind situat pe BD nu este la aceiaşĭ distanţă de A şi C.

305. **Corolar.**—*Locul geometric al punctelor din spaţiŭ cari sînt egal depărtate de doă puncte date, este planul perpendicular pe mijlocul drepteĭ care uneşte cele doă puncte date.*

306. TEOREMA.—*Dacă din un punct A se duce perpendiculara AB la un plan P, şi dacă din piciorul B al perpendicularei se duce în planul P perpendiculara BC la dreapta DE din acest plan; dreapta CA, care uneşte piciorul aceşteĭ a doa perpendiculară cu un punct oare-care A al celeĭ dintăĭ, este ea însăşĭ perpendiculară pe DE.*

Aceasta este cunoscută sub numele de **Teorema celor treĭ perpendiculare;**



Ieŭ de o parte şi de alta a punctuluĭ C, lungimile CD, CE egale între ele şi duc dreptele BE, BC, BD, AD, AC, AE. In planul P, oblicele BD şi BE sînt egale fiind-că picioarele lor D şi E sînt egal îndepărtate de piciorul C; apoĭ, triunghiurile ABD şi AEB sînt dreptunghice în B, aŭ laturile BD şi BE egale între ele şi laturea AB comună, prin urmare laturile AD şi AE sînt egale între ele; din acestea rezultă că triunghiul DAE este isoscel şi prin urmare dreapta AC, ce uneşte mijlocul C al bazeĭ DE cu vîrful A al triunghiuluĭ, este perpendiculară pe baza DE

307. **Corolar.**—Din figura precedentă se vede că *doă drepte AB, DE, ce nu sînt în acelaşĭ plan, aŭ o perpendiculară comună BC, şi că această perpendiculară măsoară cea maĭ scurtă distanţa între ele*; fiind-că orĭ-ce altă dreaptă AD ce uneşte doă puncte oare-care A şi D a celor doă liniĭ drepte este, maĭ mare de căt AC şi prin urmare maĭ mare şi de căt BC.

308. **Exerciţiĭ.**—*1. A duce prin un punct dat M o linie dreaptă care să intîlnească doa liniĭ drepte AB, CD care nu sînt situate în acelaşĭ plan.*

Ducem prin M şi AB un plan P; ducem prin M şi CD un Q; intersecţiunea planurilor P şi Q este dreapta căutată. Problema este imposibilă dacă planul P este paralel cu dreapta CD.

2. Să dă un plan P, şi o dreaptă AB care întîlneşte planul în punctul B; această dreaptă AB este egal înclinată pe treĭ drepte BC, BD, BE situate în planul P şi trec prin piciorul B al drepteĭ AB. A arată că AB este perpendibulară pe planul P.

Luănd lungimile egale BC, BD, BE, şi unind C, D, E cu A avem treĭ triunghiurĭ ABC, ABD, ABE egale între ele şi prin urmare AC, AD, AE sînt oblice egal înclinate pe plan şi ştim că picioarele acestor fel de oblice sînt de o potrivă depărtate de piciorul din plan al drepteĭ dusă prin A; aşa dar B este piciorul acesteĭ perpendiculare.

3. Locul geometric al punctelor din un plan, egal depărtate de doă puncte exterioare planuluĭ, este linia de intersecţiune a planuluĭ dat cu planul dus perpendicular prin mijlocul drepteĭ care uneşte cele doă puncte date.

4. Care este locul geometric al punctelor din spaţiu care sînt de o potrivă depărtate de treĭ puncte, cari nu sînt situate în linie dreaptă.

Rădic perpendiculara pe planul celor treĭ puncte în centrul circumferenţeĭ ce trece prin acele puncte ; această perpendiculară este locul geometric căutat.

5. *Se daŭ un plan P, un punct A în acest plan și un punct B exterior planuluĭ ; prin B se duc perpendiculare la toate dreptele din planul P ce trec prin A. Se cere locul geometric al picioarelor acestor perpendiculare.*

Duc perpendiculara BC pe plan ; locul geometric căutat este circumferenţa descrisă pe AC ca diametru, C fiind piciorul perpendicularei dusă din B la plan. Demonstraţiunea se bazază pe Teorema celor treĭ perpendiculare.

6. *Locul geometric al punctelor din spaţiu, astfel ca diferenţa pătratelor distanţelor lor la doă puncte fixe A și B să fie constanta.*

Fie M un punct de a loculuĭ ; avem

$$\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 = K^2.$$

Din MC duc perpendiculara MH pe AB și avem

$$\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 = 2\ AB \times IH$$

I fiind mijlocul luĭ AB. Din aceste redultă că IH este constantă şi locul căutat este planul perpendicular pe AB în punctul H ş simetricul seŭ în privirea luĭ I.

CAPITULUL II

DREPTE ȘI PLANURĬ PARALELE

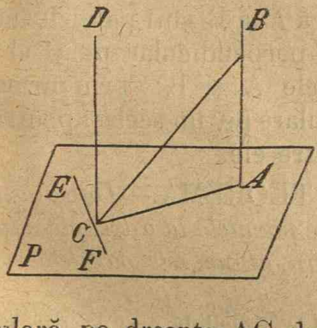
309. **Definițiunĭ.**—Doă drepte în spațiŭ se dice că sînt **paralele** cănd sînt așezate în acelașĭ *plan* și nu se întîlnesc orĭ-căt de mult le-am prelungi.

In Geometria în spațiŭ, pentru a demonstra că doă drepte sînt paralele, nu e de ajuns ca în Geometria plană, să demonstrăm că nu aŭ nicĭ un punct comun, ci maĭ trebue să arătăm că sînt conținute în un acelașĭ plan.

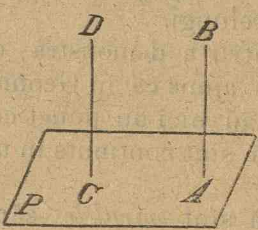
310. Doă planurĭ se dice că sînt *paralele* cănd nu se întîlnesc de loc, orĭ-căt de mult le-am prelungi.

311. TEOREMĂ.—*Dacă doă liniĭ drepte sînt paralele între ele, un plan perpendicular pe una din ele este perpendicular și pe ceialaltă.*

Fie AB, CD doă drepte paralele între ele. și P un plan perpendicular la dreapta AB în punctul A; dic că planul P este perpendicular și pe dreapta CD. Pentru aceasta consider planul celor doă paralele și fie AC intersecțiunea acestuĭ plan cu planu P. Acum dreapta AB fiind perpendiculară pe planul P, este perpendiculară pe dreapta AC dusă prin piciorul ieĭ în plan: prin urmare și CD este perpendiculară pe AC. Apoĭ, prin punctul C, și în planul P duc dreapta EF per-



pendiculară la AC, şi unesc C cu un punct oare-care B al dreptei AB. Rezultă din Teorema celor trei perpendiculare (§. 306) că EF este perpendiculară pe CB şi prin urmare şi pe planul ACB; însă şi dreapta CD se află în planul ACB, aşa dar şi ea este perpendiculară pe EF. De aicī videm că CE este perpendiculară la doă drepte EF, CA aşeḑate în planul P, prin urmare este perpendiculară şi pe planul P.

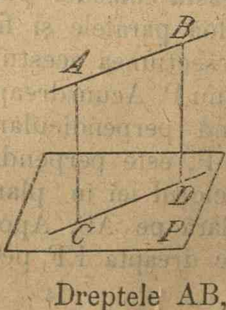


312. TEOREMĂ — *Dacă doă liniĭ drepte sînt perpendiculare la un acelaşĭ plan, atuncĭ dreptele sînt paralele între ele.*

Fie AB, CD doă perpendiculare la planul P.

Dacă prin punctul C, duc paralela cu AB ea va trebui să fie perpendiculară pe planul P (§. 311), prin urmare va coincide cu CD, care prin ipoteză este şi ea perpendiculară pe planul P.

313. **Corolar.**—*Doă liniĭ drepte, paralele cu o a treia sînt paralele între ele.* Fie dreptele A, B, paralele fie-care cu dreapta C; ḑic că A şi B sînt paralele între ele; căcĭ dacă duc un plan perpendicular pe C el va fi perpendicular şi pe dreptele A şi B: prin urmare aceste drepte fiind perpendiculare pe un acelaşĭ plan sînt paralele între ele.



314. TEOREMA.—*Dacă o linie dreaptă este paralelă la o dreaptă situată în un plan, atuncĭ este paralelă şi cu planul.*

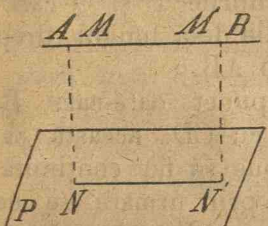
Fie AB paralelă cu CD din planul P; ḑic că AB este paralelă cu planul P.

Dreptele AB, şi CD fiind paralelele sînt în un plan ABCD care taie planul P în linia dreaptă CD; prin urmare dreapta AB dacă ar fi să întîlnească planul P l'ar întîlni în un punct al dreptei CD, și fiind că pe CD nu o întîlnește de loc, nu va întălni nicĭ planul P și prin urmare 'ĭ va fi paralelă.

315. TEOREMĂ. — *Daca prin o dreaptă paralelă la un plan se duce un plan care taie pe celalalt, linia de intersecțiune a planurilor este paralelă cu dreapta dată.*

Să considerăm în figura precedentă dreapta AB paralelă cu planul P. Ducem prin AB un plan care taie planul P în dreapta CD d. e. Aceste drepte AB, CD nu pot să se întîlnească, căcĭ întîlnirea ar trebui să aibă loc în un punct al planuluĭ P, ceia ce nu se poate, căcĭ prin ipoteză dreapta AB este paralelă cu planul P: apoĭ dreptele AB, CD sînt în acelașĭ plan: așa dar ele sînt paralele căcĭ nu se întîlnesc și sînt în un acelașĭ plan.

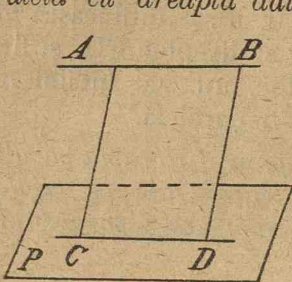
316. **Corolar.** — *Toate punctele uneĭ drepte paralele cu un plan sînt de o potrivă depărtate de plan.*



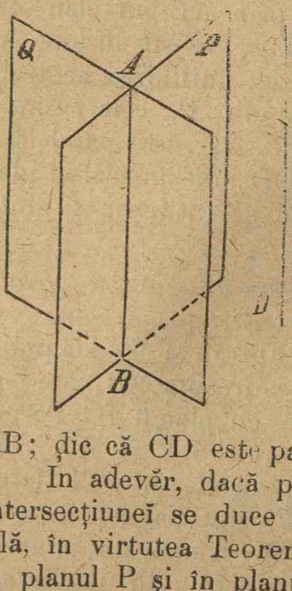
Fie M și M' doă puncte de pe dreapta AB care'ĭ paralelă cu planul P. Perpendicularele MN și M'N' duse din punctele M și M' la planul P, sînt paralele între ele, și prin urmare sînt în acelașĭ plan: acest din urmă plan taie planul P în o dreaptă NN' paralelă cu AB, și figura MNN'M' este un dreptunghiu. Așa dar distanțele MN, M'N' sînt egale.

317. TEOREMĂ. — *O dreapta fiind paralelă cu un plan, dacă prin un punct al planuluĭ se duce pa-*

ralela cu dreapta dată, acea paralelă este conținută în plan.



Fie AB dreapta paralelă cu planul P; prin punctul C al planuluĭ duc paralela CD cu AB: dic că CD se află în planul P. In adevĕr, duc prin AB și prin punctul C un plan care va tăie planul P în o dreaptă paralelă cu AB care trebue să se confunde cu CD, fiind că prin C nu se poate duce de căt o paralelă cu AB. Așa dar CD se află în planul P.

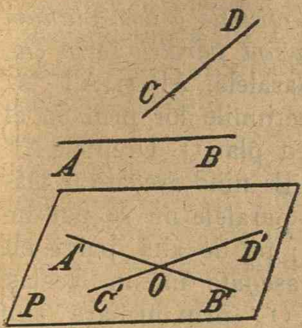


319. **Corolar.** — *O linie dreaptă paralelă cu doă planurĭ carĭ se întretaie, este paralelă cu linia lor de intersecțiune.*

Fie dreapta CD paralelă cu planurile P și Q carĭ se întretaie de-a lungul drepteĭ AB; dic că CD este paralelă cu AB.

In adevĕr, dacă prin un punct oare-care B al intersecțiuneĭ se duce paralela cu CD, această paralelă, în virtutea Teoremeĭ, trebue să fie conținută și în planul P și în planul Q, și prin urmare se confundă cu dreapta de intersecțiune. Așa dar dreptele AB și CD sînt paralele între ele.

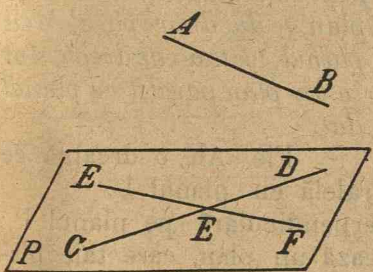
319. **Observațiunea 1.**—Prin un punct dat O, se poate duce un plan paralel cu doă drepte date AB, CD și iată cum: prin punctul O duc dreptele A′B′ și C′D′ paralele respectiv cu AB și CD; planul P determinat de dreptele A′B′ și C′D′ este paralel cu dreptele date.



Alt plan, în condiţiunile cerute nu maĭ este ; fiind că dreptele A'B' şi C'D' determinează un singur plan.

Dacă însă dreptele AB, CD ar fi paralele între ele, atuncĭ A'B' şi C'D' s'ar confunda în o singură dreaptă, şi orĭ-ce plan ce ar trece prin ea, ar fi paralel cu cele doă drepte date.

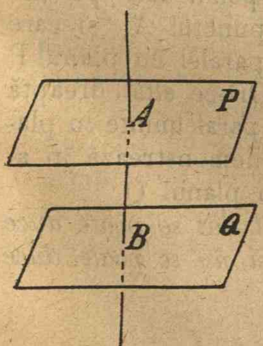
320. **Observaţiunea II.**—Printr'o dreaptă dată CD se poate duce un plan paralel cu altă dreaptă dată AB şi iată cum : prin un punct oare-care E al dreptei CD, duc EF paralelă cu AB ; dreptele CD şi EF determinează un plan P care'ĭ paralel cu AB.



Alt plan în condiţiunile cerute, nu maĭ este, fiind că dreptele CD şi EF determinează un singur plan.

Dacă însă dreptele date ar fi paralele, atuncĭ dreapta EF s'ar confunda cu CD, şi orì-ce plan ce ar trece prin CD ar fi paralel cu AB.

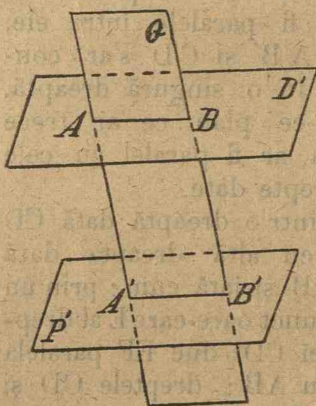
321.—TEOREMA.—*Doă planurĭ perpendiculare la o aceiaşĭ dreaptă, sînt paralele între ele.*



Fie P şi Q doă planurĭ perpendiculare pe dreapta AB ; aceste planurĭ nu se pot întîlni, fiind că prin un punct nu putem duce de cît un plan perpendicular la o dreaptă (§. 300). Rămăne dar că planurile sînt paralele între ele.

322.—TEOREMA.—*Intersecțiunile a doă planurĭ paralele tăiete prin un al treilea sînt paralele între ele.*

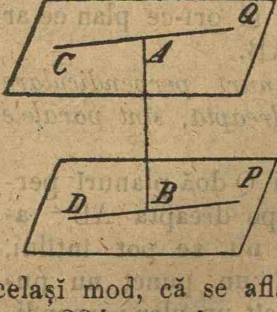
Fie P și P' doă planurĭ paralele, AB și A'B' intersecțiunile lor prin un al treilea plan Q. Dreptele AB și A'B' fiind așeḑate în planurĭ paralele nu se pot întâlni; pe de altă parte ele sînt așeḑate în un același plan Q; prin urmare sînt paralele între ele.



323. TEOREMA.—*Dacă prin un punct exterior unuĭ plan, se duc drepte paralele cu planul, toate aceste drepte sînt în un plan paralel cu planul dat.*

Fie AC o dreaptă ce trece prin punctul A și paralelă cu planul P.

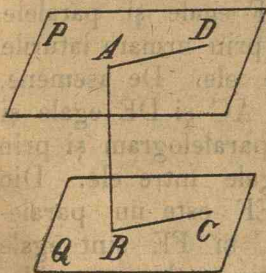
Duc dreapta AB perpendiculară pe planul P; dreptele AC și AB formează un plan, care taie planul P în o dreaptă BD paralelă cu AC. Insă AB fiind perpendiculară pe planul P, este perpendiculară și pe dreapta BD și prin urmare și pe paralela acesteia AC. Așa dar dreapta AC se află în planul Q perpendicular pe AB dus prin punctul A, și care plan este paralel cu planul P (§ 321). Orĭ-ce altă dreaptă dusă prin A paralelminte cu planul P se demonstrează în același mod, că se află conținută în planul Q.



324. **Corolar.**—*Prin un punct dat se poate duce un plan paralel cu un plan dat, și nu se poate duce de cât numaĭ unul.*

Raportându-ne la figura precedentă, ducem din A perpendiculara AB la planul P și apoĭ prin A ducem planul Q perpendicular pe AB; acest plan Q este paralel cu planul P.

Pe de altă parte, să ne închipuim că se maĭ poate duce prin A, un alt plan Q′ paralel cu planul P. Ducem prin AB un plan care va tăie planurile paralele Q și P în drepte paralele AC și BD. Dreapta BD fiind perpendiculară pe AB și paralela sa AC va fi perpendiculară pe AB, și prin urmare AC se află în planul Q; ast-fel că un plan oare-care ce trece prin AB taie planurile Q și Q′ în o aceiașĭ dreaptă. Așa dar aceste planurĭ sînt unul și acelașĭ.



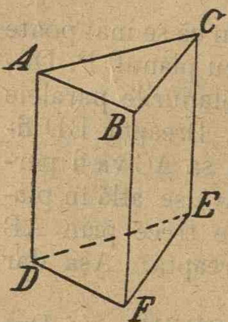
325. TEOREMA. — *Doă planurĭ fiind paralele, orĭ-ce dreaptă perpendiculară pe unul din planurĭ este perpendiculara și pe celalalt.*

Fie planurile paralele P, Q și dreapta AB perpendiculară pe planul P în punctul A. Duc prin picorul B al dreptei AB în planul Q. o dreaptă oare-care BC, apoĭ consider planul determinat de AB și BC: acest plan taie planul P în o dreaptă AD paralelă cu BC. Insă, AB este perpendiculară pe AD, prin urmare este perpendiculară și pe BC care'ĭ paralelă cu AD. Tot așa se va arăta că AB este perpendiculară pe orĭ și care altă dreaptă dusă prin B în planul Q, de unde rezultă că AB este perpendiculară pe planul Q însușĭ.

326. **Corolar.**—*Doă planurĭ paralele cu un al treilea sînt parulele între ele.* Pentru că o dreaptă perpendiculară pe al treilea plan, este perpendiculară și pe celelalte doă.

327. TEOREMA.—*Dacă doă unghiurĭ ne-situate*

în acelaşĭ plan aŭ laturile lor respectiv paralele între ele : 1°. unghiurile sînt egale saŭ suplementare ; 2°. planurile unghiurilor sînt paralele între ele.



1. Fie unghiurile BAC şi F'DE a căror laturĭ sînt respectiv paralele doă căte doă şi îndreptate în acelaşĭ senz ; dic că aceste unghiurĭ sînt egale.

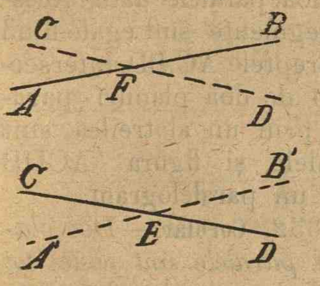
Ieŭ pe laturile unghiurilor, lungimile AB şi DF egale între ele şi AC, DE iarăşĭ egale între ele şi duc dreptele AD, BF, CE, BC şi FE. Patrulaterul ABFD avănd laturile AB, DF egale şi paralele între ele, este un paralelogram şi prin urmare laturile opuse AD şi BF sînt egale între ele. De asemene, patrulaterul ACED avînd laturile AC şi DE egale şi paralele între ele, este şi el un paralelogram şi prin urmare laturile AD şi CE sînt egale între ele. Din aceste rezultă că patrulaterul BCEF este un paralelogram şi prin urmare laturile BC şi FE sînt egale ca avînd trus-trele laturile respectiv egale una cu alta şi rezultă că unghiurile CAB şi EDF sînt egale între ele.

Dacă unghiurile BAC şi FDE ar ave laturile lor paralele respectiv şi îndreptate în senz contrar, ele iarăşĭ sînt egale ; pentru că se poate demonstra ca înainte, că unghiul CAB şi cu opusul luĭ la vîrf EDF sînt egale.

Dacă unghiurile BAC şi FDE sînt astfel că laturile AC şi DF sînt paralele şi de acelaşĭ senz, iar AC şi DE paralele şi de senz contrar, atuncĭ aceste unghiurĭ sînt suplementare. Demonstraţiunea se face arătăndu-se ca înainte, că unghiul BAC este egal cu suplementul unghiuluĭ FDE.

2°. Planurile CAB şi EDF sînt paralele între ele, fiind că dreptele AB şi AC din planul CAB sînt paralele cu dreptele DF, DE aşeḑate în planul EDF.

328. **Corolar.**—*Fiind date doă drepte nesituate în un acelaşĭ plan, dacă prin întăia se duce un plan paralel cu a doa, şi prin a doa un plan paralel cu întăia, aceste doă planurĭ sînt paralele între ele.*



Fie AB, CD doă drepte nesituate în un acelaşĭ plan. Prĭn un punct oare-care E al drepteĭ CD, duc dreapta A′B′ paralelă cu AB; planul format de CD şi A′B′ este paralel cu AB. De asemene, prin un punct F al drepteĭ AB duc dreapta C′D′ paralel cu CD; planul fnrmat de AB şi C′D′ este paralelă cu CD. Cele doă planurĭ sînt paralele între ele, căcĭ sînt planurile a doă unghiurĭ a căror laturĭ sînt respectiv paralele.

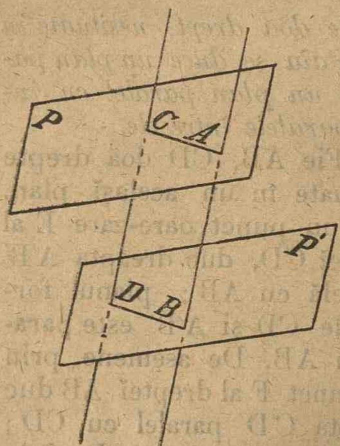
329. **Definițiune.**—Se numeşte *unghiŭ a doă liniĭ drepte nesituate în acelaşĭ plan.* unghiul format de paralelele duse la aceste drepte prin un punct oare-care din spaţiŭ.

Doă liniĭ drepte, care se întălnesc saŭ nu, sînt perpendiculare una pe alta când unghiurile lor sînt drepte.

330. **Observaţiune.**—*O dreaptă perpendiculară la un plan este perpendiculară nu numaĭ pe dreptele planuluĭ duse prin piciorul eĭ, ci pe toate dreptele planuluĭ.*

Pentru ca o dreaptă sa fie perpendiculară pe un plan, trebue şi este de ajuns ca ea sa fie perdendiculară pe doă drepte oare-care din plan.

331.—TEOREMA.—*Doă planurĭ paralele interceptează segmente egale pe doă drepte paralele.*



Fie P şi P′ doă planurĭ paralele între ele, şi AB, CD segmentele interceptate de aceste doă planurĭ pe doă paralele date. Aceste segmente sînt egale fiind că dreptele AC,BD, intersecţiunĭ de doă planurĭ paralele prin un al treilea, sînt paralele şi figura ACDB este un paralelogram.

332. **Corolar.**—*Doă planurĭ paralele sînt peste tot locul de o potrivă departate.*

Ieŭ doă puncte oare-care în planul P şi din ele duc perpendicularele pe planul P′; aceste drepte sînt paralele între ele şi prin urmare egale una cu alta.

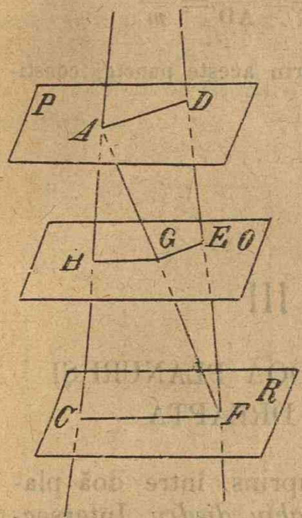
333. TEOREMA.—*Treĭ planurĭ paralele interceptează pe doă drepte oare-care, segmente proporţionale.*

Fie AB, BC, DE şi EF segmentele interceptate pe doă drepte AC, DF de planurile P,Q,R: dic că avem

$$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}.$$

Duc dreapta AF şi fie G punctul de întîlnire al acesteĭ drepte cu planul Q; ducem dreptele BG, CF, AD şi GE. Dreptele BG şi CF, intersecţiunĭ de doă planurĭ paralele prin un al treilea, fiind paralele avem

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AG}{GF}.$$



Apoĭ, dreptele AD şi GE fiind şi ele paralele avem de asemene

$$\frac{AG}{GF}=\frac{DE}{EF};$$

din aceste doă proporţiunĭ rezultă ceia ce era de demonstrat.

334. **Exerciţiĭ.**—*1. A duce o paralelă la o dreaptă dată, astfel ca să întîlnească alte doă drepte, ne-situate în un plan.*

Fie AB şi CD dreptele care trebue să fie întîlnite de o paralelă la EF ; prin un punct oare-care a drepteĭ AB duc BG paralelă cu EF. Planul determinat de AB şi BG, taie pe CD în un punct K şi prin K duc KH paralelă cu EF. Dreapta KH este dreapta căutată.

2. Dacă o dreaptă şi un plan sînt perpendiculare la o aceiaşĭ dreaptă, dreapta şi planul sînt perpendiculare una cu alta.

Pentru că cele doă drepte formează un plan care taie planul dat în o paralelă cu dreapta dată.

3. Dacă doă planurĭ trec prin doă drepte parale, intersecţiunea lor este paralelă cu dreptele paralele ; pentru că dacă duc paralela cu una din dreptele date prin unul din punctele comune planurilor, această paralelă se află şi în planul întâĭ şi al doilea.

4. Dacă doă planurĭ carĭ se taie sînt paralele cu o dreaptă intersecţiunea lor, este paralelă cu această dreaptă. Demonstraţiunea ca precedentă.

5. A găsi locul geometric al punctelor a căror distanţe la doă planurĭ paralele sînt proporţionale cu doă lungimĭ date **m** *si* **n**. Duc o perpendiculară comună AB la planurile paralele P şi Q ; determinez patru puncte C, D, C′ D′ situate pe AB aşa ca să am

$$\frac{BC}{AC}=\frac{MD}{AD}=\frac{m}{m} \text{ şi } \frac{BC'}{AC'}=\frac{BD'}{AD'}=\frac{m}{m}.$$

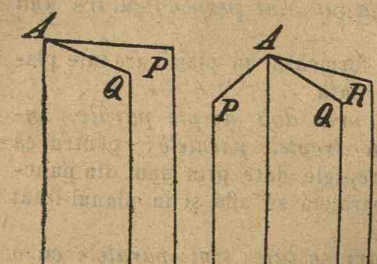
Planurile paralele cu planul P, duse prin aceste puncte, constituesc locul geometric căutat.

CAPITULUL III

UNGHIURI FORMATE DE DOĂ PLANURI ŞI DE UN PLAN CU O DREAPTĂ

335. **Definiţiunĭ.**—Spaţiul cuprins între doă planurĭ care se taie, se numeşte *unghiu diedru*, Intersecţiunea planurilor este *creasta* diedruluĭ, iar planurile sînt *feţele* luĭ.

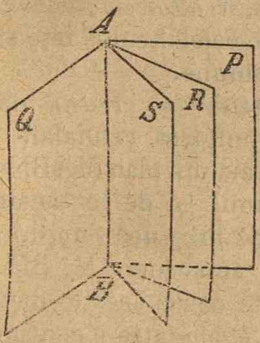
Un diedru se însamnă prin doă litere puse pe creasta luĭ; dacă se întâmplă ca o creastă să fie comună la maĭ multe diedre, atuncĭ fie-care din aceste diedre se însamnă prin patru litere, doă pe creastă şi câte una pe fie-care faţă; literile de pe creastă se pun la mijloc.



Astfel, dintre cele doă figurĭ alăturate, cea dintâĭ este un diedru format de semi-planurile P şi Q; creasta luĭ este AB şi feţele sînt P şi Q; se însamnă prin AB.

A doa figură reprezintă treĭ diedre formate de semi-planurile P şi Q, P şi R, Q şi R; creasta AB este aceiaşĭ: le vom însamna respectiv prin: PABQ, PABR, QABR.

336. Doă unghiurĭ diedre sînt *egale* dacă se pot suprapune.



Dacă semĭ-planurile ABP, ABR ABS, ABQ, terminate toate la dreapta AB, sînt aşeḑate ast-fel că un semi-plan mobil, aplicat maĭ întăĭ pe ABP şi învărtindu-se în jur de AB, într'un senz determinat, vine să coincidă succesiv cu semi-planurile ABR, ABS, ABQ, atuncĭ unghiul diedru se ḑice că este *suma* unghiurilor diedre PABR şi RABS: de asemene unghiul PABQ este *suma* unghiurilor diedre PABR, RABS, SABQ şi aşa maĭ departe, orĭ căte semi-planurĭ am ave cu aceîaşĭ creastă, scriŭ:

$$PABS = PABR + RABS$$

$$PABQ = PABR + RABS + SABQ \ldots \text{ etc.}$$

Un unghiŭ diedru care'ĭ egal cu suma altor doă diedre se ḑice că este *maĭ mare* de căt fie-care diedru care compune suma.

Dacă un unghiŭ diedru PABL este suma a m unghiurĭ diedre egale cu un diedrn dat PABR, atuncĭ unghiul diedru PABL se ḑice că este egal cu de m orĭ diedru PABR, şi acest din urmă este a m^a parte din PABL, şi se scrie:

$$PABL = m.\ PABR \quad \text{şi} \quad PABR = \frac{1}{m} PABL.$$

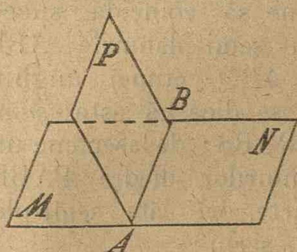
Dacă un unghiŭ diedru PABM este egal cu de m orĭ n^a parte din un diedru PABR, se scrie

$$\mathrm{PABM} = \frac{m}{n}\mathrm{PABR}.$$

337. Doă unghiurĭ diedre sînt *adiacente* dacă aŭ aceiașĭ creastă, o față comună și celelalte doă fețe sînt de o parte și de alta a fețeĭ comune.

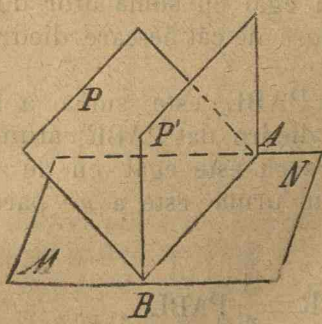
Doă unghiurĭ diedre sînt *opuse la creastă* dacă fie-care față a unuia este în prelungirea celuialalt.

338. Un semi-plan P, ce taie un plan MABN în o dreapĭă AB formează cu planul și de o aceiașĭ parte a luĭ, doă unghiurĭ diedre adiacente MABP și NABP: dacă aceste diedri nu sînt egale între ele, atuncĭ semi-planul P este *oblic* pe planul MN; iar dacă sînt egale atuncĭ semi-planul P se ḑice că este *perpendicular* pe planul MN.



In acest din urmă caz unghiul diedru este *drept*.

339.—TEOREMĂ.—*Printr'o dreaptă așeḑată în un plan se poate duce de o aceiașĭ parte a planuluĭ, un semi-plan perpendicular pe planul dat și nu se poate duce maĭ mult de cat unul.*



Fie MN planul dat și AB linia dreaptă din plan prin care trebue să treacă semi-planul cerut.

Luăm un semi-plan P care t[illegible] prin AB și se învîrtește în jurul acesteĭ drepte, începând de la partea M a planuluĭ şi mergând spre partea N. Unghiul diedru PABM maĭ întâĭ nul, creşte neîncetat pe când adiacentul seŭ PABN se micşurează necontenit, până ce devine nul.

Unghiul diegru PABM începe prin a fi inferior diedruluĭ PABN, apoĭ se apropie de el din ce în ce maĭ mult, devine egal cu el, apoĭ superior.

Există dar, între poziţiunile intermediare a semi-planuluĭ P, o poziţiune particulară P_1, şi numaĭ una, pentru care unghiurile P_1ABM şi P_1ABN sînt egale; în această poziţiune semi-planul P_1 este *perpendicular* pe planul MN.

340. **Corolar**.—*Toate unghiurile diedre drepte sînt egale între ele.*

Să considerăm doă diedre drepte PABQ şi P'A'B'Q'. Aplicăm creasta A'B' peste AB, faţa Q' peste faţa Q; atuncĭ faţa P' se va aplica peste faţa P, căcĭ trebue să iee o poziţiune perpendiculară pe Q, şi această poziţiune este numaĭ aceia a feţeĭ P.

341. Toate unghiurile diedre drepte fiind egale între ele, unghiul *diedru drept* serveşte ca termin de comparaţiune cu toate celelalte unghiurĭ diedre.

Un diedru este *ascuţit* saŭ *obtuz* dacă'i maĭ mic saŭ maĭ mare de cât un diedru drept.

Doă diedre sînt *complementare* dacă suma lor este egală cu un diedru drept.

Doĭ diedri sînt *suplementare* dacă suma lor este egală cu doĭ diedre drepte.

342. TEOREMĂ.—*Când doă planurĭ se întretaie în o dreaptă, ele formează patru unghiurĭ diedre; suma a doă diedre adiacente estz egală cu doă diedre drepte şi prin urmare sînt suplementare.* Demonstraţiunea aceste teoreme este asemene cu acea de la §. 10.

343. **Corolar I.**—*Dacă unul din cele patru diedre*

este drept, atuncĭ celelalte treĭ sînt drepte (Demonstrațiune asemene cu acea de la § 11).

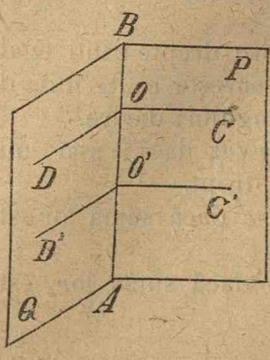
344. **Corolar II.**—*Orĭ cât de multe diedre vor fi de aceiașĭ parte a unuĭ plan, pe aceiașĭ creasta, suma lor este egală cu doă diedre drepte* (Demonstrațiune asemene cu acea de la § 12).

345. **Corolar III.**—*Când maĭ multe planurĭ trec prin o dreaptă, suma tuturor diedrilor formate în jurul dreptei, este egala cu patru diedre drepte.* Demonstrațiune asemene cu acea de la § 13).

346.—TEOREMA.—*Dacă doă diedre adiacente sînt suplementare, fețele lor necomune sînt în unul și același plan.* (Demonstrațiune asemene cu acea de la § 14).

347. TEOREMĂ.—*Doă diedre opuse la creastă sînt egale între ele.* (Demonstrațiune asemene cu acea de la § 15).

348. **Definițiune.**—Numim *unghiu plan* al unuĭ unghiu diedru PABQ, unghiul COD format de perpendicularele OC, OD, duse la creasta AB a diedruluĭ în un acelașĭ punct al eĭ, și așeḑate respectiv în cele doă fețe ale diedruluĭ.



Din definițiunea aceasta rezultă următoarele :

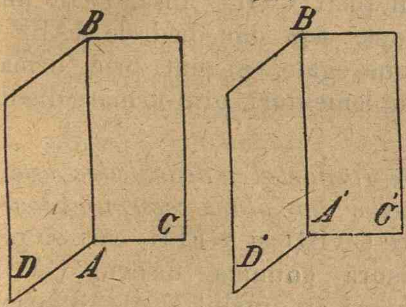
1°. *Mărimea unghiuluĭ plan al unuĭ diedru nu depinde de pozițiunea punctuluĭ de pe creasta diedruluĭ : ea este aceiașĭ, orĭ-care ar fi vîrful unghiuluĭ pe creastă.*

Să luăm un alt punct O′ pe creastă și să ducem perpendicularele O′C′, O′D′ așeḑate respectiv în fețele P și Q. Unghiurile COD și C′O′D′ sînt egale între ele căcĭ 'șĭ aŭ laturile respectiv paralele și de acelașĭ senz.

2°. *Unghiurile plane a doă diedre egale, sînt egale,* pentru că cele doă diedre se pot suprapune.

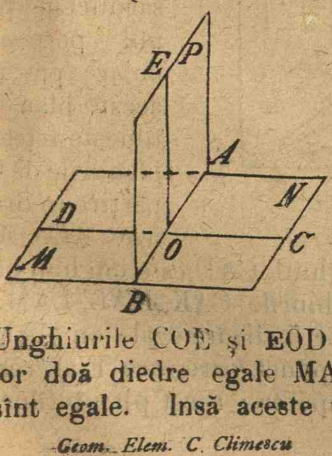
3°. *Doă diedre sînt egale între ele dacă unghiurile lor plane sînt egale între ele.*

Să luăm doă diedre a căror unghiurĭ plane CAD şi C′A′D′ să fie egale între ele.



Să transportăm diedrul al doilea peste cel întâĭ astfel ca unghiul plan C′A′D′ să coincidă cu unghiul plan CAD; creasta A′B′ care'ĭ perpendiculară pe dreptele A′C′, A′D′ este perpendiculară şi pe planul acestor doă drepte şi prin urmare va coincide cu perpendiculara la planul dreptelor AC, AD dusă prin punctul A, adică cu creasta AB. Rezultă că cele doă diedre coincid şi prin urmare sînt egale.

349. TEOREMÀ.—*Unghiul plan al unuĭ unghiŭ diedru drept este un unghiŭ drept şi reciproc.*

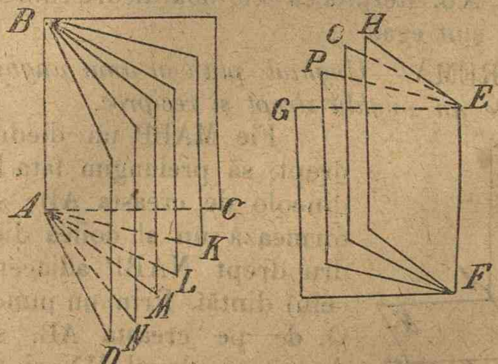


Fie MABP un diedru drept; să prelungim faţa M dincolo de creasta AB; se formează un al doilea diedru drept NABP adiacent celuĭ dintâĭ. Prin un punct O, de pe creasta AB, să ducem în planul MN şi in planul P, dreptele CD şi OE perpendiculare pe AB. Unghiurile COE şi EOD sînt unghiurile plane a celor doă diedre egale MABP, NABP, şi prin urmare sînt egale. Insă aceste unghiurĭ egale COE şi EOD sînt suplementare pentru că sînt adiacente şi laturile lor exterioare sînt în lininie dreaptă; aşa dar sînt drepte.

Reciproc, fie un diedru MABP al căruĭ unghiŭ plan DOE este drept. Dacă prelungim faţa M şi dreapta DO dincolo de creasta AB, formăm un al doilea diedru NABP cu unghiul plan COE. Insă, DOE fiind drept, şi COE este drept. Aşa dar diedrele MABP şi NABP aŭ unghiurĭ plane egale, şi sînt prin urmare egale; apoĭ maĭ sînt suplementarĭ, prin urmare diedrul MABP este drept.

350. TEOREMĂ.—*Raportul a doă diedre este egal cu raportul unghiurilor lor plane corespundetoare.*

Să luam doă diedre CABD şi GEFH, carĭ să presupunem că aŭ o măsură comună, diedrul CABK, care se cuprinde de 5 orĭ în întăiul şi de 3 orĭ în al doilea diedru. Să ducem prin crestele AB, EF planurĭ carĭ să împartă diedrul întăĭ în 5 şi al doilea în 3 diedre egale cu diedrul CABK.

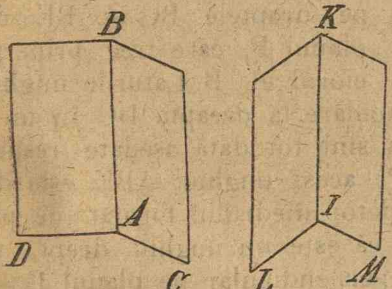


In un punct A al crestei AB să ducem planul perpendicular pe ea; acest plan întîlneşte feţele şi planurile de împărţire în dreptele AC, AK, AL, AM, AN şi AD; unghiul CAD este unghiul-plan al diedruluĭ CABD şi unghiurile CAK, KAL, LAM...., sînt unghiurile plane a celor 5 diedre egale cu CABK. Ducem de asemenea în un punct oare-care E al crestei EF, planul perpendicular pe ea; acest plan întîlneşte fețele și planurile de împărțire în dreptele EG, EP, EQ, și EH ; unghiui GEH este unghiul plan al diedrulul GFFH, și unghiurile GEP. PEQ, QEH, sînt unghiurile plane a celor 3 diedre egale cu CABK.

De aicĭ videm că unghiurile plane CAD și GEH a celor doă diedre date conțin : cel întăĭ de 5 orĭ unghiul CAK, și cel de al doilea de 3 orĭ unghiul CAK, așa dar raportul între acette unghiurĭ plane este egal cu $^5/_3$, ca și raportul celor doă diedre.

In caz cănd diedriĭ CABD și GEFH nu ar ave o comună măsură, se va urma ca la Nota de la §. 113, de unde va rezulta egalitatea celor doă raporturĭ.

351. TEOREMA.—*Orĭ-ce unghiŭ diedru are aceiașĭ măsură ca și unghiul plan corespundetor, dacă se ie ca unitățĭ un unghiŭ diedru oare-care și unghiul plan corespundetor.*



Fie de măsurat diedrul CABD prin diedrul MIKL luat ca unitate, fie CAD și MIL unghiurile plane coresdundetoare acestor doă diedre. Fac convențiunea de a măsura unghiul CAD cu unghiul MIL considerat ca unitate de unghiŭ; în virtutea Teoremeĭ precedente avem :

$$\frac{CABD}{MIKL} = \frac{CAD}{MIL}.$$

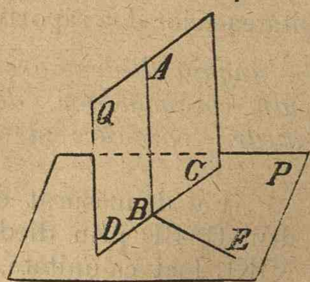
Insă aceste raporturĭ egale, exprimă respectiv măsurile unghiuluĭ diedru CABD și a unghiuluĭ seŭ plan CAD ; prin urmare măsura acestuĭ unghiŭ diedru este aceiașĭ cu a unghiuluĭ seŭ plan.

Teorema aceasta se enunţă maĭ pe scurt precum urmează: *un unghiŭ diedru are drept măsură unghiul plan corespundetor.*

Se ie de ordinar ca unitate de unghiŭ diedru, *unghiul diedru drept.*

352. TEOREMA. - *Dacă o dreaptă este perpendiculară la un plan, orĭ-ce plan dus prin ea este perpendicular la plan.*

Fie AB dreapta perpendiculară la planul P, şi Q un plan oare-care dus prin AB; dic că planul Q este perpendicular la planul P.



Fie CD intersecţiŭnea celor doă planurĭ, să ducem prin B perpendiculara BE la dreapta CD. Dreapta AB, care'ĭ perpendiculară la planul P este perpendiculară pe dreptele BC şi BE din planul P, care trec prin piciorul eĭ, B. Laturile unghiuluĭ ABE sint perpendiculare la dreapta DC în un acelaşĭ punct B al eĭ, şi sint totodată aşedate respectiv în planurile Q şi P; acest unghiŭ ABE este dar unghiul plan corespundetor diedruluĭ format de planurile P şi Q, şi fiind că este un unghiŭ drept, rezultă că planul Q este perpendicular pe planul P.

353. TEOREMA.—*Find date doă planurĭ perpendiculare unul pe altul, daca în unul din ele se duce o dreapta perpendiculara la intersecţiunea celor doă planurĭ, acea dreaptă este perpendiculara pe celalalt plan.*

Să luăm figura de dineoare. Fie AB o dreaptă din planul Q perpendiculară pe intersecţiunea CD a planurilor P şi Q; dic că AB este perpendiculară pe planul P.

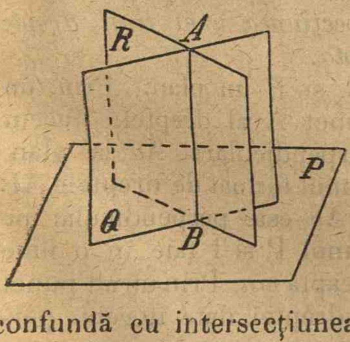
Duc prin punctul B și în planul P, dreapta BE perpendiculară la CD; unghiul ABE este unghiul plan al diedruluĭ format de planurile P și Q; aceste planurĭ fiind perpendiculare, unghiul ABE este drept. Prin urmare dreapta AB, perpendiculară pe dreptele CD și BE, este perpendiculară pe planul P care conține aceste drepte.

354. TEOREMĂ.—*Fiind date doă planurĭ perpendiculare unul pe altul, dacă prin un punct al unuia din planurĭ se duce perpendiculara la celalalt, această dreaptă este așeḑată în planul întâĭ.*

Fie în figura de dineoare, doă planurĭ P și Q perpendiculare unul pe altul. Ieŭ un punct A în planul Q și prin el duc dreapta AB perpendiculară pe intersecțiunea CD a celor doă planurĭ: această dreaptă AB este în planul Q și'ĭ perpendiculară pe planul P. Pe de altă parte, perpendiculara la planul P, dusă prin punctul A, se confundă cu dreapta AB, prin urmare'ĭ așeḑată in planul Q

355. TEOREMA.—*Daca doă planurĭ cari se taie sînt perpendiculare la un al treilea, intersecțiunea celor doa planurĭ este și ea perpendiculară pe al treilea plan.*

Fie un plan P și Q, R alte doă planurĭ perpendiculare pe planul P, și a căror intersecțiune este dreapta AB: ḑic că dreapta AB este perpendiculară pe planul P. In adevĕr, dacă prin un punct A, al intersecțiuneĭ planurilor Q și R duc perpendiculara la planul P, această perpendiculară în virtutea Teoremeĭ precedente se află și în planul Q și în planul R, și prin urmare se confundă cu intersecțiunea AB a acestor doă planurĭ.

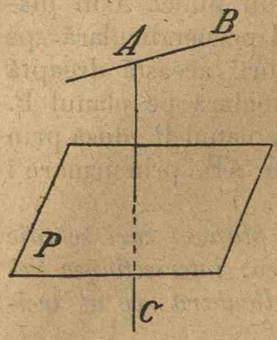


356. TEOREMA.— *Prin o dreaptă oare-care se poate duce un plan perpendicular la un plan dat, și în general nu se poate duce de cât unul singur.*

Fie AB o dreaptă și P un plan dat.

Ieŭ un punct oare-care A pe dreaptă, și prin el duc perpendiculara AC la planul P; planul format de dreptele AC, AB este perpendicular pe planul P pentru că conține perpendiculara AC la acest plan. Orĭ-ce alt plan ce ar trece prin AB și prependicular pe planul P, va trebui să conțină pe AC și prin urmare se va confunda cu planul dreptelor AB și AC.

Dacă însă AB ar fi perpendiculară pe planul P, atuncĭ prin AB se pot duce un numĕr infinit de planurĭ perpendiculare pe planul P.

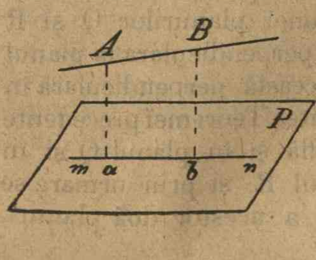


357. **Definițiunĭ.**— Din un punct dat A. ducem perpendiculara la un plan dat, fie *a* piciorul perpendiculareĭ pe plan; punctul *a* se numește *proecțiunea* punctuluĭ A pe planul dat.

Fiind dată o linie, din fie-care punct al linieĭ ducem perpendiculara la un plan dat: locul geometric al picioarelor perpedicularelor duse prin fie-care punct al linieĭ la plan, se numește *proecțiunea* aceleĭ liniĭ pe planul dat.

358. TEOREMĂ.— *Proecțiunea uneĭ liniĭ drepte pe un plan este o linie dreaptă.*

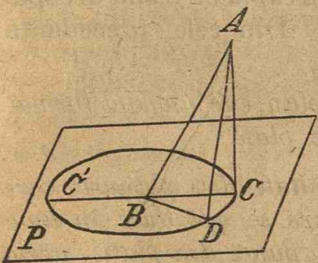
Fie AB o linie dreaptă și P un plan. Prin un punct A al drepteĭ, ducem perpendiculara Aa la plan, planul format de dreptele AB și Aa este perpendicular pe planul P și 'l taie în o linie dreaptă mn. Prin un alt punct al drepteĭ date ducem per-



pendiculara B*b* la plan ; această perpendiculară este cu totul aşezată în planul BA*a* prin urmare piciorul eĭ *b* va fi pe intersecţiunea *mn* a celor doă planurĭ. Aşa dar proecţiunea drepteĭ AB este dreapta *mn*.

359. TEOREMĂ.—*Dacă o dreaptă este oblică pe un plan, unghiul format de dreaptă cu proecţiunea eĭ pe plan. este cel maĭ mic dintre toate unghiurile formate de dreaptă cu orĭ-care altă dreaptă dusă în plan prin piciorul obliceĭ.*

Fie BA_0 oblică la planul P, B piciorul obliceĭ, BC proecţiunea drepteĭ BA pe plan ; dic că unghiul ABC este maĭ mic de căt unghiul ABD format de dreapta AB cu o dreaptă oare-care BD din planul P şi care trece prin B.



Pentru a demonstra aceas-at, ieŭ lungimile BD şi BC egale între ele. Triunghiurile ABC şi ABD aŭ doă laturĭ egale una cu alta, adică : AB este lature comună şi BC egală cu BD prin construcţiune : laturile al treilea sînt neegale căcĭ perpendiculara AC este maĭ mică de căt oblica AD. Prin urmare unghiul ABC este maĭ mic de căt unghiul ABD.

360. *Observaţiune.*—Dacă învărtim dreapta BD în plan, aşa ca să o aducem în direcţiunea BC′ opusă direcţiuneĭ BC, unghiul ABD creşte neîncetat în mişcarea aceasta. In adever, din punctul B ca centru şi cu o radă egală cu BC, descrim circumferenţa în planul P şi să imaginăm că punctul D percurge arcul CDC′. In triunghiul ABD doă din laturĭ nu se schimbă şi anume AB şi BD ; însă laturea a treia AD se măreşte, căcĭ punctul D se îndepărtează de punctul C, coarda CD se măreşte şi prin urmare şi oblica AD a

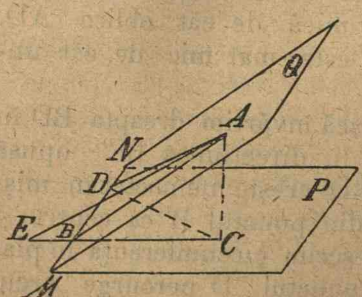
căruĭ picior D, se îndepărtează de acel al perpendicularei AC. se mărește și ea; din aceasta rezultă că unghiul ABD se mărește. După ce BD a luat direcțiunea BC', să continuăm a o învărti în aelașĭ senz; unghiul ABD reia, în ordine inversă, aceleașĭ valorĭ. Așa dar unghiul ABD este *minimum* când dreapta BD coincide cu proectiunea BC a drepteĭ BA și *maximum* când BD coincide cu BC' care 'ĭ în prelungirea în senz invers a direcțiuneĭ BC.

361. Se numește *unghiul uneĭ drepte cu un plan* ceĭ maĭ mic unghiu format de dreaptă cu o altă dreaptă dusă în plan prin piciorul eĭ. Din cele precedente videm că:

Unghiul uneĭ drepte cu un plan, este unghiul format de dreaptă cu proecțiunea eĭ pe plan.

362. TEOREMA.—*Fiind date doă planurĭ care se taie; dintre toate dreptele care se pot duce în unul din planurĭ și prin un anume punct din plan, aceia care face un unghiu maĭ mare cu planul al doilea, este perpendiculara la intersecțiunea planurilor.*

Fie planurile P și Q, MN intersecțiunea lor și A un punct în planul Q.



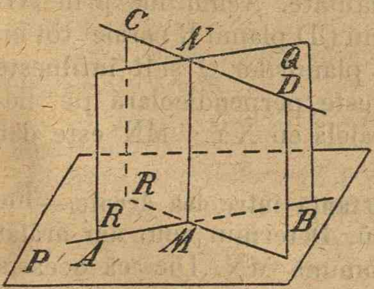
Duc perpendiculara AC din A pe planul P și prin piciorul C al aceste̠ĭ perpendiculare duc CB perpendiculară pe MN, și unim B cu A; dreapta AB este perpendiculară pe MN.

Să ducem prin punctul A și în planul Q o dreaptă oare-care AD. Proecțiunea drepteĭ AB pe planul P este BC, și unghiul drepteĭ AB cu planul P este ABC. De asemene, proecţiunea dreptei AD pe planul P este CD, şi unghiul dreptei AD cu planul P, este ADC. Avem să demonstrăm că unghiul ABC este mai mare de cât unghiul ADC.

Să învărtim triunghiul dreptunghic ADC în jur de AC, până ce'l vom aduce în planul triunghiului ABC: laturea CD, ie direcţiunea CB şi fiind-că oblica CD este mai lungă de cât perpendiculara CB, punctul D se aşază pe prelungirea lui CB, în un punct E. Acum avem unghiul ABC exterior triunghiului ABE, egal cu suma unghiurilor AEB şi BAE; aşa dar unghiul ABC este mai mare de cât unghiul AEC saŭ de cât egalul seŭ ADC.

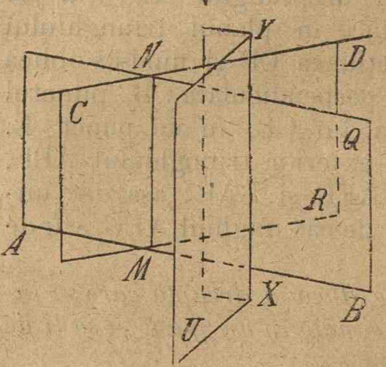
363. **Problemă.**—*Să se ducă o dreaptă care să întîlnească doă drepte date ne-situate în un plan, şi să li fie perpendiculară.*

Fie AB, CD dreptele date. Duc prin AB planul P paralel cu dreapta CD. O dreaptă perpendiculară pe cele doă drepte date este perpendiculară pe dreapta AB şi pe o dreaptă din planul P paralelă cu CD: prin urmare dreapta perpendiculară pe cele doă drepte date este perpendiculară pe planul P; astfel direcţiunea dreptei cerute este determinată: mai rămâne să'i determinăm poziţiunea.



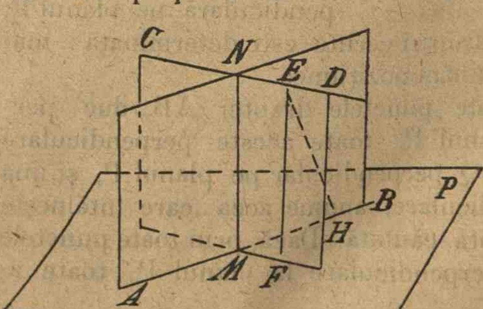
Dacă prin toate punctele dreptei AB, duc perpendiculare la planul P, toate aceste perpendiculare formează un plan Q perpendicular pe planul P, şi una din aceste perpendiculare, anume acea care întâlneşte pe CD, este dreapta căutată. Dacă, prin toate punctele dreptei CD, duc perpendiculare la planul P, toate aceste perpendiculare formează un plan R perpendicular pe planul P, şi una din aceste perpendiculare, anume acea care întălneşte pe AB, este dreapta căutată.

Aşa dar, dreapta căutată este conţinută în planurile Q şi R, prin urmare este intersecţiunea lor, MN.



364. Altfel.—Să ducem un plan U perpendicular pe AB şi un plan V perpendicular pe CD; intersecţiunea XY a acestor doă planurĭ are o direcţiune perpendiculară pe ambele drepte AB şi CD; prin urmare perpendiculara comună este paralelă cu XY: am determinat astfel direcţiunea drepteĭ căutate. Acum duc prin AB planul Q paralel cu XY şi prin CD planul R paralel tot cu XY; intersecţiunea MN a planurilor Q şi R întîlneşte ambele drepte AB şi CD, este perpendiculară pe fiecare din ele, fiind că'ĭ paralelă cu XY; MN este dar dreapta căutată.

365. **Cea maĭ scurtă distanţă între doă drepte.**—Fie AB, CD doă drepte în spaţiŭ. Determin cum am arătat dineoarea perpendiculara comună MN. Ḑic că aceasta este maĭ scurtă de căt orĭ-care altă dreaptă ce uneşte doă puncte oare-care situate respectiv pe cele doă drepte. In adevĕr, să luăm un punct E de pe CD şi un



punct H de pe AB; unesc E cu H și prin E duc perpendiculara EF la planul P; dreptele EF și MN sînt egale ca paralele cuprinse între paralele. Insă dreapta EH este o oblică la planul P, prin urmare este maĭ lungă de căt EF.

366. *Observațiune.*—Dacă s'ar cere numaĭ lungimea celeĭ maĭ scurte distanțe dintre doă drepte, atuncĭ este de ajuns a se duce prin fie-care dreaptă, un plan paralel cu ceialaltă dreaptă și a lua apoĭ distanța între aceste doă planurĭ.

367. **Exercițiĭ.**—*1. Doă planurĭ perpendiculare pe un al treilea și carĭ trec prin doă liniĭ drepte paralele, sînt paralele.* Fie AB, CD, doă drepte paralele; din A și C ducem perpendicularele A*a* și C*c* pe un plan P; planurile *a*AB, *c*CD sînt perpendiculare pe planul P; aceste planurĭ sînt și paralele între ele fiind-că unghiurile *a*AD și *c*CD aŭ laturile lor paralele una cu alta.

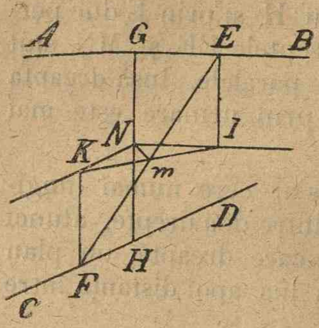
Din aceasta rezultă că proecțiunile pe un plan a doă drepte paralele sînt paralele.

2. *Dacă o linie dreaptă este perpendiculară pe un plan, proecțiunea eĭ pe un alt plan oare-care, este perpendiculară pe intersecțiunea celor doă planurĭ.*

Pentru că linia dreaptă și proecțiunea eĭ, formează un plan perpendicular pe ambele planurĭ, prin urmare și pe intersecțiunea lor.

3. *O dreaptă de lungime constantă este supusă a se rezema cu extremitățile eĭ pe doă liniĭ drepte dreptunghiulare ne-situate în un acelașĭ plan; se cere locul geometric a mijlocului drepteĭ de lungime constantă.*

Fie AB, CD dreptele dreptunghiulare date; EF dreapta de lungime constantă. Ducem GH, perpendiculară comună la AB, CD. Prin N, mijlocul drepteĭ GH, duc NI paralelă cu AB și NK paralelă cu CD; planul INK taie EF în mijlocul eĭ *m* ceia ce se poate vide, ducăndu-se perpendicularele EI și FK pe planul INK ceia ce formează triunghiurile IE*m* și FK*m*.



Din aceasta se conchide că locul geometric este acelaşi ca a mijloculuĭ drepteĭ IK care se razimă pe laturile NI şi NK ale unghiuluĭ drept INK. Lungimea IK este constantă căcĭ Im d. e. este laturea a treia a triunghiuluĭ dreptunghic EIm a căruĭ laturĭ mE şi IE sînt constante ; apoĭ Im=Km. *Mijlocul latureĭ căutate* IK *este o circumferenţă, căcĭ Nm* este egală cu jumătatea din IK adică este constantă.

4. *Se cere locul geometric al punctelor egal depărtate de doă planurĭ carĭ se taie.*

Acest loc geometric se compune din planurile bisectoare a celor patru diedre formate de cele doă planurĭ.

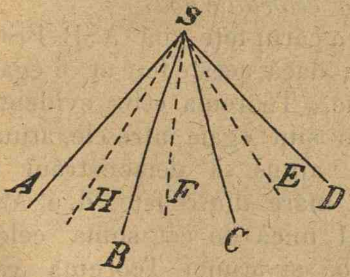
5. *O linie dreaptă este de o potrivă inclinată pe doă planurĭ cari se taie, atuncĭ când punctele eĭ de întâlnire cu planurile sînt egal depărtate de intersecţiunea planurilor.* Demostraţiunea este uşoară, făcându-se figura.

Reciproca este adevărată, numaĭ căt dreapta dată să nu fie paralelă cu planurile date.

CAPITULUL IV

UNGHIURĬ TRIEDRI ȘI UNGHIURI POLIEDRI

368. **Definițiunĭ**.—Se numește *unghiu poliedru* figura formată de maĭ multe planurĭ carĭ trec prin un punct fix și se termină la intersecțiunile lor. Figura alăturată compusă din planurile: ASB, BSC, CSD, DSE, ESE, FSH, HSA care se taie consecutiv în: SA, SB, SC, SD, SE, SF, SH, este un *unghiu poliedru*.



Punctul S comun planurilor, este *vîrful* unghiuluĭ poliedru: dreptele SA, SB., sunt *crestele* și unghiurile SAB, BSC,.. formate de doă creste consecutive, sînt *fețele* unghiuluĭ poliedru.

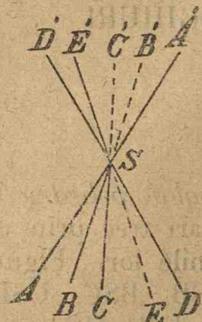
369. Cănd unghiul poliedru are numaĭ treĭ fețe, și prin urmare treĭ creste, atuncĭ avem un unghiu *triedru*.

Un unghiu triedru este *dreptunghic* cănd are un diedru drept, este *bi-dreptunghic* cănd are doă diedre drepte, și *tri-dreptunghic* dacă tustrele diedrele sînt drepte.

370. Un unghiu poliedru este numit *convex* atuncĭ cănd prelungindu-se în toate direcțiunile una oare-care din fețele luĭ, el rămăne de o aceiașĭ parte a fețeĭ. In cazul contrar unghlul poliedru este *concav*.

Un plan care întălnește toate crestele unuĭ unghiu poliedru convex de o aceiaşĭ parte a vîrfuluĭ, taie suprafaţa unghiuluĭ poliedru în un poligon convex.

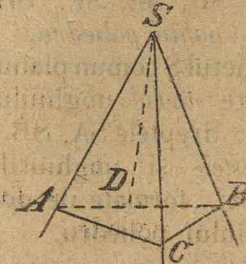
371. Doă unghiurĭ poliedre SABCDE şi S'A'B'C'D'E' sînt *opuse la vîrf* atuncĭ cănd crestele unuia sînt în prelungirea crestelor celuialalt.



Vom vide maĭ la vale că doă unghiurĭ poliedre opuse la vărf aŭ feţele egale şi diedrele lor egale unul cu altul, însă în general nu se pot suprapune.

372. TEOREMA.—*In un triedru, una din feţe este maĭ mică de cât suma celorlalte doă.*

Fie SABC un triedru, a căruĭ feţe sînt ASB, BSC, şi CSA ; dacă aceste feţe ar fi egale între ele, Teorema este evidentă. Dacă nu sînt egale între ele, atuncĭ este de ajuns să demonstrăm ca cea maĭ mare dintre feţe, d. e. ASB este maĭ mică de căt suma celorlalte doă şi atuncĭ Teorema este demonstrată.



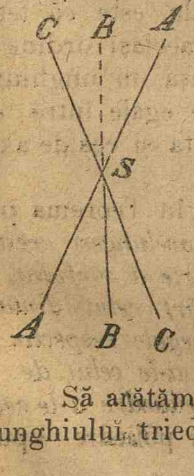
Fac în planul ASB, unghiul BSD egal cu faţa BSC : laturea SD vine în interiorul unghiuluĭ ASB, căcĭ prin ipoteză, acesta este maĭ mare de căt BSC. Tot în planul ASB duc o dreaptă care să taie liniile SA, SD, SB, de o aceiaşĭ parte a punctuluĭ S ; fie A, D, B punctele de intersecţiune respective. Pe creasta SC ieŭ lungimea SC egală cu SD şi apoĭ duc un plan prin C şi dreapta AB ; acest plan taie feţele ASC şi BSC a-le unghiuluĭ triedru în dreptele AC şi BC.

Triunghiurile BSC şi BSD sînt egale, fiind-că aŭ un unghiu egal cuprins între doă laturĭ egale una cu alta: prin urmare şi celelalte doă laturĭ BC şi BD sînt egale între ele. Aşa fiind videm că porţiunea AD, care este egală cu diferenţa între laturile AB şi BC a-le triunghiuluĭ ABC, este maĭ mică de căt laturea a treia a aceluiaşĭ triunghiŭ; atuncĭ triunghiurile ASD şi ASC aŭ doă laturĭ egale una cu alta şi laturile al treilea AD şi AC neegale între ele, prin urmare unghiul ASD este maĭ mic de căt unghiul ASC avem dar:

$$ungh.ASD + ungh.DBS < ungh.ASC + ungh.BSC,$$

saŭ, $ungh.ASB < ungh.\ ASC + ungh.\ BSC.$

373. TEORMEA.—*Dacă se prelungesc crestele unuĭ unghiu triedru de ceialaltă parte a vîrfuluĭ, se formează unghiul triedru opus la vîrf celuĭ dintăĭ; feţele unghiuluĭ triedru al doilea sînt respectiv egale cu feţele celuĭ dintăĭ şi unghiurile diedre a-le celuĭ de al doilea sînt egale respectiv cu unghiurile diedre a-le celuĭ dintăĭ; adica aceste doă unghiurĭ triedre aŭ aceleaşĭ elemente; însă nu se pot suprapune de căt numaĭ cand unul din unghiurile triedri are doă feţe egale între ele.*



Fie SABC, SA′B′C′ doă unghiurĭ triedri opuse la vîrf. Feţele ASC şi A′SC′ sînt egale ca opuse la vîrf, de asemene feţele ASB şi BSC sînt egale respectiv cu feţele A′SB′ şi B′SC′ iarăşĭ ca opuse la vărf. Apoĭ, diedrul BSAC este egal cu diedrul B′SA′C′ pentru că sînt opuse la creastă de asemene diedrele ASCB şi ASBC sînt egale respectiv cu diedrele A′SC′B′ şi A′SB′C′ tot ca opuse la creastă.

Să arătăm acum că numaĭ dacă doă din feţele unghiuluĭ triedru SABC sînt egale între ele, atuncĭ cele doă unghiurĭ triedri opuse la vîrf se pot suprapune. Fie fețele ASC și BSC egale între ele; pun diedrul A′SC′B′ peste diedrul ASCB așa ca creasta SC′ să vină peste SC și planul SC′B′ pe planul SCA; aceste doă unghiurĭ diedre coincid fiind-că sînt egale între ele. După aceasta, observ că unghiurile B′SC′ și ASC sînt egale între ele fiind că amăndoă sînt egale cu unghiul BSC, atuncĭ rezultă că creasta SB′ ie direcțiunea SB; planul A′SB′ coincide prin urmare cu planul ASB. Videm că cele doă unghiurĭ triedre sînt egale.

Dacă acum am presupune, că unghiul triedru SABC n'are doă fețe egale între ele, atuncĭ suprapuind iarășĭ unghiurile diedre ASCB și A′SC′B′, videm că creasta SB′ nu ie direcțiunea SA, fiind-că unghiurile B′SC′ și ASC nu sînt egale între ele; de asemene SA′ nu maĭ vine peste SB, așa în căt planul A′SB′ nu coincide cu planul ASB. Cele doă unghiurĭ triedri nu sînt egale.

374. *Observațiunea I.*—Cauza, pentru care nu putem face să coincidă doă unghiurĭ triedri, în caz când unul din ele n'are doă fețe egale, este că fețele întăiuluĭ unghiŭ triedru, nu sînt în aceiașĭ ordine ca fețele din celalalt unghiu triedru. Așa, în unghiurile triedri precedente, se vede că fețele egale între ele, ASC și A′SC′ sînt, cea întăĭ la dreapta și cea de a doa la stănga crestei CC′.

375. *Observațiunea II.*—Tot ca în Teorema precedentă se va demonstra că *dacă se prelungesc crestele unuĭ unghiu poliedru de ceialaltă parte a vîrfuluĭ, se formează unghiul poliedru opus la vîrf celuĭ dintăĭ; fețele unghiuluĭ poliedru al doilea sînt egale respectiv cu fețele celuĭ dintăĭ, și unghiurile diedre a-le celuĭ de al doilea sînt egale respectiv cu unghiurile diedre a-le celuĭ dintăĭ.* In general însă, doă unghiurĭ poliedre opuse

la vîrf nu se pot suprapune fiind-că fețele lor nu sînt dispuse în aceiaşĭ ordine

Aceste proprietățĭ a-le unghiurilor poliedre opuse la vîrf, sînt cuprinse în un singur cuvănt şi anume se ḑice că sînt *simetrice.*

376. TEOREMA.— *Dacă un unghiu triedru are doă fețe egale între ele, atuncĭ și unghiurile diedre opuse acestor fețe sînt egale între ele,* şi reciproc.

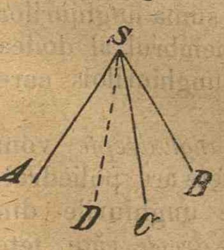
Fie SABC un unghiu triedru cu fețele CSA şi CSB egale între ele, (figura din urmă) Prelungesc crestele de ceialaltă parte a vîrfuluĭ S şi formez unghiul triedru SA'B'C' opus la vîrf celuĭ dintăĭ. Aceste doă unghiurĭ triedre opuse la vîrf sînt egale după cum am văzut maĭ sus; de unde rezultă că unghiurile diedre SB şi SA' sînt egale între ele: însă unghiul diedru SA' este egal cu unghiul diedru SA ca opuse la creastă: aşa dar unghiurile diedre SB şi SA, opuse fețelor egale CSA şi CSB din unghiul triedru SABC, sînt egale între ele.

Reciproca Teoremeĭ se demonstrează prin un raționament analog.

377. **Corolar.**—*Dacă cele treĭ fețe a-le unuĭ unghiu triedru sînt egale între ele, și cele treĭ unghiurĭ diedre sînt egale între ele și reciproc.*

378. TEOREMA.—*In orĭ-ce unghiu triedru, la un unghiu diedru maĭ mare se opune o față maĭ mare.*

Fie unghiul triedru SABC, în care să presupunem că unghiul diedru SB este maĭ mare de căt unghiul diedru SA. Prin creasta SB şi în unghiul diedru SB, ducem un plan BSD care să facă cu planul BSA un unghiu diedru egal cu diedrul SA. Unghiul triedru SABD avînd doă unghiurĭ diedre egale între ele,



feţele opuse lor, BSD şi ASD sînt egale între ele. Insă unghiul triedru SCBD dă:

$$\text{ungh.}\,CSB < \text{ungh.}\,CSD + \text{ungh.}\,BSD,$$

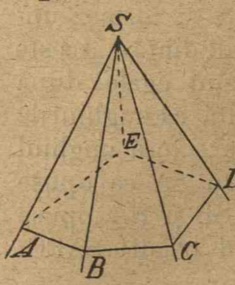
vom ave dar, înlocuind faţa BSD prin egala sa DSA,

$$\text{ungh.}\,CSB < \text{ungh.}\,CSD + \text{ungh.}\,DSA,$$

saŭ

$$\text{ungh.}\,CSB < \text{ungh.}\,CSA.$$

379. TEOREMA.—*In orĭ-ce unghiu poliedru convex, suma feţelor este maĭ mică de căt patru unghiuri drepte.*



Fie SABCDE un unghiu poliedru şi pe ABCDE poligonul convex căpătat prin tăierea unghiuluĭ poliedru cu un plan. Considerăm toate unghiurile triedre a căror vîrfurĭ sînt A, B, C, D, E şi aplicăm la fie-care Teorema de la §. 372 şi avem neegalităţile:

$$EAB < EAS + BAS,$$
$$ABC < ABS + CBS,$$
$$BCD < BCS + DCS$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

adunănd toate aceste neegalităţĭ membru cu membru avem neegalitatea

$$EAB + ABC + BCD + \ldots < EAS + BAS + ABS + CBS + BCS + DCS + \ldots,$$

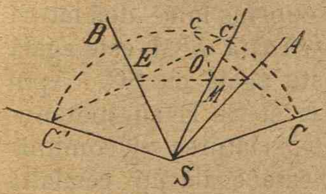
în care videm că membrul întăĭ este suma unghiurilor interioare poligonuluĭ ABCDE, şi membrul al doilea este suma unghiurilor de la baza triunghiurilor care toate aŭ acelaşĭ vîrf S.

Dacă la suma întăĭ adunăm *4 ungh.drepte* vom ave de atătea orĭ *2 ungh. drepte* căte feţe are poliedrul, şi dacă la suma a doa adunăm toate unghiurile din S avem iarăşĭ de atăt ea-orĭ *2 ungh.drepte* căte feţe are poliedrul, adică avem egalitatea:

$$EAB+ABC+BCD+...+4\ ungh.drepte=$$
$$EAS+BAS+ABS+CBS+...+unghiurile\ din\ S;$$

Insă suma întăĭ fiind maĭ mică de căt a doa, pentru ca egalitatea aceasta să aibă loc, trebue ca *4 ungh. drepte* să fie maĭ mare de căt unghiurile din S: ceia ce era de arătat.

380. *Observațiune*. Din Teoremele de la §§. 372 379 rezultă că pentru a forma un unghiu triedru cu treĭ fețe date, trebue ca cea maĭ mare din fețe să fie maĭ mică de căt suma celorlalte doă, şi ca sûma celor treĭ fețe să fie maĭ mică de căt patru unghiurĭ drepte.



Avem să arătăm că aceste doă condițiunĭ fiind îndeplinite, ele sunt *suficiente* pentru existența triedruluĭ.

Fie ASB cea maĭ mare față şi ASC, BSC′ celelalte doă fețe culcate pe planul fețeĭ ASB, de o parte şi de alta a acesteĭ fețe; SC şi SC′ provin din desdoirea cresteĭ SC a unghiuluĭ triedru.

Descriŭ din punctul S ca centru, cu o radă oarecare, un arc de cerc CC′: acest arc va fi maĭ mic de căt o circumferență fiind-că suma celor treĭ fețe date este maĭ mică de căt patru unghiurĭ drepte. Duc perpendicularele Cc şi C′c′ pe crestele SA şi SB; arcurile AC şi Ac sînt egale între ele, precum şi arcurile BC′ şi Bc′; prin urmare, relațiunea

$$arcAB<arcAC+arcBC'$$

care exprimă că fața cea maĭ mare ASB este maĭ mică de căt suma celorlalte doă fețe, se poate scri

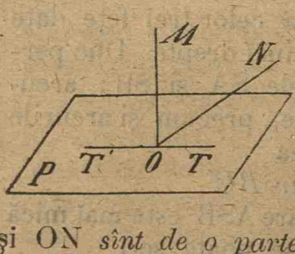
$$arcAB<arcAc+arcBc'.$$

Această relaţiune arată că punctul c vine între punctele B şi c′ şi că punctul c′ vine între c şi A;

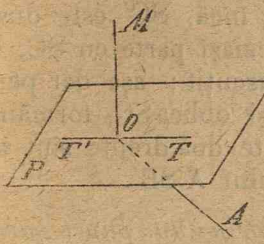
prin urmare, cele doă coarde Cc şi C′c′ se încrucişază în un punct O în interiorul cercului CC′.

Aşa fiind, rădic în O perpendiculara OM pe planul ASB, şi în planul DOM din punctul D ca centru cu DC ca rază, descriŭ un arc de cerc, care arc va întîlni de sigur perpendiculara OM, fiindcă DO este maĭ mică de cât DC. Fie M acest punct de întîlnire pe care să'l unim cu S: unghiul triedru SABM este format de cele treĭ feţe date. In adevĕr, ducem MD şi ME; aceste drepte sînt respectiv perpendiculare pe SA şi SB, în virtutea Teoremeĭ celor treĭ perpendiculare; atuncĭ triunghiurile SDM şi SDC sînt egale între ele ca avănd un unghiu drept cuprins între doă laturĭ egale una cu alta: rezultă dar că faţa ASM este egală cu faţa dată ASC, şi că SM este egală cu SC. Apoĭ triunghiurile dreptunghice SME şi SC′E aŭ ipotenuzile lor SM şi SC′ egale între ele, şi laturea SE comună, de unde rezultă că faţa MSB este egală cu ceialaltă faţă dată BSC′.

381. **Definiţiune.**—Prin un punct O al unuĭ plan P să ducem perpendiculara OM la plan, şi o oblică ON. Dacă dreptele OM şi ON *sînt de o aceiaşĭ parte* a planuluĭ P, atuncĭ unghiul MON, format de aceste drepte este *ascuţit*, fiind că'ĭ cuprins în unul din unghiurile drepte MOT saŭ MOT′ formate de OM cu intersecţiunea TOT′ a planuluĭ MON cu planul P.

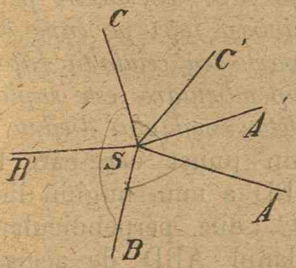


Dacă cele doă drepte OM şi ON *sînt de o parte şi de alta* a planuluĭ P, atuncĭ unghiul MON este *obtuz* fiind-că în el se va afla unul din unghiurile drepte MOT saŭ MOT′. Şi reciproc, după cum unghiul MON este ascuţit saŭ obtuz, se



poate afirma că perpendiculara OM şi oblica ON sînt de aceiaşĭ parte a planuluĭ P, saŭ de o parte şi de alta.

Astfel fiind, numim *unghiu triedru suplementar* unuĭ unghiu triedru dat SABC, un alt unghiu triedru SA′B′C′, format în modul următor:



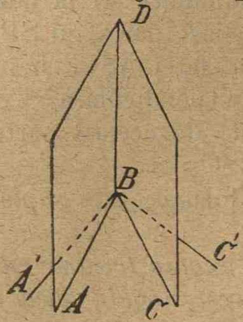
Prin vîrful S, duc perpendiculara SC′ la faţa ASB de aceiaşĭ parte cu SC în privirea planuluĭ acesteĭ feţe; duc perpendiculara SB′ la faţa ASC de aceiaşĭ parte cu SB, în privirea feţeĭ ASC, şi în fine duc perpendiculara SA′ la faţa BSC de aceiaşĭ parte cu SA în privirea planuluĭ feţeĭ BSC.

Unghiul triedru SA′B′C′ astfel format, este *suplementar* unghiuluĭ triedru SABC.

382. TEOREMA.— *Dacă un unghiu triedru este suplementar unuĭ triedru dat, şi acest unghiŭ triedru dat va fi suplementar celuialalt.*

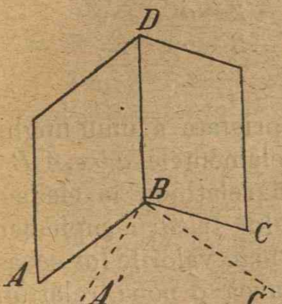
Fie SA′B′C′ un unghiu triedru suplementar unghiuluĭ triedru SABC; zic că şi SABC este un unghiŭ triedru suplementar luĭ SA′B′C′. Pentru a demonstra aceasta este de ajuns a arăta că SABC rezultă din SA′B′C′, aşa precum acesta a rezultat din întăiul: saŭ, cu alte cuvinte că creasta SC d. e. este perpendiculară pe faţa A′SB′ şi de aceiaşĭ parte cu SC′ în privirea planuluĭ acesteĭ feţe. Prin ipoteză, SA este perpendiculară pe planul CSB şi prin urmare şi pe SC: de asemene SB′ este perpendiculară pe planul ASC şi prin urmare şi pe SC; aşa dar SC este perpendiculară pe planul A'SB'. Maĭ mult încă, SC' este dusă perpendicularminte la ASB de aceiaşĭ parte cu SC, şi prin urmare unghiul CSC' este ascuţit; aşa dar perpendiculara SC la planul A'SB' şi oblica SC, formănd între ele un unghiŭ ascuţit, aceste doă drepte sînt aşeḑate de o aceiaşĭ parte a planuluĭ A'SB'.

383. TEOREMĂ.— *Dacă, prin un punct oarecare al cresteĭ unuĭ unghiŭ diedru, se râdică perpendiculare pe feţele sale, astfel ca fie-care din aceste perpendiculare să se găsască în privirea feţeĭ pe care ea este perpendiculară, de aceiaşĭ parte cu ceialaltă faţă, unghiul format de cele doă perpendiculare este suplementul unghiuluĭ plan corespunḑetor unghiuluĭ diedru.*



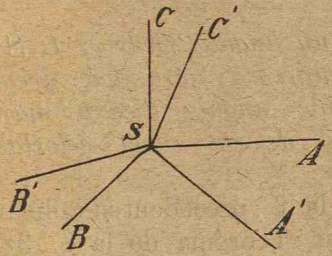
Din un punct oare-care B al cresteĭ BD a unuĭ unghiŭ diedru ABDC, duc perpendiculara BC' pe planul ABD de aceiaşĭ parte cu faţa CBD, şi perpendiculara BA' pe planul CBD de aceiaşĭ parte cu faţa ABD. Planul acestor doă drepte taie feţele unghiuluĭ diedru în BA şi BC ambele perpendiculare pe creasta BD şi atuncĭ unghiul ABC este unghiul plan corespunḑetor unghiuluĭ diedru dat; ḑic că unghiul A'BC' este suplementul unghiuluĭ ABC.

In adevăr, dreapta BC' perpendiculară pe planul ABD este prin urmare perpendiculară şi pe dreapta BA care trece prin piciorul eĭ în acest plan; pentru acelaşĭ cuvînt, dreapta BA este şi ea perpendiculară la dreapta BC'; prin urmare unghiurile ABC şi A'B'C' aŭ laturile lor perpendiculare una pe alta. Acum, dacă unghiul ABC este ascuţit ca în figura precedentă, atuncĭ unghiu A'BC' cuprinde în el unghiul



drept A'BC şi, prin urmare este obtuz ; dacă unghiul ABC este obtuz, ca în figura alăturată, atuncĭ unghiul A'BC' este cuprins în unghiul drept ABC', şi prin urmare este ascuţit. Aşa dar în amăndoă cazurile unghiul A'BC' este suplementul unghiuluĭ ABC.

384. TEOREMA. — *Dacă considerăm doă triedre suplementare, fie-care unghiŭ diedru al unuia din aceste unghiurĭ triedre este suplementul feţeĭ opuse în celalalt.*



Fie SABC, şi SA'B'C' doă unghiurĭ triedre suplementare, şi să considerăm d. e. unghiul dĭedru SC. Dreapta SB' este perpendiculară la faţa CSA a acestuĭ unghiŭ diedru şi de aceiaşĭ parte cu SB, şi prin urmare de aceiaşĭ parte cu faţa CSB a diedruluĭ considerat ; de asemene, SA' este o perpendiculară la faţa CSA a diedruluĭ în spre faţa CSA ; aşa dar unghiul A'SB' este suplementul unghiuluĭ care măsoară diedrul SC, saŭ maĭ pe scurt, este suplementul a însuşĭ diedruluĭ SC.

Tot astfel vom procede şi cu celelalte doă diedre SA şi SB.

385. *Observaţiune.*—Să însemnăm prin a, b, c, numeriĭ carĭ măsoară feţele şi prin A,B,C numeriĭ carĭ măsoară unghiurile diedre a-le unuĭ unghiŭ triedru, unitatea de unghiŭ fiind unghiul drept. Numeriĭ a',b',c' cari vor măsura feţele, şi A',B'C', cari vor măsura unghiurile diedre a-le unghiuluĭ triedru suplementcr, vor fi daţĭ de formulele

$$a'=2-A,\qquad A'=2-a$$
$$b'=2-B,\qquad B'=2-b$$
$$c'=2-C,\qquad C'=2-c.$$

Dacă cunoaştem vre-o proprietate a unuĭ unghiŭ triedru, adică o relaţiune între elementele a,b,c,A,B,C a acesteĭ figurĭ, aplicănd această relaţiune la elementele a',b',c',A',B',C', a-le unghiuluĭ triedru suplementar şi înlocuind aceste elemente prin valorile lor scoase din formulele precedente, vom avea o nouă relaţiune între a,b,c,AB,C, adică o nouă proprietate a unghiuluĭ triedru primitiv precum, aceasta se poate vide din Teorema următoare:

386. TEOREMA.—*In un unghiu triedru: 1. Suma unghiurilor diedre este cuprinsă între doă drepte şi şese drepte; 2. cel maĭ mic unghiu diedru mărit cu doă drepte, este maĭ mare de cât suma celorlalte doă unghiurĭ diedre.*

1. Luăm notaţiunile de la § precedent şi aplicăm unghiuluĭ triedru suplementar Teorema de la §. 381 ceia ce dă:

$$o<a'+b'+c'<4,$$

în care, înlocuim a',b',c', prin valorile date de formulele de maĭ sus şi avem:

$$o<2-A+2-B+2-C<4,$$

saŭ

$$2<A+B+C<6.$$

2. Aplicăm iară unghiuluĭ triedru suplementar Teorema de la § 374 şi avem:

$$a'<b'+c',$$

în care făcănd aceiaşĭ înlocuire ca maĭ sus ni vine:

$$2-A<3-B+2-C, \text{ saŭ } A+2>B+C.$$

387. TEOREMA.—*Doă unghiurĭ triedre sînt egale în patru cazurĭ şi anume:*

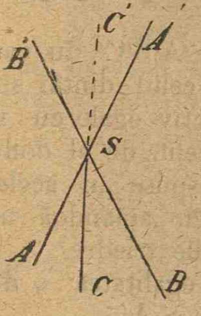
1. Când aŭ o faţă egală adiacentă la doă unghiurĭ diedre egale unul cu altul şi dispuse în acelaşĭ mod.

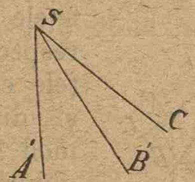
2. Când aŭ un unghiu diedru egal cuprins între doă feţe egale una cu alta şi dispuse în acelaşĭ mod.

3. Când aŭ feţele lor egale una cu alta şi dispuse în acelaşĭ mod.

4. Când aŭ unghiurile lor diedre egale unul cu altul şi dispuse în acelaşĭ mod

1. Fie unghiurile triedre SABC şi S′A′B′C′ în cari avem: faţa ASB egală cu faţa A′S′B′ unghiul diedru SA egal cu unghiul diedru S′A′ şi unghiul diedru SB egâl cu unghiul diedru S′B′. Maĭ presupun că dispoziţiunea elementelor este aceiaşĭ în amândoă unghiurile triedre, adică un observator cu capul în S, cu dosul rezemat pe faţa ASB şi privind creasta SC, are la stânga luĭ creasta SA şi la dreapta luĭ creasta SB; un alt observator cu capul în S′ cu dosul rezemat pe faţa A′S′B′ şi privind creasta S′C′ să aibă la stînga luĭ creasta S′A′ şi la dreapta luĭ creasta S′B′.





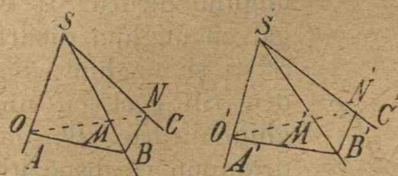
Ḑic că aceste doă unghiurĭ triedre sînt egale, adică se pot suprapune. In adevĕr, aşez faţa A′S′B′ peste egala sa ASB aşa ca S′A′ să coincidă cu SA şi S′B′ cu SB, creasta S′C′ vine în raport cu planul ASB, de aceiaşĭ parte cu SC, căcĭ altfel dispoziţiunea elementelor nu ar fi aceiaşĭ în cele doă unghiurĭ triedre. Cu chipul acesta, diedrele SA şi

S'A' fiind egale, planul A'S'C' se cplică pe planul ASC; de asemene diedrele SB şi S'B' fiind egale, planul B'S'C' se aplică pe planul BSC; prin urmare crestele S'C' şi SC se confundă şi cele doă unghiurĭ triedre coincid.

2. Cazul al doilea este *corelativ* cazuluĭ întăĭ, căcĭ unghiurile triedre suplementare celor date, aŭ o faţă egală adiacentă la doă unghiurĭ diedre respectiv egale şi dispuse în mod asemene; ele dar se pot suprapune şi prin urmare şi unghiurile triedre date se pot suprapune.

Demonstraţiunea directă nu întămpină nicĭ o dificultate.

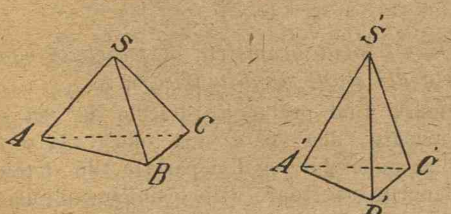
3. Unghiurile triedre SABC şi S'A'B'C', în care feţele celuĭ dintăĭ sînt respectiv egale cu feţele celuĭ de al doilea şi dispuse în acelaşĭ mod în amândoă unghiurile triedre.



Va fi de ajuns să demonstrăm egalitatea a doă unghiurĭ diedre analoage, d. e. SA şi S'A'.

Să presupunem maĭ întăĭ că feţele ASB, ASC, carĭ cuprind diedrul SA, sînt doă unghiurĭ ascuţite. In un punct oare-care O de pe creasta SA să formăm unghiul plan corespunḑĕtor unghiuluĭ diedru SA; adică, în punctul O ducem perpendicularele OM şi ON pe SA aşeḑate respectiv în planurile ASB şi ASC: unghiurile ASB şi ASC fiind ascuţite, aceste perpendiculare aŭ să întîlnească crestele SB şi SC în doă puncte M, N de aceiaşĭ parte cu punctul O în privirea punctuluĭ S; unim M cu N. In unghiul triedru S'A'B'C', luăm pe creasta S'A' lungimea S'O' egală cu SO şi apoĭ în punctul O' formăm unghiul plan M'O'N' corespunḑetor unghiuluĭ diedru S′A′. Să arătam că unghiurile plane MON şi M′O′N′ sînt egale între ele. Triunghiurile dreptunghice SOM şi S′O′M′ sînt egale între ele fiind-că aŭ SO egală cu S′O′ şi unghiul OSM egal cu unghiul O′S′M′; tot asemene triunghiurile SON şi S′O′N′ sînt egale între ele; prin urmere triunghiurile SMN şi S′M′N′ aŭ un unghiŭ egal cuprins între doă laturĭ egale una cu alta; în fine triunghiurile OMN şi O′M′N′ sînt egale fiind că 'şĭ aŭ tustrele laturele lor egale una cu alta. Din egalitatea acestor doă triungiurĭ din urmă, rezultă egalitatea unghiurilor MON, M′O′N′.

Să presupunem acum, că feţele ASB şi ASC cari cuprind diedrul SA nu sînt numaĭ de cât ascuţite, ci sînt nişte unghiurĭ oare-care.



Cu începere de la vîrfurile S şi S′ şi pe crestele celor doă unghiurĭ triedre, luăm şese lungimĭ egale între ele: SA=SB=SC=S′A′=S′B′=S′C′. Se formează şese triunghiurĭ isoscele egale doă câte doă şi anume ASB egal cu A′S′B′, BSC egal cu B′S′C′ şi ASC egal cu A′S′C′, pentru că aŭ câte un unghiŭ egal cuprins între doă laturĭ egale una cu alta; prin urmare triunghiurile ABC şi A′B′C′ sînt egale între ele avănd câtetrele laturile egale una cu alta. Aşa fiind, considerăm unghiurile triedre a căror vîrfurĭ sînt A şi A′; aceste aŭ feţele lor respectiv egale una cu alta şi unghiurile SAB şi SAC, cari cuprind diedrul AS, sînt ascuţite fiind-că sînt unghiurĭ la bază de triunghiurĭ isoscele; prin urmare, în virtutea demonstraţiuneĭ precedente, diedrul AS este egal cu diedrul A′S′.

4. Cazul al patrulea este *corelativ* cazuluĭ al treilea, căcĭ unghiurile triedre suplementare celor date, aŭ fețele lor respectiv egale între ele şi dispuse în mod asemene ; ele dar se pot suprapune şi prin urmare unghiurile triedre date se pot suprapune.

388. *Observațiune.* Observăm că este analogie între proprietăţile unghiuluĭ triedru și proprietăţile triunghiuluĭ plan: fețele triedruluĭ corespund cu laturile triunghiuluĭ şi diedrele triedruluĭ la unghiurile triunghiuluĭ. Insă nu putem ḑice că, dacă la o proprietate de-a triunghiurilor corespunde o proprietate de a triedrelor: reciproca este adevĕrată căcĭ d. e. din egalitatea diedrelor a doă triedre rezultă egalitatea fețelor lor una cu alta, pe când din egalitatea unghiurilor a doă triunghiurĭ nu rezultă de cât proporţionalitatea laturilor.

389. **Exerciţiĭ**—*Care'ĭ locul geometric al punctelor egal depărtate de cele treĭ fețe ale unuĭ unghiu triedru?*

Fețele unghiuluĭ triedru fiind prelungite dincolo de vîrf, se formează opt unghiurĭ triedre, doă câte doă opuse la vîrf. Ştiind că locul geometric al punctelor egal depărtate de fețele unuĭ unghiŭ diedru, sînt planurile bisectoare a diedruluĭ şi suplimentuluĭ seŭ, urmează că locul geometric al punctelor egal depărtate de fețele unghiuluĭ triedru se va compune din patru drepte, care reprezintă intersecţiunile planurilor bisectoare a-le diedrelor triedruluĭ.

2. *Care'ĭ locul geometric al punctelor din spațiŭ egal depărtate de doă drepte care se taie?*

Proecţiunile tutoror acelor puncte sînt bisectoarele unghiurilor formate de cele doă drepte; prin urmare locul geometric cerut se compune din doă planurĭ perpendiculare pe planul dreptelor date şi duse prin bisectoarele celor doă drepte. Aceste doă planurĭ sînt perpendiculare unul pe altul.

3. *Care'ĭ locul geometric al punctelor egal depărtate de cele treĭ creste ale unuĭ unghiŭ triedru dat?*

Cu ajutorul problemeĭ precedente se gaseşte că locul geometric căutat se compune din patru liniĭ drepte.

4. Planurile, duse perpendicular pe fețele unuĭ unghiŭ triedru prin crestele opuse fețelor, trec prin o aceiașĭ dreptă.

Fie SABC triedrul dat ; *Sa*, *Sb* urmele a doă din planurĭ pe BSC și ASC. Din D de pe SC duc perpendicularele D*a*E și D*b*F pe S*a* și S*b*. Triunghiul DEF are ca înălțimĭ pe F*a* și E*b*; și prin urmare D*e*, dusă prin punctul O de întîlnire a dreptelor F*a* și E*b*, este a treia înălțime.

Este ușor de vădut apoĭ că CS*c* este perpendicular pe fața ASB ; din aceste videm că planurile în chestiune trec prin dreapta SO.

5. Planurile duse prin fie-care din crestele unuĭ unghiŭ triedru și bisectoara fețeĭ opusă cresteĭ, trec prin o aceeașĭ dreaptă.

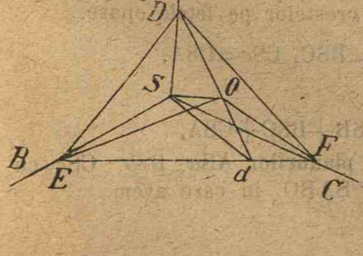
Luăm SA=SB=SC ; avem triunghiul ABC a căruĭ laturĭ întîlnesc bisectoarele în chestiune în M, N, P ; punctul M este mijlocul latureĭ BC căcĭ SM este bisectoarea unghiuluĭ de la vîrf al triunghiuluĭ BSC. Cele treĭ planurĭ în chestiune sînt dar SAM, SBN, SCP carĭ videm că trec prin dreapta SO, O fiind punctul de intersecțiune al meridianelor AM, BN, CP.

6. O secțiune făcută în un unghiu triedru dreptunghic, prin un plan perpendicular pe una din creste, este un triunghiu dreptunghic.

Fie SA unghiul dtedru drept al triedruluĭ SABC. Să considerăm un plan perpendicular pe SB d. e., a căruĭ intersecțiunĭ cu fețele ASB, ASC și BSC să fie respectiv DE, EF, FD; DEF este un triunghiŭ în care FD este perpendiculară pe DE, căcĭ FD este intersecțiunea a doă planurĭ anume : DEF și ASC ambele perpendiculare pe ASB.

7. Un unghiu triedru tridreptunghic se taie prin un plan oare-care ; puntcul de întîlnire al înălțimelor triunghiuluĭ de intersecțiune este proecțiunea vîrfuluĭ triedruluĭ pe plan.

Fie DEF triunghiul de intersecțiune. Di S scobor perpendiculara SO pe planul triunghiuluĭ. Planul dreptelor SD, SO care



sînt respectiv perpendiculare pe planurile BSC, DEF, este el însușĭ perpendicular pe intersecțiunea EF a acestor doă planurĭ ; așa dar și DO este perpendiculară pe EF și fie *d* punctul lor de întîlnire. Tot asemene se va vide că ED este perpendiculară pe DF și FO pe DE; prin urmare punctul O, piciorul perpendicularei dusă din S pe plan, este punctul de întîlnire ale celor trei înălțimi a triunghiului.

8. *Dacă se taie un unghiu triedru tridreptunghic prin un plan care întîlnește cele trei creste : 1⁰. triunghiul format pe fie-care din fețe este medie proporțională între proecțiunea lui pe planul secant și secțiunea determinată de acest plan în triedru ; 2⁰. patratul acestei secțiuni este egal cu suma patratelor proecțiunilor ei pe fețele unghiului diedru.*

1. Considerăm figura precedentă. Observ că triunghiurile DEF, SEF și OEF aŭ aceiași bază EF și prin urmare sînt între ele ca înălțimile lor. Mai mult, triunghiul SDd fiind dreptunghic în S și SO perpendiculură la ipotenuza Dd, laturea Sd este medie proporțională între ipotenuză și proecțiunea sa Od pe această linie ; prin urmare triunghiul SEF este și el medie proporțională între triunghlul DEF și proecțiuuea sa OEF pe planul DEF.

2⁰ Din cele precedente conchidem egalitățile următoare :

$$\overline{SFF}^2 = OEF \times DEF, \quad \overline{SDF}^2 = ODF \times DEF,$$
$$\overline{SDE}^2 = ODE \times DEF ;$$

de unde prin adunare căpătăm

$$\overline{SEF}^2 + \overline{SDF}^2 + \overline{SDE}^2 = \overline{DEF}^2.$$

9. *Să se taie un unghiŭ poliedru de patru fețe prin un plan astfel ca secțiunea să fie un paralelogram.*

Fie ABCD paralelogramul cerut ; punctul de intersecțiune O al diagonalelor paralelogramului se află pe intersecțiunea plaplanurilor ASC, BSD. De aici rezultă construcțiunea : prin un punct O al intersecțiunei planurilor diagenale ASC, BSD duc dreptele AC și BD așa ca punctul O să le împartă în părți egale.

10. *Suma unghiurilor formate de crestele unui unghiu triedru cu fețele opuse, este mai mică de cât suma celor trei fețe, și mai mare de cât jumătatea acestei sume.*

Fie Sa, Sb, Sc proecțiunile crestelor pe fețele opuse.

1⁰. Avem $ASa < ASB$, $BSb < BSC$, $CSc < CSA$,

de unde prin adunare găsim

$$ASa + BSb + CSc < ASB + BSC + CSA.$$

2⁰. Fie SO intersecțiunea planurilor ASa, BSb, CSc cu fețele triedrului. Consider triedrul SABO, în care avem

$$ASB < ASO + BSO$$

şi *a fortiori*

$$ASB < ASa + BSb.$$

Tot asemene, stabilim neegalităţile următoare:

$$BSC < ASa + CSc,$$
$$CSA < CSc + ASa;$$

prin adunare şi împărţind prin 2 avem:

$$ASa + BSb + CSc > \frac{ASB + BSC + CSA.}{2}$$

CARTEA VI.

POLIEDRI

CAPITULUL I

PRISMĂ. PARALELIPIPED.

390. **Definițiunĭ.**—Se numeşte *poliedru* un corp terminat în toate părţile prin planurĭ. Poligoanele formate prin intersecţiunile planurilor sînt *fețele* poliedruluĭ. şi toate feţele la un loc constitue *suprafața* poliedruluĭ. Unghiurile poliedre formate de feţele poliedruluĭ, sînt *unghiurile* poliedruluĭ; vîrfurile acestor unghiurĭ sînt *vîrfurile* poliedruluĭ; linia dreaptă care uneşte doă vîrfurĭ nesituate pe o aceiaşĭ faţă este o *diagonala* a poliedruluĭ.

Un poliedru este *convex* când se află cu totul de o aceiaşĭ parte a planuluĭ dus prin una din feţele sale.

Un plan oare-care taie suprafaţa unuĭ poliedru convex în un poligon convex, fiind că acest poligon este cu totul de o aceiaşĭ parte a fie-căreia din dreptele care'l formează. Aşa dar, o linie dreaptă nu poate întîlni un poliedru în maĭ mult de doă puncte.

Când numĕrul fețelor unuĭ poliedru este 4, 5, 6.., poliedru poartă numele de *tetraedru*, *pentaedru*, *hexaedru*....

392. Se numeşte *prismă* un poliedru care are doă fețe egale şi paralele, unite prin paralelograme.

Iată cum se poate construi o prismă: luăm un poligon oare-care ABCDE; prin vîrful A, duc o dreaptă oare-care AA′ nesituată în acelaşĭ plan cu poligonul şi prin celelalte vîrfurĭ duc dreptele BB′, CC′, DD′, EE′ egale şi paralele cu AA′ şĭ de aceiaşĭ parte cu AA′ în privirea planuluĭ ABCDE; în fine ducem dreptele; A′B′, B′C′, C′D′, D′E′, şi E′A′. Toate patrulaterele laterale sînt paralelograme. Rămâne să arătăm că figura A′B′C′D′E′, este un poligon egal cu cel dat şi că laturile luĭ sînt paralele cu laturile poligonuluĭ dat. Maĭ întâĭ

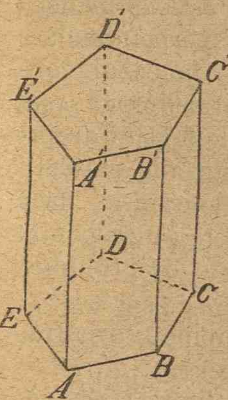


figura A′B′C′D′E′ este plană căcĭ dacă prin punctul A′ duc planul paralel cu planul poligonuluĭ dat, acel plan trece prin B′, C′, D′, E′, pentru că doă planurĭ paralele interceptează lungimĭ egale, pe drepte paralele. Apoĭ poligoanele aŭ laturile lor respectiv egale între ele, ca laturĭ opuse în un paralelogram, şi unghiurile respectiv iarăşĭ egale între ele ca avănd laturile paralele şi de acelaşĭ senz. Avem astfel o prismă.

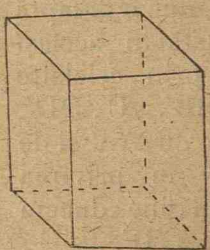
Poligonele egale ABCDE, A′B′C′D′E′ sînt *bazele* prismeĭ; paralelogramele ABB′A′, BCC′B′.... sînt *fețele laterale* a prismeĭ; laturile AA′, BB′ sînt *crestele* laterale a-le prismeĭ.

Distanța între bazele paralele este *înălțimea* prismeĭ.

O prismă este *triunghiulară*, *patrunghiulară*, etc., după cum bazele sînt triunghiurĭ, patrulatere, etc.

O prismă este *dreaptă* saŭ *oblică* după cum fețele laterale sînt perpendiculare saŭ oblice, pe planurile celor doă baze.

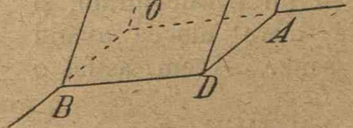
392. Se numeşte *paralelipiped*, o prismă a căreĭ baze sînt paralelograme.



Un paralelipiped este *drept* dacă crestele laterale sînt perpendiculare pe planurile bazelor; în cazul contrar este *oblic*. Un paralelipiped este *dreptunghic* dacă bazele luĭ sînt dreptunghiurĭ. Cele şese fețe a-le paralelipipeduluĭ sînt paralelograme: dacă paralelipipedul este drept, cele patru fețe laterale sînt dreptunghiurĭ; dacă paralelipipedul este dreptunghic, cele şese fețe sînt dreptunghiurĭ.

393. Se numeşte *cub* un paralelipiped dreptunghic a căruĭ cele şese fețe sînt patrate.

394. Pentru a construi un paralelipiped este de ajuns să se cunoască unghiul triedru format de crestele paralelipipeduluĭ care se întîlnesc în uuul din vîrfurĭ, şi lungimile acestor creste. Fie d. e. unghiul triedru OABC şi OA, OB, OC lungimile crestelor, Construim în planul AOB, paralelogramul OADB; apoĭ prin punctele A,D,B ducem dreptele AE, DF, FG paralele şi egale cu OC; se formează prisma OADBGCEF a căreĭ baze sînt paralelogramele OADB şi CEFG, prin urmare această prismă este un paralelipiped.



Pentru a construi un paralelipiped dreptunghic este de ajuns să se cunoască lungimile crestelor; aceste treĭ lungimĭ poartă numele de dimensiunile paralelipipeduluĭ dreptunghic.

Pentru a construi un cub, este de ajuns a cunoaşte lungimea uneia din creste.

395. TEOREMA.—*In un paralelipiped, doă fețe opuse sînt egale și paralele.*

Să considerăm figura de maĭ sus. Bazele OADB şi CEFG sînt egale şi paralele prin definiţiune. Să luăm doă fețe opuse, d. e. ADEF şi OBGC; AD şi OB sînt egale ca laturĭ opuse în paralelogram; DF şi BG sînt iarăşĭ egale între ele pentru acelaşĭ cuvânt; apoĭ unghiurile ADF şi OBG sînt egale între ele pentru că aŭ laturile lor paralele şi îndreptate în aceleaşĭ senzurĭ; prin urmare aceste doă paralelograme aŭ un unghiŭ egal cuprins între doă laturĭ egale una cu alta; aşa dar sînt egale.

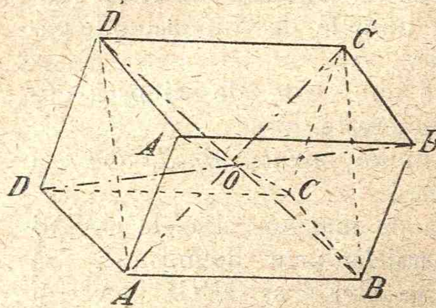
396. *Observațiunea I.* Urmează din Teorema precedentă că *un paralelipiped poate ave ca baze doă oare-care din fețele opuse.*

Dacă paralelipipedul este *drept*, fără a fi *dreptunghic*, îl vom pute considera ca o prismă *dreaptă* saŭ oblică, după cum vom alege feţele care servesc de baze; însă un paralelipiped *dreptunghic* va fi totdeauna o prismă *dreaptă*, orĭ-care ar fi feţele ce le-am lua ce baze.

397. *Observațiunea II. Intersecțiunea unuĭ paralelipiped prin un plan care întlnește doă fețe opuse este un paralelogram,* căcĭ laturile intersecţiuneĭ sînt paralele ca provenind din intersecţiunĭ de planurĭ paralele prin un al treilea.

398. TEOREMĂ.—*Cele patru diagonale a-le unuĭ paralelipiped se taie una pe alta în părțĭ egale.*

Să luăm luăm AC′ şi DB′, doă din cele patru diagonale a paralelipipedului. Aceste drepte sînt diagonalele patrulaterului ACC'B', care este nn paralelogram, pentru că laturile opuse AD, C'B' sînt egale si paralele; aşa dar aceste diagonale se taie una pe alta în doă părţi egale. De asemene AC' şi CA' sînt diagonalele paralelogramului ACC'A' şi se împart una pe alta în doă părţi egale; apoi BD' şi CA' sînt diagonalele paralelogramului A'BCD' şi iarăşi se împart în doă părţi egale. Acelaşi punct O este mijlocul fie-cărei din diagonale, prin urmare avem ceia ce era de demonstrat.



399. *Observaţiune*. Punctul de întîlnire O a celor patru diagonale poartă numele de *centrul* paralelipipedului.

Orĭ-ce dreaptă ce trece prin centrul O şi se mărgineşte la suprafaţa paralelipipeduluĭ este împărţită de punctul O în doă părţĭ egale. In adevĕr, planul determinat de această dreaptă şi diagonala AC' taie doă feţe opuse în doă drepte paralele şi egale între ele. d. e. AK, C'L; triunghiurile AOK şi C'OL sînt prin urmare egalc şi atuncĭ KO=LO.

400. **Corolar.**—Dacă paralelipipedul este dreptunghic, toate paralelogramele figureĭ sînt dreptunghiurĭ. D. e. paralelogramul ABC'D', este dereptunghic pentru că creasta AB este perpendiculară pe faţa AA'D'D. Diagonalele unuĭ paralelipiped dreptunghic fiind egale, *cele patru diagonale a-le luĭ sînt egale între ele.*

In această ipoteză triunghiurile AD'B, AD'D fiind dreptunghice daŭ :

$$\overline{BD'}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD'}^2,\ \overline{AD'}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DD'}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AA'}^2,$$

prin urmare

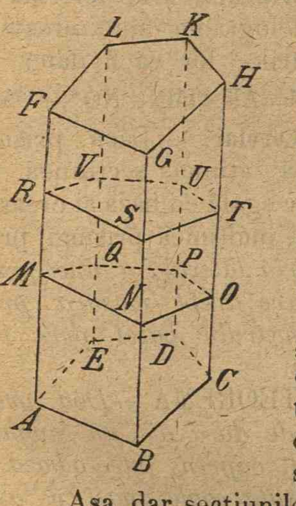
$$\overline{BD'}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{AA'}^2.$$

Aşa dar, *patratul diagonaleĭ unuĭ paralelipiped dreptunghic este egal cu suma patratelor celor treĭ dimensiunĭ a-le luĭ.*

Pentru cub vom ḑice: *patratul diagonaleĭ unuĭ cub este egal cu de treĭ orĭ patratul latureĭ sale.*

401.—TEOREMĂ —*Secţiunile făcute în o prismă prin doă planurĭ paralele sînt doă poligoane egale între ele.*

Fie AH o prismă şi MNOPQ, RSTUV secţiunile făcute prin doă planurĭ paralele. Să considerăm faţa ABGF; planurile secante o taie în dreptele MN şi RS; aceste planurĭ secante fiind paralele între ele, dreptele MN şi RS sînt şi ele paralele între ele ca provenind din intersecţiunile a doă planurĭ paralele prin un al treilea; atuncĭ, rezultă că patrulaterul MNSR este un paralelogram şi prin urmare MN=SR. Tot asemene vom vide că: NO este egală şi paralelă cu ST, OP cu TU, etc....



Aceste poligoane aŭ şi unghiurile lor egale unul cu altul; căcĭ d. e. unghiul MNO are laturile luĭ MN şi NO paralele şi de acelaşĭ senz, cu laturile RS şi ST a-le unghiuluĭ RST, etc.

Aşa dar secţiunile MNOPQ şi RSTUV sînt poligoane cu laturĭ şi unghiurĭ egale unul cu altul, prin urmare sînt şi egale între ele.

402. **Corolar.**—*Dacă planul secant este paralel cu baza prismeĭ, secţiunea căpătată este egală cu baza.*

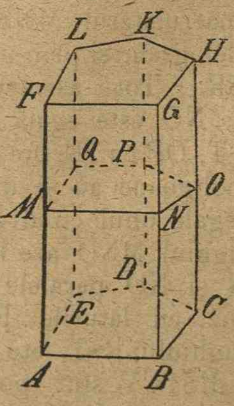
Dacă prelungim crestele laterale a-le prismeĭ dincolo de baze, demonstraţiunea precedentă se aplică şi în caz când secţiunile sănt exterioare prismeĭ, saŭ chiar când ar fi în parte interioare şi în parte exterioare. In orĭ-ce caz, planurile secante trebue să întîlnească toate crestele laterale.

403. **Definiţiune.**—Se numeşte *secţiune dreaptă* a uneĭ prisme, secţiunea determinata în prismă prin un plan perpendicular pe crestele laterale.

404. TEOREMĂ.—*Aria laterală a uneĭ prisme are ca măsură productul perimetruluĭ secţiuneĭ sale drepte, prin creasta eĭ laterală.*

Fie AH o prismă şi MNOPQ secţiunea eĭ dreaptă. Laturile poligonuluĭ de secţiune dreaptă sînt înălţimile paralelogramelor carĭ formează aria laterală a prismeĭ şi bazele acestor paralelograme sînt crestele laterale a prismeĭ. Suma măsurilor lor va fi dar:

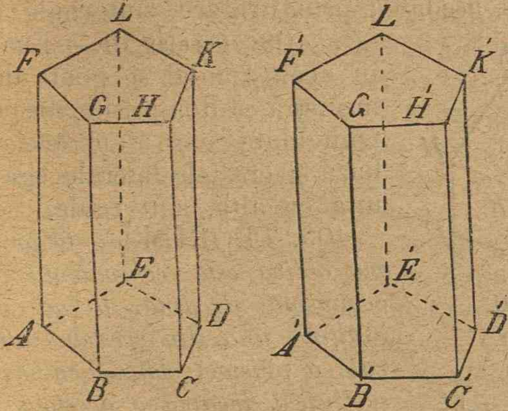
$$AF\times MN+BG\times NO+.....+LE\times QM=AF\times[MN+NO...+QM].$$



405. **Corolar.** — Dăcă prisma este dreaptă atuncĭ secţiunea sa dreaptă este egală cu baza şi creasta laterală este înălţimea prismeĭ; prin urmare: *aria laterală a uneĭ prisme drepte are drept măsură productul perimetruluĭ bazeĭ prin înălţimea eĭ.*

406. TEOREMA.—*Doă prisme sînt egale dacă aŭ un unghiŭ diedru egal, cuprins între o bază şi o faţă laterală egale una cu alta şi aşeḑate în acelaşĭ nod.*

Fie doă prisme AK, A′K′ cu bazele lor ABCDE, A′B′C′D′F′ egale între ele, cu feţele lor laterale ABGF, A′B′G′F′ egale între ele şi unghiul diedru AB egal cu unghiul diedru A′B′; ḑic că aceste prisme sînt egale, dacă fețele lor egale sînt aşeḑate în acelaşĭ mod în planurile lor respective.



Suprapun poligoanele de bază făcându-le să coincidă; atuncĭ planul A′B′G′ se aplică pe planul ABG, din cauza egalităţeĭ diedrelor AB, A′B′. Paralelogramele ABGF şi A′B′G′F′ fiind prin ipoteză egale şi aşeḑate în acelaşĭ mod în planurile lor respective, rezultă că unghiul A′B′G′ este egal cu unghiul ABG; creasta B′G′ ie direcţiunea BG şi aceste drepte fiind egale, extremităţile lor G și G′ se confundă.

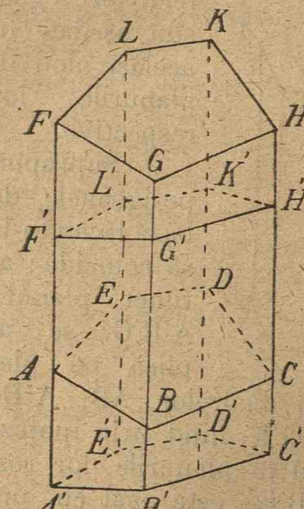
După ce am stabilit coincidența bazelor inferioare şi a crestelor B′G, BG′, este uşor de văḑut că crestele laterale C′H′, C′K′... a-le prismeĭ A′K′ se aplică respectiv pe crestele CH, CK.... a-le prismeĭ AK fiind că sînt paralele între ele şi vîrfurile bazelor superioare coincid doă căte doă.

Aşa dar prismele AK, A′K′ putîndu-se suprapune sînt egale între ele.

407. **Corolar I.**—*Doă prisme drepte sînt egale dacă aŭ bazele și înălțimile lor egale una cu alta.*

In adevăr, unghiul diedru drept AB (figura de sus) este egal cu unghiul diedru drept A′B′ şi dreptghiurile ABGF, A′B′G′F′ avînd bazele şi înălţimile egale una cu alta, sînt egale între ele.

Prismele aŭ dar un unghiŭ diedru egal cuprins între o bază și o față laterală egale una cu alta și în acelașĭ mod așeḍate; prin urmare, sînt egale.



408. **Corolar III.** —Exact în acelașĭ mod se poate demonstra că doă prisme drepte trunchiate care aŭ aceiașĭ bază și crestele laterale egale una cu alta, sînt egale.

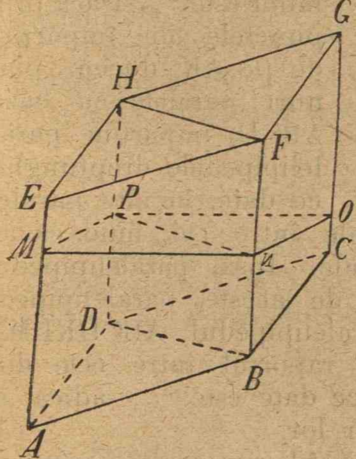
409. TEOREMA.—*O prismă oblică este echivalentă cu o prismă dreaptă, avînd ca înalțime una din crestele laterale a prismeĭ oblice și ca bază secțiunea dreaptă a acesteia.*

Să luăm prisma oblică AH. Prin punctul G′ de pe creasta BG să ducem secțiunea dreaptă E′G′H′K′L′. Prelungim creasta BG sub bază de o lungime BB′ egală cu GG′ și prin punctul B′ să ducem un plan paralel cu planul secțiuneĭ drepte. Intersecțiunea acestuĭ plan cu crestele laterale prelungite a-le prismeĭ, vor determina un poligon A′B′C′D′E′ egal cu poligonul F′G′H′K′L′. Vom ave dar o prismă A′H′ care va fi dreaptâ avînd ca bază secțiŭnea dreaptă a prismeĭ oblice AH și ca înălțime creasta BG a aceșteĭ prisme oblice, căcĭ B′G′=BG.

Prisma oblică AH și prisma dreaotă A′H′ aŭ o parte comună auume prisma trunchiată AH′. Pentru a demonstra echivalența celor doă prisme, este de ajuns să demonstrăm că prismele drepte trunchiate A′C și F′H′ sînt egale între ele. Aceste doă prisme drepte trunchiate au bazele lor A′B′E′C′D′, F′G′H′K′L′ egale înrre ele; apoĭ A′A=F′F căcĭ A′A este creasta laterală saŭ înălțimea prismeĭ drepte AH′ minus AF′ și F′F este creasta laterală a prismeĭ oblice AH minus tot AF′. De asemene avem B′B=G′G, C′C=H′H: etc. Așa dar aceste doă prisme drepte trunchiate (§. 408) sînt egale.

410. TEOREMA.—*Planul dus prin doă creste opuse a unuĭ paralelipiped, împarte paralelipipedul în doă prisme triunghiulare echivalente.*

Fie paralelipipedul AG, în care crestele BF, DH sînt opuse una la alta; aceste drepte fiind paralele între ele, căcĭ sînt amăndoă paralele cu AE, sînt în un plan și planul lor împarte paralelipipedul în doă prisme triunghiulare ABDEFH, BCDFGH care dic că sînt echivalente.

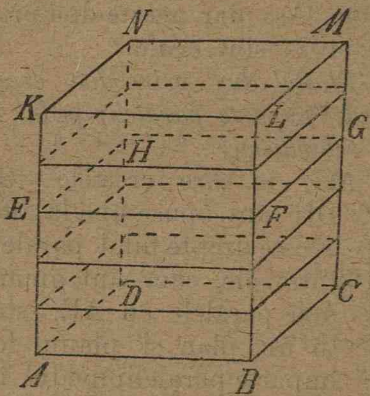


Duc planul MNOP perpendicular pe crestele laterale a prismeĭ și avem: prisma oblică ABDEFH este echivalentă (§. 409) cu prisma dreaptă care ar ave ca bază secțiunea dreaptă MNP a prismeĭ oblice și ca înălțime creasta eĭ laterală BF; de asemene, prisma oblică BCDFGH este echivalentă cu prisma dreaptă care ar ave ca bază secțiunea dreaptă NOP și ca înălțime BF. Insă bazele MNP, NOP sînt egale fiind-că aŭ toate laturile egale una cu alta; prismele drepte aŭ și aceiașĭ înălțime BF; prin urmare ele sînt egale. Așa dar, prismele oblice ABDEFH BCDFGH sînt echivalente.

411. TEOREMA.—*Doă paralelipipede dreptun-*

ghice cu baze egale sînt proporționale cu înălțimile lor.

Fie doă paralelipipede dreptunghice ABCDEFGH, ABCDKLMN, cari aŭ aceiașĭ bază ABCD și ca înălțimĭ unul AE și celalalt AK.



Să presupunem că înălțimile AE și AK aŭ o comună măsură care se cuprinde d. e. de 3 orĭ în AE și de 5 orĭ în AK; raportul înălțimilor este $^3/_5$. Dacă prin punctele de împărțire de pe AK, ducem planurĭ paralele cu baza ABCD, împărțim paralelipipedele dreptunghice date, în alte paralelipipede dreptunghice egale între ele, fiind că aŭ baze egale și înălțimĭ egale. Insă, paralelipipedul ABCDEFGH conține 3 de aceste paralelipipede dreptunghice egale, și paralelipipedul ABCDKLMN conține 5; videm dar că raportul între cele doă paralelipipede dreptunghice date este $^3/_5$, adică egal cu raportul înălțimilor lor.

Dacă înălțimile AE și AK nu ar ave o comună măsură, atuncĭ se va procede cum se arată în nota de la §. 113. și se va vide că egalitateă între raporturĭ subsistă.

412. **Observațiune.** In un paralelipiped dreptunghic, putem lua ca bază una oare-care din fețele sale; laturile dreptunghiuluĭ luat ca bază sînt doă din cele treĭ dimensiunĭ a paralelipipeduluĭ și înălțimea corespundetoare este a treia dimensiune. Teorema precedentă se poate dar enuncia și precum urmează:

Doă paralelipipede dreptunghice carĭ aŭ doă dimensiunĭ comune sînt proporţionale cu al treilea dimensiuni.

413. TEOREMĂ. —*Doă paralelipipede dreptunghice carĭ aŭ aceiaşĭ înălţime sînt proporţionale cu bazele lor.*

Fie P şi P′ doă paralelipipede dreptnnghice carĭ să aibă aceiaşĭ înălţime h, şi a căror baze respective B, B′ aŭ ca dimensiunĭ lungimile a,b şi a',b'. Construesc un paralelipiped dreptunghic P″ cu dimensiunile h,a,b'.

Paralelipipedele P şi P″ aŭ doă dimensiunĭ comune anume h şi a şi prin urmare sînt proporţionale cu al treilea dimensiunĭ (§. 412); adică avem:

$$\frac{P}{P''}=\frac{b}{b'}.$$

Paralelipipedele P″ şi P′ aŭ şi ele doă dimensiunĭ comune h şi b' şi sînt prin urmare proporţionale cu al treilea dimensiunĭ; adică avem

$$\frac{P''}{P'}=\frac{a}{a'}.$$

Inmulţesc membru cu membru aceste doă egalităţĭ şi suprim factorul comun P″ ceia ce dă:

$$\frac{P}{P'}=\frac{a\times b}{a'\times b'}.$$

Inză bazele B şi B′ ale paralelipipedelor sînt dreptunghiurĭ şi raportul lor este egal cu raportul productelor $a\times b$, $a'\times b'$ (§. 252); aşa dar

$$\frac{P}{P'}=\frac{B}{B'}.$$

ceia ce demonstrează Teorema.

414. TEOREMĂ.—*Doă paralelipipede dreptunghice oare-care sînt proporționale cu productele bazelor prin înălțimile lor.*

Fie P, P′ doă paralelipipede dreptunghice, avînd ca baze dreptunghiurile B, B′ și ca înălțimĭ lungimile h, h'. Construesc un paralelipiped P″ cu baza B și înălțimea h'. Paralelipipedele P și P″ avînd aceiașĭ bază sînt proporționale cu înălțimile lor, adică avem:

$$\frac{P}{P''}=\frac{h}{h'};$$

apoĭ, paralelipipedele dreptunghice P″, P′ avînd aceiașĭ înălțime, sînt proporționale cu bazele lor, și avem

$$\frac{P''}{P'}=\frac{B}{B'}.$$

Inmulțesc aceste doă egalitățĭ, membru cu membru și suprim factorul comun P″, ceia ce dă:

$$\frac{P}{P'}=\frac{B\times h}{B'\times h'},$$

ceia ce demonstră Teorema.

415. TEOREMĂ.— *Volumul unuĭ paralelipiped dreptunghic este egal cu productul bazeĭ prin înălțimea luĭ, dacă se ie ca unitățĭ de volum și de suprafața cubul și patratul făcut pe unitatea de lungime.*

Fie P un paralelipiped dreptunghic a căruĭ bază este B și înălțime h; ieŭ ca unitățĭ de volum și de suprafață cubul și patratul construit pe unitatea de lungime; aplicând Teorema precedentă la paralelipiped și la cub avem:

$$\frac{P}{1}=\frac{B}{1}\times\frac{h}{1} \quad \text{saŭ } P=B\times h.$$

Insă, numeriĭ P, B și h sînt măsurile respective a paralelipipeduluĭ dreptunghic, a bazeĭ și a înălțimeĭ luĭ. Egalitatea din urmă exprimă că: *numĕrul care reprezintă măsura paralelipipeduluĭ dreptunghic, adică volumuluĭ, este egal cu productul celor doĭ numerĭ carĭ reprezintă măsurile bazeĭ și a înălțimeĭ luĭ.*

De ordinar se enunță acest rezultat maĭ pe scurt în modul următor: *Volumul paralelipipeduluĭ dreptunghic este egal cu productul bazeĭ prin înălțimea luĭ.*

416. **Corolar I.**—Fie a și b dimensiunile dreptunghiuluĭ de bază B; știm că avem (§. 253):

$$B = a \times b$$

prin urmare putem scri:

$$P = a \times b \times h;$$

această egalitate exprimă că *volumul paralelipipeduluĭ dreptunghic este egal cu productul celor treĭ dimensiunĭ a-le luĭ.*

Din aceasta rezultă că măsura paralelipipeduluĭ dreptunghic nu atîrnă de unitatea de suprafață.

417. **Corolar II.**— *Volumul unuĭ cub este egal cu productul celor treĭ dimensiunĭ a-le luĭ, saŭ cu puterea a treia a latureĭ luĭ.*

Reciproc, *puterea a treia a unuĭ numĕr oare-care poate fi considerată ca volumul unuĭ cub a căruĭ lungime de lature este reprezentată prin acel numĕr.*

Acest corolar și reciproca luĭ explică sinonimia cuvintelor *cub* și *puterea a treia* a unuĭ numĕr.

418. **Observațiune.**—Dacă luăm ca unitate de lungime *metrul*, atuncĭ *metrul patrat* va fi unitatea de suprafață, și *metrul cub* unitatea de volum.

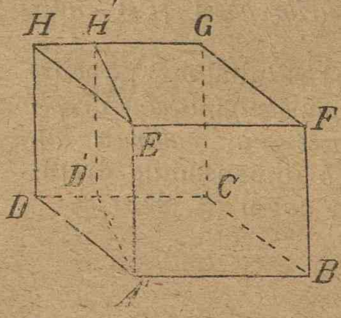
Un metru cub are 1000 de decimetri cubicĭ și 1000000 de centimetri cubicĭ.

419. TEOREMA.— *Volumul unuĭ paralelipiped*

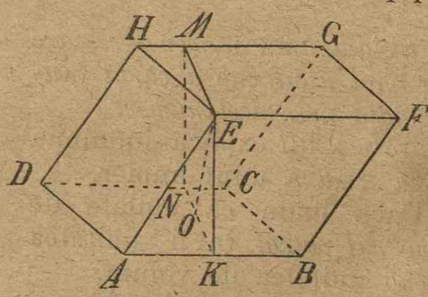
oare-care este egal cu productul bazeĭ prin înălțimea luĭ.

Teorema aceasta am demonstrat'o în ce privește paralelipipedul dreptunghic. Rămâne s'o demonstrăm pentru paralelipipedul drept și oblic.

1°. Fie un paralelipiped drept AG, a căruĭ bază este paralelogramul ABCD și înălțime AE. Prin un punct al uneĭ creste de a uneĭ baze, d. e. A, duc planul perpendicular pe creasta AB; secțiunea AEH'D' este un dreptunghiŭ pentru că fețele opuse a-le paralelipipeduluĭ sînt perpendiculare pe bazele ABCD și EFGH.



Apoĭ, observ că paralelipipedul propus AG este echivalent cu paralelipipedul drept (§. 409) care are ca bază secțiunea dreaptă AEH'D' și ca înălțime AB. Insă, acest al doilea paralelipiped drept este dreptunghic, pentru că baza luĭ este un dreptunghiŭ; el are dar drept măsură productul AE×AD×AB. (§. 415). Dar atuncĭ, și paralelipipedul AG are drept măsură acest product AE×AD'×AB; însă AB×AD' este măsura bazeĭ ABCD; așa dar, paralelipipedul AG este egal cu baza ABCD; înmulțită cu înălțimea luĭ, AE.

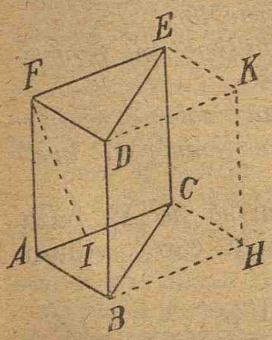


2°. Fie acum paralelipipedul oblic AG a căruĭ bază este paralelogramul ABCD. Prin un punct al uneĭ creste de a uneĭ baze, d. e. E, duc planul EKN perpendicular pe creastă, și observ că paralelipipedul propus este echivalent cu paralelipipedul drept care ar ave ca bază secțiunea dreaptă EKNM și ca înălțime creasta EF.

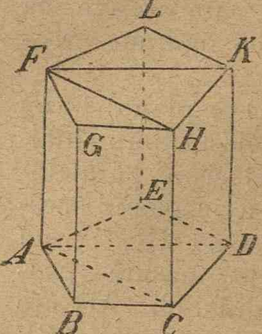
Duc din E perpendiculara EO pe planul bazeĭ ABCD; această dreaptă este în același timp înălțimea paralelipipeduluĭ propus AG și a paralelogramuluĭ EKNM, căcĭ este cuprinsă în planul acestuĭ paralelogram și'ĭ perpendiculară pe KN. Avem dar: paralelipipedul drept are drept măsură productul EO×KN×EF; paralelipipedul oblic AG are și el drept măsură tot acest product; însă KN×EF este egal cu KN×AB care este măsura bazeĭ ABCD. Așa dar paralelipipedul propus AG are drept măsură baza ABCD înmulțită cu înălțimea luĭ, EO.

420. TEOREMA. — *Volumul uneĭ prisme este egal cu productul bazeĭ prin înălțimea eĭ.*

Consider maĭ întâĭ o prismă triunghiulară a căreĭ bază este triunghiul ABC și înălțime FI. Duc prin fie-care din extremitățile crestelor AB, AC, AF, un plan paralel cu celelalte doă; cu chipul acesta formez paralelipipedul ABHCDKEF; planul dus prin crestele opuse BD, CE împarte paralelipipedul acesta în doă prisme ABCDEF', BCHDEK echivalente între ele (§. 410); prin urmare paralelipipedul este dublul prismeĭ propuse. Paralelipipedul are drept măsură productul 2 ABC×FI; așa dar prisma va avé de măsură productul ABC×FI, adică productul bazeĭ sale ABC prin înălțimea eĭ, FI.



Fie acum o prismă poligonală; o descompun în prisme triunghiulare, ducînd planurĭ prin creasta laterală AF și prin fie-care creastă CH, DK paralelă cu AF și nesituate în aceiașĭ față. Toate aceste prisme triunghiulare aŭ aceiașĭ înălțime, care este și înălțimea prismeĭ poligonale, și ca baze triunghiurile ABC, ACD, ADE în cari poligonul de bază este împărțit de diagonalele AC, AD. Insemnând prin I înălțimea prismeĭ avem:



$$\textit{vol. prismeĭ} = ABC \times I + ACD \times I + ADE \times I$$
$$= (ABC + ACD + ADE) \times I = ABCDE \times I;$$

adică volumul prismeĭ poligonale este egal cu productul bazeĭ sale ABCDE prin înălțimea eĭ I.

421. **Corolar I.**—*Doă prisme cari aŭ baze echivalente sînt proporționale cu înălțimele lor.*

Doă prisme cari aŭ aceiașĭ înălțime sînt proporționale cu bazele lor.

422. **Corolar II.**—*Doă prisme aŭ volume echivalente, dacă bazele lor sînt invers proporționale cu înălțimile lor.*

Fie P o prismă a căreĭ volum să fie V, baza B și înălțimea I: fie P′ o prismă a căreĭ volum să fie V′, bază B′ și înălțime I′.

Prin ipoteză avem $B \times I = B' \times I'$;

însă $V = B \times I$, și $V' = B' \times I'$;

prin urmare $V = V'$.

423. **Exerciții.**—*1. A calcula, cu aproximațiune de un decimetru cub, volumul uneĭ prisme drepte, a căreĭ bază este un hexagon regulat; laturea bazeĭ este $1^m,56$ și înălțimea $2^m,45$.*

Suprafaţa hexagonului este $\frac{3\times(1^m,56)^2\sqrt{3}}{2}$; prin urmare volumul prismeĭ este $\frac{3\times(1^m,56)^2\sqrt{3}\times 2^m,45}{2}$; făcând calculile găsim: $15^{m3},491^{dm3}$.

2. *O prismă dreaptă a căreĭ bază este un triunghiŭ ecvilateral, are un volum egal cu 1^{m3} şi înălţimea egală cu $0^m,80$. Să se calculeze laturea bazeĭ.*

Insemnănd prin c laturea triunghiuluĭ ecvilateral şi H înălţimea prismeĭ, avem $V=\frac{c^2H\sqrt{3}}{4}$; saŭ, înlocuind cu cifrele din enunciŭ avem:

$$\frac{c^2\sqrt{3}}{4}\times 0,8=1, \text{ de unde } c=\sqrt{\frac{5\sqrt{3}}{3}}$$

Făcând calculile găsim: $c=1^m,70$.

3. *Volumul uneĭ prisme triunghiulare este egal cu jumătatea productuluĭ uneia din feţele laterale prin distanţa aceste feţe la creasta care 'ĭ este opusă.*

Se complectează paralelipipedul dublu prismeĭ, şi se vede cu uşurinţă ceia ce se cere.

4. *Pe treĭ drepte paralele nesituate în un acelaşĭ plan, se ieŭ lungimile $AA'=BB'=CC'$; volumul prismeĭ triunghiulare $AA'BB'CC'$ este acelaşĭ, orĭ-care ar fi poziţiunile respective a crestelor AA', BB', CC'.*

Pentru că orĭ-cum vor fi aşeḑate aceste treĭ lungimĭ pe cele treĭ paralele, volumul prismeĭ este echivalent cu volumul prismeĭ a căreĭ bază este triunghiul a căruĭ vîrfurĭ sînt în un plan perpendicular pe paralele şi a căreĭ înălţime este AA'; şi volumul acesteĭ prisme este constant.

5. *Suma distanţelor de la vîrfurile unuĭ paralelipiped la un plan exterior, este egală cu de opt orĭ distanţa de la punctul de intersecţiune al diagonalelor paralelipipeduluĭ la acelaşĭ plan.*

Fie O punctul de intersecţiune al diagonalelor paralelipipeduluĭ; luăm diagonala AOA' şi fie aoa' proecţiunea eĭ pe planul dat. Figura $Aaa'A'$ este un trapez şi Oo este semi-suma bazelor; avem dar:

$$2Oo=Aa+A'a';$$

de asemenea avem:

$$2Oo = Bb + B'b'$$
$$2Oo = Cc + C'c'$$
$$2Oo = Dd + D'd',$$

de unde prin adunare, găsim ceea ce ni trebue.

6. *Fiind dat un paralelipiped și un plan exterior, a găsi locul geometric al punctelor din plan ast-fel ca suma patratelor distanțelor luĭ la cele opt vîrfurĭ a paralelipipeduluĭ să fie egală cu un patrat dat.*

Fie M un punct al loculuĭ în planul P, și fie o proecțiunea pe acest plan a centruluĭ O al paralelipipeduluĭ. Consider diagonala AA′ și unesc M cu A, O și A′; dreapta MO este mediană în triunghiul AMM′ și avem (§. 97):

$$2\overline{OM}^2 + 2\overline{OA}^2 = \overline{MA}^2 + \overline{MA'}^2;$$

maĭ avem încă treĭ relațiunĭ, privitoare la celelalte treĭ diagonale. Prin adunare se capătă:

$$\overline{OM}^2 = \frac{K^2 2(\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 + \overline{OD}^2)}{8}$$

în care K^2 reprezintă patratul dat.

Apoĭ OMo este un triunghiŭ dreptunghic și dă

$$\overline{oM}^2 = \overline{OM}^2 - \overline{Oo}^2;$$

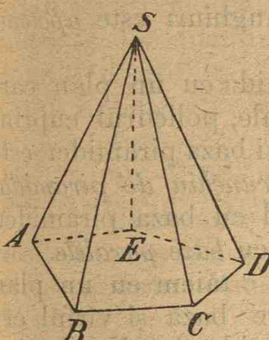
înlocuim OM prin valoarea sa de sus și conchidem că oM este o cantitate constantă și că prin urmare locul geometric al punctuluĭ M este o circumferență a căreĭ centru este o.

CAPITULUL II

PIRAMIDE

424. Definițiunĭ. Se numește *piramidă* un poliedru compus din o față poligonală oare-care și celelalte fețe sînt triunghiurĭ a căror baze sînt laturile poligonuluĭ și a căror vîrfurĭ se confundă în un punct exterior fețeĭ poligonale.

Așa, fie d. e. poligonul ABCDE și S un punct nesituat în planul acestuĭ poligon. Corpul, cuprins între fața poligonală ABCDE și fețele triunghiulare



SAB, SBC, SCD, SDE, SEA, este o piramidă.

425. La o piramidă, poligonul este *baza* piramideĭ şi vîrful comun triunghiurilor piramideĭ este *vîrful* eĭ. Lungimea perpendiculareĭ dusă din vîrf pe bază este *înălţimea* piramideĭ.

Suma feţelor triunghiulare a-le uneĭ piramide este *aria laterală* a eĭ.

426. O piramidă se califică după felul bazeĭ; ast-fel după cum baza va fi: triunghiŭ, patrulater, pentagon, hexagon, etc. piramida va fi triunghiulară, patrunghiulară, pentagonală, hexagonală, etc. O piramidă triunghiulară avînd patru feţe, poartă numele de *tetraedru*.

Toate feţele unuĭ tetaedru fiind triunghiurĭ, unul oare-care din aceste triunghiurĭ poate fi luat ca bază a tetraedruluĭ; vîrful tetraedruluĭ este atuncĭ acel care se opune bazeĭ.

Tetraedrele sînt în Geometria în spaţiŭ, ceia ce triunghiurile sînt în Geometria plană. Ast-fel d. e. se fixază poziţiunea unuĭ punct în plan, legăndu'l cu doă puncte fixe prin un trinnghiŭ: de asemene se fixază poziţiunea unuĭ punct în spaţiu legăndu'l cu treĭ puncte fixe prin un tetraedru.

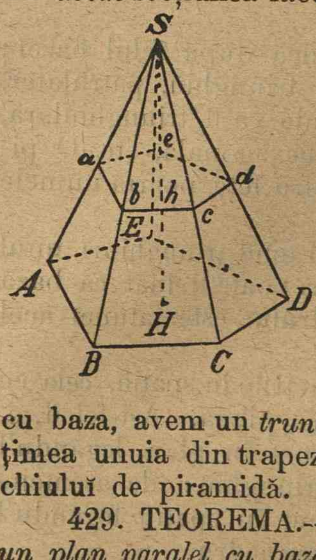
427. O piramidă este *regulată*, atuncĭ cănd baza eĭ este un poligon regulat a căruĭ centru este piciorul înălţimeĭ piramideĭ.

Crestele laterale a-le uneĭ piramide regulate sînt egale, fiind-că sînt nişte oblice, pe planul bazeĭ, de o potrivă depărtate de piciorul înălţimeĭ; feţele laterale sînt triunghiurĭ isoscele, toate egale între ele.

Înălţimea unuia din aceste triunghiurĭ este *apotema* piramideĭ.

428. Dacă se taie o piramidă cu un plan care să întîlnească toate feţele laterale, poliedrul cuprins între secţiunea făcută de plan şi baza piramideĭ este o *piramidă trunchiată* sau un *trunchiŭ de piramidă*. Dacă planul secant este paralel cu baza piramideĭ, avem un trunchiŭ de piramidă cu *baze paralele*.

Fie piramida SABCDE: să o tăiem cu un plan paralel cu baza şi cuprins între bază şi vîrfnl eĭ; fie *abcde* secţiunea făcută în piramidă de planul considerat; avem un trunchiŭ de piramidă cu baze paralele ABCDE *abcde*. *Inălţimea* unuĭ trunchiŭ de piramidă este distanţa dintre cele doă baze. Porţiunile de dreaptă A*a*, B*b*, C*c*.. sînt *crestele laterale*, iar trapezele laterale AB*ab*, BC*bc*.. constituesc *aria laterală* a trunchiuluĭ de piramidă.



Dacă tăiem o piramidă regulată cu un plan paralel cu baza, avem un *trunchiŭ de piramidă regulat*. Inălţimea unuia din trapezele laterale este *apotema* trunchiuluĭ de piramidă.

429. TEOREMA.— *Dacă se taie o piramidă cu un plan paralel cu baza eĭ, atuncĭ:*

1°. Crestele laterale şi înălţimea piramideĭ sînt împărţite în părţĭ proporţionale.

2°. Secţiunea este un poligon asemene cu baza piramideĭ.

1. Fie piramida SABCDE (Fig. preced.) tăietă de un plan paralel cu baza şi care dă secţiunea *abcde*. Crestele laterale a-le piramideĭ, SA, SB, SC...

sînt niște drepte care pleacă din un punct S și sînt tăiete de doă planurĭ paralele; putem presupune că punctul S este în un plan paralel cu cele doă și atuncĭ aplicănd Teorema de la (§. 333), putem scri:

$$\frac{Sa}{SA}=\frac{Sb}{SB}=\frac{Sc}{SC}=\ldots\ldots\frac{Sh}{SH}.$$

2. Poligoanele ABCDE, *abcde* au laturile lor paralele între ele una cu alta și îndreptate în acelașĭ senz, prin urmare unghiurile lor sînt egale unul cu altul.

Apoĭ dreptele AB, *ab* fiind paralele între ele, triunghiurile SAB, *Sab* sînt asemene între ele și prin urmare avem:

$$\frac{ab}{AB}=\frac{Sb}{SB};$$

triunghiurile SBC, *Sbc* sînt iarășĭ asemene între ele pentru acelașĭ cuvînt și avem

$$\frac{Sb}{SB}=\frac{bc}{BC}.$$

Din aceste doă din urmă proporțiunĭ deducem

$$\frac{ab}{AB}=\frac{bc}{BC}.$$

De asemene, vom proba că avem

$$\frac{bc}{BC}=\frac{cd}{CD}=\frac{de}{DE}=\frac{ea}{EA}.$$

Așa dar poligoanele ABCDE, *abcde* aŭ unghiurile lor egale unul cu altul și laturile lor omoloage proporționale, prin urmare sînt asemene între ele.

430. **Corolar.**— Triunghiurile SAB, *Sab* fiind asemene daŭ

$$\frac{ab}{AB}=\frac{Sa}{SA},$$

saŭ, în virtutea celor de maĭ sus

$$\frac{ab}{\mathrm{AB}}=\frac{Sh}{\mathrm{SH}}.$$

Apoĭ poligoanele ABCDE, *abcde* fiind asemene daŭ (§. 274)

$$\frac{abcde}{\mathrm{ABCDE}}=\frac{\overline{ab}^2}{\overline{\mathrm{AB}}^2},$$

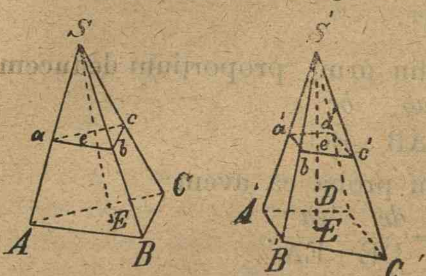
prin urmare,

$$\frac{abcde}{\mathrm{ABCDE}}=\frac{\overline{Sh}^2}{\overline{\mathrm{SH}}^2},$$

adică : în o piramidă, *secțiunile paralele cu baza, și baza chiar, sînt proporționale cu patratele distanțelor lor la vîrful piramideĭ.*

431. TEOREMĂ. — *Dacă doă piramide aŭ înălțimĭ egale, secțiunile făcute în ele prin planurĭ paralele cu bazele lor și la o aceiașĭ distanța de vîrfurĭ, sînt proporționale cu bazele celor doă piramide.*

Fie piramida triunghiulară SABC și piramida patrunghiulară S′A′B′C′D′, a căror înălțimĭ SE și S′E′ sînt egale între ele. Ieŭ Se egală cu S′*e*′ și apoĭ duc prin *e* și *e*′ planurĭ paralele respectiv cu bazele celor doă piramide și fie *abc*, *a′b′c′d′* secțiunile respective făcute în cele doă piramide de către cele doă planurĭ. In virtutea celor de maĭ sus avem :



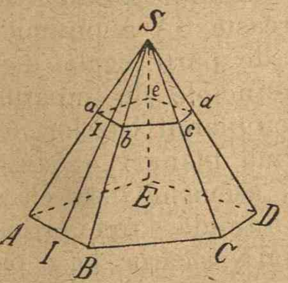
$$\frac{abc}{\mathrm{ABC}}=\frac{\overline{\mathrm{S}e}^2}{\overline{\mathrm{SE}}^2},\quad \frac{a'b'c'd'}{\mathrm{A'B'C'D'}}=\frac{\overline{\mathrm{S}e'}^2}{\overline{\mathrm{SE}}^2};$$

însă noĭ am luat SE= S′E′ și S*e*= S′*e*′, prin urmare rezultă :

$$\frac{abc}{ABC}=\frac{a'b'c'd'}{A'B'C'D'}.$$

432. **Corolar.**— Dacă bazele celor doă piramide sînt echivalente una cu alta, atuncĭ și secțiunile *abc*, *a'b'c'd'* sînt echivalente între ele.

433. TEOREMA.—*Aria laterală a uneĭ piramide regulate, are drept măsură jumătatea productuluĭ perimetruluĭ bazeĭ prin apotema eĭ.*



Fie piramida regulată SABCDE. Triunghiurile isoscele și egale între ele carĭ compun suprafața laterală a piramideĭ, aŭ ca baze laturile AB, BC..... EA a poligonuluĭ de bază și ca înălțime apotema SI; suma ariilor acestor triunghiurĭ, adică aria ce se cere, are drept măsură jumătate din suma laturilor AB, BC...EA înmulțită cu apotema SI, adică jumătate din productul perimetruluĭ bazeĭ piramideĭ prin apotema eĭ.

434. **Corolar.**— *Aria laterală a unuĭ trunchiŭ de piramidă regulat, are drept măsură productul semi-sumeĭ perimetrelor celor doă baze prin apotema trunchiuluĭ.*

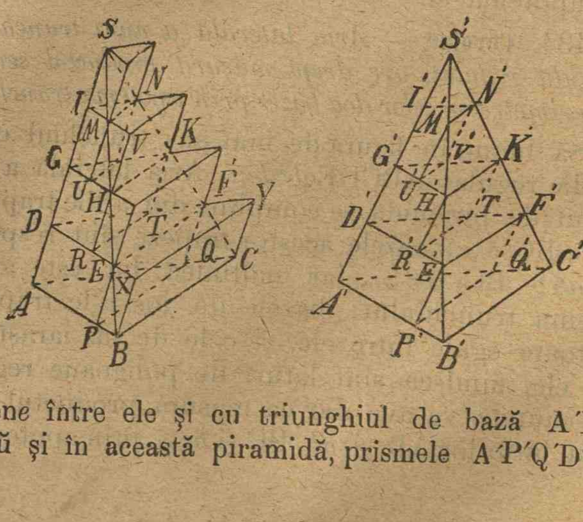
Să luăm în figura de maĭ sus, trunchiul de piramidă regulat ABCDE*abcde*. Aria laterală a trunchiuluĭ de piramidă se compune din ariile trapezelor AA*ab*, BC*bc*....; bazele acestor trapeze sînt respectiv: AB, *ab*; BC, *bc*;.... iar înălțimea lor este aceiașĭ, apotema trunchiuluĭ; bazele de jos a-le trapezelor sînt toate egale între ele, și cele de sus iarășĭ egale între ele, fiind-că sînt laturĭ de poligoane regulate. Aria căutată va ave dar ca măsură, productul semi-sumeĭ laturilor AB și *ab*, BC și *bc*.... prin apotema eĭ.

435. TEOREMĂ.— *Doă piramide triunghiulare care aŭ baze echivalente şi înălţimĭ egale, sînt echivalente.*

Fie piramidele triunghiulare SABC, S′A′B′C′ care să aibă înăltimĭ egale şi bazele ABC, A′B′C′ să fie echivalente; dic că aceste piramide sînt echivalente între ele.

Pun bazele celor doă piramide pe un acelaşĭ plan, atuncĭ vîrfurile S şi S′ vor fi la o aceiaşĭ distanţă de acest plan, fiind-că înălţimile piramidelor sînt egale între ele. Impart creasta SA a piramideĭ întăia în un numĕr oare-care de părţĭ egale, d. e. în patru părţĭ egale, şi prin punctele de împărţire D, G, I duc planurĭ paralele cu planul bazelor. Ieŭ piramida întăĭ; aceste din urmă planurĭ o taie în triunghiurile DEF, GHK, IMN asemene între ele şi cu baza ABC; înscriŭ în piramidă, treĭ prisme APQDEF, DRTGHK şi GUVIMN a căror baze paralele sînt respectiv cele treĭ triunghiurĭ de secţiunĭ, de maĭ sus.

In piramita a doa cele treĭ planurĭ paralele cu baza determinează treĭ triunghiurĭ D′E′F′, G′H′K, I′M′N′



asemene între ele şi cu triunghiul de bază A′B′C′; înscriŭ şi în această piramidă, prismele A′P′Q′D′E′F′,

$D'R'P'G'H'K'$ şi $G'U'V'I'M'N'$ a căror baze paralele sînt respectiv cele treĭ triunghiurĭ de secţiune.—Acum consider prizmele $APQDEF$ şi $A'P'Q'D'E'F'$: ele sînt echivalente, căcĭ bazele lor DEF şi $D'E'F'$ sînt echivalente între ele (§. 432) şi înălţimile egale cu a patra parte din înălţimea comună a piramidelor. De asemene tot echivalente sînt şi prismele $DRTGHK$ şi $GUVIMN$ înscrise în piramida întăia, respectiv cu prismlele $D'R'T'G'H'K'$ şi $G'U'V'I'M'N'$ înscrise în piramida a doa. Dacă acum am înscri, în acelaşĭ mod, patru, cincĭ, şese. . prisme, în ambele piramide, am vide că suma prismelor înscrise în piramida întăia este echivalentă cu suma prismelor înscrise în piramida a doa. Noĭ putem considera fie-care piramidă ca limita cătră care tinde suma prismelor înscrise în ea, când numĕrul acestor prisme creşte necontenit. In fie-care moment suma prismelor din piramida întăia este echivalentă cu suma prismelor din piramida a doa şi prin urmare şi când trecem la limite aceste doă sumĭ vor fi echivalente ; aşa dar cele doă piramide sînt echivalente.

436. Am admis în demonstraţiunea precedentă că volumul fie-căreĭ piramide este limita cătră care tinde suma prismelor înscrise în piramidă când numĕrul lor creşte necontenit. Să demonstrăm aceasta,

Să luăm de exemplu piramida $SABC$ şi să construim prismele a căror baze respective sînt ABC, DEF, GHK, IMN a căror numĕr este cu 1 maĭ mare de cât numĕrul prismelor înscrise. Volumul piramideĭ este cuprins între suma prismelor înscrise şi suma prismelor circumscrise, şi prin urmare diferenţa între volumul piramideĭ şi suma volumurilor prismelor înscrise este maĭ mică de cât diferenţa între suma volumurilor prismelor circumscrise şi suma volumurilor prismelor înscrise.

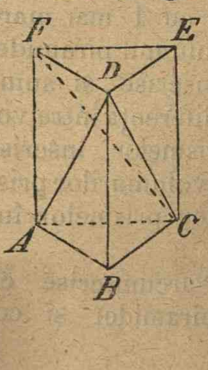
Acum, să comparăm prismele circumscrise cu cele înscrise, începănd de la vîrful piramideĭ şi coborîndu-ne către bază ; cea întâĭ prismă circumscrisă, adică aceea care are de bază IMN şi creasta IS, este egală cu cea întâĭ prismă înscrisă GUVIMN ; a doa piramidă circumscrisă este egală cu o a doa prismă înscrisă şi aşa maĭ departe ; penultima prismă circumscrisă este egală cu ultima prismă înscrisă.

Din acestaa rezultă că diferenţa între suma prismelor circumscrise şi suma prismelor înscrise, este egală cu ultima prismă circumscrisă ABCDXY ; şi apoĭ maĭ rezultă că diferenţa între volumul piramideĭ şi suma volumurilor prismelor înscrise, este maĭ mică de cât prisma ABCDXY.

Această prismă are înălţimea maĭ mică de cât creasta eĭ AD, şi această înălţime va fi cu atât maĭ mică cu cât vom înscri în piramidă maĭ multe prisme; prin urmare şi volumul ultimeĭ prisme circumscrise va fi şi el din ce în ce maĭ mic. Conchidem că diferenţa între volumul piramideĭ şi suma prismelor înscrise are ca limită zero, saŭ cu alte cuvinte volumul piramideĭ este limita sumeĭ prismelor înscrise, când numĕrul acestor prisme creşte necontenit.

437. TEOREMA.— *Volumul uneĭ piramide are drept măsură a treia parte din productul bazeĭ prin înălţimea eĭ.*

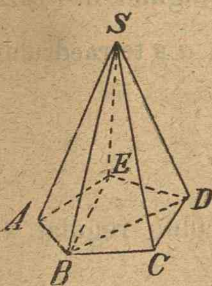
1°. Să considerăm întâĭ primida triunghiulară DABC. Prin vîrfurile A şi C ducem dreptele AF, CE paralele şi egale cu creasta BD ; formăm astfel o prisma triunghiulara avînd aceiaşĭ înălţime ca şi piramida considerată.



Considerăm planul punctelor C, D, F, videm că se formează treĭ piramide triunghiulare şi anume : DABC, ACDF şi CEDF. Cea dintâĭ este piramida dată ; celelalte doă sînt echivalente înte ele căcĭ aŭ aceiaşĭ înălţime şi baze echivalente adică jumătăţile paralelogramuluĭ AFEC. In ce priveşte piramida a treia, putem să'ĭ considerăm ca bază faţa FDE şi vîrful eĭ este atuncĭ în C; prin urmare această piramidă este echivalentă cu piramida întăia.

Rezultă dar că cele treĭ piramide sînt echivalente între ele şi fie-care este prin urmare a treia parte din prisma ABCDEF. Insă, volumul prismeĭ are drept măsură productul bazeĭ prin înălţimea eĭ; volumul piramideĭ DABC va ave dar drept măsură a treia parte din productul bazeĭ sale prin înălţimea eĭ.

2° Să considerăm acum o piramidă poligonală SABCDE. Prin creasta SB ducem planurĭ carĭ descompun piramida poligonală în maĭ multe piramide triunghiulare avînd ca baze triunghiurile ABE, EBD, DBC carĭ comdun baza piramideĭ; înălţimea tuturor acestor piramide triunghiulare este aceiaşĭ. Suma măsurilor lor, adică măsura piramideĭ date, va fi egală cu a treia parte din productul bazeĭ ABCDE prin înălţimea eĭ SI.



438. **Corolar I.** — Dacă însemnăm prin V, B, I, numeriĭ carĭ măsoară respectiv, volumul uneĭ piramide baza şi înălţimea eĭ, avem formala generală:

$$V = \frac{1}{3} B \times I.$$

Din această formulă scoatem următoarele:

1°. *Orĭ ce piramidă este a treia parte din prisma de aceiaşĭ bază şi aceiaşĭ înălţime cu piramida.*

2°. *Doă piramide cu baze echivalente şi cu aceiaşĭ înălţime, sînt echivalente.*

3°. *Doă piramide sînt între ele ca productele respective a bazeĭ prin înălţimea lor.*

4°. *Doă piramide care aŭ aceiașĭ bază sînt între ele ca înălțimile lor.*

5°. *Doă piramide cari aŭ acciașĭ înălțime sînt între ca bazele lor.*

439. **Corolar II.** — Un tetraedru regulat este cuprins între patru triunghiurĭ ecvilaterale egale: să însemnăm prin a laturea unuia din triunghiurile ecvilaterale, care lature este în acelașĭ timp și creasta tetraedruluĭ. Baza tetraedruluĭ regulat are drept expresiune $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ (§. 260). Inălţimea luĭ este cateta unuĭ triunghiŭ dreptunghic a căruĭ ceialaltă catetă este rada cercului circumscris la triunghiul de bază, adică $\frac{a}{\sqrt{3}}$ şi ipotenuza este creasta a a tetraedruluĭ; înălţimea în chestiune este dar

$$\sqrt{a^2-\frac{a^2}{3}}=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Prin urmare, volumul tetraedruluĭ regulat în funcţiune de creasta sa este:

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

Volumul tetraedruluĭ de creastă egală cu 1^m este $0^{m3},117851$.

440. **Corolar III.**—Pentru a evalua volumul unuĭ poliedru, se descompune poliedru în piramide, şi se face suma volumurilor acestor piramide.

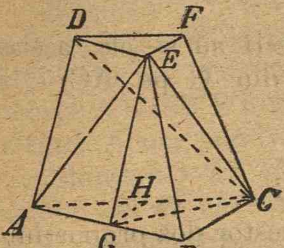
Descompunerea în piramide se face, luându-se un punct oare-care în spaţiŭ şi unindu'l cu toate vîrfurile poliedruluĭ. Bazele acestor diferite piramide sînt feţele poliedruluĭ, iar înălţimile lor sînt perpendicularele scoborîte din vîrful comun pe planul feţelor.

Se calculează volumurile acestor piramida şi cu ajutorul lor se calculează apoĭ volumul poliedruluĭ.

Dacă se poate găsi în interiorul poliedruluĭ un punct care să fie la egală distanţa de toate feţele luĭ, piramidele în care'l vom descompune vor ave o înălţime comună, care va fi perpendiculara scoborîtă din acel punct pe una din feţe şi atuncĭ vom pute ḑice: *volumul poliedruluĭ va ave drept măsură a treia parte din productul suprafeţeĭ luĭ prin perpendiculara dusă din acel punct pe una din feţe.*

441. TEOREMĂ.—*Un trunchiŭ de piramidă cu baze paralele este echivalent cu treĭ piramide, avînd ca înălţime comună înălţimea trunchiuluĭ şi cu baze respective, baza inferioară a trunchiuluĭ, baza luĭ superioară şi o medie proporţională între aceste doă baze.*

1°. Să considerăm întâĭ, un trunchiŭ de piramidă triunghiulară ABCDEF a căruĭ baze ABC, DEF sînt paralele între ele. Planurile AEC şi DCE, împart trunchiul în treĭ piramide triunghiulare AEBC, ECDF, EACD.



Piramida întâia EABC are faţa ABC ca bază şi atuncĭ înălţimea eĭ aste însăşĭ înălţimea trunchiuluĭ, pentru că vîrful eĭ E, este un punct al bazeĭ superioare al trunchiuluĭ. Piramida a doa ECDF are faţa DEF care i se poate lua ca bază şi atuncĭ înălţimea eĭ este însăşĭ înălţimea trunchiuluĭ, pentru că vîrful eĭ C este un punct al bazeĭ inferioare al trunchiuluĭ. Să luăm piramida a treia EACD a căreĭ bază este ADC şi vîrf în E; prin vîrful E duc EG paralelă cu AD; EG va fi paralelă cu baza ADC a piramideĭ; unesc G cu D şi C; formez piramida GADC echivalentă cu piramida EADC căcĭ aŭ caeiaşĭ bază ADC şi vîrfurile lor sînt aşeḑate pe o paralelă cu baza. Acum, în piramida aceasta GADC putem considera ca bază triunghiul AGC şi atuncĭ înălţimea 'ĭ va fi egală cu înălţimea trunchiuluĭ. Rămăne să arătăm că baza aceasta AGC este medie proporţională între cele doă baze a-le trunchiuluĭ de piramidă.

Duc GH paralelă cu BC; am triunghiul AGH egal cu triunghiul DEF fiind-că AG=DE ca laturĭ opuse în paralelogramul AGED şi unghiurile GAH şi AGH egale respectiv cu unghiurile EDF şi DEF ca avînd laturile lor paralele una cu alta şi îndreptate în acelaşĭ senz. Triunghiurile ABC şi AGC aŭ aceiaşĭ înălţime,—perpendiculara dusă din C pe AB—; raportul lor este egal cu acela al bazelor lor.

$$\frac{tri. ABC}{tri. AGC}=\frac{AB}{AG};$$

apoĭ, triunghiurile AGC şi AGH aŭ şi ele aceiaşĭ înălţime,—perpendiculară dusă din G pe AC—, şi avem

$$\frac{tri. AGC}{tri. AGH}=\frac{AC}{AH}.$$

Insă raporturile al doilea a acestor doă proporţiunĭ sînt egale între ele din cauză că GH este paralelă cu BC, şi prin urmare avem

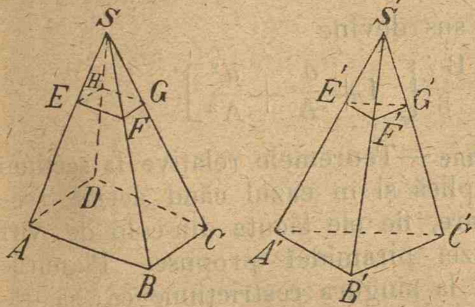
$$\frac{tri. ABC}{tri. AGC}=\frac{tri. AGC}{tri. AGC},$$

ceia ce ni arată că în adevăr baza AGC a piramideĭ a treia GHDC, este medie proporţională între cele doă baze ale trunchiuluĭ de piramidă dat.

2. Să considerăm acum un trunchiŭ de piramidă poligonală ABCDEFGH cu baze paralele; acest trunchiŭ face parte din o piramidă poligonală SABCD

şi s'a capatat tăindu-se această piramidă prin un plan EFGH paralel cu baza ABCD.

Să construim alăture o piramidă triunghiulară S′ care să aibă aceiaşĭ înălţime ca şi piramida S şi a căreĭ bază A′B′C′ să fie echivalentă cu baza ABCD. Piramidele S şi S′ sînt echivalente (§. 438). Facem în piramida S′ o secţiune E′F′G′ la o aceiaşĭ distanţă de la bază ca şi în piramida S; secţiuuele EFGH, E′F′G′ vor fi echivalente între ele (§, 432) şi piramidele SEFGH, S′E′F′G′ vor fi şi ele echivalente între cle ca avînd baze echivalente şi înălţimĭ egale. Prin urmare, trunchiul poligonal dat este echivalent cu trunchiul triunghiular A′B′C′D′E′F′G′ ca diferenţe de piramide echivalente. Acum, am văzut că trunchiul de piramidă triunghiulară A′B′C′E′F′G′, este echivalent cu treĭ piramide carĭ aŭ ca înălţime comună înălţimea trunchiuluĭ şi cu baze respective cele doă baze a-le trunchiuluĭ şi media proporţională între ele; conchidem că şi trunchiul de piramidă poligonală va fi echivalent cu aceleaşĭ treĭ piramide.



442. **Corolar I.** — Dacă însemnăm prin V, B, b, i, numeriĭ carĭ măsoară respectiv, volumul, cele doă baze şi înălţimea unuĭ trunchiŭ de piramidă cu baze paralele, avem formula

$$V = {}^1/_3\, B\, i + {}^1/_3\, b\, i + {}^1/_3\, i\sqrt{Bb}$$

saŭ

$$V = {}^1/_3\, i\, (B + b + \sqrt{Bb}).$$

443. **Corolar II.**—Adese-orĭ, în loc de cele doă baze, se dă una din ele, d. e. B, şi raportul $\frac{a}{A}$ a doă laturĭ omoloage de-a celor doă baze; în acest caz avem

$$\frac{b}{B}=\frac{a^2}{A^2} \text{ de unde } b=\frac{a^2}{A^2}B.$$

şi formula de maĭ sus devine

$$V=\frac{Bi}{3}\left[1+\frac{a}{A}+\frac{a^2}{A^2}\right].$$

444. **Observaţiune.**—Teoremele relative la secţiunĭ în o piramidă se aplică şi în cazul cănd aceste secţiunĭ devin exterioare, fie ele făcute din-colo de vîrf saŭ de desubtul bazeĭ piramideĭ propuse. Planurile secante sînt supuse la singura restricţiune ca să rămănă paralele cu baza piramideĭ. Trunchiurile de piramidă cuprinse între doă planurĭ paralele şi de aceiaşĭ parte a vîrfuluĭ piramideĭ le numim de *specia întăia*, şi dacă planurile paralele sînt de o parte şi de alta a vîrfuluĭ le numim de *specia a doa*.

Să evaluăm volumul unuĭ trunchiŭ de specia a doa ABCFED; trebue să facem suma piramidelor SABC şi SDEF. Fie i înălţimea trunchiuluĭ şi I şi I′ înălţimile celor doă piramide. Avem, conservănd notaţiunile de maĭ sus:

$$V={}^1/_3BI+{}^1/_3bI'=\frac{\beta}{3}\left[I+\frac{bI'}{B}\right].$$

Din relaţiunea următoare:

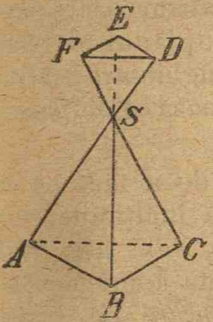
$$\frac{B}{b}=\frac{A^2}{a^2}=\frac{I}{I'^2}$$

rezultă: $$\frac{I}{A}=\frac{I'}{a}=\frac{I+I'}{A+a}=\frac{i}{A+a}$$

de unde $\quad I=\frac{i.A}{A+a}$ și $I'=\frac{i.\ a}{A+a}$.

Prin urmare $V=\frac{B.\ iA^3+a^3}{3\ A^2(A+a)}=\frac{B.\ i}{3}\left[1-\frac{a}{A}+\frac{a^2}{A^2}\right]$

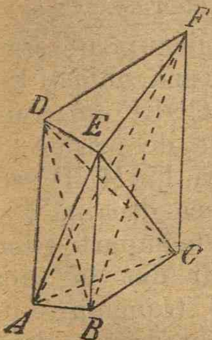
saŭ încă $\quad V=\frac{i}{3}\left[B-\frac{Ba}{A}+\frac{Ba^2}{A^2}\right]=\frac{i}{3}\left[B+b-\sqrt{Bb}\right]$.



Această din urmă formulă samănă cu acea de la § 442, numaĭ cât semnul radicaluluĭ este *minus*.

445. TEOREMĂ. — *Un trunchiŭ de prismă triunghiulară este echivalent cu suma a treĭ piramide avînd ca bază comună baza inferioară a trunchiuluĭ și ca vîrfurĭ acele a-le bazeĭ superioare.*

Fie trunchiul de prismă triunghiulară ABCDEF.



Planurile AEC și DEC împart trunchiul în treĭ piramide triunghiulare EABC, EADC și EDCF.

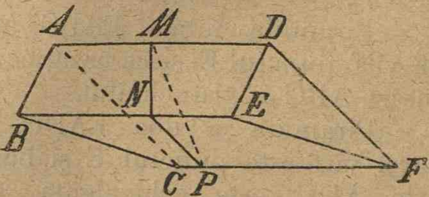
Piramida întâia EABC are ca vîrf punctul E și ca bază, baza însășĭ ABC a trunchiuluĭ.

Piramida a doa EADC, a căreĭ vîrf este punctul E și bază este ADC, este echivalentă cu piramida BADC a căreĭ bază este tot ADC și are aceiașĭ înălțime, fiind că vîrful eĭ B este așeḍat pe creasta EB care'ĭ paralelă cu planul bazeĭ comune. Insă acum, în piramida aceasta BADC putem considera ABC ca bază și D ca vîrf.

Piramida a treia EDCF poate fi considerată ca avînd ca bază ECF și D ca vîrf, prin urmare ea este echivalentă cu piramida ABCF cu BCF ca bază și A ca vîrf, căcĭ bazele CFE și BCF sînt echivalente ca triunghiurĭ carĭ aŭ aceiașĭ bază CF și aceiașĭ înălțime, căcĭ BE este paralelă cu CF; apoĭ înălțimile acestor doă piramide sînt egale fiind că dreapta DA care unește cele doă vîrfurĭ este paralelă cu CF și prin urmare și cu planul de bază EBCF. Insă acum piramida triunghiulară ABCF poate fi considerată ca avînd de bază ABC și vîrful în F.

446. **Corolar I.**— Dacă avem de a face cu un trunchiŭ de prismă dreaptă, atuncĭ înălțimile celor treĭ piramide sînt însășĭ crestele laterale a-le trunchiuluĭ și baza este secțiunea dreaptă a prismeĭ, așa că putem zice: *volumul unuĭ trunchiŭ de prismă dreaptă are drept măsură productul secțiuneĭ sale drepte prin media aritmetică a crestelor luĭ laterale.*

447. **Corolar II.**—Enunciul precedent poate servi și la evaluarea unuĭ trunchiŭ de prismă oblică. Fie ABCDEF un trunchiŭ de prismă oblică. Fie MNP secțiunea dreaptă; aceasta împarte trunchiul dat în doă alte trunchiurĭ de



prismă MNPABC, MNPDF are sînt drepte, dacă considerăm această secțiune ca bază. Avem: trunchiul MNPABC are drept măsură $MNP.\frac{(MA+NB+PC)}{3}$,

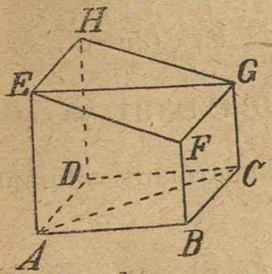
trunchiul MNPDEF are drept măsură

$MNP.\frac{(MD+NE+PF)}{3}$, și prin urmare trunchiul de prismă oblică ABCDEF are ca măsură $MNP.\frac{(AD+BE+CF)}{3}$.

448. **Corolar III.**— Insemnând prin V, B, β, i, i', i'', a, a' a'' numeriĭ carĭ măsoară respectiv volumul, baza și secțiunea dreaptă, înălțimile vîrfurilor bazeĭ superioare deasupra planuluĭ bazeĭ inferioare și crestele laterale, a-le unuĭ trunchiŭ de prismă triunghiulară, avem formulele:

$$V=B\left[\frac{i+i'+i''}{3}\right] \text{ și } V=\beta\left[\frac{a+a'+a''}{3}\right].$$

449. **Problema I.**— *Se cere volumul unuĭ paralelipiped trunchiat, a căruĭ creste laterale opuse doă câte doă sînt A, a, și B, b, secțiunea dreaptă este S.*

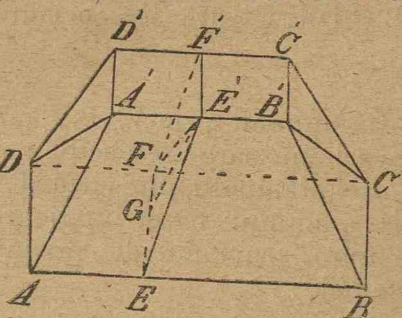


Duc planul ce trece prin crestele AE, CG; acest plan desparte corpul în doă prisme triunghiulare trunchiate drepte a căror secțiunĭ drepte sînt jumătate din S; însemnând prin v, v', V volumurile celor doă prisme și acela al trunchiuluĭ dat; avem.

$$v=\frac{S}{2}\times\frac{A+B+a}{3},\ v'=\frac{S}{2}\times\frac{A+a+b}{3} \text{ și } V=S\times\frac{2(A+a)+(B+b)}{6}.$$

450. **Problema II.**— Grămezile de peatră sfărâmată, orĭ de prund, ce sînt de-alungul drumurilor, sînt terminate jos și sus prin doă dreptunghiurĭ paralele ABCD, A′B′C′D′, și lateral prin patru trapeze isoscele ABB′A′ BCC′B, CDD′C′, și ADD′A′ egale doă câte doă. Să exprimăm volumul unuĭ asemene

corp cunoscîndu'ĭ distanța i între cele doă dreptunghiurĭ și dimensiunile acestora a, b, a', b'.



Fie EFF'E' secțiunea dreaptă făcută în corp și E'G distanța între cele doă dreptunghiurĭ. Planul A'B'CD desparte corpul în doă trunchiurĭ de prismă triunghiulară ABCDA'B' și A'B'C'D'DC; cel întâĭ are drept măsură productul secțiuneĭ sale drepte EFE' prin a treia parte din suma $2a+a'$, crestelor luĭ laterale; însă suprafața triunghiuluĭ EFE' este egală cu $\frac{EF \times F'G}{2}$ saŭ $\frac{b.i}{2}$. Așa dar volumul trunchiuluĭ ABCDA'B' este $\frac{b.i}{2} \times \frac{(2a+a')}{3}$. De asemene volumul trunchiuluĭ A'B'C'D'CD va ave drept măsură $\frac{b' \times i}{2} \times \frac{(2a'+a)}{3}$. Prin urmare volumul uneĭ grămezĭ de peatră va fi:

$$\frac{b.i}{6}(2a+a') + \frac{b'.i}{6}(2a'+a).$$

451. **Observațiune.**— Dacă presupunem că dreptunghiurile ABCD, A'B'C'D' sînt asemene între ele, adică dacă avem

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'},$$

atuncĭ crestele AA', BB', CC', DD' prelungite se întîlnesc în un același punct. Formula precedentă devine:

$$\frac{i}{6}(2ab+2a'b'+a'b+ab').$$

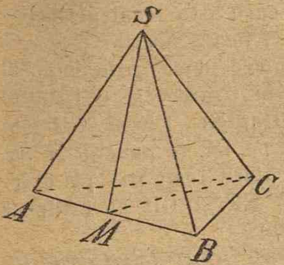
Observăm însă că din proporţiunea precedentă scoatem $ab'=a'b$ şi $ab'\times a'b=(a'b)^2$, de unde $a'b=\sqrt{aa'bb'}$ aşa în căt formula precedentă devine

$$\frac{i}{2}(ab+a'b'+\sqrt{aa'bb'}).$$

Acest rezultat era de aşteptat, căcĭ în acest caz figura noastră este un trunchiŭ de piramidă şi prin urmare formula trebue să fie aceia care dă volumul unuĭ trunchiŭ de piramidă.

452. **Exerciţiĭ**: — 1. *Planul bisector al unuĭ unghiŭ diedru dintr'un tetraedru, împarte creasta opusă în doă segmente proporţionale cu feţele adiacente.*

Fie SMC planul bisector diedruluĭ SC. Avem doă piramide cari aŭ aceiaşĭ înălţime, prin urmare sînt între ele ca bazele lor ACM, BCM; însă aceste triunghiurĭ sînt între ele ca bazele lor AM, BM fiind că aŭ aceiaşĭ înălţime; avem dar



$$\frac{\textit{piramida}\ \mathrm{SAMC}}{\textit{piramida}\ \mathrm{SBMC}}=\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{BM}}.$$

Luând punctul M ca vîrf al piramidelor, ele iar aŭ aceiaşĭ înălţime şi prin urmare sînt între ele ca bazele lor SBC, SAC; aşa că rezultă:

$$\frac{\mathrm{SAC}}{\mathrm{SBC}}=\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{BM}}$$

ceia ce era de arătat.

2. *Dacă prin vîrful S al tetraedruluĭ SABC se duce dreapta SD aşa ca să formeze unghiurĭ egale cu planurile feţelor SAB, SAC, SBC; şi dacă se unesc vîrfurile bazeĭ ABC cu punctul D în care această dreaptă întîlneşte planul ABC, triunghiurile DAB, DBC, DAC sînt proporţionale cu feţele SAB, SBC, SAC.*

Dreapta SD este intersecţiunea celor treĭ planurĭ bisectoare a celor treĭ diedri SA, SB, SC. Piramidele SDAB, SDBC, SDAC avînd aceiașĭ înălțime, sînt între ele ca bazele lor DAB, DBC, DAC. Dacă să ie ca vîrf punctul D, piramidele iar aŭ aceiașĭ înălțime, fiind că D este egal depărtat de cele treĭ fețe, și prin urmare sînt între ele ca bazele lor SAB, SBC, SAC. De unde rezultă :

$$\frac{DAB}{SAB}=\frac{DBC}{SBC}=\frac{DAC}{SAC}.$$

3. *Planurile bisectoare a-le unghiurilor diedri a unuĭ tetraedru SABC, trec prin un acelașĭ punct.*

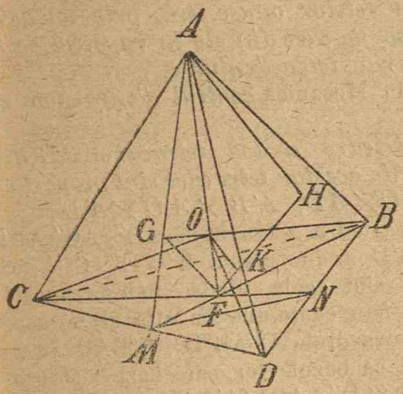
Consider triedrul cu vîrful în S; planurile bisectoare a diedrilor acestuĭ triedru se taie în o dreaptă SE; planul bisector unghiuluĭ diedru BC d. e., întîlnește pe SE în un punct O care este egal depărtat de cele patru fețe a tetraedruluĭ. Acesta este punctul prin care trece cele șese planurĭ bisectoare celor șese unghiurĭ diedre interioare tetraedruluĭ dat.

4. *Planurile perpendiculare în mijlocul fie-căreia din crestele unuĭ tetraedru, trec prin un acelașĭ punct.* Fie SABC un tetraedru; planurile perpendiculare duse prin mijlocul laturilor fețeĭ ABC se taie în o dreaptă EF care este locul geometric al punctelor egal depărtate de cele treĭ vîrfurĭ a acesteĭ fețe A, B și C. De asemene, planurile perpendiculare duse prin mijlocul celor treĭ laturĭ a-le fețeĭ SBC se taie în o dreaptă GH, locul punctelor egal depărtate de S, B, C. Dreptele EF și GH sînt amăndoă așeḍate în planul perpendicular pe BC în punctul M din mijlocul acesteĭ drepte, și sînt perpendiculare respectiv pe dreptele concurente ME și MF; prin urmare EF și GH se întîlnesc în un punct O. Acesta este punctul căutat.

5. *Să se determineze în interiorul unuĭ tetraedru un punct astfel ca unindu'l cu toate vîrfurile, se descompună tetraedrul în patru piramide triunghiulare echivalente.*

Presupun problema rezolvită și ieŭ punctul O în interiorul tetraedruluĭ ABCD, așa ca cele patru tetraedre: OABC, OACD, OABD și OBCD să fie echivalente între ele. Prelungesc dreapta AO până în punctul F unde întîlnește fața opusă BCD, și ḍic că punctul F este intersecțiunea celor treĭ mediane a triunghiuluĭ BCD.

Scobor din punctul A și O perpendicularele AH și OK pe planul BCD; tetraedrele ABCD și OBCD avînd aceiașĭ bază, sînt între ele ca înălțimile AH, OK, saŭ ca dreptele AF și OF care li sînt proporționale. Insă prin ipoteză, tetraedrul OBCD este a patra parte din tetraedrul ABCD; prin urmare OF este a patra parte din AF, saŭ a treia parte din AO. Tot asemene voiŭ proba



că dreapta GO prelungită întîlneşte faţa opusă ACD în un punct G, aşa că OG este a treia parte din BO. Aşa fiind, duc dreptele AG, BF; aceste drepte găsindu-se în planul ABO, întîlnesc creasta CD a tetraedruluĭ în un acelaşĭ punct M. Triunghiurile AOB, FOG aŭ un unghiŭ egal cuprins între laturĭ proporţionale; ele sînt prin urmare asemene şi dreapta FG este paralelă cu AB şi egală cu a treia parte din această linie. Triunghiul MGF este prin urmare asemene cu triunghiul MAB şi MF este egală cu a treia parte din MB saŭ jumătate din FB. Tot asemene voiŭ demonstra că dreapta CF prelungită întîlneşte creasta BD, în un punct N aşa că FN este jumătate din CF. Prin un raţionament asemene cu precedentul, voiŭ proba că dreapta MN este paralelă cu creasta BC şi că M şi N sînt mijlocurile crestelor CD şi DB. Prin urmare, punctul F este intersecţiunea medianelor triunghiuluĭ BCD, şi punctul căutat O se găseşte pe fie-care din cele patru drepte care unesc vîrfurile tetraedruluĭ ABCD cu punctele de întîlnire a medianelor feţelor opuse.

Chestiunea este astfel adusă la, a arăta că aceste patru drepte se întîlnesc în un punct. Fie AF şi BG doă din ele; dreptele AG, BF se întîlnesc în mijlocul M al cresteĭ DC, pentru că aceste drepte sînt medianele triunghiurilor ACD şi CBD. Aşa dar AF şi BG sînt în acelaşĭ plan ABM, şi se întîlnesc. Fie O punctul lor de intersecţiune; duc dreapta FG; triunghiurile MAB şi MFG, avînd un unghiŭ egal cuprins între laturĭ proporţionale, sînt asemene. Insă MF este a treia parte din MB; prin urmare FG este şi ea a treia parte din AB şi este paralelă cu această dreaptă. Din aceste conchid că triunghiurile OFG, OAB sînt asemene şi că OF este a treia parte din OA saŭ a patra parte din AF. Tot asemene voiŭ demonstra că fie-care din celelalte doă drepte duse din vîrfurile C şi D a tetraedruluĭ în punctele de întîlnire a medianelor cu feţele opuse, taie dreapta AF la un sfert din lungimea eĭ cu începere de la faţa BCD. Prin urmare *cele patru* *drepte care unesc vîrfurile tetraedruluĭ ABCD cu punctele de intersecțiune a medianelor fetelor opuse, trec prin un acelaşĭ punct O care împarte pe fie-care din ele în raportul de 3 la 1 cu începere de la vîrfurile tetraedruluĭ.*

Punctul O se numeşte în Mecanică *centrul de gravitate* al tetraedruluĭ.

6. *Dacă unghiurile triedre a doă tetraedre ABCD, A′B′C′D′ sînt egale, volumurile acestor tetraedre sînt proporționale cu productele: $AB \times AC \times AD$, $A'B' \times A'C' \times A'D'$.*

Ieŭ pe crestele unghiuluĭ triedru A lungimile AB″, AC″ AD″ egale respectiv cu A′B′ A′C A′D şi duc planul B″C″D″. Cele doă tetraedre AB″C″D″, A′B′C′D′ sînt egale fiind-că aŭ un unghiŭ diedru egal, cuprins între doă fețe egale una cu alta şi asemene aşeḑate. Duc planul BC″D ; tetraedrele C″AB″D″, C″BAD aŭ aceiaşĭ înălțime şi sînt între ele ca bazele lor, care baze sînt proporționale cu productele $AB'' \times AD''$, $AB \times A'D$ din cauza egalitățeĭ unghiurilor B″AD″ şi BAD *) ; avem dar

$$\frac{piramida\ AB''C''D''}{piramida\ ABC''D} = \frac{AB'' \times AD''}{AB \times AD}.$$

De asemene, tetraedrele ABC″D, ABCD sînt între ele ca bazele lor ABC″, ABC. Insă aceste triunghiurĭ aŭ aceiaşĭ înălțime dacă considerăm în ele pe AC″ şi AC ca baze ; şi avem prin urmare :

$$\frac{piramida\ ABC''D}{piramida\ ABCD} = \frac{AC''}{AC},$$

prin înmulțire găsim ceia ce se cere.

7. *Un plan dus prin mijlocul M şi N a doă laturĭ opuse AB, CD a unuĭ patrulater strâmb ABCD, împarte pe celelalte doă în segmente proporționale.*

Fie P şi Q punctele în cari planul MNPQ taie laturile AD, BC a patrulateruluĭ ; scobor din vîrfurile luĭ perpendicularele Aa, Bb, Cc, Dd pe planul secant. Dreapta ab trece prin M, bc prin Q, cd prin N şi da prin P.

Aşa fiind, triunghiurile dreptunghice APa, DPd sînt asemene între ele, precum şi triunghiurile dreptunghice BQb, CQc; rezultă că

---

*). Aceasta se vede cu uşurință, considerând AD″ şi AD ca bazele celor doă triunghiurĭ şi atuncĭ în locul înălțimilor se pot pune AB″ şi AB care li sînt proporționale.

$$\frac{AP}{DP}=\frac{Aa}{Dd}, \quad \frac{BQ}{CQ}=\frac{Bb}{Cc}.$$

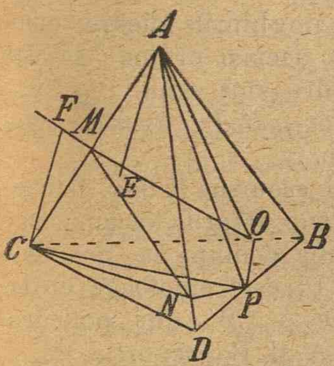
Insă triunghiurile dreptunghice AMa, BMb sînt egale pentru că aŭ ipotenuza egală şi un unghiŭ ascuţit egal; aşa dar Aa=Ab; tot pentru acelaşi cuvînt Cc=Dd şi atuncĭ cele doă proporţiunĭ daŭ

$$\frac{AP}{DP}=\frac{BQ}{CQ}$$

raporturĭ egale şi cu $\frac{AD}{BC}$.

8. *Un plan dus prin mijlocurile a doă creste opuse a unuĭ tetraedru îl împarte în doă părţĭ echivalente.*

Fie tetraedrul ABCD; prin mijlocul M şi P a crestelor opuse AC, BD, duc un plan care taie crestele opuse AD, BC în N şi Q. Pentru a demonstra că poliedriĭ ABMNPQ, CDMNPQ sînt echivalenţĭ, observ că planul APQ descompune pe cel dintâĭ în o piramidă patrunghiulară AMNPQ şi o piramidă triunghiulară ABPQ. Planul CNP împarte poliedrul al doilea, în o piramidă patrunghiulară CMNPQ şi în una triunghiulară CNDP. Cele doă piramide patrunghiulare sînt e-



chivalente, căcĭ aŭ aceiaşĭ bază MNPQ şi înălţimĭ AE, CF egale între ele, fiind că M este mijlocul drepteĭ AC. Cele doă piramide triunghiulare BAPQ, DNCP sînt şi ele echivalente; pentru aceasta, comparăm fie-care din aceste piramide cu tetraedrul ABCD cu care fie-care are câte un unghiu triedru comun şi avem (a vide N-ru 6 precedent);

$$\frac{piram.\ BAPQ}{piram.\ ABCD}=\frac{BA\times BP\times BQ}{BA\times BD\times BC}=\frac{BQ}{2BC},$$

şi

$$\frac{piram.\ DCNP}{piram.\ ABCD}=\frac{DC\times DP\times DN}{DC\times DB\times DA}=\frac{DN}{2DA};$$

membriĭ al doilea a acestor egalităţĭ sînt egalĭ, căcĭ planul MNPQ care trece prin mijlocurile M şi P a laturilor opuse AC, BD din patrulaterul strîmb ABCD, împarte pe celelalte doă laturĭ în segmente proporţionale. Prin urmare, etc.

CAPITULUL III

POLIEDRI ASEMENE.

453. **Definițiune.**—Doă poliedre sînt *asemene* dacă aŭ acelaşĭ numĕr de feţe asemene una cu alta şi dacă unghiurile poliedre formate de feţele asemene sînt egale între ele.

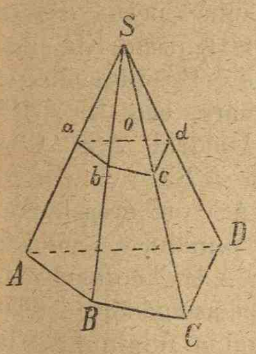
Doă elemente carĭ se corespund în doĭ poliedri asemene, se numesc *omoloage*.

In doĭ poliedri asemene, unghiurile diedre omoloage sînt egale şi aşeḑate în aceiaşĭ ordine; aceasta din cauză că unghiurile poliedre sînt egale.

454. TEOREMA.—*In doĭ poliedri asemene crestele omoloage sînt proporționale.*

Fie P şi P′ doĭ poliedri asemene; doa feţe omoloage fiind poligoane asemene, laturile lor omoloage sînt proporţionale. Apoĭ, laturea comună la doă feţe adiacente A, B a poliedruluĭ P, este omoloagă cu laturea comună feţelor adiacente A′. B′ din poliedrul P′ omoloage respectiv feţelor A şi B; raportul de similitudine între feţele omoloage A şi A′ este egal cu raportul de similitudine între celelalte doă feţe omoloage B şĭ B′, fiind ca ambele aceste raporturĭ sînt egale (§. 170) cu raportul între laturile comune feţelor A şi B de o parte, A′ şi B′ de altă parte; însă raportul de similitudine între A şi A′ este egal cu raportul altor doă laturĭ a-le lor omoloage, care laturĭ sînt şi ele creste omoloage de a poliedrilor. Prin urmare, conchidem că raportul între doă creste omoloage este egal cu raportul între alte doă creste omoloage; cu alte cuvinte, crestele omoloage a doĭ poliedri asemene P P′, sînt proporţionale între ele.

455. TEOREMA —*Dacă tăiem o piramidă prin un plan paralel cu baza şi cuprins între vîrf şi baza eĭ, determinăm o piramidă asemene cu cea întâia.*



Fie SABCD o piramidă şi fie *abcd* o secţiune făcută în această piramidă prin un plan paralel cu baza ABCD; zic că piramidele SABCD şi *Sabcd* sînt asemene între ele.

Bazele piramidelor *abcd* şi ABCD. sînt poligoane asemene dreptele *ab, bc*.... sînt respectiv paralele cu AB. BC... şi prin urmare feţele *Sab, Sbc*.... sînt respectiv asemene cu feţele SAB, SBC...; aşa dar cele doă piramide sînt cuprinse între feţe asemene.

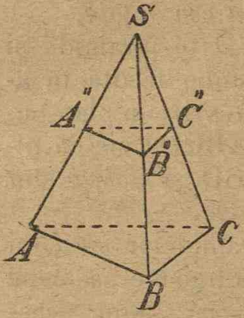
Apoĭ unghiul poliedru S li este comun. Unghiurile triedre, a căror vîrfurĭ sînt *a* şi A aŭ feţele egale una cu alta şi unghiurile diedre iarăşĭ egale unul cu altul; maĭ mult, dispoziţiunea elementelor în unul din aceste triedre, este aceiaşĭ ca şi a elementelor egale în celalalt; aşa dar triedriĭ *a*, A se pot suprapune, prin urmare sînt egalĭ. Tot asemene vom arăta că şi unghiurile triedre *b*, *c*... sînt respectiv egale cu unghiurile triedre B, C...

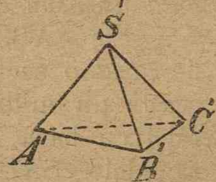
Aşa dar, cele doă piramide sînt cuprinse între feţe asemenea şi unghiurile poliedre omoloage sînt egale, şi prin urmare sînt asemene.

456. TEOREMA. — *Doă piramide triunghiulare care aŭ un unghiŭ diedru egal cuprins între doă feţe asemene una cu alta şi asemene aşedate, sînt asemene.*

Fie doă piramide SABC, S'A'B'C' în care diedrul SA este egal cu eiedrul S'A', faţa SAB asemene cu faţa S'A'B' şi faţa SAC asemene cu S'A'C', şi părţile cari se corespund sînt dispuse în aceiaşĭ ordine;

ḑic că aceste doă piramide sînt asemene. Să transportăm piramida $S'A'B'C'$ aplicănd faţa $A'S'B'$, peste faţa

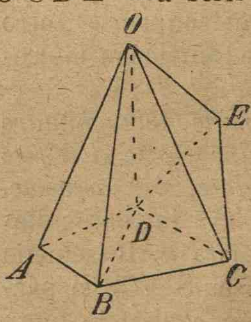


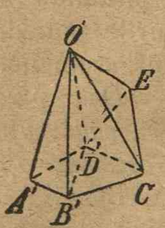


ASB aşa ca $S'A'$ să vină peste SA şi $S'B'$ peste SB şi A'' şi B'' punctele în care cad A' şi B'. Diedrul $A'S'$ fiind egal cu SA, faţa $A'S'C'$ vine să se aşeḑe în planul ASC şi creasta $S'C'$ se aşaḑă pe SC, punctul C' vind în C''. Piramida $S'A'B'C'$ coincide dar cu piramida $SA''B''C''$. Insă din cauza asemănăreĭ feţelor SAB şi $S'A'B'$, unghiul SAB este egal cu unghiul $S'A'B'$ şi prin urmare şi cu unghiul $SA''B''$ şi atuncĭ $A''B''$ este paralelă cu AB. Laturile unghiuluĭ $C''A''B''$ fiind paralele cu laturile unghiuluĭ CAB, planul $C''A''B''$ este paralel cu planul CAB şi prin urmare şi piramida $SA''B''C''$, saŭ piramida $S'A'B'C'$, este asemene cu piramida SABC.

457. TEOREMA.—*Doĭ poliedri compuşĭ din un acelaşĭ numĕr de tetraedri asemene unul cu altul şi aşeḑaţĭ în aceiaşĭ ordine, sînt asemene.*

Fie OABD, OBCD, OCDE.. $O'A'B'D'$, $O'B'C'D'$. $O'C'D'E'$ doă seriĭ de tetraedri asemene respectiv unul cu altul şi aşeḑaţĭ în aceiaşĭ ordine; ḑic că poliedrul format de ciĭ întăĭ tetraedri este asemene cu poliedrul format de ciĭ de al doilea.





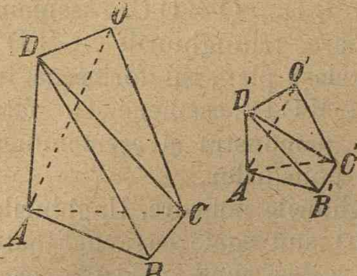
Să cercetăm întăĭ feţele poliedrilor. Feţele omoloage a celor doĭ poliedri sînt asemene fiind că sînt compuse din un acelaşĭ numĕr de triuughiurĭ asemene şi asemene aşeḑaţe. In adevăr, să luăm d. e. faţa ABCD din poliedrul întăĭ. Triunghiurile ABD şi BCD din cari se compune această faţă, sînt asemene cu triunghiurile A′B′C′, B′C′D′ ca feţe omoloage de tetraedri asemene. Maĭ mult încă, triunghiurile ABD şi BCD fiind în un acelaşĭ plan, unghiurile diedre OBDA şi OBDC a tetraedrilor OABD şi OBDC sînt suplementare. Tot astfel este şi cu unghiurile diedre omoloage O′B′D′A′ O′B′D′C′ a tetraedrelor O′A′B′D′, O′B′D′C′ asemene cu ciĭ precedenţĭ. Prin urmare, triunghiurile A′B′D′, B′C′D′ sînt şi ele în un acelaşĭ plan, şi formează în poliedrul al doilea o faţă A′B′C′D′ asemene cu faţa ABCD. Tot asemene, vom demonstra şi asemenimea a căte altor doă feţe de-a poliedrilor.

Să trecem acum la unghiurile poliedre. Unghiurile poliedre a celor doĭ poliedri sînt egale ca avînd toate elementele lor egale şi în acelaşĭ mod aşeḑate; căcĭ feţele omoloage a celor doĭ poliedri fiind asemene aşeḑate, unghiurile lor poliedri aŭ, maĭ întăĭ, toate feţele lor egale una cu alta şi în acelaşĭ mod aşeḑate. Apoĭ, unghiurile diedre omoloage acestor unghiurĭ poliedre, sînt egale intre ele, saŭ fiind-că sînt diedre omoloage din doĭ tetraedri asemene, saŭ ca sumă de unghiurĭ diedre egale. De exemplu, unghiul diedru BCDE, format de feţele ABCD şi CDE din poliedrul întăĭ, este egal cu suma unghiurilor diedre BCDO şi ECDO, carĭ aparţin tetraedrilor OBCD, OCDE; şi unghiul diedru B′C′D′E′ format de feţele A′B′C′D′ şi C′D′E′ din poliedrul al doilea, este egal cu suma unghiurilor diedre omoloage B′C′D′O′, E′C′D′O′ cari aparţin tetraedrilor O′B′C′D′ O′C′D′E′.

458. TEOREMA.—*Doĭ poledri asemene pot fi des-*

compuşĭ în un acelaşĭ numĕr de tetraedri asemene şi asemene aşeḑaţĭ.

Sĕ luăm punctul O în interiorul întăiuluĭ poliedru, pe care să'l descompunem în tetraedri luănd punctul O ca centru de descompunere şi să fie OABC unul din tetraedri. Punctele A,B,C avînd ca omoloage în poliedrul al doilea punctele A′, B′, C′ să ducem un plan O′A′B′ care să facă deasupra luĭ A′B′C′ un unghiŭ diedrŭ egal cu acel format de planul AOC deasupra luĭ ABC, şi în acest plan să construim triunghiul O′A′B′ asemene cu triunghiul OAB. Luănd dar punctul O′ ca centru de descompunere, descompunem poliedrul al doilea în tetraedri cari corespund cu aciia din poliedrul întăĭ şi rămăne numaĭ să probăm că aceştĭ tetraedri sînt asemene între iĭ doĭ căte doĭ.



Fie D un al patrulea vîrf din poliedrul întăĭ, astfel ca triunghiurile ABC, ABD să aibă o lature comună şi să fie aşeḑate pe aceiaşĭ faţă saŭ pe doă feţe adiacente. Să comparăm între iĭ tetraedriĭ OABD, O′A′B′D′. Feţele OAB, O′A′B′ sînt asemene ca feţe omoloage a doĭ tetraedri asemene OABC, O′A′B′C′; feţele ABD, A′B′D′ sînt şi ele asemene ca triunghiurĭ omoloage de doă feţe asemene de-a poliedrilor daţĭ. Maĭ mult, dacă triunghiurile ABC şi ABD sînt în acelaşĭ plan, unghiurile diedre OABD O′A′B′D′ sînt egale ca suplemente de unghiurĭ diedre egale OABC, O′A′B′C′; dacă triunghiurile ABC şi ABD nu sînt în un acelaşĭ plan, unghiurile diedre OABD, O′A′B′D′ sînt iarăşĭ egale ca diferenţe de unghiurĭ diedre egale

DABC şi OABC de o parte, D'A'B'C' şi O'A'B'C' de altă parte. In amăndoă cazurile, tetraedriĭ OABD şi O'A'B'D' sînt asemene între iĭ (§. 456).

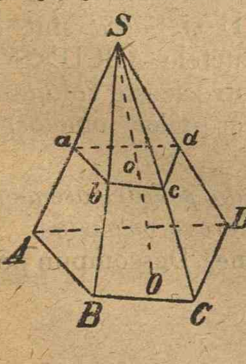
Aeemenimea acestor doĭ din urmâ tetraedri ni va permite să demonstrăm în acelaşĭ mod, asemenimea între alţĭ doĭ tetraedri următorĭ, şi aşa maĭ departe.

459. **Observaţiune**.—Doă puncte O şi O', raportate la doĭ poliedri asemene, se numesc *omoloage*, dacă unind unul din ele O, cu vîrfurile consecutive A,B,C... a-le unuia din poliedri, şi pe cellalt O' îl unim cu vîrfurile omoaloage A,'B',C'... al celuialalt poliedru, se capătă doĭ tetraedri OABC, O'A'B'C' asemene şi în acelaşĭ mod aşeḑaţĭ în raport cu ciĭ doĭ poliedri.

Din demonstraţiunea precedentă rezultă, că se pot lua doă puncte omoloage ca centri de descompunere a doĭ poliedrĭ asemene, în tetraedri asemene şi în acelaşĭ mod aşeḑaţĭ.

Dacă punctul O este exterior poliedruluĭ întăĭ, omologul seŭ O' este şi el exterior poliedruluĭ al doilea ; în acest caz, poliedriĭ trebue consideraţĭ ca diferenţe de tetraedri.

Dacă punctul O coincide cu unul din vîrfurile A a poliedruluĭ întăĭ, omologul seŭ O' coincide cu vîrful A' din poliedrul al doilea, şi diagonalele omoloage a celor doĭ poliedrĭ, relative la vîrfurile A şi A' se confundă cu crestele laterale a tetraedrelor lor omoloage.



460. TEOREMA. — *Volumurile a doă piramide asemene sînt proporţionale cu cuburile crestelor lor omoloage.*

Fie SABCD, *Sabcd*, doă piramide asemene, pe care le presupunem aşeḑate una în alta aşa ca unghiurile lor poliedre să coincidă. Atuncĭ bazele ABCD, *abcd* a acestor piramide sînt paralele și înălțimile lor SO și So se măsoară pe aceiașĭ dreaptă SO, duse din vîrful comun S perpendiculară pe baze.

Piramidele SABCD și Sabcd, fiind asemene, bazele lor ABCD, abcd sînt și ele asemene și ariile acestor poligoane sînt proporționale cu patratele laturilor omoloage avem d. e.

$$\frac{ABCD}{abcd}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{ab}^2};$$

însă triunghiurile Sab și SAB fiind asemene daŭ

$$\frac{AB}{ab}=\frac{SA}{Sa},$$

prin urmare, ariile bazelor sînt proporționale cu patratele crestelor omoloage a piramidelor

$$\frac{ABCD}{abcd}=\frac{\overline{SA}^2}{\overline{Sa}^2}.$$

Insă avem, de asemene din cauza paralelismuluĭ planurilor bazelor

$$\frac{SO}{So}=\frac{SA}{Sa};$$

așa dar înmulțind membru cu membru avem

$$\frac{ABCD\times SO}{abcd\times Sa}=\frac{\overline{SA}^3}{\overline{So}^3}.$$

Insă volumurile piramidelor SABCD și Sabcd sînt egale respectiv cu o treime din productele ABCD×SO, abcd×So; prin urmare raportul între aceste volumurĭ este egal cu raportul cuburilor crestelor omoloage SA, Sa.

461. TEOREMA.—*Volumurile a doĭ poliedri asemene sînt proporționale cu cuburile a doă creste omoloage.*

Fie P și *p* doĭ poliedri asemene. Descompun poliedriĭ în un acelaşĭ număr de tetraedri asemene şi să fie V, V′, V″.... volumurile tetraedrilor poliedruluĭ P şi v, v', v''.... volumurile tetraedrilor corespunḑetorĭ din poliedrul p.—Fie A, a doă creste omoloage. Avem, în virtutea Teoremeĭ precedente.

$$\frac{V}{v}=\frac{A}{a^3}\;\frac{V'}{v'}=\frac{A^3}{a^3},\;\frac{V''}{v''}=\frac{A^3}{a}\dots$$

şi prin urmare:

$$\frac{V}{v}=\frac{V'}{v'}=\frac{V''}{v''}=\dots=\frac{A^3}{a^3};$$

din aceste fracţiunĭ egale deducem

$$\frac{V+V'+V''+}{v+v'+v''+}=\frac{A^3}{a^3},$$

saŭ în fine $$\frac{P}{p}=\frac{A^3}{a^3}.$$

462. **Definiţiune**.—Un poliedru se ḑice că este *regulat*, atuncĭ când toate feţele luĭ sînt poligoane regulate egale între ele, şi toate unghiurile luĭ poliedre sînt egale între ele.

463. TEOREMA. *Nu există de cât cincĭ poliedri regulaţĭ convexĭ.*

Suma feţelor unuĭ unghiu poliedru convex, trebuind să fie maĭ mică de cât patru unghiurĭ drepte (§. 379), dacă feţele sînt triunghiurĭ ecvilaterale, nu putem reuni în jurul unuĭ punct, pentru a forma un unghiu poliedru. de cât *treĭ* saŭ *patru* saŭ *cincĭ* de aceste triunghiurĭ. Avem ast-fel: *tetraedrul regulat* cuprins între patru triunghiurĭ ecvilaterale; *octaedrul regulat* cuprins între opt triunghiurĭ ecvilaterale; *icosaedru regulat* cuprins între doă-ḑecĭ de triunghiurĭ ecvilaterale. Şese triunghiurĭ ecvilaterale nu le putem reuni în jurul unuĭ punct căcĭ suma unghiurilor face patru unghiurĭ drepte ; nu maĭ este unghiŭ poliedru; cele şese triunghiurĭ se găsesc în un plan.

Patratele şi pentagoanele regulate nu le putem reuni de căt căte *treĭ*, fiind că unghiul unuĭ patrat este drept. şi acela a unuĭ pentagon este egal cu $^6/_5$ din un unghiu drept. Avem: *hexaèdrul regulat* saŭ cubul cuprins între şese patrate egale, şi *dodecaedrul regulat* cuprins între doă-spre-ḑece pentagoane regulate.

Nicĭ un alt unghiu poliedru regulat convex nu maĭ este posibil, căcĭ dacă am lua d. e. hexagonul regulat, a căruĭ unghiŭ este $^4/_3$ din un unghiu drept, treĭ unghiurĭ de hexagon regulat fac patru unghiurĭ drepte; prin urmare aceste treĭ hexagoane ar fi întinse pe un plan.

464. **Exercițiĭ.**—*1. Doă piramide poligonale sînt asemene daca aŭ un unghiu diedru egal, cuprins între bază şi o fața laterală asemene una cu alta şi asemene aşeḑate.*

Fie unghiurile diedre AB, A'B' egale între ele, cuprinse între bazele ABCD şi A'B'C'D' şi fețele SAB, S'A'B' respectiv asemene. Ieŭ Sa=S'A' şi prin a duc planul paralel cu baza, determin piramida $Sabcd$ asemene cu SABCD şi egală cu S'A'B'C'D', de unde rezultă ceia-ce se cere.

2. Suprafețele a doă piramide asemene sînt proporționale cu patratele laturilor omoloage ; pentru că d. e. ariile fețelor SAB, S'A'B' sînt proporționale respectiv cu $\overline{AB}^2$ şi $\overline{A'B'}^2$.

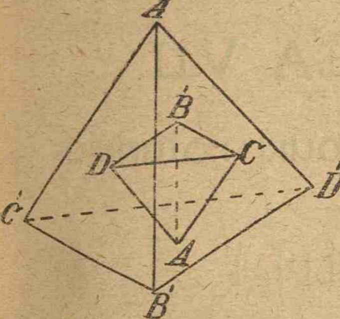
3. Se taie o piramidă prin un plan paralel cu baza sa, aşa ca suprafața piramideĭ determinată de acest plan şi aceia a piramideĭ dată, să fie proporționale cu doă lungimĭ date m şi n, adică să avem

$$\frac{Sabcde}{SABCDE}=\frac{m}{n}, \text{ prin urmare } \frac{\overline{Sa}^2}{\overline{SA}^2}=\frac{m}{n},$$

Aşa dar lungimea Sa este laturea unuĭ patrat a căruĭ raport la patratul lungimeĭ SA este egal cu raportul m la n.

4. Dacă doă piramide asemene, aŭ fețele lor omoloage paralele una cu alta, dreptele care unesc vîrfurile omoloage se întîlnesc în un acelaşĭ punct. Din cauza asemenimeĭ figurilor, rezultă că dreptele AB şi ab sînt paralele între ele precum şi BC cu bc, CD cu cd.... Apoĭ dacă Aa, Bb se întîlnesc în O ḑic că şi Cc Dd.. trec prin O. Pentru aceasta ieŭ d. e. triunghiurile OBC, Obc cari, se poate vide că sînt asemene; atuncĭ rezultă că unghiul BOC este egal cu unghiul bOc şi prin urmare c se află pe OC.

5. *Dacă se duce prin vîrfurile unuĭ tetraedru planurĭ paralele cu fețele opuse, tetraedrul format de aceste planurĭ este asemene cu tetraedrul dat?*



Fie tetraedrul ABCD; duc prin fie-care din vîrfurĭ un plan paralel cu fața opusă: aceste planurĭ formează un tetraedru; în adevĕr, unul oare-care din iĭ, d. e. acel care trece prin vîrful A, este tăiet de ciialalțĭ treĭ în treĭ drepte B′C′, D′C′, D′B′ care sînt respectiv paralele cu laturile BC, CD, DB feţeĭ BCD a tetraedruluĭ, şi formează prin urmare un triunghiŭ B′C′D′ asemene cu fața BCD. Tot ast-fel este şi cu intersecţiunile planuluĭ dus prin vîrful B cu celelalte treĭ planurĭ; aceste drepte determineazā un unghiu A′B′C′ asemene cu triunghiul ABC. Triunghiurile A′B′D′ A′C′D′ figurează planurile paralele cu fețele ABD, ACD, duse prin vîrfurile C şi D. Prin urmare, cele patru planurĭ considerate formează tetraedrul A′B′C′D′. Este evident că ciĭ doĭ tetraedri ABCD şi A′B′C′D′ nu sînt asemene, cu toate că fețele lor opuse sînt asemene, căcĭ unghiurile triedre omoloage, d. e. B şi B′, avênd crestele lor paralele doă câte doă şi îndreptate în senzurĭ contrare, sînt simetrice şi prin urmare neegale.

6. *A calcula, cu aproximațiune de un centimetru, dimensiunile unuĭ paralelipiped dreptunghic, ştiind că ele sînt proporționale cu numeriĭ $^2/_3$, $^4/_5$, $^3/$ şi că volumul seŭ este egal cu doĭ metri cubicĭ.*

Paralelipipedul dreptunghic a căruĭ dimensiunĭ sînt $^2/_3$, $^4/_5$ şi $^3/_4$ din un un metru este egal cu $^2/$ din un metru cubic. Insă, acest paralelipiped este prin ipoteză, asemene cu paralilipipedul propus; aşa dar volumurile lor sînt proporționale cu cuburile crestelor omoloage. Insemnând prin x, y, z crestele căutate, avem:

$$x = {}^2/_3\sqrt[3]{5} = 1^m,14\,;\quad y = {}^4/_5\sqrt[3]{5} = 1^m,37\,;\quad z = {}^3/_4\sqrt[3]{5} = 1^m,28.$$

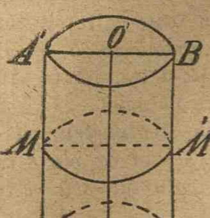
CARTEA VII.

Cele trei corpuri rotunde

CAPITULUL I

CILINDRU

465. **Definițiune.**—Un dreptunghiŭ AOO′A′ învîrtindu-se în jurul uneia din laturile sale, OO′ d. e., dă naștere unuĭ corp care se numește *cilindru drept cu bază circulară.*

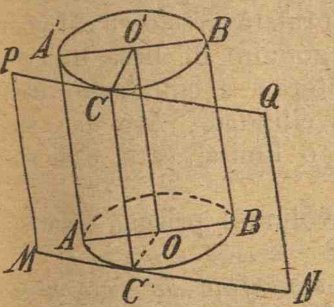


In această învîrtire, laturile OA, O′A′ a-le dreptunghiuluĭ descriŭ, căte un cerc cu centrele în O și O′ de rade OA, O′A′; aceste cercurĭ sînt paralele între ele și formează bazele cilindruluĭ.

Laturea AA′ în învîrtirea eĭ, dă naștere la *suprafața laterală* a cilindruluĭ: această lature se maĭ numește și *generătoarea cilindruluĭ.* Un punct M de pe AA′ descrie o circumferență egală cu circumferența unuia din cercurile de bază, și planul circumferențeĭ descrisă de punctul M fiind paralel cu planul cercurilor de bază este perpendicular pe OO′, iar centrul circumferenţeĭ este pe OO′.

Laturea fixă OO′ a dreptunghiuluĭ în jurul căreia se face învîrtirea dreptunghiuluĭ, este *axa* cilindruluĭ. Mărimea acesteĭ axe, este *înălţimea* cilindruluĭ.

466. Să considerăm generătoarea cilindruluĭ în una din poziţiunile eĭ, d. e. CC′; prin punctele C şi C′ să ducem tangentele MN şi PQ la circumferenţele de baze; aceste tangente, fiind aşeḑate respectiv în planurile cercurilor de baze, care sînt paralele între ele şi tot odată şi perpendiculare pe planul COO′C′ format de raḑele paralele OC, O′C′, sînt paralele între ele; prin urmare formează un plan MNQP care are de comun cu cilindrul numaĭ generătoarea CC′. Un asemene plan se numeşte *plan tangent* la cilindru de-alungul generătoareĭ CC′.



Un plan tangent la cilindru de-alungul uneĭ generătoare, poate fi considerat ca limita unuĭ plan secant care trece prin o generătoare vecină cu ea, când această din urmă tinde a se confunda cu cea întăĭ.

467. Dacă construim o prismă dreaptă care să aibă aceiaşĭ înălţime ca cilindru şi a căreĭ bază să fie un poligon înscris saŭ circumscris la cercul de bază a cilindruluĭ, atuncĭ avem o *prisma înscrisă saŭ circumscrisă* la cilindru. Fie-care faţă a prismeĭ circumscrise, este tangentă la cilindru de-alungul uneĭ generătoare. Dacă poligonul înscris saŭ circumscris la cercul de bază este regulat, atuncĭ prisma înscrisă saŭ circumscrisă la cilindru este regulată.

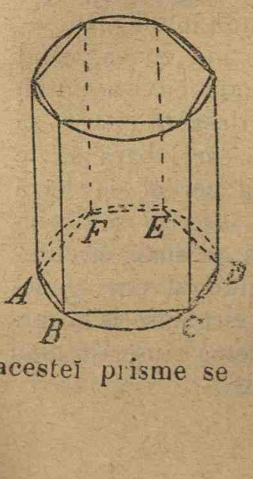
468. Doĭ cilindri drepţĭ cu baze circulare sînt *asemene*. dacă provin din dreptunghiurĭ asemene, adică dacă înalţimile lor sînt proporţionale cu raḑele bazelor lor.

469. Să considerăm o prismă regulată înscrisă în un cilindru drept cu baze circulare, şi să facem să crească necontenit numĕrul laturilor poligonuluĭ de bază: în fie-care moment suprafaţa laterală a prismeĭ are drept măsură productul perimetruluĭ bazeĭ prin înălţime (§. 405). Această suprafaţă creşte cu căt vom înmulţi numĕrul laturilor poligonuluĭ de bază, însă nu poate trece peste suprafaţa laterală a cilindruluĭ căcĭ prismele sînt toate înscrise în cilindru. Aşa dar suprafaţa laterală a prismeĭ are o limită, care este suprafaţa laterală a cilindruluĭ.

Tot asemene este şi cu volumul prismeĭ înscrisă în cilindru.

De aceia, *vom considera suprafaţa laterală a unuĭ cilindru drept cu baza circulară şi volumul luĭ, ca limitele către care tind respectiv suprafaţa laterală şi volumul uneĭ prisme înscrise a căreĭ numĕr de laturĭ a poligonuluĭ de bază creşte necontenit.*

Orĭ-ce proprietate, relativă la prismă care nu va depinde de numĕrul şi măsura laturelor bazeĭ, se va aplica şi la cilindru.



470. TEOREMA. — *Aria suprafeţeĭ laterale a unuĭ cilindru drept cu baze circulare are drept măsură productul înălţimeĭ luĭ prin lungimea circumferenţeĭ cerculuĭ de bază.*

Să înscrim în cilindru, o prismă regulată, d. e. prisma cu bază hexagonală: suprafaţa laterală a aceste̐ prisme se compune din dreptunghiurĭ egale, şi aria eĭ laterală are drept măsură productul perimitruluĭ poligonuluĭ de bază prin înălţimea cilindruluĭ.

Să imaginăm că îndoim necontenit numĕrul laturilor poligonuluĭ de bază ; perimetrul poligonuluĭ tinde către o limită care este lungimea circumferenţeĭ de bază ; înălţimea rămâne tot egală cu înălţimea cilindruluĭ ; suprafaţa laterală a cilindruluĭ fiind limita suprafeţeĭ laterale a prismeĭ videm că *suprafaţa laterală a cilindruluĭ are drept măsură productul lungimeĭ circumferenţeĭ cerculuĭ de bază prin înălţimea luĭ.*

471. **Corolar.**—Insemnând prin R rada cerculuĭ de bază şi prin I înălţimea cilindruluĭ, prin S suprafaţa luĭ laterală, avem expresiunea

$$S=2\pi RI.$$

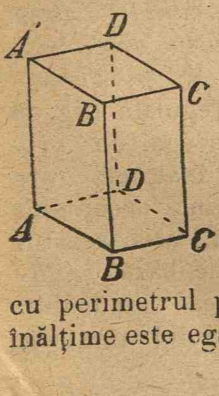
Suprafaţa totală, compunîndu-se din cele doă cercurĭ de bază şi din suprafaţa laterală, însemnând prin S_1 suprafaţa totală avem expresiunea

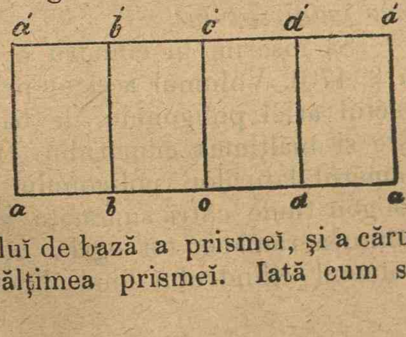
$$S_1=2\pi RI+2\pi R^2,$$

saŭ

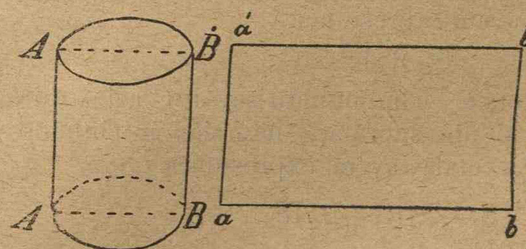
$$S_1=2\pi R(I+R).$$

472. **Desfăşurarea cilindruluĭ.** Suprafaţa laterală a uneĭ prisme poate fi desfăşurată pe un plan şi acopere o porţiune de plan egală cu un dreptunghiŭ a căruĭ bază este egală cu perimetrul poligonuluĭ de bază a prismeĭ, şi a căruĭ înălţime este egală cu înălţimea prismeĭ. Iată cum se





poate face desfşăurarea: fie prisma patrunghiulară ABCDA′B′C′D′; o deschid d. e. de-alungul crestei AA′ şi învîrtesc faţa ABB′A′ în jur de BB′ păna ce o aduc în planul feţeĭ BCC′B′; laturile BA, B′A′, perpendiculare pe BB′, rămăn perpendiculare pe aceastā dreaptă şi se aşadă pe prelungirile laturilor CB C′B′ perpendiculare şi ele pe BB′. De asemene să învărtim faţa CC′D′D în jur de CC′ pănă ce vine în planul feţeĭ CC′B′B, etc; continuănd tot astfel avem o serie de dreptunghiurĭ, fie-care egal cu căte o faţă a prismeĭ, formănd împreună un dreptunghiŭ egal cu suprafaţa laterală a prismeĭ şi avănd ca înălţime, înnălţimea însăşĭ a prismeĭ.



Dacă de la prismă trecem la cilindru, găsim că suprafaţa laterală a cilindruluĭ, fiind desfăşurată, acopere o porţiune de plan egală cu un dreptunghiu a căreĭ bază este egală cu lungimea circumferenţeĭ de bază a cilindruluĭ şi înălţime este egală cu acea a cilindruluĭ.

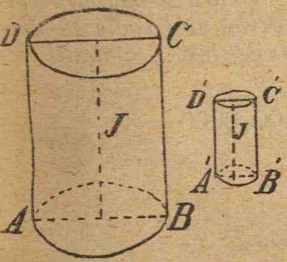
473. TEOREMĂ.—*Volumul unuĭ cilindru drept cu bază circulară are ca măsură productul arieĭ bazeĭ prin înălţimea luĭ.*

Să înscrim în cilindru o prismă regulată (fig. de la § 470). Volumul aceşteĭ prisme este egal cu productul arieĭ poligonuluĭ de bază prin înălţime, care este şi înălţimea cilindruluĭ. Dacă îndoim necontenit numěrul laturilor poligonuluĭ de bază, aria acestuĭ poligon tinde către suprafaţa cercului de bază, şi înnălţimea rămăne tot egală cu înălţimea cilindruluĭ. Volumul cilindruluĭ fiind limita volumuluĭ prismeĭ, avem că volumul cilindruluĭ are drept măsură aria circumferenţeĭ de bază înmulţită cu înălţimea cilindruluĭ.

474. **Corolar.**—Insemnănd prin R rada cerculuĭ de bază şi prin I înălţimea cilindruluĭ, volumul luĭ va ave de expresiune.

$$V=\pi R^2 I.$$

475. TEOREMĂ.—*Dacă doĭ cilindri cu baze circulare sînt asemene, suprafeţele laterale şi suprafeţele totale a-le lor, sînt proporţionale cu patratele radelor de baze, iar volumurile lor sînt proporţionale cu cuburile aceloraşĭ rade.*



Fie doĭ cilindri asemene ABCD, A′B′C′D′; însemnănd prin R şi r radele bazelor acestor cilindri prin I şi i înnălţimile lor, prin S şi s suprafeţele lor laterale, S_1 şi s_1 suprafeţele lor totale şi prin V şi v volumurile lor, avem:

$$S=2\pi RI;\quad S_1=2\pi R(R+I);\quad V=\pi R^2 I.$$
$$s=2\pi ri;\quad s_1=2\pi r(r+i);\quad v=\pi R^2 i.$$

Cilindriĭ fiind asemenĭ, avem (§. 468)

$$\frac{R}{r}=\frac{I}{i}=\text{ prin urmare cu }\frac{R+I}{r+i};$$

ţinînd samă de aceste ralaţiunĭ, deducem:

$$\frac{S}{s}=\frac{R^2}{r^2},$$

$$\frac{S_1}{s_1}=\frac{R}{r}-\frac{R+I}{r+i}=\frac{R}{r}\times\frac{R}{r}=\frac{R^2}{r^2},$$

şi

$$\frac{V}{v}=\frac{R^3}{r^3},$$

ceia ce demonstră Teo. ema.

476. **Exerciţiĭ.**— *1. A calcula, cu aproximaţiune de un milimetru, dimensiunile litruluĭ întrebuinţat pentru licvide, ştiind că are forma unuĭ cilindru drept cu baze circulare şi înălţimea luĭ este de doă orĭ mare de căt diametrul bazeĭ.*

I fiind înălţimea, raza bazeĭ este $^1/_4$ I; un litru conţine 1000000 de milimetri cubicĭ, avem dar

$$\frac{\pi I^3}{16} = 1000000, \text{ de unde } I = \sqrt[3]{\frac{16000000}{\pi}};$$

făcănd calculile găsim I=172 *m.m.* şi prin urmare raḑa bazeĭ este 43 *m.m.*

2. Litrul, decalitru şi hectolitru cu care se măsoară grînele, aŭ forma de cilindri a căror înălţimĭ sînt egale cu diametrul bazeĭ; să se calculeze dimensiunile lor. Se găseşte:

$$I = \sqrt[3]{\frac{4000000}{\pi}} = 108\,m.m.;\ I_1 = \sqrt[3]{\frac{40000000}{\pi}} = 233\,m.m.$$

$$I^2 = \sqrt[3]{\frac{400000000}{\pi}} = 503\,m.m.$$

3. Să se calculeze raḑa interioară a unuĭ tub de sticlă, perfect cilindric, ştiind că acest tub căntăreşte 90 gr. cănd este deşert şi 150 gr. cănd întroducem în el o colonă de Mercur de 9 c.m. de lungime. (Densitatea Mercuruluĭ este egală cu 13,568).

Mercurul introdus în tub căntăreşte 60 gr. prin urmare volumul luĭ este $^{60}/_{13,568}$ *c.m*^{3}. Dacă luăm milimetru ca unitate lineară, şi însemnăm prin x lungimea raḑeĭ interioare a tubuluĭ, avem relaţiunea

$$9\pi x^2 = \frac{60000}{13,568} m.m^3.$$

de unde $$x = \sqrt{\frac{60000}{9\pi 13,568}} m.m. = 12,5\, m.m.$$

4. A determina dimensiunile unuĭ cilindru drept cu bază circulară, ştiind că înălţimea luĭ este egală cu jumătatea raḑeĭ de bază şi suprafaţa totală egală cu suprafaţa unuĭ cerc dat.

Să însemnăm prin x rada de bază a cilindruluĭ căutat şi a rada cerculuĭ dat, avem :

$$2\pi x\left(x+\frac{x}{2}\right)=2\pi a^2,$$

saŭ

$$3x^2=a^2.$$

Aşa dar x este rada cerculuĭ circumscris la triunghiul ecvilateral a căruĭ lature este a.

5. *Pentru a scoate apa din un puţ, ne servim de o pompă a căreĭ tub are un diametru interior egal cu d. Cursa pistonuluĭ este egală cu h; D este diametrul puţuluĭ şi I adâncimea apeĭ. Câte curse va face pistonul ca să scoatem toată apa din puţ?*

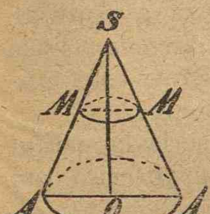
Numĕrul curselor pistonuluĭ va fi egal cu raportul între capacitatea puţuluĭ şi aceia a corpuluĭ de pompă.

Mĕsura celeĭ dintâĭ este $\frac{1}{4}\pi D^2 I$ şi a celeĭ de a doa este $\frac{1}{4}\pi d^2 h$; aşa dar numĕrul căutat este: $\left(\frac{D}{d}\right)^2 \times \frac{I}{h}$.

CAPITULUL II

CONUL

477. **Definiţiunĭ.**— Un triunghiŭ dreptunghic AOS învîrtindu-se în jurul uneia din catetele sale, SO d. e., dă naştere unuĭ corp, care se numeşte *con drept cu bază circulară*.

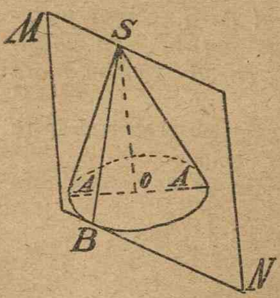


In această învârtire, ceialaltă catetă OA descrie un cerc care formează *baza* conuluĭ.

Ipotenuza SA în învărtirea eĭ dă naştere la *suprafaţa laterală* a conuluĭ; ea se maĭ numeşte şi *generătoarea* conuluĭ saŭ *apotema* luĭ. Un punct M de pe SA descrie o circumferență a căreĭ plan este paralel cu planul cerculuĭ de bază și prin urmare perpendicular pe SO și centrul circumferențeĭ este pe SO.

Laturea fixă SO a triunghiuluĭ dreptunghic este *axa* conuluĭ. Mărimea acesteĭ axe este *înălțimea* conuluĭ.

Punctul fix S este *vîrful* conuluĭ.



478. Să considerăm generătoarea conuluĭ în una din pozițiunile eĭ, d. e. SB; în punctul B duc tangenta BN la circumferența de bază; planul MN determinat de generătoarea SB și tangenta corespondentă BN, n'are de comun cu conul de căt generătoarea SB. Un asemene plan se numește *plan tangent* la con de-alungul generătoareĭ SB.

Un plan tangent la con de-alungul uneĭ generăroare poate fi considerat ca limita unuĭ plan secant care trece prin generătoarea considerată și o generătoare vecină cu ea, cănd aceasta din urmă tinde a se confunda cu cea dintăĭ.

479. Dacă construim o piramidă a căreĭ vîrf să fie vîrful conuluĭ și să aibă ca bază un poligon înscris saŭ circumscris la cercul de bază a conuluĭ, atuncĭ avem o *piramidă înscrisă saŭ circumscrisă* la con. Fie-care față a piramideĭ circumscrise este tangentă la con de-alungul uneĭ generătoare.

Dacă poligonul înscris saŭ circumscris la cercul de bază este regulat, atuncĭ piramida înscrisă saŭ circumscrisă la con este *regulată*.

480. Dacă tăiem un con circular drept prin un plan perpendicular pe axă, adică paralel cu baza conuluĭ, și lăsăm la o parte porțiunea despre vîrf,

căpătăm un corp AA'MM' (fig. de la §. 485), terminat cu o porțiune din suprafața unuĭ con și prin doă cercurĭ paralele AA', MM'. Acest corp se numește *trunchiŭ de con circular drept cu baze paralele.*

Acest trunchiŭ de con, maĭ poate fi considerat ca născut prin învărtirea trapezuluĭ AOO'A' în jurul latureĭ OO'. Dreapta OO' este înălțimea trunchiuluĭ, cercurile AA', MM' sunt *bazele* și AB este *apotema* trunchiuluĭ de con.

481. Doĭ conĭ dreptĭ cu baze circulare sînt *asemene* între eĭ, dacă provin din triunghiurĭ dreptunghice asemene, adică dacă înălțimile lor sînt proporționale cu radele bazelor lor.

482. Să considerăm o piramidă regulată înscrisă în un con circular drept, și să facem să crească fără limită numĕrul laturilor poligonuluĭ de bază; în fie-care moment suprafața laterală a piramideĭ are drept măsură (§. 433) jumătate din perimetrul poligonuluĭ de bază, înmulțită cu apotema piramideĭ. Această piramidă crește cu căt vom înmulți numĕrul laturilor poligonuluĭ de bază, însă nu poate trece peste suprafața laterală a conuluĭ, căcĭ toate piramidele sînt înscrise în con. Așa dar suprafața laterală a piramideĭ are o limită care este suprafața laterală a conuluĭ.

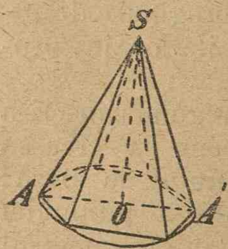
Tot asemene este și cu volumul piramideĭ înscrisă în con.

De aceia, *vom considera suprafața laterală a unuĭ con circular drept și volumul luĭ, ca limitele către care tind respectiv suprafața laterală și volumul uneĭ piramide înscrisă, a căreĭ numĕr de laturĭ a poligonuluĭ de bază crește necontenit.*

Orĭ-ce proprietate relativă la piramidă care nu va depinde de mărimea și numĕrul laturilor bazeĭ, se va aplica și la con.

483. TEOREMA.— *Aria suprafeței laterale a unuĭ con circular drept, are ca măsură productul circumferenței de bază prin jumătatea apotemeĭ conuluĭ.*

Să înscrim în con, o piramidă regulată, d. e. piramida cu bază hexagonală. Suprafața laterală a acesteĭ piramide are drept măsură productul jumătățeĭ perimetruluĭ poligonuluĭ de bază prin apotema eĭ. Să imaginăm că îndoim necontenit numĕrul laturilor poligonuluĭ de bază; perimetrul acestuĭ poligon tinde cătră o limită care este lungimea circumferențeĭ de bază și apotema piramideĭ tinde cătră apotema conuluĭ. Suprafața laterală a conuluĭ fiind limita suprafețeĭ laterale a piramideĭ, avem că, suprafața laterală a conuluĭ are drept măsură productul jumătățeĭ circumferențeĭ cercului de bază prin apotema conuluĭ.



484. **Corolar I.**— Insemnănd prin R rada cercului de bază, prin *a* apotema, prin S suprafața laterală a conuluĭ, avem expresiunea

$$S = \pi R a.$$

Suprafața totală compunăndu-se din cercul de bază și suprafața laterală; dacă însemnăm prin S_1 suprafața totală, avem expresiunea

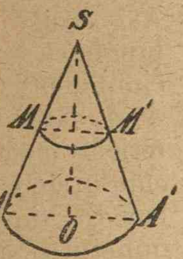
$$S_1 = \pi R a + \pi R^2$$

saŭ

$$S_1 = \pi R(R + a).$$

485. **Corolar II.**— Dacă ducem un plan paralel cu baza conuluĭ, egal depărtat de vîrf și de bază avem ca intersecțiune, un cerc MM′ a căruĭ radă O′M este jumătate din rada OA a bazeĭ, prin urmare și circumferența acestuĭ cerc MM′ este jumătate

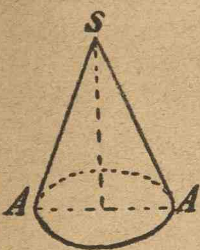
din circumferența cercului de bază, așa că putem ḑice :

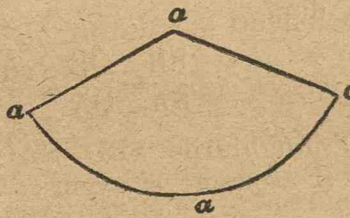


Suprafața laterală a conuluĭ are drept măsură productul apotemeĭ luĭ prin circumferența secțiuneĭ paralelă cu baza, la o egală distanță de vîrf și de bază.

486. **Desfășurarea conuluĭ.** Suprafața laterală a uneĭ piramide regulate se poate aplica pe un plan și acopere o porțiune de plan în forma unuĭ sector poligonal regulat, a căruĭ raḑă este egală cu creasta piramideĭ și a căruĭ perimetru este egal cu acela al bazeĭ piramideĭ.

Dacă de la piramidă trecem la con, găsim că suprafața laterală a conuluĭ fiind desfășurată, acopere



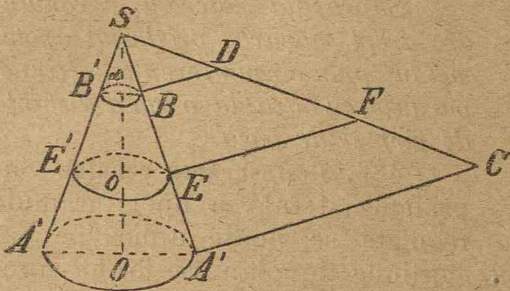


o porțiune de plan egală cu un sector circular, a căruĭ raḑă este egală cu apotema conuluĭ, și a căruĭ arc este egal cu lungimea circumferențeĭ de bază a conuluĭ.

487. TEOREMA.— *Suprafața laterală a unuĭ trunchiŭ de con drept cu baze paralele, are drept măsură productul semi-sumeĭ circumferențelor de baze prin apotema luĭ.*

Fie un trunchiŭ ABB'A' egal cu diferența între coniĭ dreptĭ circularĭ SAA', SBB' a căruĭ baze

AA′ și BB′ sînt paralele. In extremitatea A a generătoareĭ SA rădic, pe această dreaptă, perpendiculara AC egală cu lungimea circumferențeĭ O A a bazeĭ inferioare a trunchiuluĭ de con. Duc SC și prin punctul B, unde generătoa-



rea SA întâlnește baza superioară a trunchiuluĭ, duc dreapta BD paralelă cu AC. Dic că dreapta BD este tot atât de lungă cât este și circumferența OB.

In adevăr, SO fiind axa conuluĭ SAA′, triunghiurile SBO și SAO sînt dreptunghice și asemene; avem dar:

$$\frac{SB}{SA}=\frac{OB}{OA}=\frac{circ. OB}{circ. OA}.$$

Triunghiurile SBD, SAC sînt și ele dreptunghice și asemene și avem:

$$\frac{SB}{SA}=\frac{BD}{AC},$$

prin urmare $$\frac{circ. OB}{circ. OA}=\frac{BD}{AC}.$$

Insă dreapta AC este prin ipoteză, egală cu *circ.*OA; prin urmare dreapta BD este egală cu *circ.*OB.

Apoĭ, aria suprafețeĭ laterală a conuluĭ având drept măsură $^1/_2$ *circ.* OA×SA, este echivalentă cu aria triunghiuluĭ dreptunghic SAC care are drept măsură $^1/_2$ AC×SA. De asemene, aria suprafețeĭ laterale a conuluĭ SBB′ este echivalentă cu aria triunghiuluĭ dreptunghic SBD; prin urmare, aria suprafețeĭ laterale a trunchiuluĭ de con este echivalentă cu aria trapezuluĭ ABDC. Insă aria trapezuluĭ (§. 261) are drept măsură $AB \times {}^1/_2\,(AC+BD)$; așa dar aria suprafețeĭ laterale a trunchiuluĭ de con are drept măsură productul apotemeĭ luĭ prin semi-suma circumferențelor de baze.

488. **Corolar I.**— Dacă prin mijlocul E al apotemeĭ AB, duc EF paralelă cu AC și planul EE′ paralel cu bazele trunchiuluĭ de con, atuncĭ dreapta EF este egală cu circumferența O_1E. Insă, aria trapezuluĭ ABDC are drept măsură $AB \times EF$, (§. 263); așa dar, *aria suprafețeĭ laterale a unuĭ trunchiŭ de con drept cu baze paralele, are drept măsură productul apotemeĭ prin circumferența secțiuneĭ de o potrivă depărtată de baze.*

Corolar II.—Insemnând prin R și r radele cercurilor de baze, prin a apotema și prin S aria suprafețeĭ laterale a trunchiuluĭ de con, avem expresiunea:

$$S = \pi(R+r)a.$$

Aria suprafețeĭ totale se compune din aria suprafețeĭ laterale şi ariile cercurilor de baze; însemnând'o prin S_1 avem

$$S_1 = \pi[R^2 + r^2 + (R+r)a]$$

490. **Observațiune.**—Aria suprafețeĭ laterale a unuĭ trunchiu de con se maĭ poate afla, înscriind în trunchiul de con, un trunchiŭ de piramidă regulată cu baze paralele.

491. TEOREMA.— *Volumul unuĭ con circular drept are ca măsură productul arieĭ circumferențeĭ de bază prin a treia parte a înălțimeĭ luĭ.*

Să înscrim în con o piramidă regulată (fig. de la §, 483). Volumul aceșteĭ piramide este egal cu productul arieĭ poligonuluĭ de bază prin a treia parte a înălţimeĭ care este şi înălţimea conuluĭ. Dacă îndoim necontenit numĕrul laturilor poligonuluĭ de bază, aria acestuĭ poligon tinde cătră suprafaţa cercului de bază şi înălţimea rămăne tot egală cu înălţimea conuluĭ. Volumul conuluĭ fiind limita volumuluĭ piramideĭ, avem că volumul conuluĭ are drept măsură aria circumferenţeĭ de bază înmulţită cu a treia parte a înălţimeĭ conuluĭ.

492. **Corolar.** Insemnănd prin R rada cerculuĭ de bază şi prin I înălţimea couluĭ; volumul seŭ va ave de expresiune

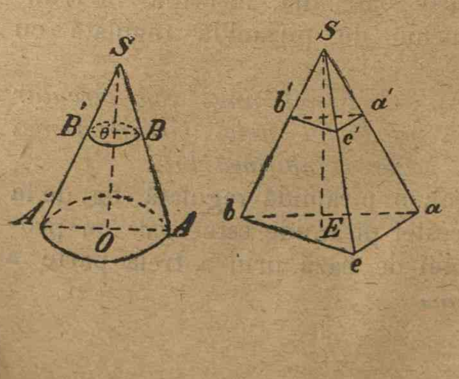
$$V=\frac{1}{3}\pi R^2 I.$$

493. TEOREMA.—*Dacă doĭ conĭ drepţĭ cu baze circulare sînt asemene, suprafeţele laterale şi suprafeţele totale a acestor conĭ sînt proporţionale cu patratele radelor de bază; iar volumurile lor sînt proporţionale cu cuburile aceloraşĭ rade.*

(Demonstraţiunea acesteĭ teorome este identică cu aceia de la (§. 475).

494. TEOREMA.—*Volumul unuĭ trunchiu de con drept cu baze paralele este echivalent cu suma volumurilor a treĭ conĭ care ar ave ca înălăţime comună, înălţimea trunchiuluĭ de con şi ca baze: unul baza inferioară, altul baza superioară, şi al treilea media proporţională între cele doă baze a-le trunchiuluĭ.*

Fie ABB′A′ un trunchiu de con egal cu diferenţa conilor drepţĭ SAA′, SBB′ a căruĭ baze AA′, şi BB′ sînt paralele: construesc pe planul bazeĭ inferioare a trunchiuluĭ de con o piramidă triunghiulară *sabc*, a căreĭ bază



abc să fie echivalentă cu cercul OA şi a căreĭ înălţime SI să fie egală cu înălţimea SO a conuluĭ SAA′. Ḑic maĭ întăĭ, că planul bazeĭ superioare BB′ a trunchiuluĭ, determinează în piramidă o secţiune *a′b′c′* echivalentă cu cercul O′B

In adevĕr, bazele trunchiuluĭ de con fiind paralele, planul SOA taie baza superioară a trunchiuluĭ de con în o dreaptă O′B paralelă cu OA şi raportul raḑelor OA şi O′B este egal cu acela al înălţimilor SO şi SO′; avem dar

$$\frac{\textit{cercul}\,\mathrm{OA}}{\textit{cercul}\,\mathrm{O'B}}=\frac{\overline{\mathrm{OA}}^2}{\overline{\mathrm{O'B}}^2}=\frac{\overline{\mathrm{SO}}^2}{\overline{\mathrm{SO'}}^2}.$$

Din paralelismul planurilor *a b c*, şi *a′b′c′*, rezultă că

$$\frac{tri.abc}{tri.a'b'c'}=\frac{\overline{\mathrm{SI}}^2}{\overline{\mathrm{Si}}^2};$$

însă prin ipoteză, dreptele S I şi S O sînt egale între ele, precum şi dreptele S*i*, S O′; prin urmare:

$$\frac{cercul\ \mathrm{OA}}{cercul\ \mathrm{O'B}}=\frac{tri.\ abc}{tri.\ a'b'c'}.$$

Insă, triunghiul *abc* este prin construcţiune, echivalent cu cercul OA; rezultă că şi triunghiul *a′b′c′* să fie echivalent cu cercul O′B.

Apoĭ, volumul conuluĭ SAA′ are drept măsură

$$\tfrac{1}{3}\ cerc.\ \mathrm{OA}\times\mathrm{SO};$$

acest volum este dar echivalent cu volumul piramideĭ S*abc*, care are drept măsură $\frac{1}{3}\,abc\times\mathrm{SI}$. De asemene volumul conuluĭ SBB′ este echivalent cu volumul piramideĭ *s′a′b′c′*: aşa dar, volumul trunchiuluĭ de con ABB′A′ este echivalent cu trunchiul de piramidă *abca′b′c′*; Volumul acestuĭ trunchiŭ de piramidă are drept măsură (§. 441)

$$\tfrac{1}{3}\,\mathrm{SI}\times[abc+a'b'c'+\sqrt{abc\times a'b'c'}\,]$$

şi prin urmare trunchiul de con va ave drept măsură

$^1/_3$ SO$\times$[*cerc.* OA $+$ *cerc.* O'B$+\sqrt{cerc. OA \times cerc\ O'B}$],

ceia ce demonstră Teorema.

495. **Corolar.**—Insemnănd prin R şi r radele cercurilor de baze, prin I înălţimea conuluĭ trunchiat, volumnl seŭ va ave de expresiune

$$V=\frac{1}{2}\pi I.[R^2+r^2+Rr].$$

496 APLICAŢIUNE.—*1.* In practică, şi maĭ cu samă în ceia ce priveşte *măsurarea* (*cubagiul*) *trunchiurilor de copacĭ,* bazele se deosebesc puţin între ele, aşa că fără eroare mare se poate asimila trunchiul de con cu un cilindru a căruĭ înălţime ar fi egal cu înălţimea trunchiuluĭ şi a căruĭ bază ar fi secţiunea făcută în trunchiŭ, la o egală distanţă de cele doă baze. Eroarea ce se comite, urmănd ast-fel, este uşor de calculat.

Volumul cilindruluĭ este:

$$V=\pi I\left[\frac{R+r}{2}\right]^2;$$

volumul trunchiuluĭ de con este:

$$V=\frac{1}{3}\pi I\,[R^2+r^2+Rr]\ ;$$

prin scădere avem:

$$V-v=\frac{1}{3}\pi\, I\left(\frac{R-r}{2}\right)^2.$$

Eroarea comisă este dar egală cu volumul unuĭ con care are ca înălţime, înălţimea trunchiuluĭ şi ca radă de bază, diferenţa între radele bazelor trunchiuluĭ.

Cănd este să se aplice formula

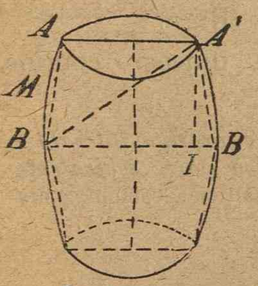
$$v=\pi I.\left(\frac{R+r}{2}\right)^2$$

pentru măsurarea unuĭ trunchiu de copac, se măsoară lungimea circumferenţeĭ mijlocie C şi înălţimea luĭ I, şi atuncĭ formula precedentă se schimbă în următoarea:

$$A=\frac{\pi I C^2}{4\pi^2}=\frac{I C^2}{4\pi}.$$

D. e. $C=1{,}80\,m$, $I=6{,}50\,m$. Volumul va fi $1{,}676m^3$.

2. Chestiunea *cotituluĭ poloboacelor* se leagă cu măsurătoarea trunchiuluĭ de con.



Considerând polobocul ca suma a doă trunchiurĭ de con identice, lipite prin baza lor cea mare, am ave formula

$$V={}^1/_3\,\pi I\,[R^2+r^2+Rr]$$

în care I reprezintă înălţimea totală a trunchiuluĭ dublu, r raḑa funduluĭ AA′, R raḑa bazeĭ marĭ BB′. Insă această formulă dă un rezultat maĭ mic, căcĭ neglijăm de doă-orĭ volumul născut prin rotaţiunea segmentuluĭ AMB cuprins între dreapta AB şi arcul AMB.

Dacă înlocuim, în parenteză, Rr prin R^2, avem formula

$$V={}^1/_3\,\pi I\,(2R^2+r^2)$$

care din contră dă un rezultat prea mare.

Formula care se adaptează maĭ bine la forma generală a poloboacelor este următoarea :

$$V={}^1/_3\pi I\,[2R^2+r^2-{}^1/_3\,(R^2-r^2)].$$

Pentru : $I=0{,}756m$, $R=0{,}345m$, $r=0{,}305m$, formula întâĭ dă $250l.$, a doa $261l.$ şi a treia $254l.$

Se maĭ întrebuinţează formula empirică

$$V=0{,}525\,D^3$$

în care D reprezintă lungimea BA′ care merge de la vrană pănă la punctul cel maĭ de jos A′ a unuia din fundurĭ. Pentru *cotirile diagonale*, se calculează maĭ dinainte, cu ajutorul formuleĭ precedente, valorile luĭ V care corespund la diverse valorĭ de a luĭ D și se înscriŭ aceste valorĭ pe varga de fer ce se întroduce în poloboc, şi obţinem astfel capacitatea poloboculuĭ prin o simplă cetire.

Pentru a compara această formulă cu cea precedentă, observăm că triunghiul drebtunghic BA′I dă

$$\overline{BA'}^2=\overline{AI}^2+\overline{BI}^2, \text{ saŭ } D^2={}^1/_4\, I^2+(R+r)^2,$$

găsim prin aceasta că polobocul de dineoare conţine 257.*l*.

498. **Exerciţiĭ** —*1. Sĭ se împartă suprafaţa laterală a unuĭ con drept cu bază circulară, în doă părţĭ echivalente, prin un plan paralel cu baza.* I fiind înălţimea conuluĭ, x distanţa de la vîrf a planuluĭ căutat găsim

$$\frac{x^2}{I^2}=\frac{1}{2}$$

adică x este egală cu laturea unuĭ patrat a căruĭ diagonală este I.

2. *Dacă învîrtim succesiv un triunghiu dreptunghic în jurul fie-căreĭ catete, volumurile celor doĭ conĭ sînt invers proporţionale cu înălţimile lor.* Avem

$$V={}^1/_3\,\pi\, c^2b. \qquad V'={}^1/_3\,\pi\, b^2c,$$

de unde rezultă $$\frac{V'}{V'}=\frac{c}{b}.$$

3. *Laturea* c *a unuĭ triunghiu ecvilateral find dată, să se calculeze suprafaţa totală şi volumul conuluĭ născut prin învîrtirea acestuĭ triunghiu în jurul înălţimeĭ luĭ.*

Raţa bazeĭ este $\frac{c}{2}$, înălţimea triunghiuluĭ este $\frac{c\sqrt{3}}{2}$, prin urmare;

$$S=\frac{3\,\pi\, c^2}{4} \text{ şi } V=\frac{1}{24}\,\pi c^3\sqrt{3}.$$

4. Suprafaţa totală a unuĭ con drept cu bază circulară este egală cu 10m² şi raḑa bazeĭ sale este 1,2m; să se calculeze cu aproximaţiune de un centimentru, apotema şi înălţimea conuluĭ, apoĭ volumul luĭ cu aproximaţiune de un centimetru cub.

Avem pentru aceasta formulele;

$$S=\pi R\ (A+R),\quad I=\sqrt{A^2-R^2},\ V=\frac{1}{3}\pi R^2 I.$$

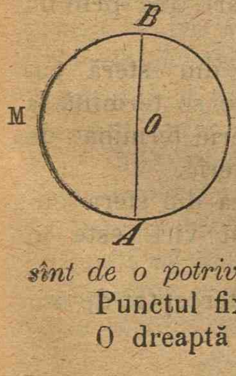
Dacă S şi R sînt date, cea întăĭ din aceste dă pe $A+R$ şi prin urmare pe A; cu a doa calculăm pe I, şi cu a treia pe V. Puind cifrele de sus avem:

$$A=1{,}45\,m;\ I=0{,}82\,m;\ V=1{,}234\,c.\,m.^3.$$

CAPITULUL III

SFERA

499. **Definiţiunĭ.**—Un semi-cerc AMBO învîrtindu-se în jurul diametruluĭ seŭ AB, dă naştere unuĭ corp numit *sferă.*



In acestă învîrtire semi-circumferenţa AMB descrie suprafaţa sfereĭ şi este uşor de văḑut că orĭ-ce punct al acesteĭ suprafeţe este de o potrivă depărtat de centrul O al semi-cercululuĭ; de aceia sfera se pote defini şi precum urmează: *sfera este un corp terminat cu o suprafaţă a căreĭ puncte sînt de o potrivă depărtate de un punct fix O.*

Punctul fix este *centrul* sfereĭ.

O dreaptă ce uneşte centrul cu un punct al suprafeţeĭ sfereĭ este *rađa*, sfereĭ. Toate rađele sînt egale între ele.

O dreaptă ce trece prin centru şi se mărgineşte de ambele părţĭ la suprafaţa sfereĭ, este un *diametru* al sfereĭ.

Toţĭ diametrii sînt egalĭ între iĭ, fiind-că fie-care diametru este dublul rađeĭ.

Doă sfere de aceiaşĭ rađă sînt egale.

500. Un plan este *tangent* la o sferă dacă nu are de căt un punct comun cu ea; acest punct se numeşte *punct de contact.*

Doă *sfere* sînt *tangente* în un punct, atuncĭ când în acel punct ele aŭ acelaşĭ plan tangent.

501. O porţiune din suprafaţa uneĭ sfere cuprinsă între doă planurĭ paralele se numeşte *zonă sferică.* Distanţa între cele doă planurĭ este *înălţimea* zoneĭ, ĭar secţiunile făcută în sferă de cele doă planurĭ sînt *bazele* zoneĭ.

Dacă unul din cele doă planurĭ în loc să taie sfera, iĭ este tangent, atuncĭ zona sferică are numaĭ o bază; o astfel de zonă se numeşte *calotă sferică.*

Porţiunea din sferă cuprinsă într'o zonă se numeşte *segment sferic.*

Numim *fus sferic* o porţiune de pe suprafaţa uneĭ sfere cuprinsă între doă planurĭ carĭ trec prin un acelaşĭ diametru al sfereĭ.

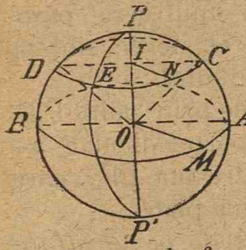
Numim *unghier sferic* porţiunea din sferă cuprinsă între doă semi-cercurĭ marĭ care se termină la un acelaşĭ diametru al sfereĭ; fusul sferic terminat de aceste planurĭ este *baza* unghieruluĭ sferic.

Numim *piramidă sferică* porţiunea din sferă cuprinsă în un unghiu poliedru a căruĭ vîrf este în centrul sfereĭ.

Piramida are ca *baza* poligonul interceptat de unghiul poliedru pe suprafaţa sferică.

Numim *sector sferic* volumul născut prin învîrtirea unuĭ sector circular în jurul unuĭ diametru exterior sectoruluĭ circular; sectorul sferic are de bază o zonă sferică.

502. TEOREMĂ —*Orĭ-ce secţiune făcută în sferă prin unplan, este un cerc.*



Să presupunem maĭ întăĭ că planul trece prin centru O al sfereĭ: un punct oare-care M al secţiuneĭ se află la o distanţă OM de la centrul sfereĭ, egală cu rada sfereĭ; prin urmare toate punctele secţiuneĭ sînt pe o circumferenţă a căreĭ centru este însuşĭ centrul sfereĭ şi a căreĭ radă este însăşĭ rada sfereĭ.

Să presupunem acum că planul secant nu trece prin centrul sfereĭ şi că taie sfera în o curbă CND care dic că este o circumferenţă. Duc din centrul O al sfereĭ, perpendiculara OI pe planul secant; radele OD, ON... a-le sfereĭ, duse în diverse puncte D, N.... a-le conturuluĭ secţiuneĭ, sînt oblice pe planul CND şi egale între ele, prin urmare ele sînt îndepărtate în mod egal de perpendiculara OI; prin urmare picioarele tuturor acestor oblice sînt pe o circumferenţă a căreĭ centru este punctul I.

Dacă însemnăm prin R rada sfereĭ, prin r rada secţiuneĭ şi prin d distanţa centruluĭ sfereĭ la planul secant, avem: $r^2 = R^2 - d^2$.

503. **Observaţiune** —Videm că secţiunile plane a sfereĭ sînt de doă felurĭ: *1.* Cercurĭ a căror planurĭ trec prin centrul sfereĭ şi sînt toate egale între ele, pentru că toate aŭ ca radă însăşĭ rada sfereĭ: aceste le numim *cercurĭ marĭ* de-a sfereĭ. 2. Cercurĭ a căror planurĭ nu trec prin centrul sfereĭ şi a căror ra-

ḑe, maĭ micĭ de cît raḑa sfereĭ, merg descrescă:ıd cu căt planul secant se îndepărtează de centru; aceste le numim *cercurĭ micĭ* de-a sfereĭ.

Numim *poliĭ unuĭ cerc* CND, extremităţile P,P′ a diametruluĭ sfereĭ, perpendicular pe cerc.

Doă cercurĭ de pe sferă paralele între ele, aŭ aciiaşĭ polĭ. Observăm că centrul I al unuĭ cerc oare-care, polul luĭ P şi P′ şi centrul O al sfereĭ, sînt pe o aceiaşĭ perpendiculară la planul cercululuĭ.

Orĭ-ce cerc mare PEP′ care trece prin poliĭ P,P′ a unuĭ cerc CND este în un plan perpendicular pe planul acestuĭ cerc, fiind-că conţine dreapta PP′ care este perpendiculară pe acest din urmă plan.

504, **Corolar I.** *Prin doă puncte de pe suprafaţa uneĭ sfere, se poate duce o circumferenţă de cerc mare*; fiind-că, dacă ducem un plan prin centrul sfereĭ şi cele doă puncte, acest plan taie suprafaţa sfereĭ în o circumferenţă de cerc mare.

Dacă centrul sfereĭ şi cele doă puncte nu sînt în linie dreaptă, atuncĭ avem un plan unic şi prin ur-mare nu putem duce de căt o circumferenţă de cerc mare prin cele doă puncte date. In ipoteza contrarie, cele doă puncte sînt la extremităţile unuĭ aceluiaşĭ dlametru de-a sfereĭ şi prin urmare prin ele putem duce un numĕr infinit de cercurĭ marĭ.

505. **Corolar II.**—*Un cerc mare împarte sfera şi suprafaţa eĭ în doă părţĭ egale*; fiind-că dacă luăm cele doă părţĭ a-le sfereĭ şi le aplicăm pe baza lor co-mună, cu convexităţile lor în aceiaşĭ direcţiune, aceste doă părţĭ vor coincide, căcĭ altfel punctele suprafe-ţelor nu ar fi la aceiaşĭ distanţă de centru.

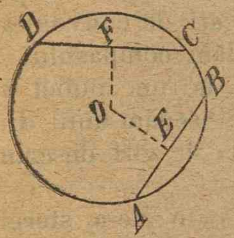
506. **Corolar III.**—*Doă cercurĭ marĭ se împart unul pe altul în doă părţĭ egale*; fiind că dreapta lor de intersecţiune trece prin centrul sfereĭ, care centru

fiind comun la cele doă cercurĭ, acea dreaptă este un diametru pentru fie-care cerc.

507. **Corolar IV.**—*O dreaptă nu poate tăie o suprafață sferica în maĭ mult de doă puncte*: fiind-că dreapta nu poate ave maĭ mult de doă puncte comune cu circumferența de cerc mare determinată de planul ce trece prin dreaptă şi centrul sfereĭ

508. TEOREMA.—*1. Doă cercurĭ micĭ egale sînt egal depărtate de centrul sfereĭ.*

2. Din doă cercurĭ ne-egale, cel maĭ mare este maĭ aproape de centru de căt cel maĭ mic.

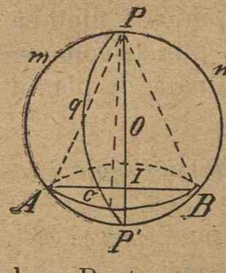


Să considerăm planul dus prin centrul sfereĭ şi prin centrele celor doă cercurĭ: acest plan taie sfera în un cerc mare ABCD şi pe cele doă cercurĭ în diametriĭ lor AB, CD care sînt nişte coarde față cu cercul mare. Prin urmare: *1.* distanțele OE, OF vor fi egale dacă diametriĭ AB şi CD sînt egalĭ adică dacă cele doă cercurĭ micĭ sînt egale între ele; 2, distanța OE este maĭ mare de căt OF dacă diametrul AB este maĭ mic de căt CD, adică dacă cercul EA este maĭ mic de căt cercul FC.

Reciprocele părților acesteĭ Teoreme sînt evidente.

509 TEOREMA.—*Toate punctele unuĭ cerc de pe sfera, sînt de o potrivă depărtate de ciĭ doĭ polĭ aĭ cerculuĭ.*

Fie ABC un cerc de pe sferă, P, P′ poliĭ cerculuĭ şi I centrul luĭ. Dreptele PA, PB, PC... duse din polul P la diverse puncte A, B, C.... de-a cerculuĭ, sînt egale între ele pentru că sînt de o potrivă îndepărtate de perpendiculara PI; punctele circumferențeĭ ABC sînt dar la aceiaşĭ distanţă de polul P. Tot pentru acelaşĭ cuvînt, aceste puncte sînt la aceiaşĭ distanţă de polul P′.



Maĭ rezultă din această demonstraţiune că arcurile de cerc mare PmA, PnB, PqC... duse de la polul P la circumferenţa ABC, sint egale între ele fiind-că coardele lor sînt egale.

510. **Observaţiune**. Din Teorema precedentă rezultă că se pot desena circumferenţe pe o sferă, ca şi în plan. Pentru aceasta ne servim de un *compas cu picioare încovăete*, ca să nu fim împedecaţĭ de convexitatea sfereĭ cănd mişcăm compasul: dăm compasuluĭ o deschidere egală cu distanţa poluluĭ la un punct al circumferenţeĭ ce vroim să descrim: aşeḑăm unul din vîrfurile compasuluĭ în pol şi cu cel alt vîrf descrim circumferenţa.

Numim *distanţă polară* a unuĭ cerc de-a sfereĭ, distanţa poluluĭ acestuĭ cerc la un punct oare-care al circumferenţeĭ cercuiuĭ, şi cănd ḑicem *polul unuĭ cerc* vom înţelege deacum înainte, polul care se aflâ pe aceiaşĭ semisferă cu cercul, adecă polul cel maĭ apropiet de cerc.

Numim *raḑă sferică* a unuĭ cerc, lungimea arculuĭ de cerc mare dus din polul cercuiuĭ la un punct al circumferenţeĭ luĭ.

511. **Corolar I**.—*Distanţa polară a unuĭ cerc mare este egală cu coarda şfertuluĭ de cerc mare, adică cu laturea patratuluĭ înscris în un cerc mare de-a sfereĭ.*

Raḑa sferică a unuĭ cerc mare este egală cu un şfert din circumferenţa acestuĭ cerc.

512. **Corolar II**.—Pentru a ave polul unuĭ cerc mare se poate procede în doă modurĭ: *1, să ieŭ doă puncte A, B pe circumferenţa ABC a cercuiuĭ mare*

și din aceste puncte ca polĭ descrim doă arcurĭ de cerc mare a căror intersecțiune va fi polul căutat; 2, *ducem un cerc mare perpendicular pe cercul dat, și luăm cu începere de la circumferența cerculuĭ dat, pe acel cerc mare o lungime de un sfert de circumferență de cerc mare.*

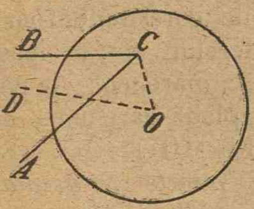
513. **Corolar III**.—*Doă cercurĭ marĭ sînt perpendiculare unul pe altul, dacă polul unuia este pe circumferența celuialalt.*

Demonstrațiunea acestor treĭ Corolare nu prezintă nicĭ o greutate.

514. TEOREMA.—*Planul perpendicular la extremitatea uneĭ rade de-a sfereĭ este tangent la sferă.*

Reciproc, *un plan tangent la o sferă este perpendicular pe rada care merge la punctul de contact.*

Fie ACB un plan perpendicular la extremitatea



radeĭ OC. Fie D un punct oarecare în acest plan; distanța OD, este maĭ mare de căt OC (§. 301) așa că punctul D este exterior sfereĭ. Prin urmare planul ACB ne avînd de căt un punct comun C cu suprafața sfereĭ, este tangent la această suprafață.

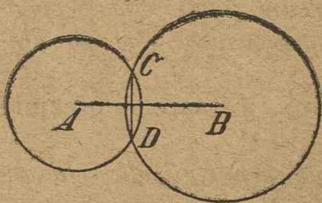
Reciproc, dacă planul ACB este tangent la sferă în C, rada OC este cea maĭ scurtă dreaptă ce se poate duce din centrul O la planul ACB, fiind că toate punctele planuluĭ afară de C sînt exterioare sfereĭ; prin urmare OC este perpendiculară pe planul ACB.

515. **Corolar I**.—*Prin un punct luat pe suprafața uneĭ sfere, se poate totdeauna duce un plan tangent, și numaĭ unul* (§. 300).

516. **Corolar II**.—*Punctul de contact a doă sfere tangente este așeḍat pe dreapta care unește centrele lor,* fiind-că perpendiculara la planul tangent, dusă prin

punctul de contact, trece prin fie-care din centrele celor doă sfere.

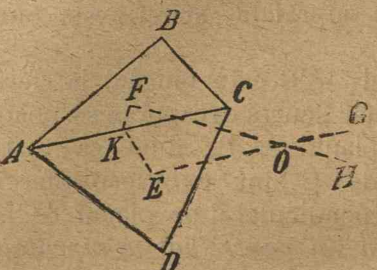
217. TEOREMA. — *Intersecțiunea a doă sfere este o circumferență de cerc a căreĭ plan este perpendicular pe linia centrelor celor doă sfere și a căreĭ centru este situat pe această dreaptă.*



Pentru că această intersecţiune nu este altceva de cât circumferenţa născută prin învîrtirea în jurul linieĭ centrelor AB a punctuluĭ C comun celor doă circumferenţe, în care cele doă sfere sînt tăiete de un plan oare-care ce trece prin AB.

518. **Observaţiune**. Poziţiunile relative a doă sfere sînt în numĕr de cincĭ, şi relaţiunile corespundătoare între distanţa centrelor şi radele sferelor, sînt aceleaşĭ ca şi pentru circumferenţele de cerc mare, care le căpătăm tăind sferele date prin un plan oare-care ce trece prin linia centrelor. (§. §. 100—107).

519. TEOREMA.—*Prin patru puncte ne-așeḑate în un același plan, putem face să treacă o suprafață sferică și numaĭ una.*



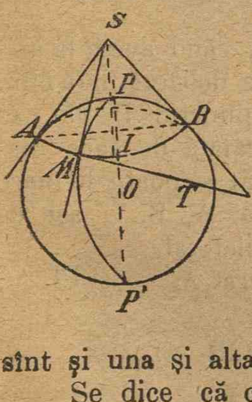
Fie A, B, C, D cele patru puncte date; avem să probăm că există un punct, şi unul singur, de o potrivă depărtat de cele patru puncte.

Ducem perpendicularele EG, FH rădicate respectiv pe planurile ABC şi ACD şi anume în punctele E şi F care se fie centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC, ACD. Uu punct de o potrivă depărtat de A, B, C, D trebue să se afle în acelaşĭ timp pe EG şi FH, ceia că dă un singur punct O, intersecţiunea acestor doă drepte.

Rămăne să arătăm că cele doă drepte, EG şi FH trebue să se întîlnească. In adevĕr, planul perpendicular pe AC în mijlocul eĭ K, fiind locul punctelor egal depărtate de A şi C, trebue să conţină pe EG şi FH fiind că fie-care punct al acestor drepte este egal depărtat de A şi C; apoĭ, dreptele KF şi KE în care acest plan întîlneşte planurile ABC şi ADC, se taie între ele, pentru că aceste doă planurĭ sînt deosebite unul de altul: aşa dar dreptele EG şi FH, aşeḑate în planul EKF şi perpendiculare respectiv pe doă drepte KF şi KE care se întretaie, aŭ un punct comun O care va fi centrul sfereĭ căutate.

520. **Problema I.**—*Să se ducă prin un punct dat exterior uneĭ sfere, un plan tangent la sferă.*

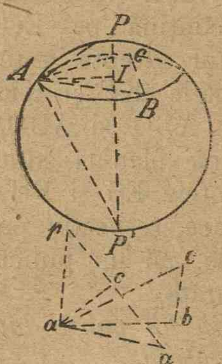
Fie O sfera, şi S un punct exterior. Ducem prin OS un plan oare-care care va determina în sferă un cerc mare PAP', şi să ducem tangenta SA la acest cerc. Să învîrtim semi-cercul PAP' şi tangenta SA în jurul axeĭ SO; semi-cercul dă naştere sfereĭ şi tangenta SA dă naştere unuĭ con circular drept care are comune cu sfera toate punctele cercului AMB descris de punctul A. Maĭ mult, în un punct oare-care M a acestuĭ cerc, con[ul] şi sfera aŭ acelaşĭ plan tange[nt], căcĭ generătoarea SM şi tangenta MT la cercul AMB, care determină planul tangent la con (§ 478), sînt şi una şi alta aşeḑate în planul tangent la sferă.



Se ḑice că conul este *circumscris* la sferă ş[i] sfera este înscrisă la con de-alungul cerculuĭ AMB.

De aicĭ videm că prin un punct exterior putem duce un numĕr infinit de planurĭ targente la o sferă, şi că toate *tăngentele la sferă care pleacă din un punct, sînt egale între ele.*

521. **Problema II**—*Fiind dată o sferă, să'ĭ găsim rada.* Din un punct P a suprafeţeĭ sfereĭ ca pol, cu o deschidere de compas arbitrară, descriŭ un cerc ABC, luăm cu compasul distanţele dreptliniare AB, BC, CA şi construim alăturea un triunghiŭ *abc* care să aibă ca laturĭ aceste treĭ lungimĭ. Determin centrul *i* al cerculuĭ circumscris triunghiuluĭ *abc* şi dreapta *ai* este egală cu AI, rada cerculuĭ ABC. Prin urmare, dacă din punctul *a* ca centru, cu o deschidere de compas egală cu acea cu care am descris cercul ABC pe sferă, descriŭ un mic arc de cerc pănă la întîlnirea *p* cu perpendiculara *pip'* dusă prin *i* la *ai*, formăm triunghiul *api* egal cu triunghiul API; rădic apoĭ *ap'* perpendiculară pe *ap* în *a* şi am astfel *pp'* egal cu PP' care este diametrul sfereĭ.



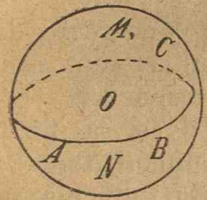
Pentru a ave rezultate precize, când avem la dispoziţiunea noastră numaĭ o porţiune de sferă, iată cum este bine să se opereze: să alege punctul P cât se poate la mijlocul porţiuneĭ de suprafaţă de care dispunem, distanţa polară PA să ie cât se poate de mare şi în orĭ ce caz, se aleg punctele A, B. C aşa ca triunghiul ABC să fie aproape ecvilateral.

Dacă presupunem că am măsurat $AI = r$ şi $PI = i$, triunghiul dreptunghic PAP' dă:

$$\overline{AI}^2 = IP \times IP' \quad \text{saŭ} \quad r^2 = i\,(2R - i),$$

de unde scoatem $R = \frac{1}{2}\left(i + \frac{r^2}{i}\right)$.

522. **Altfel**.—Ieŭ doă puncte M, N pe sferă. Din

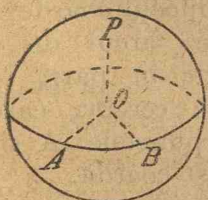


punctul M ca pol şi cu o distanţă polară arbitrară, descriŭ un arc de cerc; apoĭ din punctul N ca pol şi cu aceiaşĭ distanţă polară descriŭ un alt arc de cerc care taie pe cel dintăĭ în un punct A, de o potrivă depărtat de M şi N. Determin încă alte doă puncte B, C, iarăşĭ de o potrivă depărtate de M şi N. Centrul sfereĭ O şi punctele A, B, C, sînt în un acelaşĭ plan care'ĭ perpendicular pe mijlocul drepteĭ MN; prin urmare secţiunea făcută de acest plan în sferă este un cerc mare.

Construesc apoĭ triunghiul a căreĭ laturĭ să fie AB, BC, CA; rada cerculuĭ circumscris la acest triunghiŭ este egală cu rada sfereĭ.

523. **Problema III**.—*Să se ducă o circumferenţă de cerc mare prin doă puncte date pe suprafaţa uneĭ sfere.*

Fie A'B punctele de pe sferă. Este de ajuns să



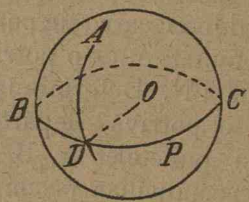
determinăm polul cerculuĭ căutat. Insă, distanţa punctelor A şi B la polul P este egală cu coarda sferţuluĭ de circumferenţă de cerc mare; vom ave dar polul P, dacă din punctele A şi B ca polĭ, vom descri arcurĭ de cerc cu o distanţă egală cu acea coardă; punctul de intersecţiune al acestor arcurĭ este polul P; apoĭ din P ca pol şi cu aceiaşĭ coardă descriind o circumferenţă, aceasta va fi circumferenţa căutată.

524. **Corolar**. Dacă punctele date sînt extremităţile unuĭ diametru de-a sfereĭ, problema are un numer infinit de soluţiunĭ.

525. **Problema IV**. *Prin un punct dat pe sferă*

să se ducă un arc de cerc mare perpendicular pe circumferența unuĭ cerc mare.

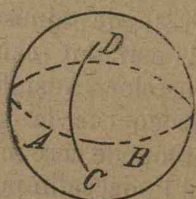
Fie A punctul dat și BDC circumferența dată. Este de ajuns să determinăm polul cercului căutat.



Acest pol P trebue să se afle pe cercul BDC și să fie la o distanță de punctul A egală cu coarda sfertuluĭ de circumferență de cerc mare. Prin urmare, vom ave polul P, descriind din punctul A ca pol cu o distanță polară egală cu acea coardă, un arc de cerc, care întîlnește circumferența dată în punctul P.

526. PROBLEMA V. *A împărți un arc de cerc mare în doă părțĭ egale.*

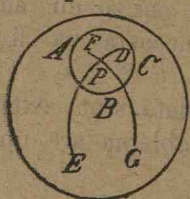
Fie AB arcul dat; din punctele A și B ca polĭ și cu aceiașĭ deschidere de compas, descrim doă arcurĭ care se taie în C și D; arcul de cerc mare ce



trece prin punctele C și D este arcul căutat, căcĭ planul luĭ este perpendicular pe mijlocul coardeĭ AB.

Observăm că arcul de cerc mare CD împarte în părțĭ egale toate arcurile de cercurĭ care se pot duce prin punctele A și B; căcĭ toate aceste arcurĭ aŭ aceiașĭ coardă.

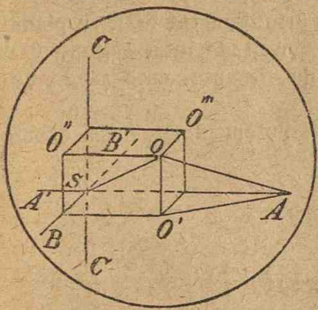
527. PROBLEMA VI. *A descri cercul mic ce trece prin treĭ puncte de pe suprafața uneĭ sfere.*



Fie A, B, C cele treĭ puncte. Duc arcurile de cerc mare DE, FG perpendiculare respectiv în mijlocul arcurilor AB, BC; aceste arcurĭ se întîlnesc în un punct P care'ĭ deopotrivă depărtat de A, B și C. Apoĭ din punctul P ca pol și cu PA ca distanță polară, descrim o circumferență. Aceasta este circumferența căutată.

528. **Exerciții.**— 1. *Suma ariilor cercurilor, în care cele treĭ fețe a-le unuĭ unghiŭ triedru tridreptunghic taie o sferă, este constantă dacă vîrful unghiuluĭ stă fix.*

Fie S vîrful triedruluĭ tridreptunghic SABC, care triedru este mobil în jurul punctuluĭ S. Duc din centrul O al sfereĭ perpendicularele OO′, OO″, OO‴; pe fețele ASB, BSC, CSA; punctele O′, O″, O‴ sînt centrele secțiunilor circulare făcute în sferă de cele treĭ fețe a-le triedruluĭ. Dacă presupun că crestele unghiuluĭ întîlnesc suprafața sfereĭ în punctele: A și A′, B și B′, C și C′, suma ariilor celor treĭ secțiunĭ circulare este egală cu



$$\pi\,(\overline{O'A}^2+\overline{O''B}^2+\overline{O'''C}^2).$$

Triunghiul dreptunghic OO′A dă:

$$\overline{O'A}^2=\overline{OA}^2-\overline{OO'}^2$$

de asemenea avem

$$\overline{O''B}^2=\overline{OB}^2-\overline{OO''}^2$$

și

$$\overline{O'''C}^2=\overline{OC}^2-\overline{OO'''}^2$$

prin urmare,

$$\pi\,(\overline{O'A}^2+\overline{O''B}^2+\overline{O'''C}^2)=\pi\left[3\overline{OA}^2-\overline{OO'}^2-\overline{OO''}^2-\overline{OO'''}^2\right].$$

Insă, dreptele OO′, OO″, OO‴ sînt crestele unuĭ paralelipiped dreptunghic a căruĭ diagonală este SO, și prin urmare membrul al doilea al egalitățeĭ precedente se poate înlocui prin

$$\pi\,(3\overline{OA}^2-\overline{SO}^2)$$

care este o cantitate constantă, dacă punctul S este fix.

2. *Locul geometric al punctelor din spațiŭ astfel că raportul distanțelor fie-căruia la doă puncte fixe să fie constant, este o suprafață sferică.*

Aceasta se vede din figura de la §. 160, pe care o învîrtim în jurul drepteĭ AD′.

3. *Să se ducă prin o dreaptă dată un plan tangent la o sferă.*

Dacă dreapta este tangentă la sferă, atuncĭ construiesc planul care conţine dreapta şi este perpendicular pe rada ce merge la punctul de contact.

Dacă dreapta este exterioară sfereĭ, duc prin centrul sfereĭ un plan perpendicular pe dreaptă şi prin punctul în care planul întîlneşte dreapta duc tangente la cercul de intersecţiune al sfereĭ cu planul. Planurile determinate de dreapta dată şi de fie-care tangentă sînt tangente la sferă.

Dacă dreapta taie sfera, nu putem duce prin ea nicĭ un plan tangent la sferă.

CAPITULUL IV

TRIUNGHIURĬ SFERICE

529. **Definiţiunĭ.** — Cănd doă liniĭ curbe oarecare în spaţiŭ se taie în un punct, numim *unghiŭ al celor doă curbe în punctul considerat* unghiul format de tangentele duse la curbe în acel punct.

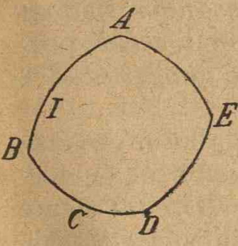
Unghiul a doă curbe de pe o sferă este dar egal cu unghiul planurilor duse respectiv prin centrul sfereĭ şi prin tangentele la acele curbe în punctul comun; căcĭ, aceste tangente fiind perpendiculare pe rada care merge la punctul comun, unghiul lor măsoară diedrul celor doă planurĭ.

Unghiul a doă arcurĭ de cerc mare este egal cu unghiul planurilor acestor cercurĭ.

530. Se numeşte *poligon sferic* porţiunea din suprafaţa uneĭ sfere cuprinsă între maĭ multe arcurĭ de cerc mare. Acele arcurĭ sînt *laturile* poligonuluĭ; unghiurile formate de laturĭ şi vîrfurile acestor unghiurĭ, sînt *unghiurile* şi *vîrfurile* poligonuluĭ.

Un poligon sferic este *convex* dacă este așeḑat de aceiașĭ parte a fie-căreia din circumferențele de cerc mare care'l formează. In cazul contrar este *concav*.

Fie-care lature a unuĭ poligon sferic convex, este maĭ mică de căt o semi-circumferență de cerc mare. Căcĭ, să presupunem d. e. că laturea AB, ar fi maĭ mare de căt o semi-circumferență; luăm o lungime AI egal cu o semi-circumferență, punctul I fiind între A și B; atuncĭ, cercul mare care conține pe AE are să treacă prin I (§. 506) și poligonul nu se maĭ află cu totul de aceiașĭ parte a circumferențeĭ acestuĭ cerc.

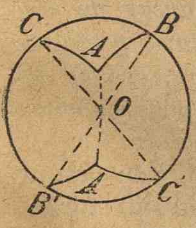


Perimetrul unuĭ poligon sferic convex nu poate fi întîlnit în maĭ mult de doă puncte de un arc de cerc mare.

531. Poligonul sferic cel maĭ simplu este *triunghiul sferic*, adică porțiunea de suprafață sferică cuprinsă între treĭ arcurĭ de cerc mare, *fie-care maĭ mic de căt o semi-circumferență de cerc mare.*

Un triunghiŭ sferic este dar totdeauna convex.

Triunghiurile sferice, ca și triunghiurile plane. se deosebesc în: *isoscel, ecvilateral, dreptunghic.*



532. Dacă unim vîrfurile unuĭ triunghiŭ sferic ABC cu centrul O al sfereĭ, formăm un unghiŭ triedru OABC, a căruĭ fețe AOB, BOC... aŭ aceiașĭ măsură ca și laturile corespunḑătoare AB, BC.... a-le triunghiuluĭ sferic, și a căruĭ unghiurĭ diedre

OA, OB.... aŭ aceiașĭ măsură (§. 529) ca și unghiurile A, B.... a-le acelui triunghiŭ.

De asemene, la un poligon sferic ABCD, corespunde un unghiŭ poliedru OABCD.

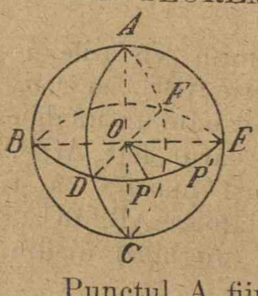
Din aceasta rezultă că, *la o proprietate de-a unghiurilor triedre saŭ poliedre, corespunde o proprietate analoagă de-a triunghiurilor saŭ poligoanelor sferice*; este de ajuns de-a înlocui în enunciul aceleĭ proprietățĭ cuvintele: *față* prin *lature*, și *unghiŭ diedru* prin *unghiŭ.*

533. Dacă prelungim crestele unghiuluĭ triedru OABC (fig. de la §. 532) dincolo de vîrful O, formăm un unghiŭ poliedru simetric OA′B′C′ care determină pe suprafața sfereĭ, triunghiul sferic A′B′C′. Aceste doă triunghiurĭ ABC, A′B′C′, a căror vîrfurĭ sînt diametralminte opuse doă căte doă se numesc *triunghiurĭ sferice simetrice.*

De asemene, unuĭ poligon sferic corespunde un *poligon sferic simetric.*

In general doă poligoane sferice simetrice unul altuia, aŭ unghiurile și laturile lor respectiv egale, însă nu se pot suprapune fiind-că sînt dispuse în ordine inversă. Un triunghiŭ sferic poate fi suprapus simetricului seŭ numaĭ dacă are doă unghiurĭ egale, adică dacă este isoscel.

534. TEOREMA.— *Unghiul a doă arcurĭ de cerc mare are drept măsură porțiunea de arc de cerc mare, descris din vîrful unghiuluĭ ca pol și cuprinsă între laturile unghiuluĭ.*



Fie ABC, ADC doă cercurĭ marĭ, A vîrful unghiuluĭ format de ele; fie BDE cercul mare descris din A ca pol.

Punctul A fiind polul arculuĭ BD, fie-care din arcurile AB, AD este un sfert de circumferență de cerc mare și prin urmare unghiurile AOB și AOD sînt drepte. Așa dar, unghiul BOD este unghiul plan corespundetor unghiuluĭ diedru BACD, și arcul BD care măsoară unghiul BOD măsoară și unghiul BAD format de cele doă arcurĭ de cerc mare.

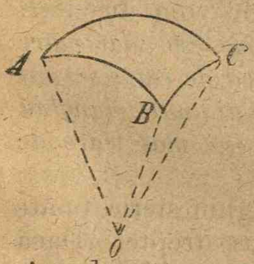
535. **Corolar I.**— Dacă luăm dealungul circumferențeĭ BDE și în acelașĭ senz, arcurile BP și DP′, egale căte cu un sfert de circumferență mare, punctul P este polul arculuĭ AB și punctul P′ este polul arculuĭ AD, și arcul PP′ este egal cu arcul BD. Așa dar: *unghiul BAD are drept măsură arcul de cerc mare care unește poliĭ laturilor unghiuluĭ.*

536. **Corolar II.** — Dacă considerăm toate cercurile marĭ de o potrivă înclinate pe cercul ABCE, poliĭ acelor cercurĭ sînt pe o circumferență descrisă din P ca centru și cu distanța polară PP′ ca radă.

537. **Corolar III.** — Dacă prelungĭm arcurile BA, DA dincolo de intersecțiunea lor, avem unghiurile BAD, EAF, care fiind opuse la vîrf, sînt egale între ele, iar unghiurile BAD și DAE sînt suplementare.

538. TEOREMĂ.— *1. In un triunghiŭ sferic, o lature este maĭ mică de căt suma celorlalte doă.*

2. Suma laturilor unuĭ triunghiŭ sferic este maĭ mică de cat circumferența de cerc mare.



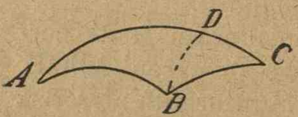
1. Fie ABC un triunghiŭ sferic și O centrul sfereĭ; planurile arcurilor de cerc mare cari formează triunghiul ABC, determină un triedru OABC, a căruĭ fețe sînt măsurate de laturile corespundetoare a triunghiuluĭ ABC. Insă, fața AOB este maĭ mică de căt suma celorlalte doă; prin urmare și arcul AB este maĭ mic de căt suma arcurilor BC, CA.

2. Suma fețelor AOB, BOC, COA este maĭ mică de căt patru unghiurĭ drepte (§. 379): prin urmare perimetrul triunghiuluĭ ABC este maĭ mic de căt o circumferență de cerc mare.

539. **Corolar.** — *O lature a unuĭ triunghiŭ sferic este maĭ mare de căt diferența celorlalte doă.*

540. TEOREMĂ. — *In un triunghiŭ sferic, la un unghiŭ maĭ mare se opune o lature maĭ mare.*

Aceasta rezultă din proprietatea analoagă a unghiuluĭ triedru (§. 372), însă se poate demonstra și cum urmează.



Fie unghiul ABC maĭ mare de căt unghiul ACB; se va pute duce în unghiul ABC un arc de cerc mare BD care să facă cu BC un unghiŭ egal cu BCA. Triunghiul BDC avînd doă unghiurĭ egale va fi isoscel și vom ave BD=DC. Triunghiul ABD dă:

$$AB < AD + BD$$

și înlocuind laturea BD prin egala sa DC avem

$$AB < AC.$$

541. **Observațiune.** — După cele arătate la §. 532, care videm că se adiveresc prin teoremele precedente, putem întinde căt de departe analogia dintre unghiurile triedre și triunghiurile sferice. Ast-fel, raportăndu-ne la Teorema de la §. 386 vom ḑice: *1. Suma unghiurilor unuĭ triunghiŭ sferic este maĭ mare de căt doă unghiurĭ drepte și maĭ mică de căt șese unghiurĭ drepte*; 2. *cel maĭ mic unghiŭ al unuĭ triunghiŭ sferic, mărit cu doă unghiurĭ drepte, este maĭ mare de căt suma celorlalte doă.*

Din aceste rezultă că un triunghiŭ sferic poate să aibă, unul, doă saŭ treĭ unghiurĭ drepte. Dacă triunghiul este *bidreptunghic*, vîrful unghiuluĭ care nu'ĭ drept este polul lătureĭ opusă, și laturile care formează acest unghiŭ sînt sferturĭ de circumferență de cerc mare. In triunghiul sferic *tridreptunghic*, toate laturile sînt sferturĭ de circumferență de cerc mare; acest triunghiŭ este a opta parte din suprafața sfereĭ pe care să află.

542. TEOREMĂ.— *Pentru ca un cerc mare să fie perpendicular pe un cerc mic, trebue și este de ajuns ca cercul cél mare să treacă prin poliĭ celuĭ mic.*

Să considerăm figura de la §. 520. Fie AMB cercul mic a căruĭ polĭ sînt P și P': ḑic că pentru ca unghiul SMT să fie drept, trebue ca planul OMS să coincidă cu MPP'. In adevăr, planul MPP' este perpendicular pe MT, căcĭ conține dreptele OM și PP' ambele perpendiculare pe MT. Dacă dar unghiul SMT este drept, atuncĭ MS este în planul MPP' și prin urmare coincide cu planul OMS.

543. **Corolar.** — *Prin un punct de pe suprafața uneĭ sfere se poate duce un cerc mare perpendicular la un cerc dat, și nu se poate duce de cât numaĭ unul.* Acesta este cercul care trece prin punctul dat și prin poliĭ cerculuĭ dat.

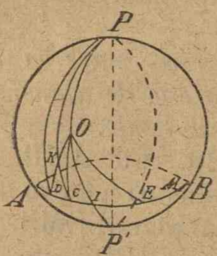
Dacă punctul dat ar fi în unul din poliĭ cerculuĭ dat, ar fi nedeterminare; lăsând însă la o parte acest caz videm că prin un punct dat se pot duce doă *arcurĭ* de cerc mare, perpendiculare la un cerc dat.

544. TEOREMA.— *Dacă, pe suprafața uneĭ sfere, luăm o circumferență și un puuct exterior eĭ; și dacă prin punctul dat ducem cel maĭ mic din arcurile de cerc mare perpendiculare pe cercul dat și maĭ multe arcurĭ de cerc mare oblice, atuncĭ:*

1. Arcul perpendicular este maĭ mic de cât orĭ-ce arc oblic:

2. Doă arcurĭ oblice a căror picioare sînt egal *depărtate de piciorul arcului perpendicular, sînt egale ;*

3. Din doă arcurĭ oblice acela este maĭ lung, a căruĭ picior este maĭ depărtat de piciorul arcului perpendicular.



Fie AEB circumferența și O punctul luat pe sferă ; fie PP′ poliĭ acesteĭ circumferențe, OI arcul de cerc mare perpendicular pe AEB, OC un arc oblic.

Cercul AEB, împarte sfera în doă calote, din care una va conține punctul O și fie P polul așeḑat pe această calotă ; să ducem arcurile de cerc mare PC, PD și fie K intersecțiunea arcurilor OD și PC.

1. Triunghiul sferic POC dă :

$$PC - PO < OC$$

adică

$$PI - PO < OC, \text{ saŭ } OI < OC.$$

2. Fie C și E doă puncte astfel că $CI = IE$; coardele OE și OC sînt egale fiind-că punctele E și C sînt simetrice în privirea planuluĭ PIP′ ; coardele fiind egale și arcurile OE și OC sînt egale fiind-că aŭ aceiașĭ raḑă.

3. Fie D maĭ departe de I de căt C. Triunghiurile sferice OKC și PKD daŭ :

$$OC < OK + KC, \qquad PD < PK + KD,$$

adunănd, avem

$$OC + PD < OD + PC ;$$

însă

$$PD = PC$$

prin urmare

$$PC < OD.$$

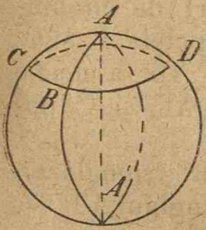
545. **Corolar I.**—Dacă punctul C descrie cercul AEB incepănd de la punctul I, arcul de cerc mare OC, egal maĭ întăĭ egal cu OI, creşte, devine egal cu OPI′, apoĭ descreşte revenind la OI. OI este prin urmare cel maĭ scurt drum de la punctul O la circumferenţa AEB ; adică cel maĭ scurt drum, de la un punct la o circumferenţă pe sferă, este arcul cel maĭ mic din-

tre cele doă perpendiculare duse prin punct la circumferența dată. Lungimea acestuĭ arc OI se numeşte *distanța sferică* a punctuluĭ O la cercul AEB.

546. **Corolar II.**—Dacă punctul O ar fi unul din poliĭ cerculuĭ AMB, atuncĭ cel maĭ mic drum de la P la circumferența AMB este saŭ PI, saŭ PC, saŭ PD ... care toate sînt egale între ele ; prin urmare :

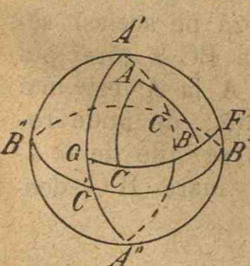
Cele maĭ scurte drumurĭ de la polul uneĭ circumferențe la punctele acesteĭ curbe, pe suprafața sferică, sînt toate egale între ele.

547. **Corólar III.**—Fiind date doă puncte A şi B pe sferă, din punctul A ca pol şi cu AB ca distanță polară descriŭ o circumferență CBD şi duc cercul mare ABA′. Din Corolarele de la §§ 545 şi 546 rezultă că *arc*.AB este druml cel maĭ scurt de la punctul A la punctul B ; aşa dar : *drumul cel maĭ scurt între doă puncte de pe suprafața uneĭ sfere este arcul de cerc mare cuprins între acele puncte.*



548. TEOREMA. *Fiind dat un triunghiŭ sferic, dacă din vîrfurile luĭ se descriŭ circumferențe de cercurĭ marĭ, aceste împart suprafața sfereĭ în opt triunghiurĭ sferice ; vîrfurile fiecăruia sînt poliĭ laturilor triunghiuluĭ dat.*

Fie ABC triunghiul dat şi circumferențele de cerc mare B′C′B″C″, C′A′C″A″, A′B′A″B″ descrise respectiv din vîrfurile A.B.C, ca polı.



1. Circumferențele de cerc mare B′C′B″C″, C′A′C″A″, este evident că împart semi-sfera anterioară planuluĭ circumferențeĭ a treia A′B′A″B″, în patru triunghiurĭ şi anume : A′B′C′, A′C′B″

B′C′A″ şi C′B″A″, şi semi-sfera posterioară aceluiaşĭ plan în alte patru triunghiurĭ: A′C″B′, B′C″A″; A″C″B″ şi B″C″A′ în totul avem opt triunghiurĭ a-le căror vîrfurĭ sînt cele şese puncte de intersecţiune: A′, A″, B′, B″, C′, C″, a-le celor treĭ circumferenţe.

2. Să luăm triunghiul A′B″C′; ḑic că vîrfurile luĭ: A′,B″,C′, sînt poliĭ laturilor BC, CA şi AB a triunghiuluĭ ABC. In adivĕr, punctul B fiind polul circumferenţeĭ A′C′, distanţa BA′ este un sfert de circumferenţă de cerc mare; punctul C fiind polul circumferenţeĭ A′B′, distanţa CA′ este şi ea egală cu un sfert de circumferenţă de cerc mare. Atuncĭ rezultă că punctul A este îndepărtat de un sfert de circumferenţă de cerc mare de fie-care din punctele B şi C; prin urmare el este polul arculuĭ BC. Tot asemene vom demonstra că B″ este polul arculuĭ AC şi C′ polul arculuĭ AB.

549. **Observaţiune.**—Dintre cele opt triunghiurĭ, se consideră ca maĭ important numaĭ triunghiul A′B″C′, care se deosebeşte de celelalte şepte prin aceea că vîrful seŭ A′ se află de aceiaşĭ parte a arculuĭ BC cu punctul B, şi vîrful C′ se află de aceiaşĭ parte a arculuĭ AB cu punctul C.

Reciproc, ḑic că dacă din punctele A′,B′,C′ ca polĭ descrim circumferenţe de cercurĭ marĭ, dintre cele opt triunghiurĭ care se formează, numaĭ triunghiul ABC este acela care are aceleaşĭ proprietâţĭ în privirea triunghĭuluĭ A′B′C′. Pentru aceasta observ că punctele A şi A′ fiind prin ipoteză pe aceiaşĭ semi-sferă terminată prin circumfertuţa BC a căreĭ pol este A′, drumul cel maĭ scurt de la A la A′ este maĭ mic de cât un sfert de circumferenţă; de unde rezultă că aceste doă puncte trebue să se afle de o aceiaşĭ parte a circumferenţeĭ de cerc mare B′C′ descrisă din punctul A ca pol.

Tot asemene se va vide că vîrful B al triunghiuluĭ ABC este de aceiaşĭ parte a arculuĭ A′C′ cu punctul B, şi vîrful C de aceiaşĭ parte a arculuĭ A′B cu punctul C.

Aceste doă triunghiurĭ sferice ABC şi A′B′C′, *Legendre* le-a numit *triunghiurĭ polare* pentru că putem descri laturile unuia luănd ca polĭ vîrfurile celuialalt. Se maĭ numesc şi *triunghiurĭ suplementare* din cauza proprietăţeĭ ce rezultă din Teorema următoare.

550.—TEOREMA —*Dacă avem doă triunghiurĭ polare, un unghiŭ al unuia din triunghiurĭ are drept măsură excesul uneĭ semi-circumferenţe asupra latureĭ opusă în celalalt triunghiŭ.*

Să imaginăm că în figura precedentă am prelungit laturile AB, AC pănă cănd întîlnesc laturea B′C′ a triunghiuluĭ A′B′C′; să însemnăm cu D şi E punctele de întîlnire. Punctul A fiind polul arculuĭ B′C′, unghiul BAC are drept măsură arcul DE cuprins între larurile sale. Acum, arcul DB′ este un şfert de circumferenţă de cerc mare, fiind-că B′ este polul arculuĭ AC; de asemene, arcul EC′ este un şfert de circumferenţă de cerc mare fiind-că C′ este polul arculuĭ AB; avem dar

$$\text{arc.}DB'+\text{arc.}EC' = {}^1/_2\ \text{circumf.}$$

care se poate scri

$$\text{arc.}B'E+\text{arc.}ED+\text{arc.}\ EC' = {}^1/_2\ \text{circumf.}$$

saŭ încă

$$\text{arc.}DE+\text{arc.}B'C' = {}^1/_2\text{circumf.}$$

de unde

$$\text{arc.}DE = {}^1/_2\text{circumf.}-\text{arc.}B'C'.$$

Tot asemene va fi şi cu celelalte doă nughiurĭ, Să luăm acum, unghiul A′ al triunghiuluĭ A′B′C′;

fie F şi G punctele de intersecţiune a laturilor sale A'B', A'C' cu arcul BC prelungit. Punctul A' fiind polul arculuĭ BC, unghiul B'A'C' are drept măsură arcul FG cuprins între laturile sale. Acum, arcurile BG şi CF sînt amăndoă egale cu căte un şfert de circumferenţă, fiind-că punctele B şi C sînt respectiv poliĭ arcurilor A'C' şi A'B', avem dar:

$$arc.BG + arc.CF = {}^1/_2 circumf.$$

de unde, deducem ca maĭ sus

$$arc.BC + arc.FG = {}^1/_2 circumf.$$

saŭ

$$arc.FG = {}^1/_2 circumf. — arc.BC.$$

Tot asemene va fi şi cu celelalte doă unghiurĭ.

551. TEOREMA.—*Doă triunghiurĭ sferice, de pe o sferă saŭ de pe sfere egale, sînt egale în toate părţile lor: 1. dacă aŭ o lature egală adiacentă la doă unghiurĭ egale unul cu altul; 2. dacă aŭ un unghiŭ egal cuprins între doă laturĭ egale una cu alta; 3. dacă aŭ laturile egale una cu alta; 4. dacă aŭ unghiurile egale unul cu altul.*

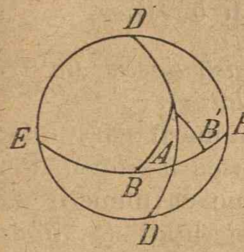
In toate cazurile, triunghiurile sînt egale saŭ simetrice, dacă dispoziţiunea elementelor este aceiaşĭ în ambele triunghiurĭ saŭ este inversă.

Această Teoremă este o consecvenţă a Teoremeĭ de la §. 387.

552. **Problema I.**—*Să se construiască un triunghiŭ sferic dreptunghic, cunoscănd: 1. o lature a unghiuluĭ drept şi ipotenuza; 2. un unghiŭ şi laturea opusă.*

1. Fie b şi a numeriĭ carĭ măsoară laturea dată şi ipotenuza. Ducem doă cercurĭ marĭ DAD' şi EAE perpendiculare unul pe altul; pe circumferenţa cerculuĭ întăĭ cu începere de la A ieŭ un arc AC egal cu laturea dată b; apoĭ, din punctul C ca pol şi cu o rađă sferică egală cu ipotenuza dată a, descriŭ un

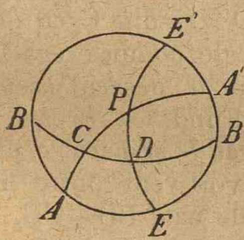
cerc BB′ care taie cercul EE′ în doă puncte simetrice în privirea cercului DCD′; duc arcurile de cercurĭ



marĭ CB, CB′ şi avem doă triunghiurĭ simetrice ACB, ACB′ care amăndoă resolvesc problema.

Pentru ca problema să fie posibilă trebue şi este de ajuns ca numĕrul a care măsoară ipotenuza să fie cuprins între b şi $2-b$ cari măsoară cea maĭ scurtă şi cea maĭ lungă distanţă a punctnluĭ C la cercul mare EE′

2. Fie B şi b numeriĭ carĭ măsoară unghiul şi laturea dată. Construesc doă cercuri marĭ BAB′, BCB′ care ss facă între ele unghiul dat B; fie P polul cercului întăĭ şi EPE′ cercul mare care este perpendicular în acelaşĭ timp pe BAB′ şi BCB′.



Problema se reduce la a duce un cerc mare perpendicular pe BAB′ adică să treacă prin P, şi astfel ca porţiunea interceptată între arcurile BAB′ şi BCB′ să fie egală cu laturea dată b. Insă atuncĭ PC va fi egal cu $1-b$. Vom descri dar din P ca centru, şi cu o radă sferică egală cu $1-b$ un cerc care va tăie pe BDB′ în doă puncte; C fiind unul din acele puncte avem triunghiurile BCA şi B′CA care rezolvesc problema. Videm că condiţiunea de posibilitate este

$$PC > PD \quad \text{saŭ} \quad 1-b > 1-B,$$

adică

$$b < B.$$

In această construcţiune am presupus B ascuţit. Dacă B ar fi obtuz, am ave

$$PC = b - 1, \quad PD = B - 1$$

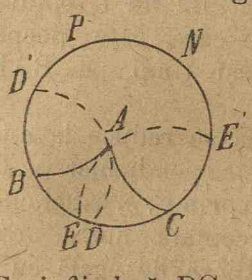
şi condiţiunea de posibilitate ar fi $b > B$.

553. **Problema II** —*Să se construiască un triunghiŭ sferic cunoscîndu-ĭ cele treĭ laturĭ.*

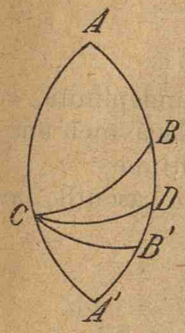
Să însemnăm prin a, b, c numeriĭ carĭ măsoară cele treĭ laturĭ, şi să presupunem că $a > b > c$. Pentru ca Problema să fie posibilă trebue ca numeriĭ a, b, c să satisfacă următoarelor doă neegalităţĭ (§. 538).

$$a < b + c, \quad a + b + c < 4.$$

Fie NP o circumferenţă de cerc mare, pe care ss luăm $arc.$BC egal cu a; din punctul B ca pol şi cu o deschidere de compas egală cu coarda arculuĭ c descriŭ un arc de cerc DAD′, şi din C ca pol cu o deschidere de compas egală cu coarda arculuĭ b descriŭ arcul de cerc EAE′. Fiind că a este maĭ mare şi de căt b şi de căt c, punctele D şi E vor veni între B şi C şi fiind-că BC este maĭ mic de căt BD+CE, rezultă că punctul E vine între B şi D. — Apoĭ, suma BD′+BC+CE′ fiind maĭ mică de căt o circumferenţă de cerc mare, punctul E′ se află pe arcul CND′ între C şi D′. Punctele E şi E′ fiind, unul interior şi celalalt exterior caloteĭ determinată de cercul DAD′ rezultă că arcul EAE′ trebue să taie arcul DAD′ în un punct oare-care A, care va fi vîrful al treilea al triunghiuluĭ căutat.



554. **Problema III**.—*Să se construiască un triunghiŭ sferic cunoscîndu-i-se doă laturĭ şi unghiul opus uneia din ele.*



Să însemnăm prin a, b şi A numerii cari măsoară cele doă laturi date şi unghiul opus laturei întăia.

Construim doă cercuri mari care să facă între ele un unghiu egal cu A; din vîrful A şi pe una din laturile acestuĭ unghiu luăm un arc AC egal cu b, şi apoĭ din punctul C ca pol şi cu o deschidere de compas egală cu coarda arculuĭ a descriŭ un arc de cerc care taie laturea a doa a unghiuluĭ A în punctele B şi B'; unul din triunghiurile ABC, AB'C este triunghiul căutat.

Să discutăm această problemă. Duc arcul de cerc mare CD perpendicular pe ABA'; acest arc CD va fi ascuţit saŭ obtuz după cum va fi şi unghiul A: în cazul întăĭ arcul CD va fi drumul cel maĭ scurt între C şi circumferenţa ADA'; în caz cănd CD este obtuz acest arc va fi cel maĭ lung drum între C şi aceiaşĭ circumferenţă. Aşa dar, pănă acum videm că pentru ca punctele B şi B' să existe trebue să avem:

$a > CD$ dacă A este ascuţit

$a < CD$ „ A „ obtuz.

Aceste condiţiunĭ sînt satisfăcute dacă a şi A sînt de speciĭ diferite, şi în acest caz problema nu poate ave de căt o singură soluţiune.

Să presupunem d. e. a obtuz şi A ascuţit; dacă este că se poate duce din C la un punct al arculuĭ ADA' o oblică egală cu a care este obtuz, atuncĭ aceasta are să fie în spre acea din laturile CA saŭ CA' care este obtuză; aşa dar nu poate fi de căt o singură soluţiune, care pentru ca să existe trebue să avem

$a < b$ dacă $b > 1$.

saŭ $a<2-b$ dacă $b<1$;

dacă una din aceste condițiuni este îndeplinită, ceialaltă nu este și avem o soluțiune, dacă nicĭ una nu este îndeplinită nu avem nicĭ o soluțiune.

Dacă presupunem A obtuz și a ascuțit, avem condițiunile

$a>b$ dacă $b<1$,

saŭ $a>2-b$ dacă $b>1$.

Dacă a și A sînt de aceiașĭ specie, problema, dacă'ĭ posibilă poate ave una saŭ doă soluțiunĭ.

Considerăm cazul cănd a și A sînt ascuțite: atuncĭ CD este ascuțit, și prin urmare trebue să avem maĭ întăĭ

$$a<CD;$$

apoĭ se vede că avem doă puncte B și B′ simetrice în privirea luĭ D așa că dacă:

$b<1 \begin{cases} a<b & \text{avem 2 soluțiunĭ} \\ a>b & \text{,, 1 soluțiune, căcĭ atuncĭ } a<2-b; \end{cases}$

$b<1 \begin{cases} a<2-b & \text{,, 2 soluțiunĭ} \\ a>b & \text{,, 1 soluțiune căcĭ atuncĭ } a<b. \end{cases}$

Dacă a și A ar fi amăndoă obtuze, am ave maĭ întăĭ condițiunea $a<CD$, și celelalte semne s'ar resturna.

CAPITULUL V

I. SUPRAFAȚA SFEREI

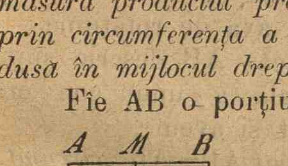
555. **Definițiuni.**—Se numește *linie frântă regulată* o linie frântă, plană și convexă, a căreĭ laturĭ sînt egale între ele, și unghiurile iarășĭ egale între ele. O asemene linie poate fi înscrisă și circumscrisă la un cerc, întocma ca și perimetrul unuĭ poligon regulat.

O linie frântă regulată are un *centru, o radă* și o *apotemă*: care sînt: centrul și radele cercurilor circumscrise și înscrise. Orĭ-ce dreaptă ce trece prin centru este un *diametru* de-a linieĭ.

O porțiune de plan cuprinsă între o linie frântă regulată și cele doă rade extreme a aceșteĭ liniĭ, se numește *sector poligonal regulat*.

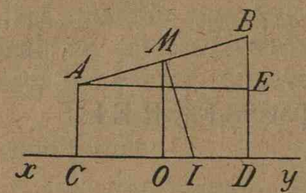
556 TEOREMA.—*Dacă învîrtim o dreaptă în jurul uneĭ axe așadată în acelașĭ plan, și de aceiașĭ parte cu dreapta, suprafața născută de dreapta are drept măsură productul proecțiuneĭ aceșteĭ drepte pe axă, prin circumferența a căreĭ radă este perpendiculara dusă în mijlocul drepteĭ până la întîlnire cu axa.*

Fie AB o porțiune de dreaptă și xy axa; dreapta AB poate ocupa treĭ pozițiunĭ față cu axa xy: *1.* Dreapta AB este paralelă cu xy. In acest caz dreapta AB descrie în învîrtirea eĭ, suprafața laterală a unuĭ cilindru drept cu bază circulară,



și avem prin urmare:

$supraf.AB = AB \times circumf.OM = CD \times circumf.OM.$



2. Dreapta AB nu are nicĭ un punct comun cu axa şi nicĭ nu'ĭ este paralelă. In acest caz dreapta AB descrie suprafaţa laterală a unuĭ trunchiu de con drept cu baze paralele şi avem prin urmare :

$$supraf.AB = AB \times circumf.OM = 2\pi AB \times OM.$$

Triunghiurile AEB şi OIM sînt asemene fiind-că aŭ laturile lor perpendiculare una pe alta, ceia ce dă

$$\frac{OM}{AE} = \frac{IM}{AB}, \text{ de unde } OM \times AB = IM \times AE:$$

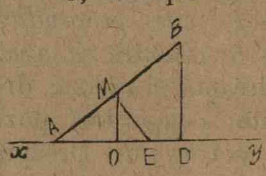
prin urmare putem scri :

$$supraf.AB = 2\pi IM \times AE ;$$

însă $2\pi \times IM$ reprezintă circumferenţa a căreĭ rază este IM, şi AE este egală cu CD proecţiunea dreptei AB pe axă : aşa dar avem

$$supraf.AB = CD \times circumf.IM.$$

3, Dreapta AB se razimă cu unul din capetele eĭ pe axa de rotaţiune. In acest caz AB descrie suprafaţa laterală a unuĭ con circular drept şi avem :

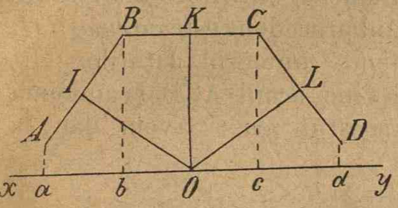


$supraf.AB = AB \times circumf.OM$; saŭ făcînd ca maĭ sus găsim

$$supraf.AB = AD \times circumf.IM$$

557. TEOREMA.—*Suprafaţa născută prin învîrtirea uneĭ liniĭ frânte regulată în jurul unuĭ diametru al eĭ care nu o strabate, are drept măsură productul pro-*

ecţiuneĭ sale pe axa prin circumferenţa înscrisă în linia frăntă.



Fie ABCD o linie frăntă regulată, O centrul eĭ, xy diametrul în jurul căruia se învîrteşte linia frăntă şi OI = OK = OL apotema eĭ.

Aria născută de linia ABCD se compune din zuma ariilor născute de laturile eĭ; însă avem (§ 556);

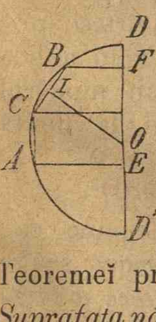
$$supraf.AB = ab \times circumf.OI$$
$$supraf.BC = bc \times circumf.OK$$
$$supraf.CD = cd \times circumf.OL\,;$$

adunănd avem

$$supraf.ABCD = (ab + bc + cd) \times circumf.OI = ad \times circumf.OI.$$

558. **Corolar**. *Saprafaţa născută, de un semi-poligon ABCDEF regulat de un număr păreche de laturĭ, care se învîrteşte în jurul diametruluĭ seŭ AF, are drept măsură circumferenţa înscrisă în poligon prin diametrul cerculuĭ circumscris,* căcĭ proecţiunea poligonuluĭ pe diametrul AF este însăşĭ lungimea acestuĭ diametru.

559. TEOREMA.—*Suprafaţa uneĭ zone sferice are drept măsură productul înălţimeĭ sale prin circumferenţa unuĭ cerc mare.*



Consider zona sferică născută de cercul AB prin învîrtirea luĭ în jur de diametrul DD'; EF $= i$ este înălţimea zoneĭ şi fie R raḑa sfereĭ. Inscriŭ în arcul AB o linie frăntă regulată ACB, a căreĭ apotemă este OI; în virtutea Teoremeĭ precedente avem:

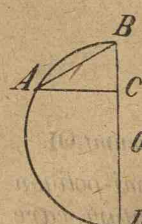
Suprafaţa născută de linia frăntă ACB = EF $\times$ *circumf.*CI.

Acum, dacă îndoesc numĕrul laturilor linieĭ frânte ceia-ce se schimbă în productul precedent este *circumf.OI*: când voiŭ îndoi necontenit numĕrul laturilor linieĭ frânte, la limită ea devine arcul ACB şi apotema OI devine egală cu rada acestuĭ arc; avem dar la limită

$$zona\,ABC = 2\pi R \times i.$$

560. **Corolar I.** *In sfere egale, doă zone sînt între ele ca înălţimile lor şi prin urmare doă zone de aceiaşĭ înălţime sînt egale.*

561. **Corolar II.** Să luăm o calotă sferică, născută de arcul AB prin învîrtirea în jur de diametrul BD. Avem în virtutea Teoremeĭ precedente



$$calota\,AB = 2\pi R \times BC$$
$$= \pi \times 2OB \times BC = \pi\, BD \times BC$$

saŭ $\pi\, \overline{AB}^2$.

Aşa dar: *Suprafaţa uneĭ calote sferice este echivalentă cu cercul a căruĭ rada este egală cu coarda arculuĭ care dă naştere caloteĭ.*

562. TEOREMA.—*Suprafaţa sfereĭ are drept măsură productul diametruluĭ seŭ prin circumferenţa de cerc mare.*

Luăm un semi-cerc a căruĭ radă să fie R; înscrim în semi-circumferenţa luĭ un semi-poligon regulat de un numĕr păreche de laturĭ şi învîrtesc poligonul în jurul diametruluĭ semi-cerculuĭ: voiu aplica Corolarul de la § 558. Indoesc necontenit numĕrul laturilor semi-poligonuluĭ înscris şi trecînd la limită voiŭ ave:

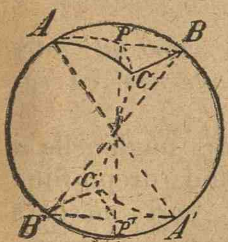
$$suprafaţa\ sfereĭ = 2R \times 2\pi R = 4\pi R^2 = \pi D^2.$$

563. **Corolar.** Formula precedentă ni spune că: *suprafaţa sfereĭ este egală cu patru cercurĭ marĭ*: saŭ se maĭ dice că este egală cu *suprafaţa unuĭ cerc a căruĭ radă ar fi egală cu diametrul sfereĭ.*

Tot formula ni arată că: *suprafețele a doă sfere sînt între ele ca patratele radelor saŭ a diametrelor lor.*

564. TEOREMA.—*Doă triunghiurĭ sferice simetrice sînt echivalente.*

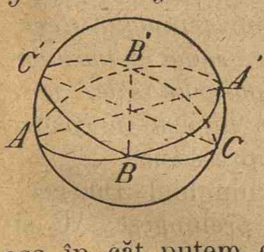
Fie ABC, A′B′C′ doă triunghiurĭ sferice simetrice. Ieŭ polul P al cercululĭ circumscris triunghiuluĭ ABC și duc arcurile de cerc mare PA, PB, PC care sînt egale între ele (§. 509). Duc diametrul POP′ și arcurile de cerc mare P′A′, P′B′, P′C′. Unghiurile POA și P′OA′ fiind egale, rezultă că și arcurile



PA, P′A′ sînt egale între ele, și fiind-că PA=PB=PC apoĭ vom ave și P′A′=P′B′=P′C′. In urma acestora, triunghiurile PAB și P′A′C sînt simetrice și isoscele, prin urmare se pot suprapune. Tot asemene este și cu triunghiurile PAC și P′A′C′, PBC și P′B′C′. Așa dar triunghiutile ABC și A′B′C′ sînt echivalente fiind-că sînt compuse din căte treĭ triunghiurĭ egale unul cu altul.

565. **Corolar**. *Un fus sferic este egal cu suma a doă triunghiurĭ opuse la vîrf, unghiurile din vîrf fiind egale cu unghiul fusuluĭ.*

Fie fusul ACBC′ a căruĭ unghiu este C. Duc circumferența ABA′B′ și videm că fusul considerat se compune din triunghiurile ACB și BC′A; însă triunghiul sferic ABC este echivalent cu simetricul seŭ A′B′C′;



așa în căt putem dice că fusul considerat este egal cu suma triunghiurilor ACB și A′C′B′, care sînt opuse în C′, și acăror unghiurĭ: AC′B și A′C′B′ sînt egale între ele și egale cu unghiul fusuluĭ.

566. TEOREMA.—*Dacă luăm ca unitate de unghiu unghiul drept, și ca unitate de arie aria triunghiuluĭ tridrept-unghic, atuncĭ un fus sferic are drept măsură de doă-orĭ numĕrul care măsoară unghiul seŭ.*

Este uşor de vădut maĭ întâĭ că *raportul între doă fusurĭ sferice de pe aceiașĭ sferă este egal cu raportul între unghiurile lor.*

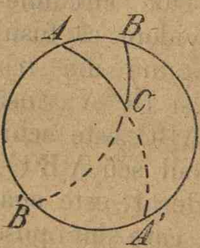
Fie A şi A′ numeriĭ carĭ măsoară unghiurile a doă fusurĭ de pe aceiaşĭ sferă, unghiul drept fiind luat ca unitate; şi fie F şi F′ numeriĭ carĭ măsoară aceste fusurĭ, luăndu-se ca unitate de arie, aria triunghiuluĭ tridreptunghic: avem

$$\frac{F}{F'}=\frac{A}{A'}.$$

Să luăm A′=1; fusul corespundĕtor, avînd unghiul seŭ egal cu un unghiŭ drept, va fi un sfert din aria sfereĭ adică dublu triunghiuluĭ tridreptunghic, şi prin urmare F′=2· proporţiunea precedentă devine

$$\frac{F}{2}=\frac{A}{1} \text{ de unde } F=2A.$$

567. TEOREMA. —*Suprafaţa unuĭ triunghiŭ sferic are drept măsură suma numerilor carĭ măsoară unghiurile sale, maĭ puţin 2, dacă ne punem în condiţiunile Teoremeĭ precedente.*



Fie ABC triunghiul. Duc cercul mare AB și prelungesc AC şi BC până în A′ și B′. Avem

$$ABC+BCA'=fusA$$
$$ABC+ACB'=fusB$$

şi (§. 564)

$$ABC+A'CB'=fusC.$$

Suma membrilor întâĭ a acestor treĭ egalităţĭ dă semi-sfera şi de doă orĭ triunghiul ABC. Insă, în sistema de unităţĭ adoptată, semi-sfera este egală cu 4 şi dacă însemnăm cu S,A,B,C numeriĭ carĭ măsoară aria şi unghiurile triunghiuluĭ avem : (§. 565)

$$4+2S=2A+2B+2C$$

de unde $$S=A+B+C-2.$$

568 **Corolar.** Să presupunem că luăm ca unitate unghiulară unghiul care intercepteză pe o circumferenţă un arc egal cu raḑa eĭ; dacă însemnăm cu ω un unghiu oare-care, cu l lungimea arcuĭuĭ corespunḑĕtor avem :

$$\frac{l}{r}=\frac{\omega}{1} \quad \text{saŭ} \quad l=\omega r\ ;$$

şi dacă luăm raḑa r că unitate lineară atuncĭ avem formul $l=\omega$. In acest caz unghiul drept este măsurat prin $\frac{\pi}{2}$ şi aria triunghiuluĭ tridreptunghic este mătot prin $\frac{\pi}{2}$.

Acum dacă însemnăm prin A′, B′. C′ unghiurile triunghiuluĭ măsurate în sistema de unităţĭ arătate aicĭ avem :

$$\frac{A}{1}=\frac{A'}{\frac{\pi}{2}},\quad \frac{B}{1}=\frac{B'}{\frac{\pi}{2}},\quad \frac{C}{1}=\frac{C'}{\frac{\pi}{4}} \quad \text{şi} \quad \frac{S}{1}=\frac{S'}{\frac{\pi}{2}}$$

şi atuncĭ formula de la numĕrul precedent dă :

$$S'=A'+B'+C'-\pi.$$

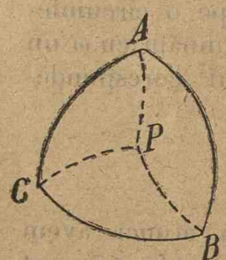
Numĕrul abstract $A'+B'+C'-\pi$ poartă numele de *excesul sferic* al triunghiuluĭ.

569. TEOREMA.—*Suprafaţa unuĭ poligon sferic de n laturĭ, are drept măsură suma numerilor carĭ mă-*

soară unghiurile sale maĭ puţin $2(n-2)$, dacă ne punem în condiţiunile Teoremeĭ de la §. 565.

Demonstraţiunea acesteĭ Teoreme se face descompunănd poligonul în triunghiurĭ prin arcurĭ de cerc mare eşite din un acelaşĭ punct şi aplicănd formula de la §. 566, la cele $(n-2)$ triunghiurĭ formate.

570. TEOREMA.—*Locul geometric al vîrfurilor triunghiurilor sferice carĭ aŭ o bază comună şi în carĭ diferenţa între suma unghiurilor bazeĭ şi unghiul opus este constantă, este o circumferenţa ce trece prin extremităţile bazeĭ.*



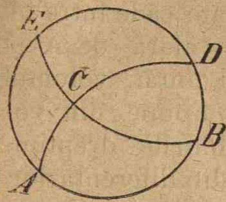
Fie ABC triunghiul sferic în care BC este baza dată şi $B+C-A$ este egală cu o cantitate constantă b. Fie P polul cerculuĭ care trece prin A,B,C; duc arcurile PA, PB, PC, ceia ce formează treĭ triunghiurĭ isoscele, carĭ daŭ:

$$\textit{unghiul}\,PAB = \textit{ungh.}\,PCA = \textit{ungh.}\,PAC.$$

Prin urmare suma unghiurilor egale PBC şi PCB a triunghiuluĭ isoscel PBC este egală cu k şi fie-care din aceste unghiurĭ este egal cu $\frac{k}{2}$. Triunghiul isoscel PBC este determinat, căcĭ se cunoaşte laturea BC şi cele doă unghiurĭ adiacente; prin urmare distanţa AP a vîrfuluĭ variabil A la punctul P este constantă şi locul geometric al punctuluĭ A este circumferenţa descrisă din P ca pol şi cu PB saŭ PC ca distanţă polară.

571. TEOREMA—*Locul geometric al vîrfurilor triunghiurilor sferice care aŭ o bază comună şi aceiaşĭ suprafaţă este o circumferenţă.*

Fie ABC triunghiul în care AB este baza dată şi a căruĭ arie S este constantă. Prelungesc laturile AC, BC până la întîlnire cu circumferenţa AB în D şi C. Avem (§ 566):



$$A+B+C-2=S.$$

Insă, unghiurile CAB şi CDE sînt suplementare, precum şi unghiurile CBA şi CED; avem dar,

$$A=2-D$$
$$B=2-E:$$

substituind în egalitatea de maĭ sus nĭ vine

$$2-D+2-E+C-2=S$$

saŭ

$$2+C-[D+E]=S;$$

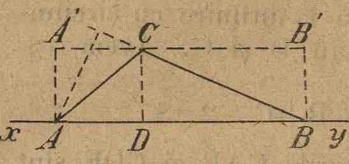
adică unghiul C al triunghiuluĭ ECD diferă de suma D+E a celorlalte doă unghiurĭ, cu o cantitate constantă. Punctele D şi E sînt diametralminte opuse punctelor A şi B şi prin urmare sînt fixe: aşa dar locul geometric al vîrfuluĭ C este o circumferenţă ce trece prin punctele D şi E.

II. VOLUMUL SFEREI

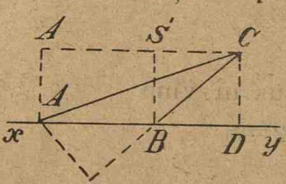
572. TEOREMA.—*Volumul corpuluĭ născut de un triunghiu care se învîrteşte în jurul uneĭ axe din planul seŭ şi care trece prin unul din vîrfurile triunghiuluĭ, fără să'ĭ străbată suprafaţa, este egal cu aria suprafeţeĭ descrisă de laturea opusă vîrfuluĭ fix, înmulţită cu a treia parte a înălţimeĭ relativă la această lature.*

Fie ABC triunghiul a caruĭ vîrf A este fix pe axa de rotaţiune *xy*. Triunghiul poate ave treĭ poziţiunĭ faţă cu axa de rotaţiune:

1 Laturea AB a triunghiuluĭ ABC coinctde cu axa xy. Perpendiculara dusă din C pe AB poate căde între A și B saŭ în afară de A și B; în cazul întâĭ volumul căutat se compune din volumurile conurilor născute de triunghiurile dreptunghice ACD și BCD; în cazul al doilea din diferența lor.



In același timp, cilindrul născut prin rotațiunea dreptunghiuluĭ ABB′A′, care are aceiașĭ bază și aceiașĭ înălțime ca și triunghiul dat, este egal cu suma saŭ diferența cilindrilor născuțĭ prin rotațiunea dreptunghiurilor ADCA′ BDCB′. Apoĭ, conul ACD este o treime din cilindrul BDCB′. Prin urmare în amăndoă cazurile volumul născut prin învîrtirea triunghiuluĭ ABC în jur de *xy* este a treia parte din cilindrul ABB′A′ și avem

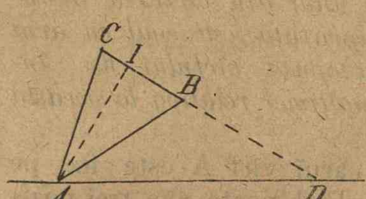


$$vol.ABC = {}^1/_3\pi \overline{CD}^2 \times AB = {}^1/_3\pi CD \times AI \times CB,$$

fiind-că productul $CD \times AB$ este egal $AI \times CB$, și amăndoă reprezintă dublul arieĭ triunghiuluĭ ABC.— Insă productul $\pi CD \times BC$ reprezintă aria suprafeteĭ născută de laturea BC a triunghiuluĭ ABC, în rotațiunea eĭ în jur de *xy*. Prin urmare avem

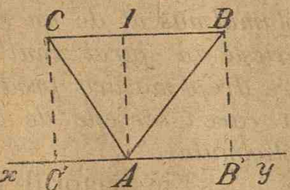
$$vol.ABC = supraf.BC \times {}^1/_3 AI$$

2. *Laturea AB a triunghiuluĭ ABC n'are de cât punctul A comun cu axa xy.* Prelungesc CB până la întîlnire în D cu axa *xy*. Triunghiul ABC este diferența între triunghiurile ACD și ABD; prin urmare volumul născut de triunghiul dat este egal cu diferența volumurilor născute de aceste doă triunghiurĭ. Avem dar:



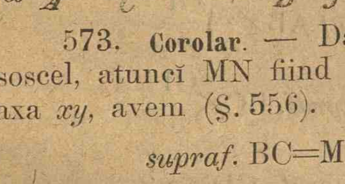
$$vol.ABC = (supraf.DC - supraf.DB) \times \frac{AI}{3} = supraf.BC \times \frac{AI}{3}.$$

3. *Laturea AB este paralelă cu axa de rotațiune.* In acest caz, volumul căutat este egal cu suma saŭ diferența volumurilor născute de triunghiurile ABI și ACI.



Insă volumul născut de triunghiul ABB′ este a treia parte din cilindrul născut de dreptunghiul AB′BI, și volumul născut de triunghiul ACC′ este a treia parte din cilindrul născut de dreptunghiul AC′CI. Prin urmare în amăndoă cazurile avem:

$$vol.ABC = {}^2/_3\pi.AI^2.BC = supraf.\ BC \times \frac{AI}{3},$$



căcĭ $2\pi.AI.BC$ exprimă aria suprafețeĭ laterale născută de dreptunghiul BCC′B′, saŭ aria descrisă de laturea BC a acestuĭ dreptunghiŭ.

573. **Corolar.** — Dacă triunghiul ABC este isoscel, atuncĭ MN fiind proecțiunea latureĭ BC pe axa xy, avem (§. 556).

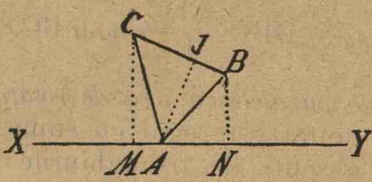
$$supraf.\ BC = MN \times$$

și prin urmare

$$vol.ABC = MN \times ci$$

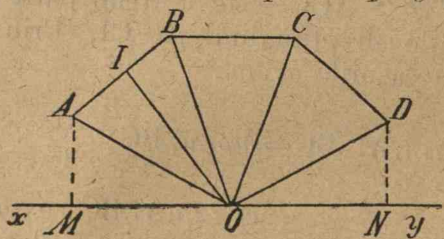
$$= {}^2/_3\pi.\ AI^2$$

saŭ ...ţi- sferic,



adică: *volumul născut de un triunghiŭ isoscel, în condițiunile exprimate de Teoremă, este egal cu* $^2/_3$ *din proecțiunea bazeĭ pe axă, înmulțită cu aria cercululuĭ a căruĭ radă este egală cu înălțimea triunghiuluĭ.*

574. TEOREMĂ.— *Volumul născut de un sector poligonal regulat care se învîrtește în jurul unuĭ diametru exterior suprafețeĭ luĭ, are drept măsură productul arieĭ descrisă de linia frăntă care'ĭ servește de bază, prin o treime din apotema poligonuluĭ.*



Fie sectorul poligonal OABCD și *xy* axa de rotațiune. Descompun sectorul în triunghiurĭ, toate cu vîrful în O. Volumul căutat va fi egal cu suma volumurilor născute de triunghiurile cari compun sectorul; avem:

$$vol.\,\mathrm{OABCD} = vol.\,\mathrm{AOB} + vol.\,\mathrm{BOC} + vol.\,\mathrm{COD};$$

însă $$vol.\,\mathrm{AOB} = supraf.\mathrm{AB} \times \frac{\mathrm{OI}}{3}$$

$$vol.\,\mathrm{BOC} = supraf.\,\mathrm{BC} \times \frac{\mathrm{OI}}{3}$$

$$vol.\,\mathrm{COD} = supraf.\,\mathrm{CD} \times \frac{\mathrm{OI}}{3}$$

așa dar

$$vol.\,\mathrm{OABCD} = \frac{\mathrm{OI}}{3}(supraf.\mathrm{AB} + supraf.\,\mathrm{BC} + supraf.\,\mathrm{CD}),$$

saŭ $$vol.\,\mathrm{OABCD} = \frac{\mathrm{OI}}{3} \times supraf.\,\mathrm{ABCD}.$$

575. **Corolar I.**— Dacă proectăm poligonul de bază pe axă, avem

supraf. ABCD=MN×*circumf.* OI

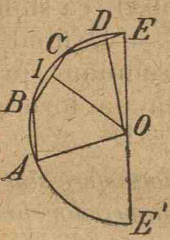
și prin urmare

vol. OABCD=$^2/_3\pi$.OI^2. MN;

adică *volumul născut de un sector poligonal, în condițiunile exprimate de Teoremă, este egal cu $^2/_3$ din proecțiunea bazeĭ sectoruluĭ pe axă, înmulțită cu aria cercului înscris în linia poligonală.*

576. **Corolar II.**— *Volumul născut de un semi-poligon regulat de un numĕr părechie de laturĭ, care se învîrtește în jurul diametruluĭ seŭ, este egal cu $^2/_3$ din aria cercului înscris înmulțită cu diametrul cercului circumscris,* căcĭ în acest caz proecțiunea MN este egală cu diametrul cercului circumscris linieĭ poligonale.

577. TEOREMĂ.— *Volumul unuĭ sector sferic are drept măsură aria zoneĭ care'ĭ servește de bază înmulțită cu a treia parte din rada sfereĭ.*



Fie OAD sectorul circular care prin învîrtirea în jurul diametruluĭ EE′ dă naștere sectoruluĭ sferic. Inscriŭ în arcul AD linia frântă regulată ABCD. In virtutea Teoremeĭ precedente avem

vol. OABCD=$^1/_3$ OI×*supraf.* ABCD.

Acum, dacă îndoesc necontenit numĕrul laturilor linieĭ frânte, aceasta are ca limită arcul AD, și apotema OI are ca limită rada OE a sfereĭ pe care să o însemnăm cu R. Așa dar la limită avem:

vol. sect. OAD=$^1/_3$ R×*zona* AD.

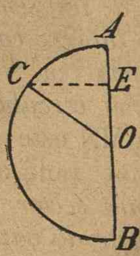
578. **Corolar I.**— Dacă însemnăm prin i înălțimea zoneĭ care servește de bază sectoruluĭ sferic, avem

$$\textit{zona } AD = i \times 2\pi R$$

și prin urmare $\quad$ *vol. sect.* $OAD = {}^2/_3 . \pi R^2 \times i$;
adică: *volumul unuĭ sector sferic are drept masură ${}^2/_3$ din înălțimea zoneĭ care'ĭ servește de bază, înmulțită cu aria unuĭ cerc mare de a sfereĭ.*

579. **Corolar II.** — In sfere egale, doĭ sectorĭ sfericĭ sînt între eĭ ca zonele ce li servesc de bază, și prin urmare doĭ sectorĭ sfericĭ a căror bază aŭ aceiașĭ înălțime sînt echivalențĭ.

580. TEOREMĂ.— *Volumul sfereĭ are drept măsură suprafața eĭ înmulțită cu a treia parte a radeĭ.*



Considerăm sfera ca suma sectorilor sfericĭ OAB și OBC și avem:

vol. sect. $OAC = {}^1/_3 OA \times$ *zona* AC

și *vol. sect.* $OBC = {}^1/_3 OA \times$ *zona* BC ;

adunănd avem

vol. sfereĭ de radă $OA = {}^1/_3 OA$ (*zona* AC + *zona* BC) $= {}^1/_3 OA$. *supraf. sfereĭ.*

581. **Corolar I.**—Am găsit (§. 561) că suprafața sfereĭ este egală cu $4\pi R^2$ saŭ πD^2, R și D fiind rada și diametrul sfereĭ; atuncĭ dacă însemnăm prin V volumul sfereĭ, Teorema precedentă dă formulele:

$$V = {}^4/_3 \pi R^3 \qquad \text{saŭ } V = {}^1/_6 \pi D^3.$$

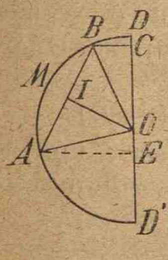
582. **Corolar II.**— *Volumurile a doă sfere sînt proporționale cu cuburile radelor saŭ a diametrilor lor.*

583. TEOREMĂ.— *Volumul unuĭ poliedru convex circumscris sfereĭ are drept măsură productul arieĭ luĭ prin o treime din rada sfereĭ.*

Să ducem prin centrul sfereĭ și prin fie-care din crestele poliedruluĭ, căte un plan; descompunem ast-fel poliedrul în piramide pe care le putem considera ca avînd de baze fețele poliedruluĭ, și centrul sfereĭ este vîrful comun. Fie-care din aceste piramide are drept măsură productul bazeĭ prin o treime din înălţimea eĭ: toate bazele la un loc daŭ aria poliedruluĭ şi înălţimile tuturor piramidelor sînt egale cu raḑa sfereĭ.

584. **Corolar**.— *Volumurile a doĭ poliedri convexĭ, circumscrişĭ la o aceiaşĭ sferă saŭ la sfere egale sînt proporţionale cu suprafeţele lor.*

585. TEOREMĂ.— *Volumul născut de un segment circular care se învîrteşte în jurul unuĭ diametru exterior segmentuluĭ, este echivalent cu jumătatea volumuluĭ unuĭ con a căreĭ raḑă de bază este egală cu coarda segmentuluĭ şi a căreĭ înălţime este proecţiunea coardeĭ pe axa de rotaţiune.*



Fie AMB segmentul circular care se învîrteşte în jurul diametruluĭ DD'.

Volumul căutat poate fi considerat ca diferenţa între volumul născut de sectorul circular OAMB şi acel născut de triunghiul OAB; avem dar (§. 578):

$$vol.\ OAMB={}^2/_3\pi\overline{OA}^2\times CE$$

apoĭ (§. 573)

$$vol.\ triungh.\ isoscel\ CBD={}^2/_3\pi\overline{OI}^2\times CE;$$

prin scădere avem

$$vol.\ AMB={}^2/_3\pi\left[\overline{OA}^2-\overline{OI}^2\right]\times CE.$$

Insă triunghiul dreptunghic OAI dă;

$$\overline{OA}^2-\overline{OI}^2=\overline{AI}^2=\frac{\overline{AB}^2}{4}$$

şi prin urmare

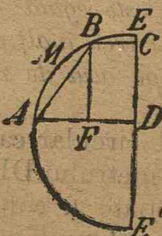
$$vol.AMB={}^1/_6\,\pi\,\overline{AB}^2.CE$$

ceia ce demonstrează Teorema.

586. TEOREMĂ.— *Volumul unuĭ segment sferic*

este echivalent cu volumul uneĭ sfere a căreĭ diametru este egal cu înălțimea segmentuluĭ, mărit cu semi-suma volumurilor a doĭ cilindri carĭ aŭ aceiașĭ înălțime și egală cu înălțimea segmentuluĭ, și ca baze respective bazele segmentuluĭ.

Trapezul mixtiliniŭ DAMBC prin învîrtirea luĭ în jur de diametrul EE′ dă naștere unuĭ segment sferic, a căruĭ rațe de baze sînt CB și DA și înălțime CD.



Volumul căutat este egal cu suma volumurilor născute de segmentul circular AMB și trapezul DABC. Avem maĭ întâĭ

$$vol.\ \mathrm{AMB} = \tfrac{1}{6}\pi\,\overline{\mathrm{AB}}^2 \times \mathrm{CD}.$$

Trapezul DABC descrie un trunchiŭ de con drept și volumul sĕŭ este:

$$vol.\ \mathrm{DABC} = \tfrac{1}{3}\pi\,[\overline{\mathrm{CB}}^2 + \overline{\mathrm{DA}}^2 + \mathrm{CB}.\,\mathrm{DA}] \times \mathrm{CD};$$

prin urmare

$$vol.\,\mathrm{DAMBC} = \tfrac{1}{6}\pi\,[\overline{\mathrm{AB}}^2 + 2\overline{\mathrm{CB}}^2 + 2\overline{\mathrm{DA}}^2 + 2\mathrm{CB}.\,\mathrm{DA}] \times \mathrm{CD}.$$

Duc B din perpendiculara BF pe AD și am triunghiul dreptunghic ABE care dă:

$$\overline{\mathrm{AB}}^2 = \overline{\mathrm{BF}}^2 + \overline{\mathrm{AF}}^2 = \overline{\mathrm{CD}}^2 + (\mathrm{AD} - \mathrm{BC})^2,$$

saŭ

$$\overline{\mathrm{AB}}^2 = \overline{\mathrm{CD}}^2 + \overline{\mathrm{AD}}^2 + \overline{\mathrm{BC}}^2 - 2\mathrm{AD} \times \mathrm{BC}.$$

Substituim această valoare a luĭ $\overline{\mathrm{AB}}^2$ în formula de maĭ sus; facem reducerile și avem

$$vol.\ \mathrm{DAMBC} = \tfrac{1}{6}\pi\,[\overline{\mathrm{CD}}^2 + 3\overline{\mathrm{CB}}^2 + 3\overline{\mathrm{DA}}^2].\,\mathrm{CD},$$

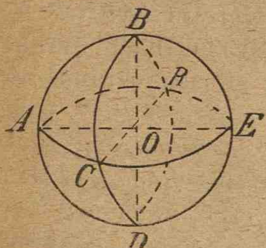
care se poate scri:

$$vol.\ \mathrm{DAMB} = \tfrac{1}{6}\pi\overline{\mathrm{CD}}^3 + \tfrac{1}{2}\,[\pi.\overline{\mathrm{CB}}^2.\mathrm{CD} + \pi.\overline{\mathrm{DA}}^2.\mathrm{CD}]$$

ceia ce demonstrează Teorema.

587. **Corolar.**— Dacă baza BC este nulă atuncĭ avem volumul uneĭ calote sferice

$$vol.\ caloteĭ\ EBAD = \frac{1}{6}\pi\overline{DE}^3 + \frac{1}{2}\pi\overline{DA}^2 \times DE.$$



588. TEOREMĂ.— *Doă piramide sferice triunghiulare simetrice sînt echivalente.*

Demonstrațiunea acesteĭ Teoreme este analoagă cu aceea a teoremeĭ de la §. 564.

589. **Corolar.**— *Doă piramide sferice triunghiulare OABC, OCDE carĭ aŭ un unghiŭ diedru opus la creasta OC și cele doă fețe a-le lor AOB, EOD opuse unghiuluĭ fac parte din un același plan, formează la un loc unghierul sferic ACEB a căruĭ unghiŭ este C.*

Aceasta rezultă de acolo că piramida OCDE este echivalentă cu piramida OAFB, fiind-că sînt simetrice.

590. TEOREMĂ— *Un unghier sferic are drept măsură productul fusuluĭ seŭ prin o treime din rada sfereĭ.*

Aceasta rezultă din faptul că raportul între un unghier și sferă este egal cu raportul între fusul corespundĕtor și suprafața sfereĭ; adică avem:

$$\frac{unghier\ de\ ungh.A}{sfera\ de\ radă\ R} = \frac{fus\ de\ ungh.A}{supraf.\ sfereĭ};$$

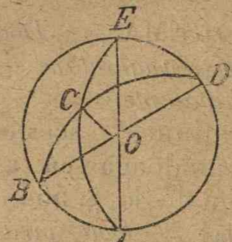
însă sfera este egală cu suprafața eĭ înmulțită cu o treime din radă, prin urmare

$$\frac{unghier\ de\ ungh.A}{supraf.sfer. \times \frac{1}{3}R} = \frac{fus\ de\ ungh.A}{supraf.\ sfereĭ}$$

de unde

$$unghier\ de\ ungh.A = \frac{1}{3}R.fus\ de\ ungh.A.$$

591. TEOREMĂ.— *Volumul uneĭ piramide sferice triunghiulare are drept măsură aria triunghiuluĭ de bază înmulțită cu o treime din raḑa sfereĭ.*



Fie OABC piramida dată. Planurile fețelor AOC, BOC împart semi-sfera ABEDC în patru piramide sferice triunghiulare cari daŭ

OABC+OBCE=*unghierul* A
OABC+OACD=*unghierul* B
OABC+OCDE=*unghierul* C.

Adunând aceste egalități membru cu membru, avem:

2OABC+$^1/_2$ *sferă*=*unghier*.A+*unghier*.B+*unghier*.C.

Insă avem succesiv

unghier A=*fus* A×$^1/_3$OA, *unghier* B=*fus* B×$^1/_3$OA, *unghier* C=*fus* C×$^1/_3$OA, și *sfera*=*supraf. sfer.*×$^1/_3$OA;

așa dar:

OABC=$^1/_2$[*fus*A+*fus*B+*fus*C—$^1/_2$*supraf.sfereĭ*]×$^1/_3$OA

=$^1/_2$ [2ABC+$^1/_2$*supraf. sf.*—$^1/_2$*supraf. sfereĭ*] ×$^1/_3$OA

saŭ, OABC=ABC×$^1/_3$OA

ceia ce demonstrează Teorema.

592. TEOREMĂ.— *Volumul uneĭ piramide sferice poligonale are drept măsură aria poligonuluĭ de bază înmulțită cu o treime din raḑa sfereĭ.*

Demonstrațiunea se face descompunându-se piramida poligonală în maĭ multe piramide triunghiulare.

593. **Exerciții.** *1. Să se calculeze, cu aproximațiune de un miriametru patrat suprafața globuluĭ pământesc.*

Să știe că circumferența de cerc mare a globuluĭ are 40 milioane metri saŭ 4000 miriametriĭ; diametrul globuluĭ este dar $\frac{4000}{\pi}$Mm.; aplicăm formula S=πD² și avem

$$\pi\left[\frac{4000}{\pi}\right]^2=\frac{16000000}{\pi}=5092958\ \mathrm{M}m^2$$

2. *Suprafața uneĭ sfere $1m^2$; să i se calculeze rada.*

Avem $4\pi R^2=1$ de unde $R=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi}}=0,262$ *m.*

3. *Volumul globuluĭ pămăntesc.* Rada este $\frac{20000000\ m.}{\pi}$ saŭ 6366 *km.* Volumul va fi $5092958\ \mathrm{M}m^2\times{}^1/_3\times6366\ \mathrm{M}m.$ $=1081000000\ \mathrm{M}m^2$.

Rada soareluĭ este de 108.5 orĭ rada pămăntuluĭ. Prin urmar suprafața și volumul soareluĭ sînt de 11,800 orĭ și 1280000 orĭ suprafața și volumul pămîntuluĭ.

4. *A calcula rada sfereĭ de $1m.^3$*

$$R=\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}=0,620\ m.$$

5. *A calcula volumul uneĭ sfere circumscrisă la un metru cub.*

Rada sfereĭ este jumătate din diagonala cubuluĭ. Dacă a este laturea cubuluĭ, se găsește $r=a\frac{\sqrt{3}}{2}$; și dacă cubul propus este un metru cub, atuncĭ $r=\frac{\sqrt{3}}{2}=0,866$ *m.* Se găsește că volumul este $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}=2,720625\ m^3$.

6. *Dacă înscrim în un semi-cerc un semi-poligon regulat de un număr păreche de laturĭ și'ĭ circumscrim un semi-poligon asemene, suprafața sfereĭ născută de semi-cerc prin învîrtire în jurul diametruluĭ seŭ este medie proporțională între suprafețele născute de poligoane.*

Fie OE, OE', OA, OA', apotemele semi-poligoanelor și radele lor.

Insemnând prin C, S, I ariile născute de semi-poligonul circumscris, semi-cercul și semi-poligonul înscris, avem ;

$$\frac{C}{OA'}=\frac{S}{OA}=\frac{I}{OE}.$$

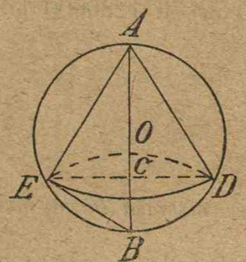
Insă triunghiurile OAE și OA'E' fiind asemene daŭ că OA este medie proporțională între OA' și OE ; prin urmare și S este medie proporțională între C și I.

7. *Să se circumscrie uneĭ sfere un con drept a căruĭ suprafață laterală să fie îndoitul bazeĭ.*

Triunghiul circumscris cerculuĭ trebue să fie ecvilateral.

8. *Să se înscrie în o sferă un cilindru drept astfel ca suma bazelor să fie egală cu suprafața laterală.*

Se va înscri în semi-cerc un patrat, care patrat prin învîrtire va da naștere cilindruluĭ căutat.



9. *Să se taie o sferă prin un plan astfel ca secțiunea să fie echivalentă cu diferența între cele doă zone în carĭ planul împarte suprafața sfereĭ.*

Avem (§. 561).

$$\pi.\overline{CE}^2=\pi\left[\overline{AE}^2-\overline{BE}^2\right]$$

de unde $\overline{BE}^2=\overline{AE}^2-\overline{CE}^2=\overline{AC}^2$

adică $BE=AC$.

Insă BE este medie proporțională între BA și BC ; prin urmare

$$\overline{AC}^2=AB\times BC\,;$$

adică punctul D împarte diametrul AB în medie și extremă rațiune.

10. *Să se înscrie în o sferă un con drept circular, a căreĭ bază să fie echivalentă cu jumătatea suprafețeĭ luĭ laterale.*

Fie în figura precedentă AEC tri[illegible] care dă naștere conuluĭ ; baza sa este $\pi\times$C[illegible] și supra[illegible]ța laterală este $\pi CE\times AD$; trebue să avem dar : $AE=2CE$; de unde rezultă că triunghiul AED este ecvilateral.

FINIT.

INDREPTARI

Pagina	
16	rândul al 5-lea la început, în loc de AB să se cetească AC.
21	la figură liniile AB și A′C trebue să fie pline.
24	la figura întăia trebue pus jos O′
,,	,, ,, doa ,, ,, la stănga D′
35	rändul al 13-lea din jos în sus în loc de A să se cetească A′,
55	la figură jos trebue M′ în loc de M.
56	,, de jos cercul al doilea trebue M′, B′ în loc de M, B.
67	la figura întăĭ, la dreapta trebue literele O, O′ în loc de C, O
,,	la figura adoa la dreapta trebue litera O′ în loc de O.
71	la figura a doa trebue O′ în loc de O
91	la figura întăia la mijloc trebue B, și B′ în loc de B′, B′
102	în locul gol de jos trebue figura

107	la figura întăia sub M trebue N’ în loc de N
112	la figura de jos pe laturea din stănga a triunghiuluĭ trebue E′ în loc de E și pe laturea din dreapta trebue D′ în loc de D.
114	la figura a doa, dreptele EB și DB trebue să se întălnească pe circumferență.
130	rändul al 13-lea în loc de $\overline{DC}$ trebue $\overline{DC}^2$
	rändul al 5-lea de jos în sus în loc de ,,că“ trebue ,,dă“
140	la figura de jos, în loc de punctele O, T de la dreapta trebue O′, T′.
141	rändul al 16-lea în loc de C trebue O.
164	rändul al 14-lea de jos în sus în loc de ,,circumscris“ trebue ,,circumscrim“
170	la figura din dreapta trebue h′ în loc de h.

Pagina	
197	la figură, în paralelogramul din mijloc în loc de P de sus trebue P_1 și în loc de P de jos trebue F.
249	la figura din dreapta trebue s′, c′ în loc de S. C.
250	rănduI întăi în loc de ,,cplică" trebue ,,aplică".
288	rănduI al 5-lea de jos în sus în loc de I trebue I^2.
293	rândul al 5-lea în loc de $\frac{i}{2}$ trebue $\frac{i}{3}$.
302	rândul al 9-lea în loc de AOC trebue OAB.
315	la figură în dreapta trebue M′, A′ în loc de M, A, și în mijlocul circumferenței celei mici trebue pus O′
322	la figura din dreapta, piciorul înălțimei pe baza *abc* trebue însemnat cu litera I și pe baza *a′b′c′* cu *i*.
336	la figura a 2-a centrul cercului circumscris triunghiului *abc* trebue însemnat cu *i* în loc de *a*, și jos trebue *p′* în loc de *a*.
337	rândul al 20-lea în loc de A,B trebue A, B.
348	rândul al 22-lea în loc de B trebue A′, după care trebue adaose cuvintele ; *vîrful B′ se află de aceiași parte a arcului CA cu punctul B″.*
359	rândul al 16-lea în loc de P′A′C trebue P′A′B′.
364	la figura a doa pe linia întăia trebue A′ B′ în loc de A, S′
366	rândul al 6-lea de jos în sus, liniuța de dinaintea fracțiunei $\frac{OI}{3}$ trebue să lipsască.

TABELA DE MATERII

CAPITULUL III

PARALELE

CAPITULUL IV

POLIGOANE

CARTEA II

CIRCUMFERENTA DE CERC

CAPITULUL I

CIRCUMFERENŢA, ARCURI, COARDE

CAPITULUL V

MASURAREA CIRCUMFERENȚEI

CARTEA IV

ARII

CAPITULUL I

ARIA UNUĬ POLIGON

CAPITULUL II

DREPTE SI PLANURI PARALELE

CAPITULUL III

UNGHIURĬ FORMATE DE DOĂ PLANURĬ SAU DE UN PLAN CU O DREAPTA

CAPITULUL IV

UNGHIURĬ TRIEDRE ŞI UNGHIURĬ POLIEDRE

CARTEA VI

POLIEDRI

CAPITULUL I

PRISMA, PARALELIPIPED

CAPITULUL II

PIRAMIDE