MÉLANGES

DE

GÉOMÉTRIE PURE.

PARIS.— IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.

MÉLANGES

DE

GÉOMÉTRIE PURE

COMPRENANT

DIVERSES APPLICATIONS DES THÉORIES EXPOSÉES DANS LE TRAITÉ DE GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE DE M. CHASLES

AU MOUVEMENT INFINIMENT PETIT D'UN CORPS, AUX SECTIONS CONIQUES, AUX COURBES DU TROISIÈME ORDRE, ETC.,

ET LA

TRADUCTION DU TRAITÉ DE MACLAURIN

SUR LES COURBES DU TROISIÈME ORDRE,

PAR E. DE JONQUIÈRES,
Lieutenant de vaisseau.

Nil scribens, ipse docebo
Unde parentur opes.

HORACE. — *Ars poetica.*

PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
Quai des Augustins, 55.

1856

PRÉFACE.

Ces Mélanges géométriques, composés, à diverses époques, pendant les rares loisirs d'une active navigation, portent sans doute l'empreinte de l'agitation au sein de laquelle ils ont été écrits, et peut-être trouvera-t-on qu'ils étaient peu dignes de voir le jour. En sollicitant pour eux l'indulgence du lecteur, je lui dois compte du motif qui me porte à les publier.

La Géométrie pure, longtemps négligée en France, a repris de nos jours, grâce aux beaux travaux de quelques savants illustres, le haut rang qui lui convient et la faveur qu'elle mérite. Une voie nouvelle est tracée : voie féconde, qui, par les grands résultats qu'elle a déjà produits, devrait inspirer aux jeunes géomètres le désir d'y entrer avec résolution et confiance. Cependant il me semble, autant que j'en puis juger dans mon isolement, qu'on n'apprécie pas encore la valeur et la portée de ces doctrines récentes, qu'on les tient à l'écart, et même qu'une sorte de conspiration du silence pèse sur elles. Dans mon humble opinion, c'est un grand tort; et je ne puis me défendre d'un sentiment pénible, en prévoyant que ces belles idées nous reviendront un jour d'Angleterre, de Belgique, d'Italie ou d'Allemagne, après avoir reçu, sur le sol étranger, une consécration que nous n'aurons pas su ou pas voulu leur donner nous-mêmes. Il y en a plusieurs exemples dans l'histoire des sciences, et je pense qu'il faut éviter d'en augmenter le nombre. C'est ce désir, cette conviction qui m'a porté à composer cet écrit. Je sais combien il est imparfait. Mais j'ai pensé que les jeunes gens qui s'adonnent à l'étude des mathématiques, sentiront aisément combien les théories, auxquelles je fais allusion, offrent de ressources à ceux qui auront le loisir de les méditer avec toute l'assiduité qu'elles réclament, en voyant le parti, même très-modeste, qu'a pu en tirer un esprit sans cesse distrait par des occupations d'un ordre bien différent.

Cette publication n'est donc, à proprement parler, qu'un bon exemple, qui portera ses fruits s'il est suivi par d'autres plus habiles que moi. C'est là mon unique prétention, et, si elle est justifiée, ce sera ma plus douce récompense.

E. DE JONQUIÈRES.

TABLE DES MATIÈRES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

ERRATA.

Page 57 ligne 11 au lieu de $t_{n-1}s$, lisez t_{n-1}.
Page 86 ligne 17 *au lieu de* 251, *lisez* 751.

MÉLANGES

DE

GÉOMÉTRIE PURE.

CHAPITRE PREMIER.

PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES RELATIVES AU MOUVEMENT INFINIMENT PETIT D'UN CORPS (*).

SECTION Ire.

PROPRIÉTÉS DESCRIPTIVES.

§ I. — *Définitions et principes fondamentaux.*

1. Pour nous rendre compte du mouvement d'un corps, observons d'abord celui de l'un quelconque des plans qui le traversent et qui lui sont invariablement fixés.

Soient (*fig.* 1, *Pl. I*) Q l'un de ces plans, et R la position qu'il occupe après un mouvement infiniment petit du corps. Ces deux plans se coupent suivant une droite $a'b'$ que nous appellerons la *caractéristique* du plan, suivant l'expression employée par Monge dans la théorie des surfaces développables. Cette droite, regardée comme faisant partie du

(*) Mémoire présenté par M. Chasles à l'Institut de France, le 26 juin 1843.

plan R, occupait dans le plan Q la position ab, et le point de rencontre a de ces deux droites est venu, après le mouvement, se placer en a', par exemple. Sur le milieu α du côté infiniment petit aa', élevons dans le plan R la perpendiculaire αO, et prenons sur cette droite le point O qui donne

$$\text{angle } aOa' = \text{angle } bab',$$

ou, ce qui revient au même, élevons sur le milieu de la trajectoire bb' d'un autre point b, une seconde perpendiculaire qui coupera la première au point O. Enfin menons la normale OO′ au plan Q. Il est clair qu'une rotation du plan Q autour de l'axe OO′ amènera la droite ab sur la caractéristique $a'b'$, et qu'ensuite (ou, si l'on veut, simultanément) une rotation du plan Q autour de $a'b'$ l'amènera dans la position précise qu'il occupe après le mouvement, c'est-à-dire en R. Donc *le mouvement du plan se réduit à une rotation autour de la caractéristique, pendant que cette droite tourne, dans la position primitive du plan, autour d'un point qu'on peut considérer comme un point fixe, et que nous nommerons le foyer du plan*. On verra plus loin que ce *foyer*, qui jouit d'une propriété importante dans le mouvement du corps, est aussi le foyer d'une parabole dont la considération n'est pas étrangère aux propriétés géométriques de ce mouvement. C'est donc à trois titres divers que cette dénomination lui a été donnée.

On peut, d'après ce qui précède, dire en général que *tout déplacement infiniment petit d'une figure plane dans l'espace, se réduit à une rotation du plan de la figure autour d'une droite de ce plan, pendant que cette droite tourne elle-même autour d'un point fixe sans sortir de la position primitive du plan*. Et cette droite est précisément la caractéristique du plan, c'est-à-dire l'intersection de ses deux positions infiniment voisines.

2. Dans l'instant suivant, le plan que nous considérons aura pris une nouvelle position infiniment voisine, en tournant autour de sa caractéristique, qui aura subi elle-même un mouvement de rotation autour du nouveau foyer du plan. Donc, si l'on conçoit toutes les positions du plan pendant le mouvement fini du corps, on voit que ces plans enveloppent une certaine surface développable, dont les caractéristiques, ou arêtes successives, sont précisément les caractéristiques successives du plan mobile. M. Chasles nomme cette surface la *développable trajectoire* du plan (*Aperçu historique*, page 407). Le plan roule sur cette surface pendant le mouvement du corps, et, à un instant quelconque, il la touche suivant sa caractéristique actuelle. Cette remarque sera utile plus tard.

3. Puisqu'on suppose que le mouvement du corps est infiniment petit, le *foyer* du plan décrit autour de la caractéristique un arc infiniment petit et normal au plan. Il est évidemment seul dans ce cas. Ainsi *ce qui distingue le foyer d'un plan de tous ses autres points, c'est que sa trajectoire est perpendiculaire au plan, ce qui n'a lieu pour aucun autre de ses points.*

4. Tout autre point M (*fig.* 1) a un double mouvement. Il décrit, dans le plan Q, un arc Mm autour du foyer, et, autour de la caractéristique, un arc infiniment petit mm', normal au plan Q. En résumé, il décrit le côté Mm' du triangle Mmm'. Le rayon Om est normal au plan de ce triangle. Si, du point M, on abaisse la perpendiculaire mn sur la trajectoire Mm', le plan Omn sera normal à cette trajectoire. Donc *un plan étant considéré comme faisant partie du corps, les plans normaux aux trajectoires de ses points passent tous par un même point de ce plan, qui est le point que nous venons d'appeler le* foyer *du plan.*

5. Tous les points de la droite *ab* se meuvent dans le plan Q, et ce sont les seuls qui se trouvent dans ce cas. Donc *dans le plan il existe une infinité de points dont les trajectoires sont comprises dans le plan même; tous ces points sont situés en ligne droite, et cette droite est la caractéristique du plan.*

6. Supposons que deux plans se coupent suivant une droite D. Les plans normaux aux trajectoires de leurs points passent respectivement par les deux foyers F, F′ de ces plans (4); donc les plans normaux aux trajectoires des points de leur intersection D passent, à la fois, par ces foyers, et, par conséquent, par la droite Δ qui les joint. Il en est de même pour un troisième plan quelconque passant par D; car les plans normaux aux trajectoires de tous ces points passent par le foyer F″ de ce plan. Or, les plans normaux aux trajectoires des points de la droite D, contenue dans ce plan, passent par Δ; donc le foyer F″ est précisément le point où la droite Δ rencontre ce plan.

Réciproquement, chacun des points de Δ se meut normalement au plan qui contient cette droite et dont il est le foyer (3). Tous ces plans, par hypothèse, passent par D. Donc, si l'on regarde Δ comme faisant partie du corps, les plans normaux aux trajectoires de ses points passent par la droite D. Enfin, regardons Δ comme l'intersection de deux plans quelconques. Chacun de ces plans a son foyer sur lui-même; mais, d'après ce qui précède, ces deux foyers doivent être tels, que la droite qui les joint soit précisément D; donc ils ne sont autres que les points d'intersection de D par ces deux plans. Même raisonnement pour un nombre quelconque de plans passant par Δ. D'où l'on voit que :

Quand plusieurs plans passent par une même droite D, *leurs foyers sont sur une deuxième droite* Δ; *réciproquement, si plusieurs plans passent par cette droite* Δ, *leurs* *foyers seront sur la première* D. *De sorte que ces deux droites jouissent de propriétés réciproques.*

Cela signifie, en d'autres termes, que *si l'on considère une droite quelconque* D *comme faisant partie du corps, les plans normaux aux trajectoires des points de cette droite passeront tous par une même droite* Δ; *et, réciproquement, les plans normaux aux trajectoires des points de cette droite* Δ, *considérée comme faisant partie du corps, passeront tous par la droite* D.

Ces deux droites prendront le nom de droites conjuguées.

7. Quand plusieurs plans passent par un même point M, leurs foyers sont situés de telle sorte, que le plan normal à la trajectoire du point M passe par tous ces foyers, puisque ce point appartient en même temps à tous les plans (4). Donc ils sont tous dans ce plan, qui a M pour *foyer* puisque sa trajectoire est normale au plan (3). Donc,

Quand plusieurs plans passent par un même point, leurs foyers sont tous dans un même plan, qui a son foyer en ce point.

8. Considérons deux droites conjuguées D, Δ, attachées au corps. Les plans normaux aux trajectoires de Δ passent par D (6); donc le mouvement de Δ se réduit à une rotation autour de D, et cette rotation amène Δ à sa position définitive. De même, les plans normaux aux trajectoires des points de D passent par Δ (6); donc le mouvement de D se réduit, à son tour, à une rotation autour de Δ. *De sorte que, pour placer le corps dans la position même qu'il occupera après le mouvement, il suffit de lui faire éprouver deux rotations successives ou simultanées autour des droites* D, Δ. *Ces droites conjuguées sont ainsi deux axes de rotations simultanées qu'on peut imprimer au corps pour effectuer son déplacement.* On verra plus

loin (dans la section II, relative aux propriétés métriques) quelle est la valeur de chaque rotation, et quelles sont les relations générales, soit entre les grandeurs des deux rotations, soit entre les relations de leurs axes D, Δ.

9. Supposons que l'un de ces axes, D par exemple, soit à l'infini, et regardons cette droite comme la commune intersection de plusieurs plans parallèles. Le mouvement de rotation de Δ autour de D se réduira évidemment à une translation de Δ, parallèlement à elle-même, et cette translation l'amènera en X. Supposons que ces deux droites Δ et D (à l'infini) fassent partie d'un corps solide qui a reçu un mouvement infiniment petit déterminé. On voit que ce mouvement se réduit à une translation parallèle et à une rotation autour d'une droite X. Ce mouvement total, déterminé par des causes quelconques, est indépendant de la position que la droite D occupe à l'infini, c'est-à-dire de la direction des plans parallèles qu'on a choisis dans le corps pour étudier son mouvement. Et, si l'on prend une autre série de plans parallèles, auxquels correspond une autre intersection D′, située à l'infini, et une autre ligne de foyers Δ′, il faut que cette droite Δ′ soit telle, que le mouvement de translation parallèle, auquel se réduit sa rotation autour de D′, l'amène dans la position précise qu'occupe X, c'est-à-dire dans celle où a déjà été amenée la droite Δ, sans quoi le mouvement de rotation, qui se fait ensuite autour de cette droite ainsi transportée, ne communiquerait pas au corps le mouvement qu'on y observe. Donc les droites Δ et Δ′ sont parallèles. Il résulte d'ailleurs de ce qu'on vient de dire que les trajectoires des points de chaque droite Δ sont toutes parallèles entre elles, puisque ces points sont les foyers de plans parallèles entre eux (3); mais il est clair que cette commune direction fait avec celle des trajectoires des points d'une autre droite Δ′ un angle égal à celui des

deux séries de plans auxquelles elles se rapportent. Donc enfin,

Quand plusieurs plans sont parallèles entre eux, leurs foyers sont sur une droite qui est toujours parallèle à un même axe, quelle que soit la direction commune des plans. Cette droite jouit de la propriété que les trajectoires de tous ses points sont parallèles entre elles, de sorte que, dans le déplacement du corps, la droite n'a qu'un mouvement de translation parallèlement à elle-même.

10. On conclut de là directement, et sans nouvelle démonstration, que :

Si tous les plans sont perpendiculaires à la direction de cette droite, leurs foyers seront sur une certaine droite X, *parallèle à celle-là, et dont les trajectoires de tous les points seront dirigées précisément suivant cette droite* X; *de sorte que cette droite glissera sur elle-même pendant le mouvement du corps. Pendant ce glissement, le corps ne pourra que tourner autour de* X. *Cette droite est appelée l'axe de rotation du corps (axe spontané glissant,* d'après M. Poinsot). On peut donc dire que *tout déplacement infiniment petit d'un corps solide libre se réduit à un mouvement de rotation autour d'un axe, qui, pendant cette rotation, glisse sur lui-même.* De sorte que *le mouvement du corps n'est point autre chose que celui d'une vis dans son écrou.*

11. Cette image saisissante du mouvement le plus général que puisse prendre un corps dans l'espace absolu, se trouve également présentée par M. Poinsot, dans le § 10 du chapitre Ier de la *Théorie nouvelle de la rotation des corps*. Cet illustre géomètre ajoute : « Pendant ce mouve-
» ment, tous les points du corps décrivent, sur des cy-
» lindres concentriques, de petits arcs d'*hélices* qui ont
» toutes le même pas. Dans l'instant suivant, c'est une

» autre *vis*, d'un autre axe et d'un pas différent, et ainsi » de suite d'un instant à l'autre; d'où l'on voit comment » se forment les courbes simultanées que décrivent tous les » points du corps, et le long desquelles ils se meuvent » comme en autant de canaux curvilignes où ils seraient » enfermés. »

12. Puisque le mouvement instantané du corps n'est autre chose que celui d'une vis dans son écrou, on peut supposer que cette vis soit fixée au corps. Un plan quelconque du corps coupera la surface de la vis suivant une courbe. Les hélices, qui passent par les différents points de cette courbe, sont précisément les trajectoires de ces points; et, comme ces points sont dans un même plan du corps en mouvement, les plans normaux à ces trajectoires passent par un même point de ce plan (4). Donc *les plans normaux aux hélices qui passent par les points d'intersection d'une vis (à filets triangulaires ou carrés, indistinctement) par un plan, passent par un même point, situé dans le plan coupant*. Ce qui exprime une propriété remarquable de la vis. (*Aperçu historique*, p. 679.) Revenons à notre théorie.

13. La caractéristique d'un plan est tangente à la trajectoire d'un de ses points. Ceci résulte de la seule inspection de la *fig.* 1, où $a'b'$ est tangente à la trajectoire aa' du point a. Il est de même évident que cette droite est la seule qui jouisse de cette propriété.

Réciproquement, Mm' étant une trajectoire quelconque, si l'on prend sur sa direction un point p' situé, pendant l'instant précédent, en p, les deux droites Mp, $m'p'$ déterminent un plan $pm'p'$, dont la caractéristique $m'Mp'$ est précisément la tangente à la trajectoire Mm' du point M. Donc,

La tangente à la trajectoire d'un point jouit de la *propriété d'être la caractéristique d'un plan;* et, réciproquement, *la caractéristique d'un plan est toujours tangente à la trajectoire d'un de ses points.*

14. Si, par le *foyer* du plan, on mène la normale au plan, tous les points de cette normale n'ont d'autre mouvement qu'une rotation autour de la caractéristique dans un plan normal à cette droite. Donc elle est la caractéristique de ce plan (13); les plans normaux aux trajectoires de ses points passent tous par la caractéristique du premier plan, et réciproquement; cette normale et la caractéristique sont deux droites conjuguées (6). Si l'on fait attention que la normale au plan est tangente à la trajectoire du foyer (3), on peut dire que *la tangente à la trajectoire d'un point a pour conjuguée la caractéristique du plan dont ce point est le foyer.*

Il faut avoir soin de remarquer qu'en général deux *droites conjuguées* ne sont tangentes à la trajectoire d'aucun de leurs points, et ont des positions variées l'une par rapport à l'autre. Celles qui nous occupent dans ce paragraphe sont, au contraire, tangentes respectivement à la trajectoire d'un de leurs points, et placées de telle sorte que, par chacune d'elles, on peut mener un plan normal à l'autre. Ce sont donc des droites conjuguées d'une espèce très-particulière; elles jouissent de propriétés nombreuses qu'il faut bien se garder d'attribuer à deux droites conjuguées quelconques. Nous verrons qu'elles jouent un rôle très-important dans cette théorie.

§ II. — *Analogie qui existe entre cette théorie et celle des figures corrélatives. — Mouvement d'une surface courbe.*

15. Nous venons de démontrer que, quand un corps solide libre éprouve un mouvement infiniment petit, les plans normaux aux trajectoires des points du corps situés

dans un même plan, passent tous par un même point ; et que les plans normaux aux trajectoires des points d'une droite, passent tous par une autre droite. Disons que, dans le premier cas, ces plans *enveloppent* un point, et que, dans le second, ils enveloppent une droite.

Si le point qui, dans le premier cas, peut être regardé comme engendrant le plan en s'y mouvant, et qui engendre la droite dans le second, si ce point mobile et *directeur* appartient à une surface courbe A sur laquelle il se meut (comme point générateur), le plan normal à sa trajectoire touchera une seconde surface courbe A′, et si ce point prend sur A toutes les positions possibles, le plan normal à la trajectoire de chacune de ses positions successives (pendant le mouvement infiniment petit de la surface A) enveloppera la surface A′.

Supposons que la surface A soit *géométrique* et du degré m. Une transversale D menée arbitrairement la rencontre en m points ; à chacun de ces points correspondra un plan (normal à la trajectoire de ce point) tangent à la surface A′ ; ces plans tangents qui seront en nombre m, passeront tous par une même droite Δ (6) *conjuguée* de la transversale. La surface A′ sera donc *géométrique* et admettra m plans tangents, passant par une même droite quelconque.

D'après cela, quand une figure, de forme quelconque, éprouve un déplacement infiniment petit, les plans normaux aux trajectoires de ses points enveloppent une deuxième figure qui jouit exactement de toutes les propriétés de celles que M. Chasles a nommées *figures corrélatives* dans son *Aperçu historique*, et dont la théorie se trouve exposée, soit dans le beau Mémoire qui fait suite à cet ouvrage, pour ce qui regarde les figures à trois dimensions, soit dans le chapitre XXVI de la *Géométrie supérieure*, pour ce qui regarde les figures planes.

Mais ici *les figures ont une dépendance particulière qui n'existe pas dans la théorie générale des figures corrélatives.* C'est que chaque plan de la nouvelle figure passe par le *point* correspondant de la figure proposée. Ceci résulte évidemment des théorèmes (6), (13) et (14), démontrés ci-dessus.

De cette réciprocité découlent les propositions suivantes :

Quand une surface courbe éprouve un mouvement infiniment petit, les plans normaux aux trajectoires de ses points enveloppent une deuxième surface courbe, qui jouit de cette propriété que, si elle était primitivement tracée, et qu'elle participât au mouvement de la première surface, les plans normaux aux trajectoires de ses points envelopperaient cette première surface. De sorte que les deux surfaces jouissent de propriétés réciproques, l'une par rapport à l'autre. On peut encore dire que la deuxième surface est le lieu des foyers des plans tangents à la première, et que celle-ci est le lieu des foyers des plans tangents à la deuxième.

Si la première surface est géométrique, la seconde le sera aussi, mais, en genéral, d'un degré différent (*). *Le nombre des plans tangents, réels ou imaginaires, qu'on pourra mener à chaque surface par une même ligne droite, sera égal au nombre de points, réels ou imaginaires, dans lesquels l'autre surface sera rencontrée par une même ligne droite.*

Il suit de là que, *si la première surface est du second degré, la deuxième sera aussi du second degré.* Ainsi, *quand une surface du second degré éprouve un mouve-*

(*) Si le degré de la première surface est m, celui de la seconde sera, *en général et au plus*, $m(m-1)$. (*Voir*, pour la démonstration de ce principe, l'*Analyse des transversales*, de M. le général Poncelet, Mémoire inséré dans le *Journal de Mathématiques de Crelle*, année 1832, pages 392 et suivantes.)

ment infiniment petit, les plans normaux aux trajectoires de ses points enveloppent une seconde surface du second degré; et, si celle-ci était tracée primitivement et participait au mouvement de la première, les plans normaux aux trajectoires de ses points envelopperaient cette première surface.

Supposons qu'on coupe une surface du second degré par un plan; aux points de la conique d'intersection correspondront des plans tangents à la seconde surface, et, comme tous ces points sont dans un même plan, tous ces plans passent par un même point. Donc *les plans normaux aux trajectoires des points d'une conique, qui éprouve un déplacement infiniment petit, enveloppent un cône du second degré, qui a son sommet en un point du plan de la conique.*

Ce point est précisément le foyer du plan de la conique. En effet, les plans tangents au cône sont tangents à la seconde surface, et ils passent tous par un même point. Donc, tous ces plans ont leurs foyers situés dans un même plan (7), *dont le foyer est en ce point.* Or ces foyers sont les points de la conique. Donc le sommet du cône est le foyer du plan de la conique.

Réciproquement, *quand un cône du second degré éprouve un déplacement infiniment petit, les plans normaux aux trajectoires de ses points sont tous tangents à une conique dont le plan passe par le sommet du cône.*

En effet, regardons ce cône comme circonscrit à une surface du second degré A′, dont la *surface corrélative* est A. Au sommet du cône correspond le plan normal à sa trajectoire, c'est-à-dire un plan passant par son sommet; à tous les plans tangents au cône correspondent des points situés dans le plan en question (7). Or A étant le lieu des foyers des plans tangents à A′, ces points sont sur A; ainsi la conique (C), intersection de la surface A par le plan qui passe par le sommet du cône, correspond à ce cône. A une arête du cône, droite d'intersection de deux plans tangents consécutifs, correspond la droite de jonction de deux points consécutifs de la conique, c'est-à-dire une tangente à cette conique. Donc, enfin, aux points du cône correspondent des plans menés par les tangentes à la conique, c'est-à-dire des plans tangents à cette courbe. Or dire que ces points *correspondent* aux points du cône, c'est dire qu'ils sont les plans normaux aux trajectoires de ces points. Ce qui justifie l'énoncé du théorème.

Supposons, pour donner un dernier exemple qui nous sera utile plus loin, que la première figure soit une courbe à double courbure. A chacun de ses points correspondra un plan dans la figure corrélative, et cette figure sera une surface développable, enveloppe de tous ces plans. A chaque tangente à la courbe correspondra (comme nous venons de le voir pour le cône du deuxième degré et la conique) une droite qui sera l'intersection de deux plans tangents à la développable, infiniment voisins, c'est-à-dire une arête ou *caractéristique* de cette surface. A un plan mené par une tangente à la courbe, correspondra un point de la caractéristique correspondante à cette tangente, etc. (*Aperçu historique*, page 592.)

Si la courbe à double courbure est du troisième ordre, ainsi que cela se présente dans la théorie qui nous occupe, la développable sera du quatrième degré. Car cette courbe pouvant être regardée comme l'intersection de deux hyperboloïdes à une nappe qui ont une arête commune, la surface *corrélative* (c'est-à-dire la surface enveloppe des plans normaux aux trajectoires des points de la courbe) sera la surface développable circonscrite à deux hyperboloïdes ayant les mêmes plans tangents suivant une génératrice commune. Or cette surface est du quatrième degré. (*Voir* Mémoire de M. Chasles *sur les surfaces réglées* *du deuxième degré*, n° 69.) Ajoutons que cette développable du quatrième degré est telle, qu'on ne peut lui mener que trois plans tangents par un point quelconque, puisqu'elle a pour corrélative une courbe à double courbure du troisième ordre, laquelle ne peut être coupée qu'en trois points par un plan quelconque. Cette remarque nous sera utile plus tard.

§ III. — *Propriétés relatives à deux droites conjuguées.*

16. *Si la droite* D *est normale à la trajectoire d'un de ses points, tous ses autres points auront leurs trajectoires normales à cette droite. De sorte que la droite* D *sera elle-même sa conjuguée.*

En effet, regardons cette droite comme située dans le plan qui passe par elle et par la trajectoire à laquelle elle est normale. Le plan normal à la trajectoire coupera celui-ci suivant la droite D elle-même. Or, d'après ce qu'on a vu (1), ce second plan passe par le foyer du premier. (Sur la *fig.* 1, la droite D est Oa', normale à la trajectoire aa' du point a'; le premier plan est le plan Q, et le second est le plan $a'OO'$ qui passe par le foyer O, par la normale OO' et par la droite Oa'.) Donc ce foyer est situé sur D. Considérons maintenant le plan normal $a'OO'$. Son foyer sera le point a', puisqu'il est normal à la trajectoire de ce point (3). Ainsi, deux plans différents, savoir Q et $a'OO'$, passant par une même droite D, ont leurs foyers sur cette droite. Donc D est à elle-même sa conjuguée (6).

Soit maintenant un autre point n de D. Regardons-le comme faisant partie d'un plan quelconque passant par D. Ce plan aura son foyer sur la conjuguée de D (6), c'est-à-dire sur D elle-même. La trajectoire du point n est la *résultante* de deux rotations, l'une autour du foyer et l'autre autour de la caractéristique de ce plan. Ces deux rotations sont perpendiculaires à D, l'une parce qu'elle s'effectue autour d'un point de D, l'autre parce qu'elle est normale au plan qui contient D. Donc, D est normale au plan des deux composantes, et, par suite, à leur résultante qui est la trajectoire du point n.

Autrement. D est, par hypothèse, normale à la trajectoire d'un de ses points. Cette droite étant regardée comme faisant partie d'un plan, il en résulte que cette trajectoire est la résultante de deux rotations, l'une normale au plan, l'autre qui a lieu, dans le plan, autour du foyer de ce plan (3). Puisque D est normale à cette trajectoire résultante, elle l'est au plan des composantes, ce qui signifie qu'elle passe par le foyer de ce plan quelconque (cela résulte aussi immédiatement de ce qu'elle est à elle-même sa conjuguée), et, cela étant, il suffit d'une simple inspection de la *fig.* 1, pour voir qu'elle est normale aux trajectoires de tous ses autres points.

17. Il suit de là, sans plus de démonstration, que, *quand une droite de longueur constante se meut dans l'espace, de manière à être toujours normale à la courbe décrite par l'une de ses extrémités, elle est normale aussi à la courbe décrite par son autre extrémité. Et si, sur une surface engendrée par une ligne droite, on trace deux courbes qui coupent à angle droit toutes les génératrices, les segments compris sur ces droites entre les deux courbes seront tous égaux entre eux.*

18. Supposons qu'une droite L s'appuie, en m et en n, sur deux droites conjuguées Δ, D. Le point m n'a aucune rotation autour de Δ, puisqu'il est sur cet axe. Donc il décrit le premier élément d'une circonférence qui sert de base à un cône de révolution dont D est l'axe et n le sommet. nm, arête de ce cône, est donc normale à l'élément de ce cercle, c'est-à-dire à la trajectoire du point m. Même raisonnement à l'égard de n. Donc (16) *toute droite qui*

s'appuie sur deux droites conjuguées, jouit de la propriété d'être normale aux trajectoires de tous ses points.

19. Prenons deux droites conjuguées D, Δ, et deux autres droites conjuguées D′, Δ′. Supposons qu'une droite quelconque L s'appuie sur les trois premières, je dis qu'elle s'appuiera sur la quatrième. En effet, puisque la droite L s'appuie sur D et Δ, elle est normale aux trajectoires de tous ses points (18). Donc le plan normal à la trajectoire du point où elle s'appuie sur D′, passe par cette droite ellemême. Mais ce plan passe par Δ′, conjuguée de D′; donc la droite L s'appuie sur Δ′.

Or, quand quatre droites sont telles, que toute droite qui s'appuie sur trois d'entre elles s'appuie aussi sur la quatrième, ces quatre droites sont quatre génératrices d'un même mode de génération d'un hyperboloïde à une nappe. Donc *deux droites conjuguées* D, Δ, *et deux autres conjuguées quelconques* D′, Δ′, *sont toujours quatre génératrices d'un même mode de génération d'un hyperboloïde à une nappe.*

20. Par un point quelconque M de l'axe de rotation X (10), menons, perpendiculairement à cet axe, un plan qui coupe en *m* et en *n* deux *conjuguées* quelconques D, Δ. La droite à l'infini de ce plan est la conjuguée de l'axe X de rotation. Joignons par une droite les points M et *m*; cette droite rencontre la droite à l'infini du plan. Donc elle s'appuie sur deux *conjuguées*, savoir : X et l'infini. Or elle s'appuie en *m* sur D; donc (18) elle rencontre aussi Δ, conjuguée de D. Ainsi *tout plan perpendiculaire à l'axe de rotation rencontre les deux droites* D, Δ *et l'axe lui-même, en trois points qui sont en ligne droite.*

En faisant varier le point M, la droite *mn* change de position dans l'espace; mais elle demeure toujours parallèle à un plan *directeur*, normal à l'axe X, et comme elle ne cesse pas de s'appuyer sur les deux droites fixes D, Δ, *elle engendre un paraboloïde hyperbolique*.

21. Cette génératrice mobile *mn* fait avec chacune des deux droites D, Δ, un angle qui varie en même temps qu'elle. Parmi toutes ces positions, il en est une L qui est perpendiculaire sur Δ; c'est celle qui mesure la plus courte distance de Δ et de l'axe X. Or les droites D, Δ, X, sont trois génératrices d'un même mode de génération d'un paraboloïde; donc elles sont toutes trois parallèles à un second plan directeur (*Mémoire sur les surfaces engendrées par une ligne droite*, nº 71). Donc L, perpendiculaire à deux de ces génératrices, est normale à ce plan directeur, et, par suite, à toutes les parallèles à ce plan, c'est-à-dire à D. Or elle rencontre D. Donc, enfin, L est la plus courte distance des deux conjuguées D, Δ, et c'est en même temps sur elle que se mesure la plus courte distance de chacune de ces deux droites à l'axe X. Ainsi

La droite par laquelle se mesure la plus courte distance de deux droites conjuguées D, Δ, *rencontre l'axe de rotation et lui est perpendiculaire.*

22. Quand deux droites D, D′ se rencontrent, le plan normal à la trajectoire de leur point d'intersection passe à la fois par leurs conjuguées Δ, Δ' (6). Donc ces deux conjuguées se rencontrent aussi, puisqu'elles sont dans un même plan. On conclut de là que :

Quand plusieurs droites D, D′, *etc., passent par un même point, leurs conjuguées* Δ, Δ', *etc., sont dans un même plan, qui est normal à la trajectoire de ce point.* Réciproquement, *quand plusieurs droites sont dans un même plan, leurs conjuguées passent toutes par un même point qui est le foyer de ce plan.*

23. Quand plusieurs droites sont parallèles entre elles,

elles passent par le même point à l'infini; donc les conjuguées sont dans un même plan normal à la trajectoire de ce point (22). Or cette trajectoire, qui est la résultante d'un mouvement de translation suivant l'axe X et d'un mouvement de rotation autour de cet axe, se réduit à un arc de cercle situé dans un plan perpendiculaire à l'axe, et dont le centre est sur l'axe même, parce que le mouvement de translation est, pour ce point, infiniment petit par rapport à l'autre; et cet arc de cercle, d'un rayon infini, est simplement une droite finie située dans le plan normal à l'axe. Donc le plan normal à cette trajectoire est parallèle à l'axe de rotation. Ainsi,

Quand plusieurs droites sont parallèles entre elles, leurs conjuguées sont dans un plan parallèle à l'axe de rotation.

24. Supposons qu'une droite D soit située dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation; les plans normaux aux trajectoires de tous ses points passent par le foyer de ce plan en même temps qu'ils passent par sa *conjuguée* Δ. Or ce foyer est le point où l'axe perce le plan (9 et 3); donc Δ passe par ce point.

Réciproquement, si une droite Δ rencontre l'axe de rotation, les plans normaux aux trajectoires de tous ses points et le plan normal à la trajectoire du point de rencontre passent par une même droite D. Or ce plan est normal à l'axe (9); donc D est contenue dans ce plan. Donc,

Quand une droite est située dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation, sa conjuguée passe par le point où le plan rencontre cet axe. Réciproquement, si une droite rencontre l'axe en un point, sa conjuguée est située dans le plan mené par ce point perpendiculairement à l'axe.

25. *Quand une droite est tangente à la trajectoire d'un de ses points, sa conjuguée est aussi tangente à la trajectoire d'un de ses points. Ces deux droites sont à angle droit, et la droite qui mesure leur plus courte distance est celle qui joint les deux points aux trajectoires desquels elles sont tangentes.*

Quand une droite est la caractéristique d'un plan, sa conjuguée est aussi la caractéristique d'un plan; ces deux plans sont à angle droit; le foyer du premier est sur la deuxième droite, et le foyer du second est sur la première droite. La droite qui joint ces deux foyers est celle qui mesure la plus courte distance des deux droites.

Ces deux théorèmes n'ont pas besoin de démonstration. Ils résultent évidemment des n^{os} 13 et 14, et de la simple inspection de la *fig.* 1.

26. Soient m et n les points où deux droites conjuguées D, Δ, percent un plan quelconque, et soit L la caractéristique de ce plan. La droite mn rencontre L en un certain point; donc, puisque cette droite qui s'appuie sur deux droites conjuguées D, Δ, s'appuie en même temps sur une troisième L, elle doit s'appuyer aussi sur la conjuguée de L (19). Or cette conjuguée est la normale au plan menée par le foyer (14), et elle ne coupe le plan qui contient mn qu'en ce seul point; donc mn passe par le foyer du plan. Ainsi

Deux droites conjuguées rencontrent un plan quelconque en deux points qui sont toujours en ligne droite avec le foyer du plan.

27. Prenons deux droites conjuguées D, Δ et un plan M quelconques. La caractéristique de ce plan et la normale menée par son foyer sont également deux droites conjuguées (14). Donc ces deux couples de droites conjuguées sont quatre génératrices d'un même mode de génération d'un hyperboloïde à une nappe (19).

Cela posé, les deux droites D, Δ rencontrent le plan M en deux points d, δ qui sont en ligne droite avec le foyer F de ce plan (26). Soit c le point où la droite $d\delta$ rencontre la caractéristique L du plan M. Par le foyer F et par la normale au plan, menons un plan M′ normal à la caractéristique. Ce plan M′ aura pour foyer le point F′ où il coupe L (14), et il aura pour caractéristique la normale au plan M (25).

Soient d', δ' les points où les droites D, Δ rencontrent le plan M′, et c' le point où la droite $d'\delta'$ rencontre la caractéristique de ce plan. Cette droite passera par le foyer F′ (26).

Les droites Fc, c'F′ s'appuient sur quatre génératrices de l'hyperboloïde. Donc les quatre points F, d, δ, c ont leur *rapport anharmonique* égal à celui des quatre points homologues c', d', δ', F′ (*Mémoire* (*) *sur les surfaces du deuxième degré engendrées par une ligne droite*, n° 27).

Projetons orthogonalement les points c', d', δ', F′ sur le plan M. On aura les quatre points F″, d, δ'', F′, dont le rapport anharmonique sera encore le même.

Ainsi, sur les deux droites Fc, FF′, on a deux séries de quatre points correspondants et qui ont leurs rapports anharmoniques égaux, savoir, F, d, δ, c sur la première, et F, d'', δ'', F′ sur la seconde. Or les deux homologues F, F′ coïncident; donc (*Géométrie supérieure*, n° 38) les droites dd'', $\delta\delta''$, cF′ concourent en un même point. Or, cF′ est la caractéristique L du plan M, et les droites dd'', $\delta\delta''$

(*) Je ne reproduirai pas ici le texte des diverses propositions de ce Mémoire sur lesquelles je m'appuie; cela m'entraînerait à trop de détails, parce qu'il faudrait parfois reprendre les choses de loin. Mais je ne puis qu'engager vivement le lecteur à étudier cet écrit, où se trouve un ordre de questions très-propres à montrer les usages du *rapport anharmonique*.

sont les projections orthogonales sur ce plan des conjuguées D, Δ. Donc

Deux droites conjuguées quelconques étant projetées orthogonalement sur un plan quelconque, leurs projections se coupent en un point de la caractéristique de ce plan.

Construction de l'axe de rotation.

28. *Soient* a, b, c *trois points du corps. Les plans menés par les points* a, b *perpendiculairement aux trajectoires de ces points, se couperont suivant une droite qui sera la conjuguée de la droite* ab. *On cherchera la droite qui mesure la plus courte distance de ces deux droites; elle s'appuiera sur l'axe de rotation* X *et lui sera perpendiculaire* (21). *On déterminera de même, avec les deux points* a, c *ou* b, c, *une autre droite jouissant des mêmes propriétés. L'axe* X *sera donc déterminé.*

Cette construction, indiquée par M. Chasles, n'a pas besoin de justification après ce qui précède.

Propriétés de l'hyperboloïde à une nappe.

29. Les propriétés des systèmes de deux droites conjuguées donnent lieu à des propriétés nouvelles de l'hyperboloïde, propriétés dont la démonstration directe ne serait peut-être pas sans difficulté.

En effet, deux systèmes de deux droites conjuguées D, Δ et D′, Δ′ forment quatre génératrices d'un même mode de génération d'un hyperboloïde. Réciproquement, quatre génératrices d'un hyperboloïde peuvent être prises deux à deux, et être regardées comme formant deux systèmes de deux droites conjuguées relativement au mouvement infiniment petit d'un corps solide.

Soit donc un hyperboloïde à une nappe, et ne considérons que les génératrices d'un même mode. Que, dans un plan transversal mené arbitrairement, on mène, par un même point, des sécantes dont chacune rencontrera deux génératrices; ces génératrices, *ainsi conjuguées deux à deux,* jouiront de toutes les propriétés de deux axes conjugués de rotation d'un corps. Par exemple, tout autre plan transversal rencontrera deux génératrices conjuguées en deux points qui seront en ligne droite avec un certain point de ce plan. (Ce point et celui d'où partent les sécantes jouent le rôle de *foyers* de leurs plans respectifs.)

La droite qui mesurera la plus courte distance de deux génératrices conjuguées passera par un même axe auquel elle sera perpendiculaire, etc.

La condition à laquelle est assujettie la *conjugaison* des génératrices deux à deux mérite d'être expliquée. Elle est une conséquence du théorème du n° 26. On peut bien conjuguer arbitrairement deux génératrices D, Δ et deux autres génératrices D', Δ'; mais alors toutes les autres se trouvent conjuguées *d'une manière déterminée.* En effet, menons un plan transversal M, qui coupe ces quatre droites en d, δ, d', δ'; les droites $d\delta$, $d'\delta'$ se rencontrent en un point F, qui est le *foyer* du plan, ou du moins qui en joue ici le rôle, et par lequel doivent par conséquent passer toutes les autres droites analogues.

Réciproquement, on peut prendre pour foyer du plan M un point quelconque de ce plan; mais alors toutes les droites $d\delta$, $d'\delta'$, devant passer par ce point, *conjuguent* les génératrices deux à deux d'une manière qui n'a plus rien d'arbitraire; ce qui justifie le procédé indiqué par le texte.

§ IV. — *Propriétés relatives aux trajectoires des points et aux caractéristiques des plans d'un corps en mouvement.*

30. Prenons une droite dans deux positions infiniment voisines. Soient a, b, c, d, etc., des points de cette droite, qui se trouvent transportés en a', b', c', d', etc. Par le

point a', menons une parallèle à la première position de la droite, et soient a', b'', c'', d'', etc., les positions des points a, b, c, d, etc., sur cette parallèle. Les droites bb'', cc'', dd'', etc., sont parallèles entre elles; il en est de même des droites $b'b''$, $c'c''$, $d'd''$, etc.; donc les plans $bb'b''$, $cc'c''$, $dd'd''$, etc., sont parallèles entre eux et à aa'. Donc les trajectoires aa', bb', cc', etc., ou bien les tangentes à ces trajectoires sont parallèles à un même plan.

Donc *les tangentes aux trajectoires des différents points d'une droite forment un paraboloïde hyperbolique.*

31. Chacune de ces tangentes D est la caractéristique d'un plan (13), auquel sa conjuguée est normale (14) et qu'elle perce en un point F qui est le foyer du plan (25). La droite qui mesure la plus courte distance de ces deux droites conjuguées est comprise dans le plan M, et elle rencontre Δ au foyer F (25). En outre, cette plus courte distance rencontre l'axe de rotation, et c'est également sur elle que se mesure la plus courte distance de cet axe aux deux droites (21). Ainsi la suite des *foyers* des plans qui correspondent aux tangentes ou trajectoires consécutives, considérées comme étant des *caractéristiques,* peut s'obtenir en menant par l'axe de rotation [qui est normal au plan directeur du paraboloïde hyperbolique dont les conjuguées D, Δ sont des génératrices (20)] toutes les droites dont chacune mesure la plus courte distance entre cet axe et chaque génératrice du paraboloïde, et en prenant les pieds de ces droites sur chacune des génératrices.

Or on démontre, à l'article 79 du *Mémoire sur les surfaces réglées du second degré,* que toutes ces plus courtes distances forment un second paraboloïde, et que leurs pieds sur les génératrices du premier sont sur une courbe à double courbure du troisième ordre.

Tout cône qui passe par cette courbe à double courbure, et qui a son sommet en l'un de ses points, est du second degré. Car tout plan mené par son sommet ne coupe la courbe qu'en deux autres points, et, par conséquent, ne coupe le cône que suivant deux arêtes, ce qui prouve qu'il est du second degré.

Les plans dont les tangentes aux trajectoires des points d'une droite sont les caractéristiques, ne sont autre chose que les plans normaux aux trajectoires des foyers de ces plans. Donc ils enveloppent une figure corrélative de celle de ces foyers (15). Or celle-ci est une courbe à double courbure du troisième ordre; donc la première est une surface développable du quatrième degré. Un point de la courbe correspond à un plan tangent à la surface; le cône qui a son sommet en ce point et qui a la courbe pour base, correspond à la courbe suivant laquelle le plan tangent coupe la surface. Or le cône est du second degré; donc la courbe est une conique. Ainsi on a ces deux théorèmes :

Chacune des tangentes aux trajectoires des points d'une droite est la caractéristique d'un plan; tous ces plans enveloppent une surface développable du quatrième degré, et ils ont leurs foyers sur une courbe à double courbure du troisième ordre.

Tout plan tangent à la surface développable la coupe suivant une conique; et tout cône qui passe par la courbe à double courbure et qui a son sommet en un de ses points, est du second degré.

En remarquant que la caractéristique d'un plan se meut dans ce plan, on peut donner au premier de ces deux théorèmes l'énoncé suivant :

Quand un corps est en mouvement, les tangentes aux trajectoires des points d'une droite se meuvent, pendant un instant du mouvement, dans des plans qui forment une surface développable du quatrième degré. (*Aperçu historique*, page 407.)

32. Quand plusieurs plans passent par une même droite

D, leurs caractéristiques forment un hyperboloïde à une nappe (art. 49 du *Mémoire déjà cité*). Leurs foyers sont situés (6) sur une autre droite Δ, qui est la conjuguée de la première. Si, de ces foyers, on abaisse des perpendiculaires sur les caractéristiques de leurs plans respectifs, les pieds de ces perpendiculaires seront les points aux trajectoires desquels les caractéristiques sont tangentes, respectivement. Il s'agit de déterminer la nature de la courbe formée par ces points.

Pour cela, remarquons que les perpendiculaires en question sont les plus courtes distances des caractéristiques à leurs conjuguées (25), et qu'elles rencontrent toutes, à angle droit, l'axe de rotation (21). De plus, chacune d'elles est comprise dans un plan qui passe par la droite D, et par conséquent rencontre cette droite. Donc ces perpendiculaires s'appuient constamment sur trois droites fixes, savoir : D, Δ sa conjuguée, lieu des foyers du faisceau de plans, et X. Mais elles sont en outre parallèles à un plan normal à l'axe de rotation. Donc elles engendrent un paraboloïde hyperbolique.

Remarquons encore que toutes les caractéristiques s'appuient sur D. Ainsi D est une génératrice commune à l'hyperboloïde et au paraboloïde. Les points qui nous occupent sont ceux de l'intersection de ces deux surfaces. Donc ils sont situés sur une courbe à double courbure du troisième ordre.

Les plans normaux aux trajectoires de ces points enveloppent une figure corrélative de cette courbe, c'est-à-dire une développable du quatrième degré. Ceci peut aussi se déduire de (31).

Ainsi, *quand plusieurs plans passent par une même droite, leurs caractéristiques forment un hyperboloïde à une nappe. Chacune de ces droites est tangente à la trajectoire d'un de ses points ; tous ces points sont situés sur* *une courbe à double courbure du troisième ordre; et les plans normaux à leurs trajectoires enveloppent une surface développable du quatrième degré.*

33. Dans le cas particulier où la droite D est tangente à la trajectoire d'un de ses points, c'est-à-dire est elle-même une caractéristique, tout se simplifie. La conjuguée Δ de D est normale au plan R, dont D est la caractéristique (14). Soient F le foyer de ce plan, et O le pied de la perpendiculaire abaissée du point F sur D, c'est-à-dire le point à la trajectoire duquel D est tangente. Les normales aux plans qui passent par D, menées par leurs foyers respectifs qui sont sur Δ, sont toutes contenues dans le plan OΔ qui est ici un cas particulier du paraboloïde que ces droites forment en général (31), et elles coupent le plan R en des points qui sont tous situés sur la droite FO. Donc les caractéristiques, leurs conjuguées, doivent couper le plan R au point O (26); et ceci résulte également du nº 22, puisque, toutes les conjuguées étant dans un même plan, toutes les caractéristiques doivent passer par un même point; l'hyperboloïde du cas général (31) dégénère ici en un cône du second degré, ce qu'on voit d'ailleurs d'une autre manière, en remarquant que ce point de concours O de toutes les caractéristiques est lui-même un point de la courbe à double courbure du troisième ordre sur laquelle chacune de ces droites s'appuie. Donc enfin,

Quand une droite est tangente à la trajectoire d'un de ses points, les plans menés par cette droite ont leurs caractéristiques sur un cône du second degré.

34. Si l'on remarque, dans le théorème précédent, que tous les points aux trajectoires desquels les caractéristiques sont tangentes respectivement, se dirigent vers le point fixe O, on en conclut immédiatement que :

Quand un corps solide est en mouvement, si, à un in-

stant quelconque, on demande quels sont les points du corps dont les directions tendent vers un point donné, c'est-à-dire dont les tangentes à leurs trajectoires passent par un point donné, ces points sont situés sur une courbe à double courbure du troisième ordre; les tangentes à leurs trajectoires forment un cône du second degré, et les plans normaux à ces trajectoires enveloppent une surface développable du quatrième degré.

35. Les caractéristiques de ces plans normaux sont toutes situées (33) dans un même plan OΔ, qui a pour foyer le point O. On a donc immédiatement ce théorème :

Les plans qui ont leurs caractéristiques situées dans un même plan fixe enveloppent une développable du quatrième degré; leurs foyers sont sur une courbe à double courbure du troisième ordre, et les normales à ces plans, menées par leurs foyers, forment un cône du second degré. Les plans dont ces normales sont les caractéristiques passent tous par une même droite, qui est la tangente à la trajectoire du foyer du plan fixe.

36. En se reportant aux définitions du n° 2, on peut donner à ce théorème un autre énoncé, et cette variété d'explications ne saurait être superflue dans ce sujet difficile et compliqué.

A un instant quelconque du mouvement, tous les plans du corps touchent leurs *développables trajectoires*, chacun suivant une droite qui est sa caractéristique actuelle (2).

Si l'on demande comment sont répartis dans l'espace, à cet instant du mouvement, les plans qui touchent leurs développables trajectoires suivant des droites situées dans un même plan donné, ces plans envelopperont une surface développable du quatrième degré. (*Aperçu historique*, page 407.)

La position de ces droites n'est pas quelconque dans le plan donné; *elles enveloppent une parabole.* Nous démontrerons ce théorème dans un instant.

Mais, auparavant, remarquons que ce plan donné, quel qu'il soit, a lui-même pour caractéristique une de ces droites. Il est donc un plan tangent à la développable, et il la coupe suivant une courbe qui n'est évidemment autre chose que l'enveloppe de toutes les droites, suivant lesquelles il coupe les autres plans dont il contient les caractéristiques, c'est-à-dire qu'elle est l'enveloppe même de ces caractéristiques. Or on peut voir immédiatement que cette courbe est une conique; car elle répond *corrélativement* au cône du second degré, qui a pour base la courbe à double courbure du troisième ordre (corrélative de la surface) et pour sommet un point de cette courbe (corrélatif du plan tangent).

37. Pour déterminer cette courbe plus complétement, remarquons que les caractéristiques qui l'enveloppent jouissent de cette propriété qu'un de leurs points se meut dans leur propre direction. Tous ces points se meuvent donc dans le plan où se trouvent les caractéristiques auxquelles ils appartiennent. Or les points de la caractéristique de ce plan sont les seuls points de ce plan qui s'y meuvent (5); donc la conique cherchée est la courbe enveloppe des tangentes aux trajectoires des points d'une droite qui se meut dans un plan, et le problème qui nous occupe est ramené à celui de savoir quelle est la nature de cette enveloppe.

38. Quand une droite se meut dans un plan, elle est tangente à la trajectoire d'un de ses points, et elle est la *caractéristique* du plan; elle tourne autour du *foyer* de ce plan. Prenons cette droite dans deux positions infiniment voisines L, L'. Les points a, b, c, d, etc., qui viennent se placer en a', b', c', d', etc., divisent *homographiquement* les deux droites; donc les trajectoires aa', bb', cc', etc., prolongées, enveloppent une conique (*Géométrie supérieure,*

n^{os} 548 et suivants). Les points de division s'étendent à l'infini sur L et L' *à la fois;* donc la courbe a une de ses tangentes tout entière à l'infini; c'est donc une parabole symétrique par rapport au point a', pied de la perpendiculaire abaissée sur L' du foyer du plan. Par construction, ce foyer est tel, que les droites Fa', Fb', Fc', Fd', etc., sont perpendiculaires sur les trajectoires aa', bb', cc', dd', etc., (1), c'est-à-dire sur les tangentes à la parabole. Donc le *foyer* du plan est le foyer de la parabole; car on sait que, dans cette courbe, les perpendiculaires abaissées du foyer sur ses tangentes ont leurs pieds sur la droite menée par le sommet, perpendiculairement à l'axe. Ainsi,

Quand une droite est tangente à la trajectoire d'un de ses points, les tangentes aux trajectoires de ses autres points sont toutes comprises dans un même plan, et enveloppent une parabole, qui a pour foyer le point que nous avons appelé le foyer du plan.

On voit que cette parabole est un cas particulier du paraboloïde du n° 30.

39. D'après le théorème précédent, la conique dont il est question au n° 37 est une parabole qui a pour foyer le foyer du plan qui le contient, et qui est tangent à la surface développable. Or ce plan est normal à la trajectoire d'un des points de la courbe à double courbure du n° 34. Donc enfin

Chacun des plans normaux aux trajectoires des points du corps qui se dirigent, à un instant du mouvement, vers un point fixe, coupe la surface du quatrième degré qu'ils enveloppent, suivant une parabole qui a son foyer sur la courbe à double courbure, lieu géométrique de ces points.

40. Deux points de cette courbe à double courbure sont les foyers de deux plans tangents à la surface développable.

Donc la droite qui les joint est la conjuguée de l'intersection de ces deux plans. Or, *dans le cas actuel,* cette intersection est la caractéristique d'un certain plan (36). Donc sa conjuguée est aussi la caractéristique d'un autre plan (14), et, par suite, elle est tangente à la trajectoire d'un de ses points. Réciproquement, la commune intersection des deux plans est la caractéristique du plan normal à la droite de jonction des deux points de la courbe à double courbure. D'où il résulte que :

Toute droite qui s'appuie en deux points sur la courbe à double courbure est tangente à la trajectoire d'un de ses points, et la droite d'intersection de deux plans tangents à la développable est aussi tangente à la trajectoire d'un de ses points.

41. *Quand des plans passent par un même point* A, *leurs caractéristiques s'appuient toutes sur une même courbe à double courbure du troisième ordre; et les points où ces droites sont tangentes à leurs trajectoires, sont situés sur une surface du troisième degré.*

En effet : 1°. Les trajectoires de tous les points de l'une quelconque de ces caractéristiques sont situées dans le plan auquel elle appartient (5), et elles y enveloppent une parabole dont le foyer est le foyer même du plan (38). Par le point A situé dans ce plan, on peut mener deux tangentes à la parabole; l'une de ces deux tangentes est la trajectoire du point de la caractéristique qui, pendant le mouvement, se dirige vers le point fixe A. Or tous les points dont les trajectoires ont cette direction, sont situés sur une courbe à double courbure du troisième ordre (34); donc toutes les caractéristiques s'appuient sur cette courbe.

2°. Pour démontrer la seconde partie du théorème, il suffit de prouver qu'une droite quelconque L ne rencontre la surface qu'en trois points. En effet, les tangentes aux trajectoires des points de cette droite forment un paraboloïde (30), et les plans dont ces tangentes sont les caractéristiques enveloppent une surface développable du quatrième degré (31). Par le point A on ne peut mener que trois plans tangents à cette surface (15); donc il n'existe sur L que trois points dont les trajectoires soient les caractéristiques de plans passant par A. Or ces trois points appartiennent à la surface en question; donc cette surface est du troisième degré.

42. *Si l'on mène les tangentes aux trajectoires de tous les points d'un plan, ces droites seront les caractéristiques d'autant de plans; et tous ces plans envelopperont une surface courbe jouissant de la propriété que, par une même droite quelconque* L, *on ne peut lui mener que trois plans tangents.*

En effet, tous les plans menés par une même droite L ont leurs caractéristiques sur un hyperboloïde à une nappe (32), et tous les points où ces droites sont tangentes à leurs trajectoires sont sur une courbe à double courbure du troisième ordre (32). Cette courbe ne rencontre le plan proposé qu'en trois points. Donc il n'existe sur ce plan que trois points tels, que les plans dont les tangentes à leurs trajectoires sont les caractéristiques passant par la droite L. Or ces plans sont trois plans tangents à la surface en question; donc le théorème est démontré.

SECTION II.

RELATIONS MÉTRIQUES.

43. Soient (*fig.* 2) r la plus courte distance d'une droite D à l'axe de rotation X, et ρ la plus courte distance de la droite *conjuguée* Δ au même axe. Ces deux lignes

se mesurent sur une même droite AB, comme il a été dit précédemment (21).

Par un point O, menons Oe et Od parallèles à Δ et D, respectivement. Les trois droites X, Od, Oe, sont dans un même plan, normal à la plus courte distance des deux droites.

Coupons maintenant la figure par un plan M perpendiculaire à l'axe X, et soient a, e, p, d, b les points où ce plan est rencontré par les diverses lignes que nous avons tracées. Les points a, p, b sont en ligne droite (20) ; les lignes aO, bd sont parallèles et égales, respectivement, à OA et OB ; ainsi les triangles pae, pbd sont semblables, et ils donnent

$$\frac{pd}{pe}=\frac{r}{\rho};$$

les triangles rectangles pOd, pOe donnent

$$pd=pO.\mathrm{tang}\,\alpha, \quad \text{et} \quad pe=pO.\mathrm{tang}\,\beta.$$

Donc, en désignant par (D, X) et (Δ, X) les angles α et β que l'axe X fait avec les deux droites conjuguées D et Δ, il vient

$$r.\mathrm{tang}\,(\Delta,\ X)=\rho.\mathrm{tang}\,(D,\ X).$$

Considérons maintenant le mouvement du point A relativement à l'axe X, et soient υ la rotation du corps autour de X et e la translation de cet axe dans sa propre direction, c'est-à-dire l'espace décrit par chacun de ses points.

La trajectoire AL du point A *se compose* d'une translation AI égale et parallèle à e, et d'une rotation IL égale à $\rho\upsilon$, perpendiculaire à AI et située dans un plan normal à X. Ainsi le triangle AIL est rectangle en I, et son plan est normal à la plus courte distance des deux droites. Ce triangle donne

$$\rho\upsilon=e.\mathrm{tang\,IAL}.$$

En second lieu, considérons le mouvement du corps comme effectué autour des deux axes de rotations simultanées D, Δ. Puisque A est sur l'axe Δ, son mouvement se réduit à une rotation autour de D. En vertu de cette rotation, ce point décrit un arc infiniment petit AL dans un plan BAL normal à D, et se transporte au point L où nous avons déjà supposé que l'amenaient sa rotation autour de X et sa translation suivant cet axe. Donc la trajectoire AL est perpendiculaire à l'axe D, et si, par le point A, on mène AD′ parallèle à D, les angles IAL, IAD′ sont complémentaires ; on a donc

$$\text{tang IAL} = \frac{1}{\text{tang IAD}'} = \frac{1}{\text{tang}\,(\text{D}, \text{X})},$$

et l'équation

$$\rho v = c.\text{tang IAL}$$

devient

$$\rho.\text{tang}\,(\text{D}, \text{X}) = \frac{e}{v}.$$

Donc, enfin, on a les relations suivantes, qu'il s'agissait d'établir,

$$r.\text{tang}\,(\Delta, \text{X}) = \rho.\text{tang}\,(\text{D}, \text{X}) = \frac{e}{v}.$$

Les deux droites D, Δ, sont deux axes conjugués de rotation, c'est-à-dire deux axes autour desquels on peut donner au corps deux rotations simultanées pour opérer son déplacement. Nous pouvons donc dire qu'*un premier axe de rotation étant pris à volonté, l'inclinaison du deuxième axe sur l'axe central* X *ne dépendra que de la distance du premier axe à cet axe central.*

44. *Remarque.* — Nous avons vu (29) qu'on peut conjuguer, deux à deux, toutes les génératrices d'un hyperboloïde à une nappe, de manière qu'elles jouissent des propriétés de deux axes conjugués de rotation d'un corps. On peut appliquer l'équation précédente à deux de ces génératrices, et l'on a cette propriété :

Les tangentes des angles que deux génératrices conjuguées font avec l'axe fixe que rencontre leur plus courte distance, sont entre elles comme les distances de ces deux droites à cet axe.

45. *Si la droite* D *est dirigée suivant la trajectoire d'un de ses points, la droite* Δ *sera dans le plan normal à cette trajectoire* (25), *et l'on aura*

$$\operatorname{tang}(\mathrm{D}, \mathrm{X}) . \operatorname{tang}(\Delta, \mathrm{X}) = 1,$$

d'où

$$r\rho = \frac{e^2}{v^2} = \text{constante}.$$

46. Soient Ω et ω les rotations autour de deux droites D, Δ. On a évidemment

$$\Omega = \frac{\mathrm{AL}}{r+\rho}, \quad \text{ou} \quad \Omega^2 (r+\rho)^2 = e^2 + v^2 \rho^2,$$

et, de même,

$$\omega^2 (r+\rho)^2 = e^2 + v^2 r^2.$$

Afin d'obtenir ces valeurs en fonction de la position de la première droite D, remplaçons ρ par sa valeur

$$\frac{e}{v} \cdot \frac{\cos(\mathrm{D}, \mathrm{X})}{\sin(\mathrm{D}, \mathrm{X})},$$

tirée de l'équation du n° 43. On aura, après quelques réductions faciles,

$$\Omega^2 = \frac{e^2 v^2}{[rv \sin(\mathrm{D}, \mathrm{X}) + e\cos(\mathrm{D}, \mathrm{X})]^2}$$

et

$$\omega^2 = \frac{v^2 (e^2 + r^2 v^2) \sin^2(\mathrm{D}, \mathrm{X})}{[rv . \sin(\mathrm{D}, \mathrm{X}) + e . \cos(\mathrm{D}, \mathrm{X})]^2}.$$

47. Le rapport de ces deux quantités a pour valeur

$$\frac{\Omega^2}{\omega^2} = \frac{1}{\sin^2(\mathrm{D}, \mathrm{X})} \cdot \frac{e^2}{e^2 + r^2 v^2}.$$

Or, dans le triangle BI'L' (analogue à AIL), on a

$$BI' = BL'.\cos I'BL' = BL'.\sin(\Delta, X),$$

d'où

$$\frac{e^2}{e^2 + r^2 v^2} = \sin^2(\Delta, X).$$

Donc

$$\frac{\Omega}{\omega} = \frac{\sin(\Delta, X)}{\sin(D, X)}.$$

Cette équation fait voir que, *si par un point on mène deux droites parallèles aux deux axes conjugués* D, Δ, *et proportionnelles aux rotations du corps autour de ces deux axes, la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux droites sera parallèle à l'axe central de rotation* X.

Démontrons que *cette diagonale est, en outre, proportionnelle à la rotation du corps autour de* X. On a

$$\delta^2 = \Omega^2 + \omega^2 + 2\Omega.\omega\cos(D, \Delta),$$

$$\cos(D, \Delta) = \cos(D, X).\cos(\Delta, X) - \sin(D, X).\sin(\Delta, X).$$

On a aussi (43)

$$\operatorname{tang}(\Delta, X) = \frac{e}{vr},$$

d'où

$$\cos(\Delta, X) = \frac{vr}{\sqrt{e^2 + v^2 r^2}}, \quad \text{et} \quad \sin(\Delta, X) = \frac{e}{\sqrt{e^2 + v^2 r^2}};$$

substituant ces valeurs dans l'expression de δ^2, ainsi que celles obtenues ci-dessus pour Ω^2 et ω^2, on trouve, après quelques réductions,

$$\delta^2 = \Omega^2 + \omega^2 + 2\Omega.\omega.\cos(D, \Delta) = v^2.$$

48. Démontrons enfin que, *si sur les deux droites* D, Δ, *on porte deux segments proportionnels aux rotations du corps autour de ces deux droites, le tétraèdre construit sur ces deux segments pris pour arêtes opposées aura un volume constant.*

En effet, le volume de ce tétraèdre (*voir* ci-dessous la démonstration de ce théorème) est proportionnel à

$$\Omega . \sin(D, \Delta)(\rho + r).$$

Or

$$\sin(D, \Delta) = \sin(D, X)\cos(\Delta, X) + \cos(D, X).\sin(\Delta, X).$$

Si l'on remplace dans l'équation ci-dessus $\sin(D, \Delta)$ par cette valeur, puis $\sin(\Delta, X)$ et $\cos(\Delta, X)$ par celles du n° 47, et Ω, ω, ρ par celles du n° 46, on arrive à la relation

$$\Omega . \omega . \sin(D, \Delta)(\rho + r) = ev. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Nota. — Quant au théorème de Géométrie en question, voici comment il se démontre :

Soit (*fig.* 3) SABC un tétraèdre; achevons le parallélogramme ABCD; les deux tétraèdres SABC, SBCD sont équivalents, et celui-ci a pour mesure $\frac{1}{3}$ SBD.CI, CI étant la perpendiculaire abaissée du point C sur le plan SBD. L'arête AC est parallèle à ce plan, et, par conséquent, tous ses points en sont également distants. Or la plus courte distance $PQ = S'$ des deux arêtes opposées SB, AC est perpendiculaire à ce plan; donc elle est égale à CI. On a aussi

$$\text{triangle SBD} = \tfrac{1}{2}\,\text{SB}.\text{BD}.\sin \text{SBD}.$$

Donc le volume du tétraèdre est égal à

$$\tfrac{1}{6}.\text{SB}.\text{AC}.\sin(\text{SB}, \text{AC}).S',$$

ou, en employant les mêmes notations que ci-dessus,

$$\text{volume du tétraèdre} = \tfrac{1}{6}\,\Omega . \omega . \sin(D, \Delta)(\rho + r). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

49. La quantité $\omega . \sin(D, \Delta)(\rho + r)$ représente évidemment la projection sur D de la trajectoire du point B qui est, sur cette droite, le pied de la plus courte distance de D et Δ. Appelons cette projection p; l'équation du n° 48 devient

$$\Omega . p = vc.$$

Nous allons démontrer que, *si l'on projette sur* D *les* *trajectoires de ses différents points, toutes les projections sont égales entre elles*, et, par suite, sont égales à p. L'équation qui précède s'appliquera donc à tous les points de la droite, et il sera prouvé que *la longueur commune de ces projections est en raison inverse de la rotation du corps autour de la droite* D.

Soient (*fig.* 4) ad, $a'd'$ deux positions consécutives de la droite D; par les points a', b', c', d', etc., qui se trouvaient primitivement en a, b, c, d, etc., menons des plans perpendiculaires à D et qui coupent cette droite aux points A, B, C, D, etc. Ces plans parallèles passent par une même droite à l'infini; donc (*Géométrie supérieure*, n° 17) ils forment un faisceau qui est homographique avec la division formée sur $a'd'$ par les points a', b', c', d', etc.; les deux divisions A, B, C, D, etc., et a', b', c', d', etc., sont donc homographiques (*Géométrie supérieure*, n° 18). Mais les deux divisions a, b, c, d, etc., et a', b', c', d', etc., le sont par construction, puisque les segments correspondants sont égaux; et, par conséquent, les deux divisions a, b, c, d, etc., A, B, C, D, etc., formées sur une même droite sont homographiques entre elles (*Géométrie supérieure*, n° 280). Or elles ont évidemment leurs *points doubles* à l'infini; donc (*Géométrie supérieure*, n° 169) le segment compris entre deux points correspondants quelconques est de même grandeur, et l'on a

$$aA = bB = cC = dD = \ldots$$

Ces segments sont les projections sur D des trajectoires aa', bb', cc', dd', etc. Ainsi le théorème est démontré.

La projection commune p *exprime la quantité dont chaque point de la droite* D *s'est déplacé dans le sens de la direction de cette droite; de sorte qu'on peut dire que c'est le mouvement de la droite estimé dans sa propre direction. L'équation*

$$\Omega . p = ve$$

exprime donc que la rotation du corps autour d'une droite quelconque est en raison inverse du mouvement de cette droite estimé dans sa propre direction.

Cela établit une relation assez remarquable entre la rotation et la translation, ces deux mouvements dont se compose tout déplacement d'un corps.

50. *Si, sur différentes droites passant par un même point, on porte, à partir de ce point, des segments proportionnels aux rotations du corps autour de ces droites, les extrémités de ces segments seront sur un plan perpendiculaire à la trajectoire du point.*

En effet, par le même point menons des parallèles aux conjuguées de ces droites; elles seront toutes dans un même plan (22). Prenons sur ces parallèles des segments proportionnels aux rotations du corps autour d'elles et achevons les parallélogrammes. Ils doivent tous avoir la même diagonale (47); donc toutes les extrémités des premières droites sont dans un même plan, mené, parallèlement à celui des conjuguées, par l'extrémité du segment qui, étant issu du point commun, représente la rotation du corps autour de l'axe X.

La tangente à la trajectoire du point est normale à sa conjuguée (25), qui se trouve, ainsi que toutes les autres conjuguées, dans le plan en question; donc ce plan est perpendiculaire à cette trajectoire, ce qui démontre la fin du théorème.

51. Il s'ensuit que *la rotation minimum aura lieu autour de la trajectoire même du point.*

Soit Ω cette rotation minimum, et prenons la trajectoire du point pour la droite D. La projection p est ici égale à la trajectoire même. L'équation

$$\Omega . p = \text{constante}$$

prouve donc que *cette rotation, multipliée par la trajec-*

toire du point, forme un produit constant, quel que soit le point.

Supposons qu'un point ait une étendue infiniment petite, que ce soit, par exemple, un petit globule; il aura une rotation autour de sa trajectoire, en même temps qu'il décrira cet élément rectiligne; il aura donc deux mouvements, l'un de rotation et l'autre de translation; *le produit de ces deux mouvements est constant pour tous les points du corps.*

52. Supposons que plusieurs droites D, D′, etc., soient situées dans un même plan. Du foyer F de ce plan, abaissons sur elles des perpendiculaires FO, FP, etc.; les points O, P, etc., ont autour du foyer, dans le plan même, un même mouvement de rotation α qui les transporte sur les droites D, D′, etc., auxquelles ils appartiennent, en O′, P′, etc.; ils ont, en outre, autour de la caractéristique, un mouvement *normal au plan* (4). Les projections de leurs trajectoires sur les droites D, D′, etc., sont donc les segments eux-mêmes OO′, PP′, etc. Or on a, en faisant $FO = r$, $FP = r'$, etc.,

$$OO' = p = r.\operatorname{tang}\alpha, \quad PP' = p' = r'.\operatorname{tang}\alpha;$$

donc l'équation du n° 48

$$\Omega p = \Omega' p'$$

donne

$$\frac{\Omega}{\Omega'} = \frac{p'}{p}.$$

Ainsi,

Quand plusieurs droites sont situées dans un même plan, les rotations du corps autour de ces droites sont en raison inverse de leurs distances au foyer du plan.

53. Soit (*fig.* 5) un plan P faisant partie du corps en mouvement; il y a à considérer, relativement à ce plan, son foyer, sa caractéristique, sa rotation autour de cette

droite, et sa rotation sur lui-même autour de son foyer. Soient Π la distance du foyer à l'axe X; π la distance de la caractéristique à cet axe. Désignons par P l'angle que le plan fait avec un plan perpendiculaire à l'axe X, ou, si l'on veut, l'angle que X fait avec la normale au plan.

Le point F se meut suivant la normale au plan (3). Soit FF′ sa trajectoire. FF′ est la résultante d'une translation $FF'' = e$ suivant la parallèle FX′ à l'axe X, et d'une rotation $F'F'' = \Pi\upsilon$, perpendiculaire à cet axe; or on a, dans le triangle F F′F″ rectangle en F″,

$$F'F'' = FF''.\,\mathrm{tang}\,NFX', \quad \text{ou} \quad \Pi\upsilon = e\,\mathrm{tang}\,P,$$

et, par suite,

$$\Pi = \frac{e}{\upsilon}.\,\mathrm{tang}\,P.$$

Soit G le pied de la perpendiculaire abaissée du foyer sur la caractéristique. La trajectoire GG′ de ce point est sur la caractéristique même (5); elle se compose d'une translation $GG'' = e$ suivant la parallèle GX″ à l'axe X, et d'une rotation $G''G' = \pi\upsilon$ perpendiculaire à cet axe. Le triangle rectangle GG′G″ donne

$$\pi = \frac{e}{\upsilon}\,\mathrm{tang}\,G'GX''.$$

Or GG′ et GN′ sont deux droites rectangulaires (25), et GX″ est située dans le plan de ces deux droites (43); donc l'angle

$$G'GX'' = 90^\circ - N'GX'' = 90^\circ - P,$$

et l'équation devient

$$\pi = \frac{e}{\upsilon}.\frac{1}{\mathrm{tang}\,P}.$$

De ces deux expressions de Π et π, on tire immédiatement

$$\Pi\pi = \frac{e^2}{\upsilon^2} = \text{constante}, \quad \text{et} \quad \frac{\Pi}{\pi} = \mathrm{tang}^2\,P.$$

54. Prenons un second plan perpendiculaire sur le premier, on aura deux équations semblables; et si l'on remarque que $P' = 90^\circ - P$, on aura

$$\Pi\Pi' = \frac{e^2}{\upsilon^2} = \text{constante},$$

et, de même,

$$\pi\pi' = \text{constante}.$$

Ainsi,

Quand deux plans sont perpendiculaires, les distances de leurs foyers à l'axe de rotation ont leur produit constant; et les distances de leurs caractéristiques au même axe ont aussi leur produit constant.

55. La trajectoire FF' (*fig.* 5) est égale à $\frac{e}{\cos P}$; l'équation

$$\Omega . p = e\upsilon$$

devient

$$\Omega = \cos P;$$

on trouve de même

$$\omega = \upsilon . \sin P,$$

donc

$$\Omega^2 + \omega^2 = \upsilon^2 = \text{constante}.$$

Ω est la rotation du plan P sur lui-même autour de son foyer, et ω est sa rotation autour de sa caractéristique. *Ainsi la somme des carrés des deux rotations d'un plan est constante.*

On en conclut sans démonstration que :

Quand deux plans sont à angle droit, la somme des carrés de leurs rotations sur eux-mêmes est constante, et la somme des carrés de leurs rotations autour de leurs caractéristique est aussi constante.

56. Que, dans le plan P (*fig.* 6), on mène une droite quelconque D, qui coupe la caractéristique en O. Menons la normale ON et la parallèle OX' à l'axe X. Le triangle sphérique *abc* est rectangle en *b* (53), et il donne

$$\cos ac = \cos ab . \cos bc.$$

Or

$$\cos ab = \sin \mathrm{NOX}' = \mathrm{P}.$$

Appelons ω la rotation autour de la caractéristique et (ω, D) l'angle que cette caractéristique fait avec la droite D; l'équation

$$\omega = v \sin \mathrm{P} \quad (55)$$

devient donc

$$\omega . \cos(\omega, \mathrm{D}) = v \cos(\mathrm{D}, \mathrm{X}).$$

Le second nombre ne dépend que de la direction de D par rapport à X; donc,

Pour chaque plan mené par une même droite D, *on a*

$$\omega . \cos(\omega, \mathrm{D}) = \text{constante}.$$

SECTION III.

ANALOGIE ENTRE LES ROTATIONS D'UN CORPS AUTOUR DE DIVERS AXES ET LES SYSTÈMES DE FORCES.

57. *Quand un corps éprouve un déplacement infiniment petit, résultant de plusieurs rotations simultanées autour de plusieurs axes, si l'on porte sur ces axes des lignes proportionnelles à ces rotations respectivement, et qu'on considère ces lignes comme autant de forces qui solliciteraient le corps, l'élément rectiligne décrit par chaque point du corps, en vertu de ce système de rotations simultanées, sera proportionnel au moment principal des forces relatif à ce point.*

En effet, soient M un point quelconque du corps; D, D', D'', etc., différents axes autour desquels sont imprimées des rotations ω, ω', ω'', etc.; et soient enfin r, r', r'', etc., les distances du point M à ces axes. En vertu de la rotation

ω, le point M tend à décrire un élément rectiligne proportionnel à $\omega . r$, dans le plan mené par ce point normalement à l'axe D; et, de même, en vertu des autres rotations, il tend à décrire des éléments rectilignes proportionnels à $\omega' . r'$, $\omega'' . r''$, etc., dans des plans normaux aux axes D', D'', etc. Donc l'élément rectiligne qu'il décrit réellement est une résultante de ceux que chacune de ces rotations particulières tend à lui faire parcourir. Or, si l'on regarde chacune de ces rotations comme une force imprimée suivant l'axe qui lui correspond, les produits $\omega . r$, $\omega' . r'$, $\omega'' . r''$, etc., représenteront les moments de ces forces par rapport au point M; leurs actions pourront donc être remplacées par celle du moment résultant ou *principal* de ces forces relatives au point M, et ce point, sollicité par ce seul moment, décrira un élément rectiligne qui lui sera proportionnel.

On peut encore présenter la démonstration sous une autre forme, en disant que chacun des produits $\omega . r$, $\omega' . r'$, etc., représente la grandeur du *couple* qui serait produit par la rotation ω, ω', etc., considérée comme une force, si l'on venait à la transporter au point M, et en ajoutant que l'élément rectiligne décrit par ce point sous l'influence de cette rotation isolée, étant proportionnel à ce couple et normal à son plan, peut en représenter l'axe. On a donc au point M autant d'axes de couples qu'il y a de rotations données. Ces couples, ou leurs axes, se composent entre eux à la manière des simples forces, et par conséquent l'axe du couple résultant représente en direction et en grandeur (c'est-à-dire dans la même proportion que le font les autres axes) l'élément rectiligne réellement décrit par le point M.

Il suit de là que *toutes les propriétés relatives aux rotations d'un corps autour de diverses droites, et aux espaces rectilignes décrits par les points du corps, donnent lieu à autant de propriétés d'un système de forces, relatives à* *ces forces elles-mêmes et à leurs moments par rapport aux différents points de l'espace; et réciproquement.*

58. En suivant les conséquences de cette analogie, soit à l'aide du Mémoire de M. Chasles, soit en se reportant aux méthodes employées par M. Poinsot dans la *Théorie nouvelle de la rotation des corps* (Ire partie, chapitre Ier), on arriverait facilement à voir « qu'il existe une parfaite symétrie entre la composition des rotations et celle des » forces; que ces compositions sont presque identiques, et » que si l'on avait primitivement donné le nom de *force* » à la cause capable de faire tourner sur un axe, on aurait » eu pour ces nouvelles forces une statique toute sembla- » ble, de telle sorte qu'un même livre, écrit sur la science » des forces, pourrait, sans cesser d'être exact et de traiter » régulièrement la même science, être entendu de deux » manières différentes, selon qu'on attacherait au mot *force* » l'idée d'une cause de translation, ou l'idée toute diffé- » rente d'une cause de rotation. » (*Théorie nouvelle de la rotation des corps*, chap. Ier, § VI, art. 20.)

C'est assurément là une chose très-remarquable au point de vue philosophique; ajoutons que cette analogie parfaite, dont nous verrons plus loin de nouvelles confirmations, n'existe pas seulement dans la doctrine. Car, si le mouvement le plus général d'un corps solide peut être attribué uniquement à de simples forces qui lui sont appliquées, il peut l'être aussi et identiquement à de pures rotations autour de divers axes, puisque le mouvement du corps se réduit toujours en dernière analyse, et quelle que soit l'idée qu'on se fait de la cause première du mouvement, à celui d'une vis qui se meut dans son écrou, fait remarquable qui se trouve également démontré par M. Poinsot, dans le bel ouvrage que j'ai déjà cité (art. 36 du chap. Ier).

La science des forces offre donc, à son tour, un exemple frappant de cette *loi de dualité* qui embrasse toute la géométrie, et dont on trouve la démonstration générale et complète dans le Mémoire qui fait suite à l'*Aperçu historique*.

Au reste, la dualité particulière que nous remarquons ici avait déjà été signalée dans la Note 34 de l'*Aperçu historique*, par M. Chasles, qui regarde « *le dualisme universel* comme étant la grande loi de la nature, et comme » régnant dans toutes les parties des connaissances de l'esprit humain, » et qui, après avoir énoncé quelques-uns des pricipaux théorèmes reproduits dans le présent Mémoire, faisait déjà pressentir « la possibilité de créer de » nouvelles doctrines dans la mécanique rationnelle, en » substituant dans les anciennes théories, pour ce qui regarde le mouvement général d'un corps, les mouvements » de rotation aux mouvements rectilignes, et pour ce qui » concerne les corps eux-mêmes, considérés comme partie » de l'étendue, les *plans* aux *points*, comme on peut le faire » dans la géométrie pure et dans la géométrie analytique. »

59. On conclut de ce qui précède que, de même que des forces, en nombre quelconque, peuvent toujours se réduire à deux forces non situées dans un même plan (*Statique* de Poinsot, 73), et cela d'une infinité de manières, de même des rotations autour de divers axes peuvent être remplacées, d'une infinité de manières, par deux rotations autour de deux axes différents.

Et ceci résulte d'ailleurs directement des théorèmes du présent chapitre. Car tant de rotations qu'on voudra donneront au corps, dans le premier instant, un déplacement infiniment petit, qu'on peut toujours considérer comme une rotation autour d'un certain axe X qui glisse dans sa propre direction. Or ce *glissement* n'est lui-même qu'une rotation infiniment petite autour d'un axe situé à l'infini dans un plan normal à l'axe X. Ainsi le mouvement des corps se réduit toujours à deux rotations simultanées autour de ces deux axes particuliers, qui peuvent, à leur tour, être remplacés, et d'une infinité de manières, par deux autres *axes conjugués* D, Δ. Ainsi

Les différentes propriétés relatives à deux axes conjugués de rotation D, Δ, *s'appliqueront aux systèmes de deux forces pouvant remplacer un autre système quelconque de forces.*

Aux deux axes particuliers X et ∞, dont nous venons de parler, correspondra le système particulier de deux forces, dont l'une, située à l'infini dans un plan perpendiculaire à la première, est infiniment petite, et, par suite, est un *couple* (voir *Statique*, 26, et *Mémoire sur les aires* de Poinsot), dont le plan est perpendiculaire à la première force, laquelle est précisément cet axe remarquable que M. Poinsot a nommé l'*axe central des moments*, « parce » qu'il est le seul qui n'ait absolument qu'une même position dans l'espace, et que, de plus, tous les axes qui ont » à son égard les positions semblables, donnent les mêmes » moments. »

60. Cette analogie donne lieu aux propositions suivantes :

1°. La droite qui mesure la plus courte distance des deux forces qui remplacent un système de forces données, rencontre toujours l'axe central des moments et lui est perpendiculaire;

2°. L'inclinaison de la seconde force sur l'axe central ne dépend que de la distance de la première à cet axe. Les tangentes des inclinaisons des deux forces sur l'axe sont entre elles comme les distances de ces forces à cet axe;

3°. Deux forces ainsi conjuguées, et deux autres forces d'un système équivalent, sont toujours quatre génératrices d'un même mode de génération d'un hyperboloïde à une nappe;

4°. Si les premières forces de plusieurs systèmes équivalents passent par un même point, toutes les secondes sont dans un même plan : celles-ci enveloppent une conique, si les premières (supposées toutes égales) forment la surface d'un cône du second degré; elles enveloppent un cercle situé dans un plan perpendiculaire à l'axe central, si les premières décrivent un cône droit ou un cylindre droit autour de cet axe; elles décrivent la surface d'un hyperboloïde de révolution autour de l'axe, si les premières décrivent une surface du même genre : les cercles de *gorge* de ces deux hyperboloïdes sont concentriques et situés dans un même plan, etc.;

5°. Si l'on joint, deux à deux, par des droites, les points où deux systèmes équivalents de deux forces rencontrent un plan quelconque, ces droites passeront toutes par un même point, et si l'on projette orthogonalement tous ces systèmes sur un plan quelconque, les projections des forces se couperont deux à deux sur une droite fixe de ce plan;

6°. Si l'on construit un parallélogramme sur les deux forces, ramenées à un même point, la diagonale sera parallèle à l'*axe central* et égale à la *résultante* des forces du système : *théorème évident* par la statique et qui pourrait servir, par conséquent, à démontrer celui des rotations, d'où nous le tirons ici;

7°. Le tétraèdre construit sur deux forces d'un même système prises pour arêtes opposées a un volume constant, quel que soit ce système, pourvu qu'il soit équivalent aux forces données, etc., etc.

61. Avant de passer au dernier paragraphe du chapitre, démontrons encore un théorème relatif à la composition des mouvements de rotation, qui se trouve énoncé dans la Note 34 déjà citée de l'*Aperçu historique*, page 414. Cette démonstration nous présentera un nouvel exemple du principe de dualité, et nous fournira l'occasion d'appliquer quelques-unes des *relations métriques* que nous avons données dans la deuxième section.

Supposons donc que les rotations d'un corps autour de divers axes appartiennent à des *plans* menés par ces axes, de même que l'on regarde les mouvements rectilignes imprimés à un corps, ou les forces qui sollicitent un corps, comme appliquées à l'un des *points* du corps qui se trouvent sur les directions de ces mouvements ou de ces forces.

Chacun de ces plans, pendant le mouvement réel du corps, aura tourné sur lui-même autour de sa caractéristique et autour de son foyer. Appelons ce mouvement autour de la caractéristique la *rotation effective* ou *virtuelle* du plan, et nous dirons que la rotation *partielle* du corps autour de l'axe contenu dans ce plan est la *rotation imprimée* au plan. La première sera désignée par ω, et la seconde par Ω. Ainsi la rotation *effective* d'un plan est le résultat de la combinaison de sa rotation *imprimée* avec les autres rotations imprimées à d'autres plans du corps.

Ces dénominations, qui sont tirées de la Note déjà citée, étant admises, on parvient au théorème suivant, que nous allons démontrer :

Théorème. — *Quand un corps solide est soumis à plusieurs rotations simultanées autour de divers axes, si par ces axes on conçoit menés des plans dans le corps, ces plans éprouveront les mouvements effectifs sur eux-mêmes.*

Si l'on fait le produit de la rotation effective de chaque plan par sa rotation imprimée et par le cosinus de l'angle que font entre eux les axes de ces deux rotations, la somme de ces produits sera une quantité constante, quels que soient les plans menés par les axes de rotation.

Cette quantité sera égale à la somme des carrés des rotations imprimées, plus le double de la somme des produits de ces rotations multipliées deux à deux et par le cosinus de l'angle que comprennent leurs axes.

Démonstration.—Avant de démontrer le théorème d'une manière générale, démontrons-le pour le cas de deux rotations conjuguées Ω, Ω', qui ont lieu autour des axes D, Δ, et auxquelles le système entier des rotations imprimées peut toujours être supposé réduit.

On a (56), quels que soient les plans menés par les axes D et Δ,

$$\omega.\cos(\omega, D) = \upsilon.\cos(D, X) \quad \text{et} \quad \omega'.\cos(\omega', \Delta) = \upsilon.\cos(\Delta, X).$$

Ω, Ω' étant les rotations imprimées, la somme des produits indiqués par le deuxième alinéa du théorème est

$$\Omega.\omega.\cos(\omega, D) + \Omega'.\omega'.\cos(\omega', \Delta),$$

et l'on voit, par les relations précédentes, que cette somme est égale à

$$\upsilon[\Omega.\cos(D, X) + \Omega'.\cos(\Delta, X)],$$

quantité constante. Remarquons encore que, d'après les formules des nos 43, 46, 47, on a

$$\Omega.\cos(D, X) = \frac{e\upsilon}{r\upsilon\,\text{tang}(D, X) + e},$$

$$\Omega'.\cos(\Delta, X) = \frac{r\upsilon^2}{r\upsilon + e\cot(D, X)}, \quad \text{tang}(D, X) = \frac{e}{\rho\upsilon};$$

donc

$$\Omega.\cos(D, X) + \Omega'\cos(\Delta, X) = \frac{\rho\upsilon}{r+\rho} + \frac{r\upsilon}{r+\rho} = \upsilon.$$

Ainsi la somme des deux produits est égale à υ^2. Or on a (45)

$$\upsilon^2 = \Omega^2 + \Omega'^2 + 2\,\Omega.\Omega'.\cos(D, \Delta);$$

donc le théorème est démontré pour ce cas particulier.

On pourrait dire encore que la constante a pour valeur la somme des carrés des deux rotations qui ont lieu, pour chaque plan, l'une autour de sa caractéristique et l'autre autour de son foyer, puisque cette somme est aussi égale à υ^2 (55).

62. En s'appuyant sur l'analogie qui existe entre les rotations et les systèmes de forces, on peut donner de ce théorème une démonstration plus prompte et qui a l'avantage

de s'appliquer, comme nous le verrons bientôt, à l'énoncé général. En effet, si Ω et Ω' sont considérés comme des forces appliquées dans le sens des axes de rotation D, Δ, chacun des produits $\Omega\cos(D, X)$ représente la projection de la force sur l'axe central, c'est-à-dire sur la direction même de la résultante; donc la somme de ces produits n'est autre chose que la résultante elle-même υ. Donc, etc.

Soient maintenant Ω, Ω', Ω'', etc., des rotations en nombre quelconque, imprimées autour des axes D, D', D'', etc., et soient ω, ω', ω'', etc., les rotations *effectives* de plans menés par ces axes. On aura, comme précédemment (56),

$$\omega.\cos(\omega, D) = \upsilon\cos(D, X),$$
$$\omega'.\cos(\omega', D') = \upsilon\cos D', X), \text{ etc.}$$

Donc

$$\Omega.\omega\cos(\omega, D) + \Omega'.\omega'\cos(\omega', D') + \Omega''.\omega''\cos(\omega'', D'') + \ldots$$
$$= \upsilon[\Omega.\cos(D, X] + \Omega'\cos(D', X) + \ldots] = \upsilon^2;$$

car la somme des termes compris dans la parenthèse est, comme plus haut, égale à υ.

Regardons ces relations comme des forces, et décomposons-les suivant trois axes coordonnés rectangulaires; elles fourniront, respectivement, les composantes :

$$\Omega\cos\alpha, \quad \Omega\cos\beta, \quad \Omega\cos\gamma;$$
$$\Omega'\cos\alpha', \quad \Omega'\cos\beta', \quad \Omega'\cos\gamma';$$
$$\Omega''\cos\alpha'', \quad \Omega''\cos\beta'', \quad \Omega''\cos'', \text{ etc.},$$

et l'on aura, pour l'expression du carré υ^2 de la résultante de ces forces, l'équation

$$\begin{aligned}\upsilon^2 = &(\Omega\cos\alpha + \Omega'\cos\alpha' + \Omega''\cos\alpha'' + \ldots)^2\\ &+ (\Omega\cos\beta + \Omega'\cos\beta' + \Omega''\cos\beta'' + \ldots)^2\\ &+ (\Omega\cos\gamma + \Omega'\cos\gamma' + \Omega''\cos\gamma'' + \ldots)^2.\end{aligned}$$

Développant les carrés, et remarquant qu'on a

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$
$$\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' = 1, \text{ etc.},$$

et

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = \cos(\Omega, \Omega'),$$

et ainsi pour les autres sommes semblables, on arrive à l'équation suivante qui démontre la dernière partie du théorème :

$$\begin{aligned} v^2 = {} & \Omega^2 + \Omega'^2 + \Omega''^2 + \ldots \\ & + 2[\Omega.\Omega' \cos(\Omega, \Omega') + \Omega.\Omega'' \cos(\Omega, \Omega'') \\ & + \Omega'.\Omega'' \cos(\Omega' \Omega'') + \ldots]. \end{aligned}$$

Sur le principe des vitesses virtuelles.

63. « L'analogie qui a lieu entre un système de forces » sollicitant un corps solide libre et les rotations qui pro- » duisent un déplacement infiniment petit du corps, con- » duit naturellement à une démonstration du principe des » vitesses virtuelles, qui montre comment la considération » du mouvement et de l'infini (*) dans ce principe corres- » pond à des considérations purement statiques.

» Soient P, P′, etc., les forces qui sollicitent un corps » solide libre et qui se font équilibre. Soient Q, Q′, etc., » d'autres forces quelconques. Considérons chaque force P » et chaque force Q comme arêtes opposées d'un tétraèdre; » et représentons par Σ. tétr. (P, Q) la somme des volumes » de ces tétraèdres. Cette somme conservera la même va- » leur (60, 7°), si à chacun des deux systèmes P, P, etc., » et Q, Q′, etc., on substitue un autre système de forces » équivalent; et, par conséquent, cette somme sera nulle; » car les forces P, P′, etc., peuvent être remplacées par » deux forces égales et directement opposées qui donneront » lieu à deux sommes de tétraèdres égales et de signes con- » traires. Réciproquement, si la somme des tétr. (P, Q)

(*) On sait d'ailleurs que ce principe peut s'énoncer sans qu'il soit question de ces mouvements infiniment petits qui lui font perdre une partie de sa clarté. (Voir la Note II du beau Mémoire de M. Poinsot, *sur l'équilibre et le mouvement des systèmes.*)

» est nulle, quel que soit le système des forces Q, Q′, etc.,
» on voit aisément que nécessairement les forces P, P′, etc.,
» se font équilibre.

» Ainsi *la condition d'équilibre des forces* P, P′, etc.,
» *s'exprime par*

$$\Sigma.\text{tétr.}(P, Q) = 0,$$

» Q, Q′, etc., *formant un système de forces pris arbitrairement*. Soit r la plus courte distance des deux forces P
» et Q; l'équation devient (48, Note)

$$\Sigma.P.Qr\sin(P, Q) = 0.$$

» Supposons que toutes les forces Q, Q′, etc., aient été
» remplacées par deux seules, dont l'une dirigée suivant
» la force P; et soit Q l'autre force. La somme des té-
» traèdres où entre P sera égale simplement à tétr. (P, q), ou
» $P.qr\sin(P, q)$. » Or $qr\sin(P, q)$ est la projection sur un plan perpendiculaire à la force P, du moment de la force q par rapport à un point de la force P. Si donc on suppose que les forces Q, Q′, etc., soient, en direction, les axes de rotations proportionnelles à ces forces, le moment relatif à un point de la force P sera égal (57) à l'élément rectiligne que ces rotations feront décrire à ce point. Soit p cet élément rectiligne; la somme des tétraèdres où entre la force P sera donc égale à $Pp\cos(P, p)$, à cause de

$$(P, p) = 90^\circ - (P, q).$$

Pour chacune des autres forces P′..., on aura une somme semblable; de sorte que l'équation d'équilibre deviendra

$$\Sigma.P.p\cos(P, p) = 0.$$

C'est l'équation des vitesses virtuelles.

Ainsi, dans ce principe des vitesses vituelles, *les éléments rectilignes qu'on appelle les vitesses virtuelles expriment les moments principaux d'un autre système de* *forces par rapport aux points d'application des forces proposées.*

64. On peut exprimer d'une manière semblable l'équilibre d'un système de rotations qui solliciteraient un corps. Car ces rotations ayant, par hypothèse, une résultante nulle, la somme des produits

$$\Omega \cos(D, X) + \Omega' \cos(D', X) + \Omega'' \cos(D'', X)$$

du n° 62 est nulle. Or cette somme est égale à

$$\Sigma . \Omega . \omega \cos(\omega, D) \quad (60).$$

Ainsi, l'équation d'équilibre est

$$\Sigma . \Omega . \omega \cos(\omega, D) = o,$$

équation semblable à la précédente et qui exprime le théorème suivant, si l'on se reporte aux définitions du n° 61 :

Théorème des rotations virtuelles. — *Quand différents plans d'un corps solide sont soumis à des rotations autour de différents axes contenus dans ces plans; pour que ces rotations se fassent équilibre, il faut que si l'on donne au corps un mouvement infiniment petit quelconque, et qu'on fasse, pour chaque plan, le produit de sa rotation imprimée par sa rotation virtuelle projetée sur l'axe de la première, il faut et il suffit que la somme de tous ces produits soit égale à zéro.* (*Aperçu historique*, page 414.)

65. Autre équation d'équilibre d'un système de forces. « Si » l'on conçoit que le corps auquel sont appliquées les forces » P, P', etc., qui se font équilibre, éprouve un mouvement » infiniment petit, il aura une certaine rotation autour de » chacune de ces forces; cette rotation sera en raison in- » verse de la projection de la trajectoire d'un point quel- » conque de cette force sur cette force (à cause de l'équa- » tion $\Omega . p =$ const. du n° 48). Soient donc θ, θ', etc., les

» rotations autour des forces P, P′, etc.; l'équation des vi-
» tesses virtuelles s'exprimera par l'équation

$$\Sigma . \frac{P}{\theta} = 0. »$$

Ainsi nous dirons que :

Quand plusieurs forces qui sont appliquées à un corps solide libre se font équilibre, si l'on donne au corps un mouvement infiniment petit, par suite duquel il éprouvera une rotation autour de chacune de ces forces, la somme de ces forces divisées par ces rotations, respectivement, est nulle; et réciproquement, si cette somme est nulle, quel que soit le mouvement infiniment petit du corps, les forces se feront équilibre.

Ainsi l'équilibre d'un système de forces s'exprime par la considération des rotations du corps autour de ces forces, de même que par la considération des éléments rectilignes décrits par des points de ces forces.

CHAPITRE II.

SUR LES ARCS D'UNE SECTION CONIQUE DONT LA DIFFÉRENCE EST RECTIFIABLE. PROPRIÉTÉS DES ARCS ÉGAUX DE LA LEMNISCATE (*).

SECTION Ire.

DES ARCS ASSOCIÉS.

1. On appelle *arcs associés* ou *arcs semblables* sur une section conique les arcs dont la différence est assignable en ligne droite. L'*angle circonscrit* à un arc est l'angle formé par les deux tangentes menées par les extrémités de l'arc; les *côtés* de l'angle sont les longueurs de ces tangentes comptées depuis les points de contact jusqu'à leur point de rencontre au sommet de l'angle.

Les arcs associés donnent lieu à plusieurs propositions importantes qui ont été énoncées dans un Mémoire inséré aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (séance du 23 octobre 1843).

Je me propose, dans ce chapitre, de donner la démonstration géométrique de ces divers théorèmes, qui fournissent l'occasion de faire des applications variées des théories de la *Géométrie supérieure*.

2. THÉORÈME I. — *Deux arcs associés d'une section conique ont toujours les sommets de leurs angles circonscrits situés sur une seconde conique décrite des mêmes foyers que la première; et la différence des deux arcs est*

(*) Au sujet des communications faites par M. Chasles à l'Académie des Sciences, dans les séances des 23 octobre 1843 et 21 juillet 1845.

égale à la somme des côtés de l'angle circonscrit au premier, moins la somme des côtés de l'angle circonscrit au second.

Démonstration. — Commençons par démontrer la proposition réciproque. Soient (*fig.* 7, *Pl. I*) deux coniques décrites des mêmes foyers F et F′, MNm et SVs deux angles circonscrits à la conique intérieure et qui ont leurs sommets sur la seconde; il faut prouver que les arcs interceptés Mm, Ss ont leur différence rectifiable. Soit encore M′ le point de la conique qui est infiniment voisin de M, en allant vers l'extrémité s du second arc. Menons la tangente MM′ qui coupe la deuxième conique au point N′ infiniment voisin de N (en allant vers V), et enfin menons la tangente N′m' qui touche la première courbe au point m' infiniment voisin de m. Des points M et m' comme centres, décrivons les arcs de cercle NP, N′P′. On a évidemment

$$M'N' = MP - MM' + PN' = MN - MM' + PN',$$

et de même,

$$m'N' = mN + mm' - P'N,$$

d'où

$$(MN + mN) - (M'N' + m'N') + (PN' - P'N) = MM' - mm'.$$

Les triangles rectangles infiniment petits NPN′, NP′N′ ont la même hypoténuse NN′, et, de plus, un angle aigu égal. En effet, d'après un théorème de M. Poncelet, qui est cité à la page 7 du Mémoire, et que nous démontrerons plus loin, on a

$$\text{angle } FN'm = \text{angle } F'Nm'.$$

Mais on a aussi dans la conique homofocale NV,

$$\text{angle } FN'L = \text{angle } F'NL',$$

puisque LNN′L′ est la tangente au point (N, N′); donc

$$FN'L - FN'M = PN'N = F'NL' - F'Nm' = P'NN'.$$

Donc, enfin, les triangles sont égaux, aux infiniment petits du second ordre près, et ils donnent

$$PN' = P'N,$$

Donc on a, en désignant respectivement par T, t, T′, t', les tangentes MN, mN, M′N′, m'N′, la relation

$$(T + t) - (T' + t') = MM' - mm';$$

pour un autre point M″ infiniment voisin de M′, on aurait

$$(T' + t') - (T'' + t'') = M'M'' - m'm'',$$

et en continuant de proche en proche jusqu'au point S, dont nous désignerons les tangentes SV et sV par T_n, t_n,

$$(T'' + t'') - (T''' + t''') = M''M''' - m''m'',$$

. . . .

$$(T_{n-1} + t_{n-1}s) - (T_n + t_n) = M_{n-1}s - m_{n-1}s.$$

Faisant la somme de toutes ces équations, il vient

$$(T + t) - (T_n + t_n) = MS - ms = Mm - Ss.$$

C. Q. F. D.

Passons maintenant au théorème lui-même. Les arcs Mm, Ss, ont, par hypothèse, leur différence assignable en ligne droite, c'est-à-dire qu'en désignant par D une certaine droite, on a

$$Mm - Ss = D.$$

Par le point N, faisons passer une conique homofocale à la conique MSms; si elle ne passait pas aussi par le point V, elle couperait SV en un certain point V′, et, en menant la tangente V′s', on aurait, par la démonstration qui précède,

$$(MN + mN) - (SV' + s'V') = D' = \text{arc}\, Mm - \text{arc}\, Ss';$$

D′ étant une autre droite. De ces deux relations, on déduit

$$\text{arc}\, Ss' - \text{arc}\, Ss = D - D' = \delta, \quad \text{ou} \quad \text{arc}\, ss' = \delta;$$

on pourrait donc *rectifier* l'arc elliptique ss', ce qu'on sait être impossible. Donc le point s' se confond avec le point s, et, par suite, le point V′ avec le point V. Donc, etc.,

3. On pourrait croire, au premier abord, que l'arc ss' est rectifiable, comme étant la *différence* de deux arcs d'ellipse, *qui pourraient être associés*, et il en résulte que la fin de la dernière démonstration semble manquer de force et de justesse; mais cette difficulté n'est qu'apparente : car il est visible, d'après la construction même, que les tangentes Vs, V′s' sont menées *du même côté* de la courbe, et, par conséquent, que les arcs ms et ms' sont dirigés *dans le même sens*. Or, si deux arcs associés peuvent avoir une extrémité commune, comme nous le verrons dans un instant, *ils sont toujours dirigés en sens contraire l'un de l'autre à partir de cette origine*, et ils ne peuvent jamais se superposer. Donc, s'il en est autrement, c'est-à-dire si leur différence donne un arc même de l'ellipse, c'est une preuve qu'ils ne sont pas associés. Et ceci résulte d'ailleurs immédiatement du principe fondamental de toute cette théorie, savoir, qu'un arc d'ellipse ne peut pas être assigné en ligne droite.

4. La *fig.* 7, sur laquelle les raisonnements qui précèdent sont établis, représente deux ellipses homofocales; mais comme le théorème de M. Poncelet, sur lequel il repose, est également vrai pour l'hyperbole et la parabole, la démonstration est générale pour les trois courbes : on doit seulement ajouter que, si les deux coniques sont deux hyperboles, il ne peut être question que des tangentes menées par des points de l'une des branches de l'extérieure à la branche de l'intérieure qui s'ouvre du même côté; et si ce sont deux paraboles, il faut aussi qu'elles s'ouvrent du même côté.

5. Théorème II (troisième du Mémoire). — *Quand deux arcs associés ont une extrémité commune, leur diffé-*

rence est égale à la différence entre les tangentes menées par les deux autres extrémités et terminées à leur point de concours.

Par ce point et l'extrémité commune des deux arcs, on peut faire passer une conique homofocale à la proposée.

Démonstration. — Prouvons d'abord la proposition réciproque, ainsi que nous l'avons fait dans le premier théorème; supposons que la conique proposée soit l'ellipse aOb de la *fig.* 7, et que la conique homofocale soit l'hyperbole CHI.

Soient I un point de l'hyperbole; IG, Is deux tangentes menées à l'ellipse par ce point, et H le point d'intersection des deux coniques, intermédiaire aux points de contact G, s. Il s'agit de prouver qu'on a

$$\text{arc}\,\mathrm{HG} - \text{arc}\,\mathrm{H}s = \mathrm{IG} - \mathrm{I}s.$$

Raisonnons comme dans le premier théorème.

Si l'on prend sur l'hyperbole, de I vers H, un autre sommet d'angle circonscrit I′ infiniment voisin de I (on n'a pas indiqué ces points pour ne pas surcharger la figure), et qu'on mène les tangentes $\mathrm{I}'\gamma$, $\mathrm{I}'\sigma$ qui déterminent sur l'ellipse deux points de contact γ et σ, infiniment voisins de G et de s et compris tous deux entre ces points en allant de chacun d'eux vers le point H, on verra sans peine (en prenant le même tour de démonstration que dans le théorème I, et en s'appuyant encore sur le théorème de M. Poncelet), qu'on obtient la suite d'égalités

$$(\mathrm{T}-t)-(\mathrm{T}'-t') = \mathrm{G}\gamma - s\sigma,$$
$$(\mathrm{T}'-t')-(\mathrm{T}''-t'') = \gamma\gamma' - \sigma\sigma',$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(\mathrm{T}_{n-1}-t_{n-1})-(\mathrm{T}_n-t_n) = \gamma_{n-1}\gamma_n - \sigma_{n-1}\sigma_n,$$

desquelles on tire, par l'addition,

$$(\mathrm{T}-t)-(\mathrm{T}_n-t_n) = \mathrm{G}\gamma_n - s\sigma_n,$$

c'est-à-dire une équation analogue à celle qu'on a déjà trouvée pour des coniques de même espèce, mais dans laquelle on fait la *différence* des côtés de chaque angle circonscrit, au lieu d'en faire la *somme*.

Actuellement, supposons que le point I marche, de proche en proche, jusqu'en H. La dernière différence $(T_n - t_n)$ sera nulle, puisqu'au point H on a

$$T_n = 0 \quad \text{et} \quad t_n = 0.$$

Donc enfin

$$(T - t) = GH - sK;$$

ce qu'il fallait d'abord démontrer.

Cette démonstration s'applique naturellement aux deux arcs d'hyperbole interceptés entre deux tangentes menées par un point d'une ellipse homofocale, et comptés à partir du point d'intersection H des deux courbes. On verra sans difficulté qu'elle convient également au cas de deux paraboles inversement placées.

Démontrons maintenant le théorème tel qu'il est énoncé plus haut.

Il s'agit de prouver que l'extrémité commune H de deux arcs associés HG, Hs et le sommet I de l'angle circonscrit GIs sont sur une même conique homofocale, qui sera une hyperbole dans le cas de la figure.

Par le point H, faisons passer une hyperbole homofocale à l'ellipse aOb; je dis que cette courbe passera aussi en I. En effet, supposons que cela n'ait pas lieu; elle coupera la tangente GI en quelque point I par lequel nous mènerons la tangente *is' du même côté* que Is. On vient de démontrer qu'on aurait alors

$$Gi - is' = HG - Hs',$$

ou bien

$$HG - Hs' = D',$$

D' étant une certaine droite. Mais on a, par hypothèse,

$$HG - Hs = D,$$

D étant une autre droite. Donc

$$\mathrm{H}s - \mathrm{H}s' = \mathrm{arc}\, ss' = \delta,$$

ce qui est absurde, puisqu'il en résulterait qu'on pourrait assigner en ligne droite δ l'arc d'ellipse ss'; donc les points I, i se confondent et le théorème est complétement démontré.

6. On voit sur la figure que, si deux arcs associés, de même origine, HG, Hs, peuvent résulter de l'angle circonscrit GIs, on peut aussi les obtenir au moyen de deux angles qui s'appuient en V et R sur une ellipse homofocale à l'ellipse proposée. Tels sont les arcs Ss et SG. Mais cela n'empêche pas l'hyperbole homofocale de passer à la fois par les points S et I, car, si l'on mène le diamètre SOH, on a

$$\mathrm{HG} - \mathrm{H}s = \mathrm{S}s - \mathrm{SG}.$$

Ces arcs associés *supplémentaires* ont donc la même différence. Or il a été démontré que les points H et I sont sur une hyperbole homofocale; donc l'extrémité S du diamètre HS s'y trouve aussi, mais sur une branche différente.

Par le point P, où l'asymptote oP rencontre l'ellipse, menons la tangente PK à l'hyperbole. On a, par le théorème II,

$$\mathrm{arc\,H}\infty - \mathrm{arc\,HK} = \mathrm{P}\infty - \mathrm{PK},$$

d'où

$$\mathrm{arc\,H}\infty - \mathrm{P}\infty = \mathrm{arc\,HK} - \mathrm{PK}.$$

Donc la différence entre l'arc infini de la courbe et l'asymptote, aussi infinie, est une quantité finie qui s'exprime, à une droite près, par un arc de la courbe, et, par suite, ne peut être assignée en ligne droite. Il est évident que cette proposition est vraie pour tous les points H de l'hyperbole, car on pourra toujours faire passer une ellipse homofocale par ce point, quel qu'il soit. Donc, etc.

7. Passons actuellement à quelques constructions qui dérivent naturellement des deux théorèmes démontrés ci-dessus.

1°. Si l'on demande de déterminer sur une conique, à partir d'un point donné, un arc associé à un arc donné, il suffit de faire passer une conique homofocale, *de même espèce*, par le sommet de l'angle circonscrit à l'arc donné. Le point où cette conique coupe la tangente menée par le point donné est le sommet de l'arc circonscrit à l'arc cherché.

2°. En répétant plusieurs fois la même construction bout à bout, on arrive à former un arc multiple, à une droite près, d'un arc donné.

3°. Puisqu'on peut passer d'un arc donné à un arc multiple, à une droite près, par de simples constructions géométriques qui peuvent se traduire en formules algébriques, il est clair que, réciproquement, la construction d'un arc sous-multiple, à une droite près d'un arc donné, *dépend de* la résolution d'une équation *algébrique*.

4°. Un arc étant donné, si l'on veut déterminer un arc associé dont l'angle circonscrit ait son sommet sur une courbe donnée, on voit qu'il suffira de prendre pour ce sommet l'un des points d'intersection de cette courbe avec la conique homofocale qui passe par le sommet de l'angle circonscrit à l'arc donné.

5°. Si l'on veut que cet angle soit de grandeur donnée, on prendra l'un des points d'intersection de la conique homofocale avec la courbe lieu géométrique des points d'où l'on voit la conique proposée sous l'angle donné. Cette courbe est du quatrième degré; on a donc huit solutions différentes de la question.

6°. Les cordes des angles circonscrits à la proposée sont tangentes à une troisième conique, polaire de celle que parcourt le sommet de ces angles. (*Voir* le *Traité* de

M. Poncelet, page 278.) Donc, si l'on demande que la corde de l'arc associé cherché passe par un point donné, ou soit tangente à une courbe, il suffira de mener par ce point, ou tangentiellement à la courbe, une tangente à cette conique polaire; ce sera la corde cherchée.

7°. Si l'on veut que cette corde soit de longueur donnée, on prendra l'une des tangentes communes à cette conique polaire et à la courbe enveloppe des cordes égales à la longueur donnée dans la conique homofocale de la proposée.

8°. Enfin le théorème II donne un moyen évident de diviser un arc donné en deux parties dont la différence soit rectifiable.

8. Théorème III (deuxième du Mémoire). — *De quelque manière que soient pris sur une conique deux arcs associés, les tangentes menées par leurs extrémités forment un quadrilatère circonscriptible au cercle.*

Ce théorème résulte très-simplement de ce qui précède. En effet, soient (*fig.* 8) ab, $a'b'$ les deux arcs. Les quatre tangentes aM, bM, a'N, b'N donnent lieu à six points d'intersection, dont quatre (les seuls qu'il nous soit utile de considérer ici) sont situés sur deux coniques différentes d'espèce l'une de l'autre et homofocales à la proposée. Ainsi, dans la figure, les points M et N, qui sont les sommets des angles circonscrits aux arcs donnés, sont sur une ellipse homofocale à l'ellipse donnée, et les points X et Y, qui correspondent aux deux arcs ab', $a'b$, sont sur une hyperbole homofocale qui coupe en i l'une des moitiés de l'ellipse sur laquelle sont pris les arcs associés.

Le théorème I donne la relation

$$ab - a'b' = (\mathrm{M}a + \mathrm{M}b) - (\mathrm{N}a' + \mathrm{N}b').$$

Or on a

$$ab - a'b' = (ai + ib) - (a'i + ib') = (ia - ib') - (ia' - ib).$$

Actuellement, le théorème II donne les deux relations

$$ia - ib' = \mathrm{X}a - \mathrm{X}b' \quad \text{et} \quad ia' - ib = \mathrm{Y}a' - \mathrm{Y}b.$$

Donc on a

$$(\mathrm{M}a + \mathrm{M}b) - (\mathrm{N}a' + \mathrm{N}b') = (\mathrm{X}a - \mathrm{X}b') - (\mathrm{Y}a' - \mathrm{Y}b),$$

d'où l'on tire, en supprimant les lignes communes,

$$\mathrm{MY} + \mathrm{NX} = \mathrm{MX} + \mathrm{NY},$$

ce qui prouve que le quadrilatère MXNY est circonscriptible au cercle.

9. Il est facile de voir que, réciproquement, si l'on a sur un plan un cercle et une conique, et qu'on trace les tangentes communes à ces deux courbes, ces tangentes forment un quadrilatère ACBD, dont deux sommets opposés A et B sont situés sur une deuxième conique homofocale à la proposée ; les deux autres sommets C et D sont situés aussi sur une troisième conique homofocale, et de *même espèce* que la proposée; enfin les deux points de concours E et F des côtés opposés sont également situés sur une quatrième conique homofocale, d'*espèce différente*. Et il résulte de là, en vertu du théorème I, que les quatre tangentes communes à un cercle et à une conique déterminent sur la conique deux *arcs associés*.

10. On peut demander quelle est la relation qui a lieu entre les arcs déterminés sur le cercle, comme sur la conique, par les quatre tangentes communes aux deux courbes. Cette relation se trouve comprise dans le théorème suivant :

Si l'on décrit une ellipse dans le plan d'une section conique quelconque A, et qu'on mène les quatre tangentes communes aux deux courbes, les points de contact marqueront sur la conique A deux arcs qui jouissent de cette propriété, que la somme des éléments du premier divisés *respectivement par les demi-diamètres de l'ellipse qui sont parallèles aux directions de ces éléments, moins la somme des éléments du second divisés respectivement par les demi-diamètres qui leur sont parallèles, forment deux intégrales dont la différence s'exprime algébriquement.*

En effet, soient (*fig.* 7) Mm et Ss deux arcs de la conique interceptés par les tangentes communes à cette conique et à un cercle, dont le centre se trouve au point de concours T des tangentes en N et en V; les arcs Mm et Ss sont *associés*, et leur différence est égale à

$$(\mathrm{NM} + \mathrm{N}m) - (\mathrm{VS} + \mathrm{V}s);$$

cette différence est aussi celle des deux arcs MS et ms. Soient $\mathrm{M}\alpha$, $\alpha\alpha'$, $\alpha'\alpha''$, . . ., $\alpha_n\mathrm{S}$ les arcs élémentaires, dont la somme forme l'arc MS, et R, r, r', r'', etc., les rayons du cercle qui sont parallèles respectivement à ces éléments. Soient également $m\beta$, $\beta\beta'$, $\beta'\beta''$, . . ., $\beta_n s$ et R$'$, ρ, ρ', ρ'', ρ''', etc., les éléments de l'arc ms et les rayons du cercle qui leur sont parallèles respectivement. La relation qui existe entre les deux arcs peut s'écrire comme il suit, puisque tous les rayons du cercle sont égaux entre eux :

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\mathrm{M}\alpha}{\mathrm{R}} + \frac{\alpha\alpha'}{r} + \frac{\alpha'\alpha''}{r'} + \ldots + \frac{\alpha_n\mathrm{S}}{r_n}\right)\\ &-\left(\frac{m\beta}{\mathrm{R}'} + \frac{\beta\beta'}{\rho} + \frac{\beta'\beta''}{\rho'} + \ldots + \frac{\beta_n s}{\rho_n}\right)\\ &= \left(\frac{\mathrm{NM}}{\mathrm{R}} + \frac{\mathrm{N}m}{\mathrm{R}'}\right) - \left(\frac{\mathrm{VS}}{r_n} + \frac{\mathrm{V}s}{\rho_n}\right).\end{aligned}$$

Actuellement, faisons une déformation homographique de la figure, de manière que la droite à l'infini reste à l'infini (*Géométrie supérieure*, n^{os} 534 et suiv.); au cercle correspondra une ellipse concentrique, et aux rayons R, r, etc., R$'$, ρ, etc., correspondront les demi-diamètres D, d, d', etc., D$'$, δ, δ', etc., de cette ellipse, parallèles respectivement aux éléments $\mathrm{M}\mu$, $\mu\mu'$, etc., $m\sigma$, $\sigma\sigma'$, $\sigma'\sigma''$, etc., de la conique A qui sera l'homologue de la conique donnée. D'après le théorème du n° 536 de la *Géométrie supérieure*, on aura

$$\frac{\mathrm{M}\alpha}{\mathrm{R}}=\frac{\mathrm{M}\mu}{\mathrm{D}},\quad \frac{m\beta}{\mathrm{R}'}=\frac{m\sigma}{\mathrm{D}'},\ \text{etc.},$$

et l'équation ci-dessus deviendra

$$\left(\frac{\mathrm{M}\mu}{\mathrm{D}}+\frac{\mu\mu'}{d}+\frac{\mu'\mu''}{d'}+\ldots+\frac{\mu_n s}{d_n}\right)$$
$$-\left(\frac{m\sigma}{\mathrm{D}'}+\frac{\sigma\sigma'}{\delta}+\ldots+\frac{\sigma_n s}{\delta_n}\right)=\left(\frac{\mathrm{NM}}{\mathrm{D}}+\frac{\mathrm{N}m}{\mathrm{D}'}\right)-\left(\frac{\mathrm{VS}}{d_n}+\frac{\mathrm{V}s}{\delta_n}\right).$$

Le second membre est une quantité qui s'exprime algébriquement, et le premier est égal à

$$\int\frac{\mathrm{M}\mu}{\mathrm{D}}-\int\frac{m\sigma}{\mathrm{D}'}.$$

Donc le théorème est démontré.

11. Le théorème III offre un moyen très-simple de déterminer, à partir d'un point donné, sur une conique, un arc associé à un arc donné; car il suffit d'inscrire un cercle dans le triangle formé par les trois tangentes menées aux trois points donnés sur la conique, et de tracer ensuite la quatrième tangente commune aux deux courbes : son point de contact sur la conique est précisément l'extrémité de l'arc cherché.

12. Quand les deux arcs associés ont une extrémité commune, deux des quatre tangentes, qui formaient le quadrilatère circonscriptible du théorème précédent, se confondent en une seule; le cercle, qui ne cesse jamais d'être tangent à ces quatre droites, est alors tangent à cette tangente, qui en représente deux, et il est tangent au point de cette tangente qui est l'extrémité commune des deux arcs. Ainsi on a ce nouveau théorème, qui est le quatrième du Mémoire de M. Chasles :

THÉORÈME IV. — *Quand deux arcs associés ont une extrémité commune, dans l'angle formé par les tangentes menées par leurs deux autres extrémités, on peut inscrire un cercle qui touche la conique au point commun des deux arcs.*

Et réciproquement :

Quand un cercle est tangent à une conique en un point quelconque, les deux tangentes communes à ces deux courbes déterminent, sur la conique, deux arcs compris entre leurs points de contact et le point de contact du cercle, qui ont leur différence rectifiable; et cette différence est égale à la différence des deux tangentes.

Corollaire. — Soit b l'extrémité commune des deux arcs associés ab, $a'b'$; les sommets A, A′ des angles circonscrits à ces arcs sont, comme nous l'avons vu, situés sur une conique homofocale à la conique aba' sur laquelle sont pris les deux arcs, et le théorème IV prouve qu'on peut décrire un cercle tangent à la conique au point b, et tangent en même temps aux deux côtés Aa, A′a'. Le centre de ce cercle se trouve, comme dans le cas général, au point de rencontre M des tangentes AM, A′M, menées en A et A′ à la conique AA′, lesquelles sont les bissectrices des angles extérieurs A′AB, AA′B′. Or bM est la normale à la conique proposée en son point b. Donc *la normale au point de contact du côté* AA′ *et les bissectrices des angles* BAA′, B′A′A, *concourent toutes les trois en un même point.*

Ce théorème nous sera utile plus loin pour démontrer les propriétés de *minimum* des portions de polygones inscrites à une conique et circonscrites à une seconde conique homofocale.

13. La démonstration élémentaire que j'ai donnée du théorème III serait suffisante si je n'avais pour but que de justifier les énoncés de M. Chasles. Mais je veux encore mon-

trer qu'on peut arriver aux mêmes résultats en s'appuyant sur quelques propositions de la *Géométrie supérieure*. Si la marche que je vais suivre est moins prompte que la précédente, elle aura l'avantage particulier de mettre sur la voie de plusieurs autres propositions concernant les coniques homofocales, et d'indiquer, par quelques exemples, de quelle extension sont susceptibles certains théorèmes de la *Géométrie supérieure*, lesquels peuvent sembler, au premier abord, fort étrangers à ce sujet.

14. Le théorème III serait évidemment démontré si l'on prouvait que *les côtés de deux angles circonscrits à une conique forment un quadrilatère circonscriptible au cercle, toutes les fois que leurs sommets sont situés sur une seconde conique biconfocale à la première.*

C'est donc cette dernière proposition qu'il s'agit d'établir. Deux moyens se présentent pour cela; l'un direct, en s'appuyant sur les principes mêmes de la *Géométrie supérieure;* l'autre indirect, en ce sens qu'il repose sur la méthode de transformation par polaires réciproques. Je vais d'abord exposer celui-ci qui fournit un exemple intéressant de l'application de cette méthode. J'exposerai ensuite l'autre moyen.

15. Établissons d'abord les éléments de cette transformation, et supposons qu'il s'agisse de *transformer* une conique quelconque, en prenant pour conique auxiliaire un cercle dont le centre se trouve placé en l'un, F, des foyers de la conique donnée.

A ce foyer F et à la directrice L qui lui est relative, correspondent, dans la figure polaire, l'infini et un point l situé sur l'axe A de la conique. L'autre foyer F′ et le petit axe, ou axe transverse B, ont pour réciproques une droite f', perpendiculaire en φ' à l'axe A, et un point b de cet axe. Soit C le centre de la conique donnée; on a la proportion harmonique

$$\frac{\infty F}{\infty F'} = -\frac{CF}{CF'},$$

et, par conséquent (*Géométrie supérieure*, n° 585), la même proportion existe entre les quatre droites parallèles de la figure polaire, ou, ce qui revient au même, entre les quatre points où elles coupent l'axe A. Ces quatre points sont

$$F,\ \infty,\ \varphi' \ \text{ et } \ b,$$

et ils répondent respectivement aux quatre premiers points,

$$\infty,\ F,\ F' \ \text{ et } \ C.$$

On a donc

$$\frac{F\infty}{F\varphi'} = -\frac{b\infty}{b\varphi'}, \quad \text{ou} \quad \frac{F\infty}{b\infty} = -\frac{F\varphi'}{b\varphi'},$$

d'où l'on tire

$$F\varphi' = -b\varphi'.$$

Ainsi, en premier lieu, la droite corrélative du second foyer F' *divise en deux parties égales la distance du point* F *au point* b.

Par le foyer F, menons une transversale quelconque qui coupe la conique aux points m et n; les tangentes en ces points se coupent en i sur la directrice L, et si l'on mène la droite Fi, qui coupe la conique en m' et n', cette droite est perpendiculaire à la transversale mFn, et lui est *conjuguée*, c'est-à-dire que les tangentes en m' et n' vont se couper au point i' où la transversale rencontre la directrice. Ce sont là des propriétés bien connues du foyer des sections coniques, et qu'il serait d'ailleurs facile de déduire de certains théorèmes démontrés dans la *Géométrie supérieure*.

Examinons ce que deviennent, dans la figure polaire, les constructions précédentes. Un point de la droite à l'infini correspond à la transversale; deux tangentes, parallèles entre elles, M, N issues de ce point, et deux points de contact μ et ν sur la conique corrélative, correspondent respectivement aux deux points m et n et aux deux tangentes mi, ni; et puisque ces tangentes se coupent en i sur la directrice, la corde, ou plutôt le diamètre $\mu\nu$, passe par le point fixe l, qui est ainsi le *centre* de la conique corrélative. Démontrons enfin que cette conique est un cercle. Le point I de l'infini qui répond à la corde mn, étant le *pôle* de cette corde dans le cercle auxiliaire, se trouve sur la droite Fi perpendiculaire à mn; donc le diamètre D conjugué au diamètre $\mu\nu$ est parallèle à Fi; et, de même, le diamètre D$'$ conjugué au diamètre $\mu'\nu'$ est parallèle à Fi'. Mais ces deux diamètres D, D$'$ sont *conjugués* par rapport à la conique réciproque, parce que les points correspondants i, i' sont conjugués par rapport à la conique donnée; et, de plus, ils sont rectangulaires, comme les droites Fi', Fi auxquelles ils sont parallèles. Donc la conique qui a son centre au point l est un cercle.

Ceci résulte d'ailleurs directement de ce que, dans ce mode de transformation, « l'angle de deux droites, dans » une figure, est égal à l'angle des rayons menés d'un point » fixe aux deux points qui correspondent à ces droites dans » la figure polaire » (*Géométrie supérieure*, n° 640). Mais il était bon de faire voir la chose d'une autre manière qui indique quel est le point fixe qui jouit de cette propriété remarquable.

Ainsi toute conique qui a son foyer au centre du cercle *directeur* se transforme en un cercle qui a son centre au pôle de la directrice.

16. En reprenant les mêmes raisonnements en sens inverse, on démontrerait sans peine que, réciproquement,

Tout cercle de la figure donnée se transforme en une conique, dont le foyer est au centre du cercle directeur, et qui a pour directrice la polaire réciproque de son centre.

Supposons enfin qu'on ait à transformer, dans les mêmes conditions, deux coniques biconfocales. Les deux coniques E, E', donnent lieu à deux cercles C, C', dont les centres, qui correspondent aux deux directrices relatives au foyer F (centre de la transformation polaire), sont situés sur l'axe qui joint les foyers des coniques. A ces deux foyers F, F', qui sont des centres d'homologie ou des points de concours des tangentes communes aux deux coniques, correspondent les deux droites de jonction des points de rencontre des deux cercles, et, puisque les tangentes communes sont ici nécessairement imaginaires, les points de rencontre des cercles le sont aussi, et les *cordes communes* sont : l'une, la droite à l'infini ; c'est celle qui répond au foyer F : l'autre, l'*axe radical* des deux cercles ; c'est la droite F', qui divise en deux parties égales la distance du point F au point *b*, corrélatif du petit axe B, et qui correspond au second foyer. Dans la figure proposée, les deux droites B et ∞ sont telles, que le pôle de l'une, pris par rapport à l'une ou l'autre des coniques indistinctement, se trouve sur l'autre; donc les points correspondants *b* et F sont tels, que la polaire de l'un, prise par rapport aux deux cercles, passe par l'autre. Ainsi ces points ne sont autre chose que les points *e* et *f* qui font l'objet du chapitre XXXI de la *Géométrie supérieure*, et l'on doit s'attendre, par conséquent, à ce que les diverses propriétés de deux cercles, relatives à ces points, donnent lieu à des propriétés corrélatives de deux coniques biconfocales. C'est, en effet, ce que je ferai voir dans un instant.

Remarquons d'abord que si les deux coniques transformées sont de *même espèce*, l'un des points *f* ou *b* est intérieur aux deux cercles corrélatifs; c'est le point F, si ce sont deux ellipses, et c'est le point *b* si ce sont deux hyperboles; l'autre point leur est extérieur. Si l'on a une ellipse et une hyperbole, le point F est intérieur au cercle qui correspond à l'ellipse, et le point *b* est intérieur au second cercle qui correspond à l'hyperbole et qui est lui-même tout à fait extérieur au premier cercle. Dans le cas de deux paraboles, directes ou inverses, on aurait deux cercles tangents, intérieurement ou extérieurement, au point F qui serait alors le point de réunion des deux points e et f en question, et qui participerait à toutes leurs propriétés.

17. Ce qui précède étant bien compris, il est bien facile de démontrer que si l'on prend (*fig.* 8) deux points N et M sur une conique, et qu'on mène par ces deux points quatre tangentes NB', NA', MA, MB à une seconde conique biconfocale, le quadrilatère NXMY formé par ces quatre tangentes est circonscriptible à un cercle qui a son centre au point de concours T des tangentes NT, MT menées en N et M à la première conique. Ces tangentes divisent en deux parties égales, l'une l'angle YNX et l'autre l'angle YMX. Il suffit donc de prouver que la distance Tx du point T à la tangente MB est égale à la distance Ty du même point à la tangente NB'.

Effectuons la transformation polaire détaillée ci-dessus; nous aurons pour figure corrélative la *fig.* 179 de la *Géométrie supérieure* (qui se rapporte au n° 764 de cet ouvrage), en supposant qu'il s'agisse de deux ellipses biconfocales. Les deux points N et M, le point T, et les quatre tangentes de notre figure correspondent respectivement aux deux tangentes ab, $a'b'$ de la *fig.* 179 (à laquelle le lecteur est prié de se reporter), à la corde de contact ii', et aux quatre points a, b, a', b'.

Cela posé, prenons l'équation du n° 706 de la *Géométrie supérieure*, savoir :

$$\frac{(m,\mathrm{A})}{(m,\mathrm{B})}=\frac{(o,\mathrm{A})}{(o,\mathrm{B})}\cdot\frac{(\mathrm{M},a)}{(\mathrm{M},b)}=\frac{(\mathrm{M},a)}{(\mathrm{O},a)}\cdot\frac{(\mathrm{O},b)}{(\mathrm{M},b)},$$

d'après le dernier alinéa de la page 494. La correspondance des points et des droites de cette formule s'établit, ainsi qu'il suit, avec ceux de notre démonstration. Le point O correspond au point F, centre du cercle directeur; les points a, b sont les points a, a' de la *fig.* 179, et les droites A, B sont les tangentes MB, NB'; enfin la droite M et le point m sont la corde ii' (*fig.* 179) et le point T de notre figure. Le premier membre de l'équation n'est donc autre chose que le rapport même des deux distances Tx, Ty, dont nous avons à prouver l'égalité. Quant au second membre, il peut s'écrire ainsi : $\frac{e\alpha}{a\alpha} \cdot \frac{a'\alpha'}{e\alpha'}$, en adoptant les notations du n° 764 de la *Géométrie supérieure*. Or on démontre dans ce numéro que ce produit des deux rapports est égal à l'unité. Donc enfin Tx = Ty, ce qui démontre le théorème.

Autrement. Les quatre points a, b, a', b' de la *fig.* 179 sont situés sur une conique « qui a l'un de ses foyers en e, et pour directrice correspondante la droite ii'. » (*Voir* le *Nota* de la page 537.) Donc il lui correspond un cercle dans la figure polaire réciproque, c'est-à-dire dans notre figure; ce cercle doit être *inscrit* dans le quadrilatère NYMX, puisque sa conique corrélative est *circonscrite* au quadrilatère réciproque $a a' b b'$; et enfin son centre est le point T qui correspond à la directrice ii' de la conique. Tout ceci résulte de ce que nous avons dit ci-dessus sur la transformation polaire.

18. On peut encore démontrer le théorème qui précède, en s'appuyant sur l'une ou l'autre des deux propositions du n° 822 de la *Géométrie supérieure*. En effet, il suffit, dans un cas, de supposer qu'on prend pour bases des deux cônes les deux coniques données, et pour sommet commun le point situé à l'infini sur la droite menée perpendiculairement au plan de ces coniques; et, dans le second cas, de supposer que le rayon de la sphère, sur laquelle sont tracées les deux coniques sphériques homofocales, est de-

venu infini, de telle sorte que ces coniques deviennent des coniques planes homofocales.

Mais, si l'on fait attention que M. Chasles arrive à la démonstration de ces deux propositions par une *transformation* des cônes homocycliques en cônes homofocaux, et que les propriétés des premiers de ces cônes ne font que généraliser et reproduire (quelquefois avec des raisonnements identiques) celles qui sont relatives à deux cercles, et qui font l'objet du chapitre XXXI, on demeurera convaincu que ces deux démonstrations nouvelles du théorème qui nous occupe, rentrent au fond dans celle que je viens de développer en m'appuyant sur une *transformation* polaire. Ces trois démonstrations ont le même défaut, si c'en est un, elles sont *indirectes*, et de l'espèce de celles que M. Chasles conseille d'éviter, quelque rigoureuses qu'elles soient d'ailleurs. Les principes de la *Géométrie supérieure* permettent d'en donner une entièrement directe, ainsi que je l'ai annoncé plus haut; mais celles qui précèdent n'en offrent pas moins un exemple intéressant des ressources que peut offrir l'importante théorie des polaires réciproques, et elles ont aussi l'avantage de marquer des rapprochements, bien inattendus pour les personnes peu familiarisées avec les merveilles de la géométrie moderne, entre des propriétés de l'étendue, qui sembleraient au premier abord n'avoir aucun lien commun. En voici du reste de nouveaux exemples qui me semblent assez intéressants pour que je n'hésite pas à oublier un instant le sujet principal de ce chapitre.

Propriétés diverses des coniques biconfocales.

19. Les propriétés de deux cercles qui font l'objet du chapitre XXXI de la *Géométrie supérieure* donnent lieu corrélativement à autant de propriétés d'un système de deux coniques biconfocales; il suffit, pour obtenir ces

dernières, de transformer les théorèmes relatifs aux cercles, en employant la méthode des polaires réciproques, ainsi qu'on en a vu ci-dessus un premier exemple. Cette transformation ne pouvant plus offrir de difficulté, après ce qui a été exposé plus haut, je vais me borner à donner les énoncés de ces théorèmes corrélatifs.

Celui du n° 760 de la *Géométrie supérieure* donne lieu au suivant :

Théorème A. — *Si, par un point pris arbitrairement, on mène les deux droites qui sont conjuguées à la fois par rapport à deux coniques biconfocales, ces deux droites sont toujours rectangulaires.*

Je donnerai plus loin une démonstration *directe* de cette proposition, et l'on verra que ces deux droites conjuguées sont, l'une la tangente, et l'autre la normale à une troisième conique biconfocale aux proposées, et passant par le point donné.

Le théorème du n° 761 donne le suivant :

Théorème B. — *Les angles sous lesquels on voit deux (ou plusieurs) coniques biconfocales, d'un point quelconque pris dans leur plan, ont la même bissectrice ou des bissectrices rectangulaires.*

Du corollaire I de ce numéro, on conclut que :

Théorème C. — *Les tangentes à une conique, issues d'un point quelconque d'une conique biconfocale, font des angles égaux avec la tangente menée en ce point à la première conique, et, par suite, avec les rayons vecteurs qui aboutissent en ce point et aux deux foyers.*

C'est le théorème de M. Poncelet qui a servi à démontrer la première proposition du Mémoire de M. Chasles sur les arcs d'une conique, etc.

Le corollaire II donne cette autre propriété connue :

Théorème D. — *Deux coniques biconfocales qui se rencontrent, se coupent toujours à angle droit.*

Le n° 762 donne lieu au théorème suivant :

Théorème E. — *Étant données deux coniques biconfocales* E, E′, *si l'on mène une tangente quelconque* A *à la première, et une tangente* A′ *à la seconde perpendiculaire à* A, *ces deux tangentes se couperont en un point* M.

1°. *Les deux tangentes* B, B′, *menées du point* M *aux deux coniques respectivement, se coupent aussi à angle droit ;*

2°. *Les droites qui joignent deux à deux les points de contact des tangentes* A *et* A′, *ou* B *et* B′, *avec leurs coniques respectives, enveloppent une troisième conique biconfocale aux proposées ;*

3°. *Si l'on joint le point* M *au foyer* F, *centre de la transformation polaire, par une droite* J, *on aura, quel que soit le point* M, *la relation constante*

$$\frac{\sin(A, B)}{\sin(A', B')} = \frac{\sin(J, A) \cdot \sin(J, A)}{\sin(J, A') \cdot \sin(J, B')} = \text{const.}$$

(*Géométrie supérieure*, n° 619)

et, si l'on mène, parallèlement à la droite J, *une transversale qui coupe les quatre tangentes aux points* α, β, α', β', *on aura*

$$\frac{\alpha\beta}{\alpha'\beta} = \text{const.}$$

Le théorème du n° 763 donne celui-ci :

Théorème F. — *Si, d'un point pris dans le plan de trois coniques biconfocales* E, E′, E″, *on mène deux tangentes* A, A′ *à la première, et deux tangentes* M *et* N *aux deux autres respectivement, on aura la relation*

$$\frac{\sin(M, A) \cdot \sin(M, A')}{\sin(N, A) \cdot \sin(N, A')} = \text{const.} = \frac{\mu\alpha}{\nu\alpha},$$

en désignant par α, μ *et* ν *les trois points où le grand axe* *commun des trois coniques coupe leurs directrices relatives au foyer transformateur* F.

Le corollaire du n° 763 donne ce théorème :

THÉORÈME G. — *Si le point est pris sur l'une des coniques* E, *les deux tangentes à cette conique se confondent en une seule* A, *et l'on a la relation*

$$\frac{\sin(M, A)}{\sin(N, A)} = \text{const.} = \sqrt{\frac{\mu\alpha}{\nu\alpha}}.$$

Le n° 764 engendre le théorème H, dont j'ai développé plus haut la démonstration ; pour abréger, je n'en répéterai pas l'énoncé.

Enfin le théorème du n° 765 donne lieu au suivant :

THÉORÈME I. — *Si une transversale quelconque* O, *menée dans le plan de deux coniques biconfocales, rencontre l'une d'elles en deux points d'où l'on mène à la seconde quatre tangentes* A, B *et* A', B' *respectivement, on aura la relation*

$$\frac{\tan\frac{1}{2}(A, O)}{\tan\frac{1}{2}(B, O)} = \frac{\tan\frac{1}{2}(A', O)}{\tan\frac{1}{2}(B', O)},$$

ou

$$\tan\frac{1}{2}(A, O) \,.\, \tan\frac{1}{2}(B, O) = \tan\frac{1}{2}(A', O) \,.\, \tan\frac{1}{2}(B', O),$$

suivant que les deux coniques seront de même espèce, ou d'espèce différente.

Remarque. — On peut supposer que l'une des coniques soit une ellipse infiniment aplatie, c'est-à-dire se réduise à la droite qui joint les deux foyers. Dans ce cas, les deux tangentes menées par deux points de l'une des coniques à l'autre se réduisent aux quatre rayons vecteurs qui aboutissent à ces deux points, et le théorème H donne le suivant, qui a été énoncé, il y a longtemps, par M. Chasles, dans son *Mémoire sur les coniques sphériques*, page 30.

Théorème. — *Les quatre rayons vecteurs, menés des deux foyers d'une conique à deux quelconques de ses points, sont tangents à un même cercle, dont le centre est le point d'intersection des tangentes à la conique en ces deux points.*

Et ce théorème n'est lui-même, comme le théorème H, qu'un cas particulier des propriétés qui appartiennent aux coniques sphériques.

20. Tous ces théorèmes relatifs aux coniques biconfocales ont été déduits *corrélativement* de ceux relatifs à un système de deux cercles qui ne se rencontrent pas. Je vais actuellement, ainsi que je l'ai annoncé, en donner des démonstrations *directes*, je veux dire des démonstrations qui ne s'appuieront que sur les théories *fondamentales* de la *Géométrie supérieure*, et non plus sur des théories accessoires et secondaires, telles que celle des polaires réciproques.

21. Établissons quelques propositions préliminaires.

Une conique quelconque et un cercle décrit autour d'un de ses foyers comme centre, sont deux courbes homologiques, qui ont pour centre d'homologie le foyer en question (*Géométrie supérieure*, n° 529). Menons par ce foyer une transversale quelconque. Son pôle, pris par rapport à la conique, est situé sur la directrice qui correspond à l'infini du cercle, et, pris par rapport au cercle, il est situé à l'infini sur le rayon perpendiculaire à la transversale. Or ces deux pôles sont deux points homologues; donc ils sont situés sur un même rayon d'homologie, perpendiculaire à la transversale, ce qui donne cette propriété des coniques.

Deux droites conjuguées *par rapport à une conique, et issues d'un de ses foyers, sont toujours rectangulaires.*

Deux telles droites seront donc conjuguées par rapport à *toutes les coniques* qu'on décrirait des mêmes foyers que la proposée. Donc, si l'on a égard à l'*observation* qui termine le n° 736 de la *Géométrie supérieure* (page 513), on en conclura que :

Chacun des deux foyers d'autant de coniques biconfocales qu'on voudra, est un centre d'homologie commun à toutes ces coniques, ou, si l'on veut, est le point de concours de deux tangentes (*imaginaires*) *communes à toutes ces courbes.*

22. On peut, à ce sujet, remarquer que quatre tangentes forment, en général, un quadrilatère *complet* qui a six sommets. Or il n'en existe ici que deux qui soient réels : ce sont les deux foyers ; les quatre autres sont imaginaires par couples, et deux de ceux-ci sont situés à l'infini. En effet, d'après le n° 693 de la *Géométrie supérieure*, *la droite qui joint les points de concours des côtés opposés d'un quadrilatère circonscrit à une conique, a son pôle au point de rencontre des deux diagonales.* Ce point de rencontre n'est autre que le centre même de la courbe ; car l'une des diagonales est l'axe qui joint les deux foyers réels, et l'autre, sur laquelle se trouvent les deux courbes des foyers imaginaires, est le second axe de la conique. Donc la droite qui joint les points de concours des côtés opposés du quadrilatère, est à l'infini (1). Ces considérations peuvent être utiles dans la théorie des coniques, ou dans celle des courbes du troisième et du quatrième degré. Revenons à nos coniques biconfocales. Parmi ces courbes, il en existe deux qui méritent d'être remarquées. L'une est l'ellipse infiniment aplatie ou la droite qui joint les deux foyers ; l'autre est l'hypérbole infiniment aplatie réduite à ses asymptotes coïncidentes.

(1) D'après cela, on peut dire que les coniques biconfocales sont inscrites dans un même *parallélogramme* imaginaire, dont deux sommets seulement sont réels.

23. Ce qui précède étant établi, le n° 736 de la *Géométrie supérieure* donne évidemment ces deux théorèmes :

1°. *Quand un quadrilatère est circonscrit à deux ou plusieurs coniques, si d'un point on mène les tangentes à ces coniques, et des droites à deux sommets opposés du quadrilatère, ces droites forment deux faisceaux en involution.*

2°. *Quand deux ou plusieurs coniques sont biconfocales, si d'un point on mène les tangentes à ces courbes, et des droites aux deux foyers communs, toutes ces droites forment deux faisceaux en involution.*

L'une des coniques biconfocales aux proposées passe par le point donné, et les deux tangentes qui lui sont relatives se confondent en une seule qui est ainsi l'un des deux *rayons doubles* de l'involution (*Géométrie supérieure*, n° 244). Or cette tangente divise en deux parties égales l'angle formé par l'une des deux droites qui joignent le point donné à l'un des foyers, et par le prolongement de l'autre de ces rayons vecteurs. Donc l'autre rayon double divise en deux parties égales l'angle même des deux rayons vecteurs, et il est perpendiculaire sur le premier (*Géométrie supérieure*, 80 et 244). Or ces deux rayons doubles, qui sont conjugués harmoniques par rapport aux deux tangentes menées du point donné à chacune des deux coniques, sont deux *droites conjuguées* par rapport à chacune de ces coniques (*Géométrie supérieure*, 687). Donc on a ce théorème, qui est le théorème A énoncé ci-dessus :

Si, par un point pris arbitrairement, on mène les deux droites qui sont conjuguées à la fois par rapport à deux (ou à plusieurs) coniques biconfocales, ces deux droites sont toujours rectangulaires.

Remarque. — Ne considérons, pour un moment, qu'une seule quelconque de ces coniques. Toutes les droites qui lui sont conjuguées et qui sont issues du point donné, forment deux faisceaux en involution, dans lesquels il existe un système *unique* de rayons homologues rectangulaires (*Géométrie supérieure*, 249). On en conclut que tous les systèmes de deux faisceaux semblables, qui sont relatifs à toutes les coniques, sont placés de telle sorte, que leurs systèmes de rayons rectangulaires respectifs coïncident.

24. Je viens de faire voir que ces deux droites conjuguées communes divisent en deux parties égales l'angle et le supplément de l'angle des deux rayons vecteurs issus du point donné, ainsi que l'angle des deux tangentes, confondues en une seule, menées par le point donné à la conique qui passe en ce point. Donc (*Géométrie supérieure*, 247) on en conclut que :

1°. *Les angles sous lesquels on voit deux ou plusieurs coniques biconfocales, d'un point quelconque pris dans leur plan, ont la même bissectrice ou des bissectrices rectangulaires.* C'est le théorème B.

2°. *Les tangentes à une conique, issues d'un point quelconque d'une seconde conique biconfocale, font des angles égaux avec la tangente menée en ce point à la première conique, et par conséquent aussi avec les rayons vecteurs qui aboutissent en ce point.*

C'est le théorème C, dont j'ai fait usage pour démontrer la première proposition du Mémoire sur *les arcs d'une conique*..., etc. Il appartient à M. Poncelet.

3°. *Deux coniques biconfocales qui se rencontrent, se coupent toujours à angle droit.* C'est le théorème D.

On peut démontrer directement ce dernier théorème, en faisant un raisonnement semblable à celui de l'alinéa *autrement* de la page 534 de la *Géométrie supérieure*. Car si le point donné est le point de rencontre de deux coniques biconfocales, les quatre tangentes ordinaires issues de ce point, et menées à deux coniques, se réduisent à deux, qui sont, par conséquent, les rayons doubles de l'involution mentionnée plus haut, et divisent harmoniquement l'angle des rayons vecteurs qui aboutissent à ce point. Or l'une quelconque de ces tangentes divise en deux parties égales le supplément de l'angle formé par les deux rayons vecteurs; donc (*Géométrie supérieure*, 80) l'autre rayon double, c'est-à-dire l'autre tangente, est perpendiculaire sur la première, ce qui démontre le théorème D.

25. Soient données trois coniques biconfocales E, E', E''. D'un point quelconque P, menons deux tangentes A, A' à la première, et deux tangentes M, N aux deux autres respectivement; soient encore B, B' les droites menées du point P aux deux foyers. Par le point P, menons une transversale L perpendiculaire à l'axe commun de ces coniques sur lequel se trouvent les foyers, et soit π un point quelconque de cette droite; menons les tangentes et droites analogues, et désignons-les par les lettres α, α'; μ, ν; β, β'. Le n° 737 de la *Géométrie supérieure* donne les équations

$$\frac{\sin(M,A)\,.\,\sin(M,A')}{\sin(M,B)\,.\,\sin(M,B')} : \frac{\sin(L,A)\,.\,\sin(L,A')}{\sin(L,B)\,.\,\sin(L,B')}$$
$$= \frac{\sin(\mu,\alpha)\,.\,\sin(\mu,\alpha')}{\sin(\mu,\beta)\,.\,\sin(\mu,\beta')} : \frac{\sin(L,\alpha)\,.\,\sin(L,\alpha')}{\sin(L,\beta)\,.\,\sin(L,\beta')} = \text{const.};$$

et, relativement aux coniques E et E'',

$$\frac{\sin(N,A)\,.\,\sin(N,A')}{\sin(N,B)\,.\,\sin(N,B')} : \frac{\sin(L,A)\,.\,\sin(L,A')}{\sin(L,B)\,.\,\sin(L,B')}$$
$$= \frac{\sin(\nu,\alpha)\,.\,\sin(\nu,\alpha')}{\sin(\nu,\beta)\,.\,\sin(\nu,\beta')} : \frac{\sin(L,\alpha)\,.\,\sin(L,\alpha')}{\sin(L,\beta)\,.\,\sin(L,\beta')} = \text{const.},$$

quel que soit le point P pris sur la droite L. Si, de plus, on suppose que le point π est pris à l'infini sur L, on pourra déplacer le point P sur des droites parallèles à L, c'est-à-dire le placer en un point quelconque, sans altérer la valeur du rapport diviseur du premier membre de chacune des deux équations, puisque la droite L n'entre que *par sa direction* dans les différents facteurs de ce rapport. On aura donc enfin l'équation

$$(1)\quad \frac{\sin(M, A) \cdot \sin(M, A')}{\sin(N, A) \cdot \sin(N, A')} = \lambda \cdot \frac{\sin(M, B) \cdot \sin(M, B')}{\sin(N, B) \cdot \sin(N, B')},$$

dans laquelle la constante λ a pour valeur

$$(2)\quad \frac{\sin(\mu, \alpha) \cdot \sin(\mu, \alpha')}{\sin(\nu, \alpha) \cdot \sin(\nu, \alpha')} : \frac{\sin(\mu, \beta) \cdot \sin(\mu, \beta')}{\sin(\nu, \beta) \cdot \sin(\nu, \beta')}.$$

Désignons par Fm, $F'm'$; Fn, $F'n'$ les distances des foyers F et F' aux tangentes M et N respectivement; on a les quatre égalités

$$Fm = PF \cdot \sin(M, B); \quad F'm' = PF' \cdot \sin(M, B');$$
$$Fn = PF \cdot \sin(N, B); \quad F'n' = PF' \cdot \sin(N, B');$$

donc

$$\frac{\sin(M, A) \cdot \sin(M, A')}{\sin(N, A) \cdot \sin(N, A')} = \frac{Fm \cdot F'm'}{Fn \cdot F'n'} \cdot \lambda.$$

Or on sait que, dans toute conique, le produit $Fm.F'm'$ ou $Fn.F'n'$ est constant et égal au carré b^2 ou b'^2 du demi-petit axe. (*Voir*, par exemple, pour la démonstration de cette propriété, le chapitre III relatif aux foyers des coniques, et les développements que j'en donne.)

Donc enfin on a

$$(3)\quad \frac{\sin(M, A) \cdot \sin(M, A')}{\sin(N, A) \cdot \sin(N, A')} = \lambda \cdot \frac{b^2}{b'^2} = \text{const.};$$

c'est le théorème F.

L'expression de la constante λ, équation (2), peut être mise sous la forme de rapports anharmoniques; donc, si l'on coupe le faisceau de droites par une transversale parallèle au grand axe commun des coniques, et, par conséquent, perpendiculaire à leur commune direction L (L a été prise parallèle au petit axe), on aura, pour la valeur de λ, l'expression

$$\frac{(A-a)(A+a)}{b^2} : \frac{(A-a')(A+a')}{b'^2} \quad \text{ou} \quad \frac{A^2-a^2}{b^2} : \frac{A^2-A'^2}{b'^2},$$

en désignant par A, a et a' les demi-grands axes des trois coniques E, E′, E″. (*Géométrie supérieure*, n° 7, page 8.)

Ainsi la constante de l'équation (3) est finalement égale à $\frac{A^2 - a^2}{A^2 - a'^2}$.

Or la distance de chacune des directrices relatives au même foyer, au centre commun des trois courbes, est, comme on sait, $\frac{A^2}{c}$, $\frac{a^2}{c}$, $\frac{a'^2}{c}$, c étant égal à $\sqrt{a^2 - b^2}$; donc la constante est égale à $\frac{\delta}{\delta'}$, en désignant par δ et δ' les distances de la directrice de E aux directrices de E′ et E″ respectivement. C'est ce que nous avions déjà trouvé par la transformation polaire.

Corollaire. — Si le point P est pris sur la première conique E, les droites A et A′ se confondent, et l'équation (3) devient

$$\frac{\sin(M, A)}{\sin(N, A)} = \text{const.}$$

C'est le théorème G, qui va nous conduire directement à la démonstration de celui que j'avais principalement en vue dans ces développements.

26. Soient actuellement deux coniques biconfocales E, E′ (*fig.* 8); si, par deux points M, N de l'une, on mène à l'autre quatre tangentes A, B et A′, B′, ces quatre tangentes formeront un quadrilatère MXNY, et il s'agit de démontrer que ce quadrilatère est toujours circonscriptible au cercle.

Concevons qu'une troisième conique biconfocale aux proposées soit tangente à la droite O qui joint les deux points M et N. Si l'on mène les tangentes I et I′ en M et en N à la conique E, on aura, d'après le corollaire précédent,

$$\frac{\sin(A, I)}{\sin(O, I)} = \frac{\sin(A, I')}{\sin(O, I')},$$

qu'on peut écrire

$$\frac{\sin(A, I)}{\sin(A', I')} = \frac{\sin(O, I)}{\sin(O, I')}.$$

Le triangle TMN donne d'abord

$$\frac{\sin(O, I)}{\sin(O, I')} = \frac{TN}{TM};$$

les triangles MTX, NTX donnent ensuite

$$\frac{\sin(A, I)}{\sin MXT} = \frac{TX}{TM} \quad \text{et} \quad \frac{\sin(A', I')}{\sin NXT} = \frac{TX}{TN};$$

donc

$$\frac{\sin(A, I)}{\sin(A', I')} = \frac{TN}{TM} \cdot \frac{\sin MXT}{\sin NXT}.$$

Égalant cette valeur de $\frac{\sin(A, I)}{\sin(A', I')}$ à celle obtenue plus haut, il vient

$$\frac{\sin MXT}{\sin NXT} = 1,$$

ce qui prouve l'égalité des angles MXT et NXT.

On démontrerait de même, en considérant les tangentes B et B′, que les angles MYT, NYT sont égaux, et l'on sait d'ailleurs (théorème C) que les angles TMX et TNX sont égaux, respectivement, à leurs adjacents TMY, TNY. Donc le point de concours T des tangentes I et I′ est le centre d'un cercle inscrit au quadrilatère MXNY.

C. Q. F. D.

27. Soient E, E′ (*fig.* 9) deux coniques biconfocales, et A, B, A′, B′ quatre tangentes à ces courbes, issues d'un même point P et telles, que l'angle (A, A′) soit droit. Soient L, L′ la tangente et la normale à la conique biconfocale aux proposées, qui passe par le point P, on a

$$\text{angle}(B, B') = (A, A') - (A, B') + (A', B).$$

Or, d'après le théorème C, on a

$$(L, A) = (L, B) \quad \text{et} \quad (L, B') = (L, A'),$$

donc
$$(L, B') - (L, A) = (L, A') - (L, B),$$
c'est-à-dire
$$(A, B') = (A', B),$$
et, par conséquent,
$$(B, B') = (A, A') = 90 \text{ degrés}.$$

C'est la première partie du théorème E.

Les six droites L, L', A, A', B, B' forment un faisceau en involution (*Géométrie supérieure*, 246). On peut exprimer l'involution par la formule du n° 252, 2°, qui donne ici
$$\frac{\sin(A, B) \cdot \sin(A, B')}{\sin(A', B') \cdot \sin(A', B)} = \lambda.$$

Or les angles (A, B') et (A', B) sont égaux; donc on a
$$\frac{\sin(A, B)}{\sin(A', B')} = \text{const.}$$

C'est la troisième partie du théorème E.

Cela posé, on peut démontrer directement, ou, pour abréger, déduire du n° 251 *réciproquement* (page 526), par la théorie des polaires réciproques, que :

Si deux coniques biconfocales sont vues d'un point variable P *sous des angles* (A, B), (A', B') *dont les sinus soient dans un rapport constant, les cordes* aa', bb', *qui joignent inversement les points de contact, sont tangentes à une troisième conique biconfocale, qui reste la même quand le point* P *change de position.*

Or nous venons de voir que, dans le cas actuel, le rapport $\frac{\sin(A, B)}{\sin(A', B')}$ est constant. Donc la deuxième partie du théorème E est démontrée. Etc.

28. Je ne pousserai pas plus loin l'étude des propriétés des coniques biconfocales, afin de ne pas être entraîné dans des développements étrangers à l'objet de ce chapitre. Je

désirais surtout donner une démonstration *directe* du théorème relatif au « quadrilatère circonscriptible au cercle... », et cet objet me semble complétement rempli par ce qui précède. Il en résulte que les quatre premières propositions du Mémoire de M. Chasles sur les « arcs d'une conique dont la différence est rectifiable », propositions d'un ordre relevé, peuvent se démontrer avec le seul secours des méthodes élémentaires et purement géométriques, qui sont exposées dans la première section du *Traité de Géométrie supérieure*. Cet exemple, assez remarquable, vient à l'appui de cette assertion de l'auteur (page 269) que « ces méthodes fécondes forment les bases naturelles de la Géométrie ». En effet, une science peut être regardée comme réduite à ses vrais principes, quand elle est assise sur un petit nombre de propositions claires et faciles, dont l'application s'étend indistinctement à toutes les questions qu'elle embrasse, quel que soit l'ordre des difficultés à vaincre, et qui *établissent entre les diverses théories dont cette science se compose*, des liens qui leur prêtent une clarté et un appui mutuels. C'est, par exemple, ce qui arrive ici entre la théorie des cercles, ou plus généralement des coniques qui ont les mêmes sécantes idéales, et la théorie des coniques décrites des mêmes foyers.

Le travail qui précède pourrait aussi contribuer, s'il en était besoin, à faire apprécier la justesse de cette autre pensée exprimée à la fin du *Discours d'introduction* : « Une vérité est-elle connue, que la Géométrie en cherche » la démonstration par ses propres moyens ; soyez sûrs » que, dans cette recherche, elle rencontrera et fera con» naître diverses autres propriétés qui se rattachent au » sujet, l'éclairent et le complètent. »

Ici la recherche d'une seule démonstration nous a fait, sinon découvrir, du moins *rencontrer* plusieurs propriétés remarquables des coniques biconfocales, propriétés incidentes, il est vrai, mais qui se rattachent au sujet, et qui n'ont pu échapper à l'investigation géométrique, tandis que l'analyse, dans la rapidité de ses transformations, eût peut-être glissé à côté d'elles sans s'en préoccuper, ou plutôt sans les apercevoir.

Mais il est une autre remarque que je me permettrai de faire au sujet du *Traité de Géométrie supérieure*. Quelques-unes des théories *accessoires* exposées dans cet ouvrage, et qui sont des expressions diverses du principe de *dualité*, telles que la théorie des polaires réciproques et celle des figures corrélatives, permettent de *transformer* des vérités connues en d'autres vérités d'*un genre différent*; on en a vu plus haut un assez curieux exemple. Cette grande loi de dualité a donc subitement enrichi la science d'une foule de théorèmes inconnus jusque-là, et de boiteuse que la Géométrie était en quelque sorte, elle l'a rendue complète, en rétablissant un équilibre impartial entre les deux ordres de spéculations qu'elle embrasse. Cependant cette loi, qui a si bien rempli ce but d'expansion et de généralisation, laissait à désirer au point de vue de la perfection de la *doctrine*. Il restait encore à remonter à sa source première et à découvrir les principes sur lesquels elle repose. C'est là le but que s'est proposé, sans doute, l'auteur de la *Géométrie supérieure*. Ce but est atteint, et il réalise un progrès marqué dans la culture de la science. Grâce à ces principes faciles, qui s'appliquent avec une corrélation parfaite aux *points* ou aux *droites* (pour ne parler ici que de la Géométrie à deux dimensions), les théories géométriques qui se rapportent à ces deux ordres de spéculations marchent d'un pas égal, et se développent parallèlement avec la même simplicité et la même rigueur, sans rien s'emprunter mutuellement, comme cela arrive aux méthodes de *transformations*, et pourtant, ce qui est très-remarquable, en employant presque toujours le même tour de raisonnement, ainsi que le lecteur peut le remarquer à chaque page de la *Géométrie supérieure*, et dans ce petit écrit lui-même comparé au chapitre XXXI de cet ouvrage.

Suite des propriétés des arcs associés dans les coniques planes.

29. Après cette digression, dont l'intérêt fera, j'espère, excuser la longueur, je reviens aux théorèmes du Mémoire de M. Chasles.

THÉORÈME V. — *Si l'on divise un arc en* m *arcs associés, c'est-à-dire en* m *arcs ayant deux à deux des différences rectifiables ou, ce qui revient au même, en* m *arcs dont chacun ait avec la* m$^{\text{ième}}$ *partie de l'arc proposé une différence rectifiable, les points de division sont tels, que les tangentes à la courbe en ces points forment la portion de polygone de* (m + 1) *côtés qui a le périmètre* minimum, *parmi toutes les portions de polygone du même nombre de côtés circonscriptibles à l'arc proposé.*

THÉORÈME VI. — *Cette même portion de polygone a ses sommets situés sur une seconde conique décrite des mêmes foyers que la proposée, et a, par rapport à cette courbe, un périmètre* maximum, *c'est-à-dire que de toutes les portions de polygones de* m *sommets inscriptibles dans le même arc de la seconde conique, cette portion de polygone est celle qui a le plus grand contour ou périmètre.*

Je vais démontrer ces deux théorèmes à la fois.

Supposons qu'un arc af d'une conique E soit divisé en m arcs semblables contigus ab, bc, cd, de, ef (m sera égal à 5 par exemple), on a les égalités

$$ab - bc = \mathrm{D}, \quad bc - cd = \mathrm{D}', \quad cd - de = \mathrm{D}'', \quad de - ef = \mathrm{D}''',$$

D, D′, D″,... désignant certaines droites.

En ajoutant ces égalités deux à deux, on en conclut que deux quelconques de ces arcs ont entre eux une différence rectifiable. On a, par exemple,

$$ab - cd = D + D' = \delta,$$

et ainsi des autres, comparés deux à deux. Si l'on veut comparer un de ces arcs, tels que bc, à l'arc total ef, on écrira d'abord

$$ab - bc = D, \quad bc - cd = D', \quad bc - de = \delta', \quad bc - ef = \delta'';$$

d'où l'on tire

$$ab + bc - 2\,bc = D, \quad ab + bc + cd - 3\,bc = D - D',$$
$$ab + bc + cd + de - 4\,bc = D - D' - \delta',$$
$$ab + bc + cd + de + ef - 5\,bc = D - D' - \delta' - \delta'',$$

ou bien

$$af - 5\,bc = \Delta \quad \text{et} \quad \frac{af}{5} - bc = \Delta'.$$

Ainsi l'on peut dire, comme dans l'énoncé du théorème V, que *les* m *arcs semblables, qui divisent l'arc* af, *ont deux à deux des différences rectifiables, et que chacun d'eux a aussi une différence rectifiable avec la* m*ième* *partie de l'arc proposé.*

Cela posé, considérons deux arcs consécutifs ab, bc; les sommets A, B de leurs angles circonscrits sont, d'après le théorème I, situés sur une seconde conique biconfocale E′. Le sommet C de l'angle circonscrit à l'arc cd est, par la même raison, situé sur la même conique biconfocale que le sommet B, c'est-à-dire sur E′, et il en est de même de tous les autres sommets D, E, etc.

Donc *la portion de polygone de* (m + 1) *côtés, circonscrite à l'arc proposé, a tous ses sommets situés sur une seconde conique décrite des mêmes foyers que la proposée.*

Pour compléter la démonstration des théorèmes V et VI, il n'y a plus qu'à prouver que « cette portion de polygone » a un périmètre *minimum* parmi toutes les portions de

» polygone de $m+1$ côtés circonscriptibles à l'arc proposé, » et *maximum* parmi toutes les portions de polygones de m » sommets inscriptibles dans le même arc de la seconde. » Or ces deux propriétés sont des conséquences immédiates de ce que les portions de polygones sont comprises entre deux coniques homofocales. La première, celle du *minimum*, résulte du corollaire du théorème IV, en vertu duquel la normale à la conique intérieure, menée par le point de contact de chacun des côtés du polygone circonscrit, concourt au même point que les bissectrices des angles adjacents à ce côté, ce qui est la condition caractéristique des polygones de périmètre *minimum* circonscrits à une courbe quelconque; et la seconde, celle du *maximum*, résulte de ce que deux côtés consécutifs sont également inclinés sur la conique à laquelle ils sont inscrits, ce qui est, pour les polygones inscrits à une courbe quelconque, la condition caractéristique du *maximum*.

30. *On peut remarquer que chacun des arcs* ab, bc, cd,... a une différence rectifiable avec la $m^{ième}$ partie de l'arc proposé af; donc, parmi l'infinité des angles circonscrits à la conique E et qui ont leurs sommets sur la conique E′, il doit en exister au moins un qui embrasse précisément sur la conique E un arc égal à cette $m^{ième}$ partie (théorème I), et cela étant, la symétrie de la figure fait qu'il en existe un second. Soit α cet arc égal à $\frac{af}{m}$, et soient τ, τ' les deux *côtés* de l'angle qui lui est circonscrit. On a, par le théorème I, la suite d'égalités

$$\begin{aligned}(aA + bA) - (\tau + \tau') &= ab - \alpha,\\ (bB + cB) - (\tau + \tau') &= bc - \alpha,\\ (cC + dC) - (\tau + \tau') &= cd - \alpha,\end{aligned}$$

et ainsi de suite. Ajoutant toutes ces équations et désignant par P le périmètre du polygone circonscrit $aABCDEf$, il vient

$$P - m(\tau + \tau') = af - m\alpha = 0.$$

Supposons qu'un autre arc $a'f'$ soit semblable à l'arc af, et qu'il se compose, comme celui-ci, de m arcs semblables, l'arc $a'f'$ aura une différence rectifiable avec l'arc α (théorème V), et par conséquent (théorème I) les sommets des angles circonscrits aux m arcs semblables qui le composent sont situés, comme les autres, sur la conique biconfocale E'. On aura donc, en désignant par P' le périmètre de ce nouveau polygone,

$$P' - m(\tau + \tau') = a'f' - m\alpha;$$

donc, en retranchant la seconde équation de la première, il vient

$$P - P' = af - a'f'.$$

Cette équation est indépendante du nombre m des divisions de chaque arc; donc on peut énoncer ce théorème, qui est le huitième du Mémoire de M. Chasles :

Théorème VII. — *Quand deux arcs d'une section conique sont associés, si on leur circonscrit deux portions de polygones de* m *côtés dont les sommets s'appuient sur une même conique biconfocale à la proposée, et qui sont, par conséquent, de périmètre* minimum, *la différence des deux périmètres sera toujours la même, quel que soit le nombre des côtés, et sera égale à la différence des deux arcs.*

31. Les théorèmes V et VI ont fait voir que « la même » portion de polygone, circonscrite à un arc d'une conique » et inscrite dans un arc d'une seconde conique homofocale, » jouit tout à la fois, quant à son périmètre, des deux pro- » priétés de *minimum* et de *maximum*, de même qu'une » portion de polygone régulier circonscrite à un arc de » cercle et inscrite dans un arc de cercle concentrique; de » sorte que, dans ces questions de périmètres, ce sont des

» sections coniques décrites des mêmes foyers, qui correspondent à des cercles concentriques.

» Au contraire, si ce sont les surfaces des polygones que » l'on compare, au lieu des périmètres, ce seront des coniques concentriques et homothétiques qui correspondront » aux cercles, » c'est-à-dire que :

Théorème VIII. — *Si une portion de polygone est circonscrite à un arc de section conique et inscrite dans un autre arc de section conique, concentrique et homothétique à la première, cette portion de polygone aura une surface minimum par rapport à toute autre portion de polygone de même nombre de côtés circonscrite au premier arc, et maximum par rapport à toute autre portion de polygone inscrite dans le second arc.*

En effet, circonscrivons à un cercle une portion de polygone qui soit en même temps inscrite à un second cercle concentrique. Cette portion de polygone a, comme on sait, une surface *minimum* par rapport à celle de toute autre portion de polygone, du même nombre de côtés, circonscrite au même arc, et *maximum* par rapport à celle de tout autre polygone, du même nombre de sommets, inscrit dans le même arc du cercle extérieur.

Faisons une déformation homographique de la figure, en faisant que la droite à l'infini reste à l'infini (*Géométrie supérieure,* n° 534). On obtiendra deux coniques qui auront comme les deux cercles (*Géométrie supérieure,* n° 719) deux points communs imaginaires à l'infini, c'est-à-dire qui seront concentriques et *homothétiques* (*Géométrie supérieure,* n° 472). La surface de chaque polygone déformé est dans un rapport constant avec celle du polygone d'où il dérive (*Géométrie supérieure,* n° 539). Donc elle jouit des mêmes propriétés de *minimum* et de *maximum* que cette dernière. Ainsi le théorème VII est démontré.

32. Passons au théorème X. *Si l'on conçoit une ellipse divisée en un certain nombre* m *d'arcs associés, et le polygone circonscrit, formé par les tangentes aux points de division,*

1°. *Les sommets de ce polygone seront tous situés sur une seconde ellipse décrite des mêmes foyers que la proposée.*

Cela résulte du théorème V démontré plus haut. Ajoutons que cette ellipse passe par le sommet de l'angle qui intercepte sur l'ellipse l'arc α dont la longueur est la $m^{ième}$ partie du périmètre de cette ellipse.

2°. *Pour un autre polygone pareil, répondant à un autre point de départ des divisions de l'ellipse, la seconde courbe sera toujours la même.*

Car cette courbe, qui est nécessairement une ellipse biconfocale à la proposée, passe, comme la précédente, par le sommet de l'angle circonscrit à l'arc α, et se confond par conséquent avec elle.

3°. *Ces polygones auront tous le même périmètre.*

En effet, deux de ces polygones interceptent chacun, par hypothèse, le périmètre complet de l'ellipse; on peut dire qu'ils sont circonscrits à des arcs associés, puisque la différence de ces arcs est nulle. Le théorème VIII est donc applicable à ces polygones, et il prouve que la différence de leurs périmètres est nulle.

4°. *Ce périmètre est minimum par rapport à tous autres polygones du même nombre de côtés circonscrits à l'ellipse.*

5°. *Et il est maximum par rapport à tous autres polygones du même nombre de côtés inscrits dans la seconde ellipse.*

Ces deux paragraphes sont une conséquence évidente des théorèmes V et VI.

Ce théorème ne s'applique pas seulement aux polygones convexes formés par les tangentes aux points de division de la courbe, prises consécutivement pour côtés ; il a lieu pour les polygones étoilés de même espèce, formés par ces mêmes tangentes dont on prend les points de concours de trois en trois, de quatre en quatre, etc., pour sommets de polygone.

Cela revient à dire que l'ellipse, qui est divisée en m arcs associés ab, bc, cd, de, ef consécutifs, peut aussi être regardée comme étant divisée en m autres arcs asssociés consécutifs ac, bd, ce, df, ea, ou bien en prenant les sommets de quatre en quatre ad, be, cf, da, eb, fc, ce qui est vrai ; car les arcs primitifs étant associés, on a les égalités

$$ab - cd = \mathrm{D}, \quad bc - de = \mathrm{D}', \quad cd - ef = \mathrm{D}'', \text{ etc.};$$

d'où l'on tire

$$(ab + bc) - (bc + cd) = \mathrm{D}, \ (bc + cd) - (cd + de) = \mathrm{D}', \text{ etc },$$

ou bien

$$(ac - bd) = \mathrm{D}, \quad (bd - ce) = \mathrm{D}', \text{ etc.}$$

Seulement il est clair que les sommets de ces nouveaux polygones ne se trouvent plus sur l'ellipse E′ ; ils sont tous inscrits à des ellipses différentes E″, E‴, etc., qui sont biconfocales à la proposée.

33. Théorème XI. — Réciproquement, *quand un polygone de* m *côtés est inscrit à une ellipse et en même temps circonscrit à une seconde ellipse décrite des mêmes foyers que la première, ce polygone est, par rapport à la première courbe, un polygone inscrit de périmètre maximum, et par rapport à la seconde, un polygone circonscrit de périmètre minimum.*

Ses m *côtés marquent sur l'ellipse inscrite les divisions de cette courbe en* m *arcs ayant deux à deux des différences rectifiables.*

Une infinité d'autres polygones peuvent être inscrits dans la première courbe et circonscrits en même temps à la seconde.

Tous ces polygones ont le même périmètre.

Le premier alinéa de ce théorème est une conséquence des théorèmes V et VI; le second résulte immédiatement du théorème I, et le troisième n'est qu'une expression différente du théorème suivant, démontré au n° 566 du *Traité des propriétés projectives* de M. Poncelet, page 361 :

Théorème. — *Quand un polygone quelconque est à la fois inscrit à une section conique et circonscrit à une autre, il en existe une infinité de semblables qui jouissent de la même propriété à l'égard des deux courbes, ou plutôt tous ceux qu'on essayerait de décrire à volonté, d'après ces conditions, se fermeraient d'eux-mêmes sur ces courbes.*

Ce théorème auxiliaire peut également se déduire, par une transformation polaire, de celui qui est énoncé au *corollaire* du n° 758 de la *Géométrie supérieure*, page 532. Il suffit, dans le cas actuel, de supposer que toutes les coniques se réduisent à deux.

Le dernier alinéa du théorème XI est une conséquence du théorème VIII.

On pourrait ajouter, au sujet de ces polygones, et en s'appuyant sur les n^{os} 570 et 572 de l'ouvrage déjà cité de M. Poncelet, que s'ils ont un nombre pair de sommets, toutes les diagonales qui joignent dans chacun d'eux les sommets respectivement opposés se croisent au centre commun des deux ellipses. Passons au théorème suivant :

34. Théorème XII. — Soit ABCD. . ., un polygone *quelconque* circonscrit à une ellipse; par chacun de ses sommets faisons passer une conique biconfocale à la proposée : il résulte du théorème auxiliaire cité plus haut, qu'on pourra circonscrire à l'ellipse E une infinité d'autres polygones, dont les sommets s'appuieront sur les ellipses E′, E″, E‴, etc. Prenons, dans deux de ces polygones, deux angles B, B′, appuyés sur une même conique E′; les

arcs interceptés sur E par leurs côtés respectifs sont associés (théorème I) ; donc

Tous ces polygones sont tels, que les arcs compris entre les angles de chacun d'eux étant comparés un à un aux arcs compris entre les angles du premier, donneront des différences rectifiables.

Tous ces polygones auront le même périmètre, c'est-à-dire que la somme de leurs côtés formera toujours une même longueur.

Prenons, en effet, deux quelconques d'entre eux. Le périmètre du premier, moins le périmètre du second, est égal (théorème I) à la somme des arcs interceptés par les angles du premier, c'est-à-dire est égal à l'ellipse entière moins la somme des arcs interceptés par les angles du second, c'est à-dire encore moins l'ellipse entière. Donc la différence des périmètres est nulle.

Dans la construction d'un nouveau polygone, il n'est pas nécessaire que les arcs sous-tendus par ses angles aient entre eux le même ordre que les arcs relatifs au premier polygone, auxquels ils correspondent. Car il résulte de la note de la page 532 de la *Géométrie supérieure,* transformée par la méthode des polaires réciproques, que ces polygones se formeront toujours, quelles que soient les coniques E′, E″, etc., qu'on attribuera aux sommets consécutifs, un à un, respectivement.

Ajoutons encore que le périmètre constant de tous ces polygones est *maximum* par rapport à celui de tout autre polygone de *m* côtés, non tangents à l'ellipse E, dont les sommets s'appuieraient respectivement sur les *m* ellipses E′, E″, etc. C'est une conséquence du théorème VI.

35. Les deux théorèmes XIII et XIV, qui terminent le Mémoire, sont une conséquence évidente de ceux qui précèdent, en y joignant le théorème C que j'ai démontré plus haut, et qui l'est du reste dans le *Traité* de M. Pon

celet, page 277. Il est donc inutile d'entrer à leur égard dans aucun détail. Ces théorèmes sont ainsi conçus :

Théorème XIII. — *Quand un rayon lumineux parti d'un point d'une ellipse se réfléchit sur la courbe et revient au même point après un certain nombre de réflexions, le polygone formé par les directions consécutives de ce rayon a toujours le même périmètre, quel qu'ait été sur la courbe son point de départ, le nombre des réflexions étant toujours le même.*

Théorème XIV. — Plus généralement, m *ellipses étant décrites des mêmes foyers, si un rayon parti d'un point de l'une se réfléchit successivement sur les autres et revient au même point, le polygone formé par les* m *directions du rayon a toujours le même périmètre, quel qu'ait été le point de départ du rayon.*

Ce périmètre est maximum *par rapport à tous les autres polygones de* m *côtés, dont les sommets seraient situés respectivement sur les* m *ellipses.*

Plusieurs ellipses peuvent se confondre. Une ellipse peut avoir son petit axe nul et se réduire au segment rectiligne compris entre les deux foyers. Toutes les tangentes à cette ellipse seront des droites passant par ces points. C'est le cas représenté dans la *fig.* 10. Le polygone est *abcdefghika*.

Propriétés des arcs associés dans les coniques sphériques.

36. La plupart des théorèmes démontrés dans ce Mémoire s'appliquent aux *coniques sphériques*, ainsi que M. Chasles en fait expressément la remarque. Cette analogie, qui n'est pas difficile à établir, demande cependant quelques explications.

En premier lieu, il est évident que la démonstration du théorème I, dans lequel on substituera des arcs de grand cercle aux simples lignes droites, subsistera sur la sphère, si la proposition de M. Poncelet, qui en fait la base, est vraie pour les coniques sphériques. Or c'est précisément celle qui fait l'objet du n° 817 de la *Géométrie supérieure*, page 573; car cette dernière peut s'énoncer ainsi qu'il suit :

Étant donnés deux arcs tangents à une conique sphérique, si, par l'un de leurs points de rencontre, on mène deux arcs passant par les deux foyers de la conique, l'angle des deux arcs tangents et l'angle des deux arcs vecteurs ont le même arc bissecteur.

37. D'où l'on conclut que *les deux arcs tangents sont également inclinés sur l'arc mené, par leur point de concours, tangentiellement à la conique sphérique homofocale à la proposée et passant par ce point.*

38. D'après cela, le théorème I subsiste pour les coniques sphériques, avec cette seule distinction que les *arcs associés* ont leur différence assignable en arc de grand cercle, au lieu d'être assignable en ligne droite.

Le théorème II s'y applique par conséquent aussi.

Quant au théorème III, relatif au quadrilatère circonscriptible, il est démontré n° 822, page 578, de la *Géométrie supérieure*, et, par conséquent, il donne lieu au théorème IV, comme dans les coniques planes.

39. Les théorèmes V et VI s'appliquent aux coniques sphériques, par des raisonnements identiques à ceux que j'ai employés. Quant aux propriétés de *maximum* et de *minimum*, elles ont également lieu pour les polygones sphériques que l'on considère dans ces deux théorèmes par les mêmes motifs. En effet, soit *abcd*... un de ces polygones; puisque tous les sommets *a*, *b*, *c*, *d*, etc., sont situés sur une conique sphérique C′, homofocale à celle C que le polygone enveloppe, deux côtés consécutifs quelconques, tels que *ab*, *bc*, sont également inclinés sur l'arc tangent en *b* à la conique C′ (37). Or c'est là précisément

la propriété caractéristique des polygones à *périmètre maximum* inscrits dans une courbe plane ou sphérique quelconque, ainsi qu'on le démontre très-simplement dans plusieurs ouvrages de Géométrie. La propriété de *minimum*, par rapport à la conique inscrite, résulte du théorème IV. Car, d'après cette proposition, l'arc normal à la conique C au point de contact d'un côté quelconque du polygone, de bc par exemple, passe par le point de concours des arcs tangents, en b et c, à la conique C', lieu des sommets a, b, c, d, etc., puisque ce point de concours n'est autre chose que le centre du petit cercle inscrit dans le triangle sphérique formé par les côtés successifs ab, bc, cd du polygone.

Or c'est là précisément la propriété caractéristique des polygones à *périmètre minimum*, circonscrits à une courbe donnée, plane ou sphérique.

40. Des théorèmes qui précèdent découlent naturellement les théorèmes VIII, X, XI et XII, pour les coniques sphériques comme pour les coniques planes. On pourrait même dire que les propositions XIII et XIV sont également vraies pour les ellipses sphériques, en supposant toutefois que le rayon lumineux se meuve dans un milieu qui infléchisse sa trajectoire suivant un arc de grand cercle de la sphère sur laquelle ces ellipses sont décrites.

41. Toutes les propriétés qui viennent d'être démontrées en engendrent de nouvelles, à cause de la dualité constante à laquelle sont soumises les propositions sphériques.

On sait qu'à des coniques sphériques homofocales correspondent, sur la sphère, des coniques *homocycliques*, qui sont supplémentaires des premières. Le théorème I devient celui-ci :

Quand deux ellipses sphériques, dont l'une enveloppe *l'autre, ont les mêmes arcs cycliques, le segment qu'un arc de grand cercle tangent à la conique interne forme dans la conique externe, a toujours la même surface.* Ce théorème est démontré n° 813 de la *Géométrie supérieure*, page 571.

42. Réciproquement : *Si le segment qu'un arc de grand cercle, tangent à une conique sphérique, forme dans une seconde conique qui enveloppe la première, a toujours la même surface, cette seconde conique est homocyclique à la première.*

En effet, supposons que cela n'ait pas lieu. Soit *ab* l'un des arcs tangents à la conique C. Décrivons la conique Σ tangente à l'arc *ab* et homocyclique à la conique extérieure C'; cette conique est unique et déterminée.

Considérons actuellement quatre autres arcs tangents à la conique C. Par suite de la condition à laquelle ils sont soumis par l'énoncé de la question, et en vertu du théorème précédent (41), ces arcs seront tangents à la conique Σ; les coniques C et Σ ont cinq arcs tangents communs; donc elles sont une seule et même courbe. Ainsi le théorème est démontré.

43. Il résulte de ces deux propositions ce fait remarquable que, à une *différence d'arcs* assignables en arcs de cercle, correspond une *égalité de surfaces* dans la conique supplémentaire.

44. Le théorème II (3e du Mémoire de M. Chasles) a pour correspondant celui-ci :

Deux arcs tangents à une conique sphérique coupent une seconde conique homocyclique à la première, en quatre points situés sur un petit cercle qui a pour centre le pôle de l'arc de grand cercle qui passe par les points de contact des deux arcs tangents.

On en trouve la démonstration, sous un autre énoncé, au n° 812 de la *Géométrie supérieure*.

45. *Si les deux arcs tangents à la première conique ont une extrémité commune sur la seconde, le triangle sphérique qu'ils déterminent sur celle-ci est inscriptible dans un petit cercle qui lui est tangent en ce point.*

Car ce triangle n'est autre chose que le quadrilatère du n° 44, dans lequel deux sommets sont infiniment voisins l'un de l'autre.

On peut remarquer l'analogie de ces deux dernières propositions avec celle qui fait l'objet du n° 764 de la *Géométrie supérieure* (*voir* la note au bas de la page 537).

Celle du n° 45 correspond au théorème IV.

46. *Si l'on divise un arc d'une conique sphérique en* m *arcs par des cordes qui retranchent des segments de surfaces égales, on forme ainsi une portion de polygone sphérique circonscrit à une seconde conique homocyclique à la première.*

Cette portion de polygone a une surface maximum *par rapport à toute autre portion de polygone de même nombre de côtés inscrite dans le premier arc, et* minimum *par rapport à toute autre portion de polygone circonscrite au second arc, c'est-à-dire à l'arc intercepté dans la conique inscrite.*

Cette proposition, qui correspond aux théorèmes V et VI, est facile à démontrer.

La première partie résulte immédiatement du théorème ci-dessus (42); et la seconde est une conséquence de ce que chaque côté du polygone touche, par son point milieu, la conique intérieure (*Géométrie supérieure*, n° 801). Or c'est précisément la propriété caractéristique des polygones de surface *minimum* et *maximum* qui sont à la fois inscrits et circonscrits à deux courbes données. Ainsi le théorème est démontré.

47. Le principe sur lequel repose ce dernier raisonnement, savoir : *que chaque côté du polygone touche, par son point milieu, la conique intérieure,* peut aussi se conclure d'un principe général démontré par M. Ch. Dupin, dans son *Mémoire sur la stabilité des corps flottants,* et qui est ainsi conçu : « Le plan de flottaison d'un corps » flottant touche la surface enveloppe des plans de flot- » taison ou un point qui est toujours le centre de gravité » de ce plan, quelle que soit la position d'équilibre du » corps que l'on considère. »

En effet, imaginons la portion de cône qui a son sommet au centre de la sphère et pour base la conique sphérique extérieure. On peut le regarder comme un corps flottant ; les plans menés par le centre de la sphère et par les cordes du polygone, retranchent dans ce cône des volumes égaux, puisque les cordes retranchent, par hypothèse, des segments égaux sur la conique qui lui sert de base. Ainsi ces plans peuvent être regardés comme étant des plans de flottaison, et la surface enveloppe de ces plans est le cône qui a pour base la conique intérieure.

Décrivons une sphère concentrique à la première et infiniment voisine ; elle retranchera, des volumes successifs dont nous venons de parler, des parties équivalentes ; donc les onglets restants sont aussi tous de même volume. Le plan de flottaison de chacun d'eux se réduit à une espèce de trapèze, mi-partie sphérique et mi-partie rectiligne, dont deux côtés sont des portions égales infiniment petites de deux rayons de la sphère, et dont les deux autres côtés sont, l'un la corde ab que l'on considère dans le polygone, et l'autre la corde semblable $a'b'$ du polygone situé sur la sphère concentrique. La base $aba'b'$ de l'onglet touche la surface annulaire retranchée par la sphère concentrique dans le cône intérieur (qui est la surface enveloppe des flottaisons), en un point qui est son centre de gravité; donc le côté ab touche la conique intérieure par son point milieu qui est infiniment voisin de ce centre de gravité. C. Q. F. D.

48. *Si l'on conçoit une ellipse sphérique divisée en un certain nombre d'arcs tels, que les arcs de grand cercle qui joignent leurs extrémités, de proche en proche, retranchent de la surface de l'ellipse des segments égaux :*

1°. *Tous les côtés du polygone sphérique ainsi déterminé seront tangents à une même ellipse homocyclique à la première.*

Ceci résulte immédiatement de (42).

2°. *On pourra décrire une infinité d'autres polygones, inscrits à l'une de ces ellipses et circonscrits à l'autre, qui se fermeront comme le premier.*

Car si l'on forme la figure supplémentaire, on aura deux ellipses homofocales auxquelles le premier polygone réciproque sera inscrit et circonscrit, respectivement, et qui en admettront une infinité d'autres de même nombre de côtés, satisfaisant à la même condition (40). A ces polygones correspondront, dans la figure primitive, ceux que nous considérons; d'où l'on voit que ceux-ci se fermeront comme le font leurs supplémentaires.

Ainsi l'ellipse donnée pourra être divisée comme elle l'a été une première fois, d'une infinité de manières différentes.

3°. *La surface de tous ces polygones est la même.*

Car elle est égale à la surface de l'ellipse diminuée de m fois la surface d'un des segments égaux retranchés dans cette surface par l'un quelconque des côtés de ces polygones.

4°. *Cette surface est* maximum *par rapport à tous autres polygones du même nombre de côtés inscrits à l'ellipse donnée.*

5°. *Et elle est* minimum *par rapport à tous autres* *polygones du même nombre de côtés circonscrits à la seconde ellipse.*

Ces deux derniers alinéa résultent évidemment de (46).

SECTION II.

DE QUELQUES PROPRIÉTÉS DES ARCS ÉGAUX DE LA LEMNISCATE.

49. Les propriétés des arcs semblables (ou associés) des sections coniques, donnent lieu à quelques propriétés curieuses des arcs d'une lemniscate qui ont même longueur. Celles-ci ont été énoncées, sans démonstration, par M. Chasles, dans le XXI^e volume des *Comptes rendus* (année 1845, page 199).

Je me propose de les démontrer ici. Mais pour montrer comment elles dérivent de celles qui font l'objet du présent chapitre, il est nécessaire d'entrer d'abord dans quelques explications préliminaires au sujet de la courbe à laquelle elles se rapportent.

50. La *lemniscate* est le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du centre d'une hyperbole équilatère sur les tangentes à cette courbe.

Le rayon vecteur et sa normale, menés par un point de la lemniscate, déterminent sur l'hyperbole deux points qui sont situés sur une même ordonnée.

En effet, l'hyperbole, rapportée à son centre et à ses axes, a pour équation

$$y^2 - x^2 + a^2 = 0.$$

La tangente au point (x', y') a pour équation

$$y - \frac{x'}{y'}x + \frac{a^2}{y'} = 0,$$

et la perpendiculaire abaissée du centre O (*) sur cette tangente a pour équation

$$Y = \frac{y'}{x'} X.$$

C'est le rayon vecteur de la lemniscate. On voit, par un calcul facile, qu'il rencontre l'hyperbole en un point pour lequel on a

$$x = x'.$$

Ce qui démontre le théorème.

51. Pour trouver les coordonnées (x'', y'') du point m de la lemniscate situé sur le rayon OM, qui aboutit au point (x', y') de l'hyperbole, il faut chercher le point de rencontre de la perpendiculaire $Y = \frac{y'}{x'} X$, abaissée sur la tangente au point M′ $(x' - y')$ de l'hyperbole, avec cette tangente, qui a pour équation

$$y + \frac{x'}{y'} x - \frac{a^2}{y'} = 0.$$

On trouve facilement

$$x'' = \frac{a^2 x'}{y'^2 + x'^2} \quad \text{et} \quad y'' = \frac{a^2 y'}{y'^2 + x'^2}.$$

On en déduit, pour la valeur du rayon vecteur ρ de la lemniscate,

$$\rho = \frac{a^2}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}.$$

Le rayon vecteur de l'hyperbole a de son côté pour valeur

$$R = \sqrt{x'^2 + y'^2}.$$

Donc

$$R . \rho = a^2 = \text{constante}.$$

Ainsi *les rayons vecteurs, issus du centre commun des*

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

deux courbes, et de même direction, ont leur produit constant.

Ce résultat dérive immédiatement des équations polaires des deux courbes qui sont respectivement

$$R = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}} \quad \text{et} \quad \rho = a\sqrt{\cos 2\theta}.$$

52. Le premier théorème (50) donne un moyen bien simple de construire la lemniscate par points : sur chaque double ordonnée de l'hyperbole, comme diamètre, décrivez une circonférence de cercle; elle coupera les deux rayons vecteurs, qui aboutissent aux extrémités du diamètre, en deux points qui appartiennent à une lemniscate.

Le second fournit un autre moyen également facile : sur le rayon vecteur OM comme diamètre, décrivez une demi-circonférence. Prenez, à partir du point O, une corde Or égale à a; le pied de la perpendiculaire abaissée du point r sur OM donne le point m de la lemniscate.

Cette demi-circonférence coupe le rayon vecteur symétrique OM′ au point de la lemniscate m', symétrique du point m, puisque l'angle Om'M est droit. De plus, elle touche la courbe en ce point. Car la normale au point n', infiniment voisin de m', n'est autre chose que la tangente à l'hyperbole infiniment voisine de la tangente m'M; elle aboutit donc aussi au point M; ce qui prouve que les deux points m', n' sont sur la circonférence de cercle qui a OM pour diamètre.

53. Cette dernière remarque fournit un moyen très-simple de mener la normale et la tangente en un point m d'une lemniscate, sans que cette courbe soit tracée. En effet, joignez Om qui coupe l'hyperbole en M; prenez le point M′, symétrique de M. La droite $m\mu$, qui joint le pont m au point μ, milieu du rayon vecteur OM′, est la normale.

Autrement. Remarquons que l'angle tm_1O, formé par la tangente mt avec le rayon vecteur Om, sous-tend, sur la circonférence tangentielle en question, un arc égal à celui que sous-tend l'angle OM'm. Celui-ci est le complément du double de l'angle vecteur θ. Il suffit donc de mener, par le point m, une droite qui fasse avec Om un angle égal à $(90^\circ - 2\theta)$, dans un sens de rotation tel, qu'elle vienne couper l'axe transverse de l'hyperbole en un point situé, par rapport au grand axe, dans la même région que le point m lui-même.

On peut aussi joindre Mm', et faire l'angle

$$\mathrm{M}mt' = m\mathrm{M}m'.$$

54. Remarquons encore, en passant, que si l'on rabat tous les rayons vecteurs sur un quelconque d'entre eux, tous les segments, tels que Mm, y formeront une série de segments en involution. Cela résulte de l'équation du nº 51. O est le *point central de l'involution.*

55. Voici une autre construction de la lemniscate.

Que, sur le grand axe de l'hyperbole, on prenne, à partir du centre O, *une distance* OC $= a\sqrt{2}$; *si, de ce point comme centre avec le rayon* a, *on décrit un cercle, chaque rayon issu du point* O *déterminera, dans ce cercle, une corde égale au rayon de la lemniscate qui a la même direction.* En effet, le cercle a pour équation polaire

$$r = a\sqrt{2}\cos\theta \pm \sqrt{a^2 - 2a^2.\sin^2\theta}$$

(*voir* Francœur, nº 385).

La différence des deux racines de cette équation est égale à la corde interceptée ef; donc on a

$$ef = a\sqrt{1 - 2\sin^2\theta} = a\sqrt{\cos 2\theta}.$$

C'est précisément la valeur du rayon de la lemniscate sous l'angle vecteur θ. Cette construction remarquable est due à M. Chasles (*voir* le Mémoire cité).

56. Voici enfin une autre propriété de la lemniscate, qui va nous être utile ; c'est que *cette courbe a, outre son point double réel, situé en son centre, deux autres points doubles, imaginaires, situés à l'infini sur un cercle ;* propriété qui appartient à toutes les courbes auxquelles on donne quelquefois, par extension, le nom de *lemniscate*, lesquelles sont le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point fixe sur les tangentes à une conique. (*Voir*, pour la démonstration de cette propriété, le Mémoire de M. Chasles, *sur les courbes du quatrième ordre. Comptes rendus* de 1853, 2^e volume, page 438.)

Il en résulte qu'un cercle quelconque ne peut couper la courbe qu'en quatre points ; car, d'ailleurs, ce cercle passe toujours par les deux points doubles imaginaires situés à l'infini (*Géométrie supérieure*, n^{os} 651 et 652).

Si le cercle passe par l'origine, il ne coupe la courbe qu'en deux autres points ; et si ces points sont infiniment voisins, ce qui était le cas du cercle décrit ci-dessus (52, 3^e alinéa), le cercle touche la courbe en ce point, et il ne la coupe qu'au point double qui est son centre.

57. Passons actuellement aux propriétés des arcs égaux de la courbe.

Il résulte de la proposition (50) que les rayons vecteurs menés aux extrémités d'un arc de la lemniscate, étant prolongés, comprennent un arc de l'hyperbole équilatère, et que les normales aux deux rayons vecteurs touchent l'hyperbole en deux points qui déterminent un second arc égal au premier. Chacun de ces deux arcs peut être considéré comme *correspondant* à l'arc de la lemniscate.

Cela posé, il y a, d'après M. Chasles, entre les arcs de la lemniscate et leurs correspondants sur l'hyperbole, cette relation remarquable :

A deux arcs égaux de la lemniscate correspondent, sur l'hyperbole, deux arcs dont la différence est rectifiable.

C'est par suite de ce théorème, que les propriétés des *arcs associés* de l'hyperbole donnent lieu à des propriétés des arcs égaux de la lemniscate; et l'on a les théorèmes suivants :

58. *Quand deux arcs d'une lemniscate sont égaux, les normales aux rayons vecteurs qui aboutissent aux extrémités de ces arcs, forment un quadrilatère circonscriptible au cercle.*

C'est une conséquence, évidente par ce qui précède, du théorème III (8).

59. *Étant pris sur une lemniscate plusieurs arcs égaux entre eux, si par les extrémités de chacun d'eux on mène les normales aux rayons vecteurs qui y aboutissent, et qu'on prenne le point de concours de ces normales, tous ces points seront sur une hyperbole homofocale à l'hyperbole équilatère.*

Ceci résulte du théorème I, puisque ces normales sont tangentes en des points qui marquent, deux à deux, sur l'hyperbole des arcs associés.

Ce théorème fournit une construction très-simple pour déterminer, sur la lemniscate, des arcs égaux à un arc donné, et, par conséquent, des arcs multiples, et aussi pour déterminer un arc égal à la somme ou à la différence de deux arcs donnés.

60. *Si, à partir d'un point de la lemniscate, on prend, de part et d'autre, deux arcs égaux entre eux, mais de longueur quelconque, et que, par les extrémités de ces deux arcs, on mène les normales aux rayons vecteurs qui aboutissent à ces points, le lieu géométrique du point de concours de ces deux normales sera une ellipse homofocale à l'hyperbole équilatère.*

Car, d'après le théorème II (5), ce sera une conique homofocale d'*espèce différente*. Cette ellipse coupe l'hyperbole au point de contact s de la tangente issue de l'origine commune des arcs égaux; et, d'après le théorème IV, on pourra décrire un cercle tangent à la fois aux deux normales et à l'hyperbole en ce point s.

61. Nous avons vu (56) que, par chaque point d'une lemniscate, on peut mener un cercle tangent à la courbe en ce point et passant par le centre de la courbe. Ces cercles donnent lieu à la propriété suivante :

Étant pris sur une lemniscate plusieurs arcs égaux, si par les extrémités de chacun d'eux on mène les cercles tangents à la courbe en ces points, respectivement, et passant par le centre, le point d'intersection de ces deux cercles aura pour lieu géométrique une espèce de lemniscate qui sera le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du centre de la courbe sur les tangentes à une hyperbole non équilatère.

En effet, ces deux cercles se coupent en un point i; leur corde commune Oi est perpendiculaire à la droite Cc' qui joint leurs centres, et par conséquent aussi sur la droite MN qui joint les extrémités des diamètres OM, ON. Cette droite MN est une corde de l'hyperbole équilatère (52); c'est la corde de contact de l'angle circonscrit à l'arc MN qui *correspond* à l'arc mn de la lemniscate. Le sommet de cet angle est constamment situé sur une hyperbole Σ, homofocale à l'hyperbole équilatère (59); donc elle enveloppe une autre hyperbole Σ', qui est la polaire réciproque de Σ par rapport à l'hyperbole équilatère. (*Voir* Poncelet, *Propriétés projectives.*) Donc le point i est le pied de la perpendiculaire abaissée du centre O sur une tangente à cette hyperbole Σ'. C. Q. F. D.

62. *Étant pris sur une lemnicaste deux arcs égaux, si par leurs extrémités on mène quatre cercles tangents*

à la courbe en ces points respectivement, et passant tous par le centre de la courbe, ces quatre cercles sont tangents à un même cercle.

Ce théorème est une conséquence de la relation du n° 51,

$$R\rho = a.$$

Quand deux courbes sont liées par une telle relation entre leurs rayons vecteurs de même direction, on dit quelquefois que l'une est la *réciproque* ou l'*inverse* de l'autre. (*Voir*, par exemple, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* de 1855, une analyse intéressante des travaux de MM. Thomson et Liouville sur les *courbes et les surfaces réciproques.*)

La lemniscate est donc l'*inverse* de l'hyperbole équilatère, dont le centre est pris pour origine des rayons vecteurs. On sait, d'ailleurs, que l'inverse d'une circonférence est une ligne droite perpendiculaire au diamètre qui passe par l'origine, quand cette origine est prise sur la circonférence elle-même, et que c'est une autre circonférence quand l'origine est quelconque.

Cela posé, si l'on conçoit une tangente au point M de l'hyperbole, l'inverse de cette tangente est un cercle tangent en m à la lemniscate, et passant par l'origine O. A deux arcs égaux de la lemniscate correspondent sur l'hyperbole deux arcs *associés*, et les tangentes aux extrémités de ces arcs forment un quadrilatère circonscriptible au cercle. Les inverses de ces quatre tangentes sont quatre cercles tangents à la courbe inverse de ce cercle, c'est-à-dire à un même cercle, dont le centre se déterminera aisément par cette théorie des figures inverses. Ainsi le théorème est démontré.

CHAPITRE III.

GÉNÉRALISATION DES PROPRIÉTÉS DES FOYERS ET DES DIAMÈTRES CONJUGUÉS DES SECTIONS CONIQUES.

SECTION I^re^.

GÉNÉRALISATION DE LA THÉORIE DES FOYERS.

1. « Je me propose, dans cette Note (*), dit M. Chasles,
» d'indiquer le point de vue sous lequel on peut considérer
» ces points remarquables, pour que leurs propriétés s'ap-
» pliquent à tous les autres points du plan d'une section
» conique, et qu'il résulte de là une théorie générale, dont
» celle des foyers proprement dits ne soit plus qu'un cas
» particulier ; et, par théorie, j'entends ici non-seulement
» l'ensemble des théorèmes relatifs directement aux foyers,
» mais aussi de ceux non moins nombreux qui se rap-
» portent aux coniques homofocales. »

Ces divers théorèmes, dont l'auteur a donné les énoncés sans démonstration, sont, la plupart, des conséquences fort simples des principes exposés dans le *Traité de Géométrie supérieure*. Indiquer ces déductions, ce sera donc donner un nouvel exemple de la facilité avec laquelle ces méthodes fécondes s'appliquent aux questions géométriques.

§ I. — *Principes de cette généralisation.*

2. Théorème. — *Étant donnée une conique* A, *et étant pris un point fixe* S *dans son plan, on peut mener par ce point, d'une infinité de manières, deux droites telles, que le pôle de l'une soit sur l'autre. Ces deux droites sont toujours, en direction, deux diamètres conjugués*

(*) Voir les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences;* année 1846; tome XXII.

d'une certaine conique Σ (*), *qui est* relative *au point* S, *qui change de forme quand on passe à un autre point, et qui devient un cercle, quand le point* S *est un des foyers. Au point* S *correspond un second point* S′ *situé sur le même diamètre de la courbe* A, *mais de l'autre côté et à égale distance du centre; et la conique* Σ *est aussi* relative *à ce point.*

Réciproquement, *une conique* Σ *étant donnée, il existe deux systèmes de deux points* S *et* S′, *réels ou imaginaires, auxquels elle est relative. Ces points seront désignés sous le nom de* foyers *de la conique* A, relatifs *à la conique* Σ.

Pour démontrer ces diverses propositions, soient (*fig.* 1, *Pl. II*) O le centre de la conique donnée A, et S le point fixe pris dans son plan. Si l'on mène une droite quelconque S*l*, la droite S*p*, qui lui est *conjuguée*, divise en deux parties égales, au point *p*, la portion RR′ de la tangente parallèle à S*l*, qui est comprise entre les tangentes ST, ST′ issues du point S. Cette droite passe aussi par le point *i*, où la polaire TT′ du point S est coupée par le diamètre *mn* conjugué à S*l*. Les quatre droites ST, S*i*, ST′, S*l* formant un faisceau harmonique, on voit tout de suite que l'angle *i*S*l* est variable; car les deux droites S*i* et S*l* s'approchent ou s'éloignent en même temps de l'une des tangentes ST′.

De ce que les tangentes (réelles ou imaginaires) issues du point S divisent harmoniquement l'angle de deux droites conjuguées quelconques, il s'ensuit que celles-ci forment deux faisceaux homographiques *en involution* (*Géom. sup.*,

---

(*) Les surfaces du second degré donnent lieu à des considérations analogues. Quand trois droites, menées par un point fixe, sont telles, que la polaire de chacune d'elles, par rapport à une surface du second degré, soit comprise dans le plan des deux autres, on dit que ces droites sont des *axes conjugués relatifs au point fixe*. Et l'on a ce théorème :

Trois axes conjugués d'une surface du second degré, relatifs à un point fixe, sont toujours, en direction, trois diamètres conjugués d'une autre surface du second degré. (Voir *Aperçu historique*, page 604.)

n^{os} 689 et 244). Il faut donc montrer d'abord que les rayons homologues de deux tels faisceaux sont toujours, *en direction*, les diamètres conjugués d'une certaine conique. Séparons les centres des deux faisceaux; plaçons, par exemple (*fig.* 2), l'un en C′ et l'autre en C; on aura deux faisceaux homographiques de centres différents, dont les rayons homologues Cm, C′m, parallèles aux deux rayons tels que Sl, Si, se couperont sur une conique passant par les points C et C′ (*Géom. sup.*, n^{os} 545 et suivants). Mais d'après la propriété caractéristique des faisceaux en involution, tout rayon tel que Sl, étant considéré comme appartenant au deuxième faisceau, a encore le même homologue Si dans le premier. Par conséquent, au rayon C′m' du second faisceau (C′) parallèle à Cm, correspond dans le premier faisceau (C) un rayon Cm' parallèle à C′m; de sorte qu'à chaque point m de la conique correspond un autre point m' placé *symétriquement* par rapport au point O milieu de CC′. Les rayons Cm, C′m sont donc des *cordes supplémentaires*, et par conséquent ils sont, *en direction*, des diamètres conjugués. Or ces rayons sont respectivement parallèles aux droites conjuguées quelconques Sl, Si. Donc le théorème est démontré.

3. On sait (*Géom. sup.*, n° 249) que, dans deux faisceaux en involution, il existe toujours un système de deux rayons rectangulaires et qu'il n'en existe qu'un. Donc, en général, les droites conjuguées Si, Sl feront entre elles des angles *variables* et différant d'un angle droit. Un seul couple de ces droites sera rectangulaire, et, dans cette position, elles seront parallèles aux *axes principaux* de la conique Σ, lesquels peuvent ainsi se déterminer par la construction du n° 249. S'il arrive que ces droites conjuguées soient rectangulaires dans deux positions différentes, elles le seront dans toutes (*Géom. sup.*, n° 250). Or il est bien facile de voir, en suivant sur la figure les varia-

tions de l'angle iSl, que ce cas ne peut se présenter que si le point S est *intérieur* à la conique A; qu'il doit toujours se présenter, et que le point S doit être situé sur le grand axe de A si c'est une ellipse, et sur son axe réel si c'est une hyperbole. C'est ainsi qu'on se trouve naturellement conduit à constater l'existence des *foyers véritables* des sections coniques et à en déterminer la position. Et c'est peut-être la manière la plus naturelle de les introduire dans la théorie générale des sections coniques.

4. Il est évident que Σ n'est déterminée que de forme, et non de grandeur ni de position. Celles-ci varient en même temps que la position des points arbitraires C, C' qu'on prend pour centres des faisceaux homographiques. Mais toutes les coniques ainsi obtenues sont semblables. Le *rapport des axes* est donc seul déterminé. Pour l'obtenir, supposons d'abord que A soit (*fig.* 1) une ellipse et que le point S lui soit extérieur. D'abord le diamètre Sb' de Σ conjugué à Sa' est évidemment parallèle à OB, c'est-à-dire à TT'. De plus, comme ST et ST' sont, dans le cas actuel, les asymptotes de l'hyperbole Σ, si l'on mène par un point D de ST' une parallèle Da' à TT', les droites Sa', Da' sont dans le rapport des axes de Σ, en vertu d'une propriété bien connue des asymptotes.

Donc les triangles SxT', $Sa'D$ sont semblables et donnent

$$\frac{Da'}{Sa'} = \frac{xT'}{Sx};$$

d'où

$$\frac{\overline{Da'}^2}{\overline{Sa'}^2} = \frac{b'^2}{a'^2} = \frac{\overline{xT'}^2}{\overline{Sx}^2} = \frac{\overline{xT}^2}{\overline{Sx}^2}.$$

Or, par les propriétés générales des courbes (*Géom. sup.*, n° 480), on a

$$\frac{\overline{xT}^2}{xC.xC'} = \frac{b^2}{a^2};$$

puis, par les propriétés harmoniques (art. 70, nº 13),

$$xC.xC' = xO.xS \text{ et } \overline{OC'}^2 = xO.SO \text{ (art. 69, nº 10).}$$

De ces équations on tire

$$xC.xC' = \frac{xS.a^2}{SO},$$

puis

$$\frac{xC.xC'}{xT^2} = \frac{xS.a^2}{SO.xT^2} = \frac{a^2}{b^2};$$

d'où

$$\frac{xS}{xT^2} = \frac{SO}{b^2} = -\frac{Sx}{xT^2}.$$

Multipliant de part et d'autre par Sx, il vient

$$\frac{SO.Sx}{b^2} = -\frac{Sx^2}{xT^2} = \frac{SC.SC'}{b^2},$$

à cause de

$$SO.Sx = SC.SC';$$

puis

$$-\frac{Sx^2}{xT^2} = \frac{SO^2 - a^2}{b^2},$$

à cause de

$$SC.SC' = (SO + a)(SO - a) = SO^2 - a^2;$$

donc enfin

$$\frac{Sx^2}{xT^2} = \frac{a^2 - \overline{SO}^2}{b^2} = \frac{a'^2}{b'^2}.$$

Pour que cette formule soit générale, il faut écrire

$$\frac{a'^2}{b'^2} = \pm \frac{a^2 - \overline{SO}^2}{b^2}.$$

En effet, si la courbe A est une hyperbole, il arrive que xT est imaginaire si xC et xC' sont réels, ou, réciproquement, que xT est réel tandis que xC et xC' sont imaginaires. Il faut écrire alors

$$xT\sqrt{-1},$$

ou bien

$$xC\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad xC'\sqrt{-1};$$

dans l'un et l'autre cas, l'équation

$$\frac{xT^2}{xC.xC'} = \ldots\ldots$$

devient

$$-\frac{xT^2}{xC.xC'} = \ldots,$$

et ce changement de signe entraîne celui de la formule finale ; ainsi se trouve expliqué le signe $\pm$ de cette formule.

5. Si le point S est intérieur à la courbe A, les tangentes ST, ST' sont imaginaires. Donc Σ est une conique dont les asymptotes sont imaginaires ; autrement dit, c'est une *ellipse*. Dans ce cas, pour avoir le rapport des axes, il faut prendre un autre tour de démonstration. Les rayons doubles des faisceaux en involution produits par les droites conjuguées Si, Sl, sont alors imaginaires, et par conséquent on peut regarder les deux faisceaux comme la perspective de deux autres faisceaux dans lesquels les rayons homologues seraient tous rectangulaires (*Géom. sup.*, n^os 180 et 250). Sur le nouveau plan de projection la courbe Σ est devenue un cercle, et cela a lieu pour une infinité de centres de projection, qui sont tous distribués sur deux droites passant par le centre commun des faisceaux et qu'on peut déterminer par la méthode indiquée (n° 172) (*).

(*) On peut aussi remarquer que, si autour de deux droites conjuguées Si, Sl, on fait tourner deux plans rectangulaires, ces plans se couperont suivant la génératrice d'un cône du deuxième degré (*Mémoire sur les surfaces engendrées par une ligne droite*, n° 89). Prenons le cône relatif à deux autres droites conjuguées Si', Sl'; ces deux cônes se couperont suivant deux génératrices qui seront les deux droites en question. Car, d'un point quelconque

Prenons parmi ces points, celui qui, étant à l'infini (539), projette à l'infini la droite à l'infini de la figure primitive, ou, en d'autres termes, faisons subir à cette figure la transformation indiquée au n° 534 de la *Géométrie supérieure*; dans la figure transformée ou homographique, la conique A′ aura toujours son centre en O′, projection ou homologue de O; Σ sera devenue un cercle; ses rayons conjugués a' et b' seront devenus égaux entre eux (r et r') et rectangulaires. Les demi-diamètres a et b de A seront demeurés parallèles à r et r' (n° 534), et ils seront actuellement rectangulaires; désignons-les par α et β. Ce sont les axes principaux de A′ et le point F, homologue de S, est le *foyer véritable* de A′.

Si A et A′ sont des ellipses, on a

$$FO'^2 = c^2 = \alpha^2 - \beta^2.$$

Écrivons

$$\frac{\beta^2}{r'^2} = \frac{\alpha^2 - c^2}{r^2}.$$

La transformation homographique ne change pas le rapport des segments parallèles (n° 536); on a donc

$$\frac{\beta}{r'} = \frac{b}{b'}; \quad \frac{\alpha}{r} = \frac{a}{a'}; \quad \frac{c}{r} = \frac{SO}{a'};$$

donc

$$\frac{a'^2}{b'^2} = + \frac{a^2 - \overline{SO}^2}{b^2}.$$

Si A et A′ sont des hyperboles, on a

$$c^2 = \alpha^2 + \beta^2,$$

ce qui donne

$$\frac{a'^2}{b'^2} = - \frac{a' - \overline{SO}^2}{b^2};$$

ainsi la formule est démontrée dans tous les cas.

---

de chacune d'elles, on verra sous un angle droit les angles lSi, $l'Si'$, et par suite celui de deux *conjuguées* quelconques (n° 250).

6. Passons à la discussion relative au nombre des foyers. Soient a' et b' les deux diamètres de Σ qui sont parallèles aux diamètres a et b de A. Faisons, pour abréger $\frac{a'}{b'} = m$ et supposons $m > 1$, ce qui est permis. Supposons actuellement que A soit une ellipse; l'équation ci-dessus devient

$$\overline{SO}^2 = a^2 - m^2 b^2$$

si l'on prend le point S sur le diamètre a, et

$$\overline{SO}^2 = b^2 - m^2 a^2$$

si on le prend sur le diamètre b. Supposons que Σ soit aussi une ellipse, m^2 est *positif*, et si l'on a $a^2 > m^2 b^2$, auquel cas il existe deux points réels S et S′ sur le diamètre a, on voit que $b^2 < m^2 a^2$ et qu'il n'en peut exister sur le diamètre b. Si c'est au contraire sur b que se trouvent les deux points S et S′, c'est une preuve que $b^2 > m^2 a^2$, et par suite il n'en existe point sur a, puisqu'on a à fortiori $a^2 < m^2 b^2$.

Ainsi A et Σ étant des ellipses, il n'existe que deux points S et S′ sur l'un des deux diamètres parallèles.

Σ étant toujours une ellipse, supposons que A soit une hyperbole; la formule devient

$$\overline{SO}^2 = a^2 + m^2 b^2$$

ou

$$\overline{SO}^2 = b^2 + m^2 a^2;$$

mais ici b^2 est *négatif*, on retombe donc sur les mêmes formules que ci-dessus et on arrive à la même conclusion. Mais de plus on voit que c'est sur le diamètre réel a que les points doivent se trouver; car pour le diamètre imaginaire, la formule deviendrait

$$\overline{SO}^2 = -b^2 - m^2 a^2$$

et donnerait pour SO deux valeurs imaginaires.

Quand Σ est une hyperbole, $\frac{a'^2}{b'^2} = m^2$ est négatif; si A est une ellipse, les deux équations ci-dessus deviennent

$$\overline{\mathrm{SO}}^2 = a^2 + m^2 b^2,$$

ou

$$\overline{\mathrm{SO}} = b^2 + m^2 a^2.$$

Les expressions de SO données par ces deux équations étant toujours réelles, on obtient quatre positions du point S, deux sur le diamètre a et deux sur le diamètre b. Ces deux-ci ne sont autre chose que les points de concours des tangentes menées à la conique A par les deux premiers, qui sont extérieurs à A puisqu'on a $\mathrm{SO} > a$.

Si A est une hyperbole en même temps que Σ, on ne peut faire que deux suppositions : ou bien le diamètre a, sur lequel on cherche les points S et S′, est un diamètre imaginaire, ou bien c'est un diamètre réel. Dans le premier cas, m^2 étant toujours négatif, on a

$$-m^2 = \frac{\overline{\mathrm{SO}}^2 + a^2}{b^2}$$

qui donne pour SO deux valeurs imaginaires. Dans le second cas, on a

$$\mathrm{SO}^2 = a^2 - m^2 b^2,$$

qui peut également donner des valeurs imaginaires pour SO si l'on a $a^2 < m^2 b^2$. Dans le cas où elles sont réelles, on a $\mathrm{SO} < a$, et les points S et S′ sont extérieurs à l'hyperbole A, comme on a vu plus haut que cela doit être.

§ II. — *Propriétés relatives à un seul foyer* (*).

7. Concevons que la conique Σ ait son centre au point S.

« Quand le point S est pris au dehors de la conique A, on peut mener par ce point deux tangentes à cette courbe; chacune de ces droites a son pôle situé sur elle-même, de sorte que chacune de ces lignes représente, à elle seule, un

(*) Tout ce paragraphe est extrait textuellement de la Note de M. Chasles. Il ne demande aucune explication, et je ne l'ai reproduit que pour éviter au lecteur la peine de recourir aux *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*.

système de deux diamètres conjugués de la conique Σ : ce qui montre que cette courbe est une hyperbole qui a ces deux tangentes pour asymptotes. Cette hyperbole se trouve donc inscrite dans le même angle que la courbe A. Donc le point S est un *centre d'homologie* des deux coniques.

» Cela a encore lieu quand le point S est situé dans l'intérieur de A ; seulement les tangentes communes sont alors idéales. Ainsi l'on peut dire que :

» *La conique* Σ relative *à un point* S, *est celle qui, ayant son centre de figure en ce point, a ce point lui-même pour centre d'homologie avec la courbe proposée* A. Cette propriété de la conique Σ suffit pour la définir.

» Ainsi dans le cas des foyers véritables, un cercle décrit d'un foyer comme centre a ce point pour centre d'homologie avec la conique. Propriété importante, due à M. Poncelet.

» 8. Voici plusieurs autres propriétés de la conique Σ, dont chacune suffit, comme la précédente, pour déterminer et construire cette courbe.

» Concevons la polaire du point S par rapport à la conique A. Soient m un point de cette courbe, et m' le point homologue de Σ. Soit mp la perpendiculaire abaissée du point m sur la polaire du point S; on aura

$$\frac{Sm}{mp} : Sm' = \text{const.} \quad \text{ou} \quad \frac{Sm}{mp} = \lambda . Sm'$$

(*Géom. sup.*, n° 529), c'est-à-dire que *le rapport des distances de chaque point de la conique* A *au foyer* S *et à sa polaire* D, *est proportionnel au demi-diamètre de la conique* Σ, *sur lequel se compte la distance au foyer.*

» Quand le point S est un foyer véritable, on retrouve la propriété connue de la directrice.

» 9. Soient n le second point où le rayon Sm rencontre A,

n' le point qui lui correspond sur Σ, et nq la perpendiculaire abaissée du point n sur la polaire du point S ; on a, comme pour le point m,

$$\frac{\mathrm{S}n}{nq} = \lambda.\mathrm{S}n'.$$

Or $\mathrm{S}n' = -\mathrm{S}m'$, puisque le point S est le centre de Σ ; donc

$$\frac{\mathrm{S}n}{nq} = -\lambda.\mathrm{S}m'.$$

Par suite,

$$\frac{1}{\mathrm{S}m} - \frac{1}{\mathrm{S}n} = \frac{1}{\lambda.\mathrm{S}m'}\left(\frac{1}{mp} + \frac{1}{nq}\right).$$

Or $\left(\frac{1}{mp} + \frac{1}{nq}\right)$ est une quantité constante, quelle que soit la direction de la droite Sm (*Géom. sup.*, n° 683) ; donc

$$\frac{1}{\mathrm{S}m} - \frac{1}{\mathrm{S}n} = \frac{\text{constante}}{\mathrm{S}m'}.$$

» Les lignes *Sm*, *Sn* ont des signes qui sont les mêmes ou *sont différents*, selon que le point S est au dehors ou dans l'intérieur de la courbe A. On peut donc écrire

$$\frac{1}{\mathrm{S}m} \pm \frac{1}{\mathrm{S}n} = \frac{\text{constante}}{\mathrm{S}m'},$$

ce qui exprime que *si autour du foyer* S *on fait tourner une transversale qui rencontre la conique* A *en deux points, la somme ou la différence des valeurs inverses des distances de ces deux points au foyer, est proportionnelle à la valeur inverse du demi-diamètre de* Σ *dirigé suivant la transversale.*

» Ce sera la somme quand le point S sera extérieur à la conique A, et la différence quand il lui sera extérieur.

» 10. Soit d le demi-diamètre de A parallèle à la corde mn, on aura

$$\frac{mn}{d^2} = \frac{\lambda''}{\mathrm{S}m},$$

c'est-à-dire que *toute corde de la conique* A, *qui, prolongée au besoin, passe par le foyer* S, *étant divisée par le carré du demi-diamètre de* A, *qui lui est parallèle, donne un quotient proportionnel à la valeur inverse du demi-diamètre de la conique* Σ *de même direction.* »

Car l'équation du n° 9 donne

$$\frac{\mathrm{S}m \pm \mathrm{S}n}{\mathrm{S}m.\mathrm{S}n} = \lambda' \frac{1}{\mathrm{S}m'};$$

or on a (*Géom. sup.*, n° 478)

$$\frac{\mathrm{S}m.\mathrm{S}n}{d^2} = \text{const.};$$

donc

$$\frac{mn}{d^2} = \frac{\lambda''}{\mathrm{S}m'}.$$

§ III. — *Propriétés relatives à deux foyers.*

11. « Considérons deux points situés sur un même diamètre de la conique A, de part et d'autre et à égale distance du centre, ces deux points auront la même conique relative Σ. J'appellerai ces deux points *foyers conjugués.*

» *Les rayons menés de chaque point d'une conique* A *à deux foyers conjugués, divisés respectivement par les demi-diamètres qui leur sont parallèles dans la conique* Σ *relative aux deux foyers, ont leur somme ou leur différence constante.*

» Ce sera la *somme* si la conique A est une ellipse, et la *différence* si c'est une hyperbole, quelle que soit la position des foyers, au dedans ou au dehors de la courbe. »

En effet, soit mené Sn parallèle à S$'m$; on a

$$\mathrm{S}n = \mathrm{S}'m \quad \text{et} \quad nq'' = mp''.$$

D'après cela, on a

$$\frac{\mathrm{S}m}{d} = \lambda.mp''', \quad \frac{\mathrm{S}'m}{d'} = \lambda.mp'',$$

d'où

$$\frac{Sm}{d} \pm \frac{S'm}{d'} = \lambda\,(mp''' \pm mp'') = \lambda . p''p''' = \text{const.}$$

On arriverait au même résultat en partant des propriétés connues des rayons vecteurs issus des foyers véritables des sections coniques et en employant, comme nous l'avons déjà fait, la transformation homographique du n° 534 de la *Géométrie supérieure*.

Pour appliquer le théorème, il faut, ainsi que le dit le texte, faire la *somme* ou la *différence*, suivant que A est une ellipse ou une hyperbole. Cela se voit aisément sur la *fig.* 1; car pour convertir $mp''' \pm mp''$ en $p''p'''$ (distance des polaires de S et S'), il faut toujours faire la *somme algébrique* de ces deux quantités si A est une ellipse, et la *différence algébrique* si c'est une hyperbole, c'est-à-dire qu'on doit, dans la démonstration, faire attention au sens dans lequel les perpendiculaires mp''' et nq'' sont dirigées par rapport à la polaire TT'.

12. « *Les rayons menés des deux foyers conjugués à un point de la conique* A *forment, avec la tangente en ce point et une seconde droite parallèle au conjugué de cette tangente dans la conique* Σ, *un faisceau harmonique.*

» Quand les deux points S et S' sont des foyers véritables, la conique Σ est un cercle, et le théorème exprime que les deux rayons vecteurs font des angles égaux avec la tangente. »

Ce théorème se démontre sans difficulté. En effet (*fig.* 1), les quatre points m, n, i, l, sont en rapport harmonique. Donc les droites Sm, Sn, Si, Sl forment un faisceau harmonique. Donc aussi les droites Sm, $S'm$, Si, RR', puisque $S'm$ est parallèle à Sn et que RR' l'est à Sl. Or Si est, dans la conique Σ, le diamètre conjugué à Sl. Donc, etc.

13. « *Si de deux foyers conjugués on abaisse sur chaque tangente à la conique* A *deux obliques parallèles au diamètre de* Σ *conjugué à cette tangente, le produit de ces*

deux obliques sera proportionnel au carré de ce diamètre.

Les pieds de ces obliques seront sur une conique concentrique à la conique A *et homothétique à la conique* Σ. »

Démonstration. — Soit Si le diamètre de (Σ) conjugué à la tangente RR' ou à sa parallèle Sl; l'oblique abaissée du point S' sur la tangente, parallèlement à Si, coupe RR' au point q.

Prouvons d'abord que les points p et q sont sur une conique concentrique à A et homothétique à Σ. Si, par l'extrémité n du diamètre mOn, on mène la tangente rr' parallèle à RR', les deux obliques Sp, $S'q$ couperont cette nouvelle tangente en deux points p' et q', *symétriques* de q et de p, par rapport au centre O. Cette seule remarque prouve que la courbe des points p, p', q, q' est *concentrique* à A. Chaque tangente, telle que RR', ne donne lieu qu'à deux points p et q. De même, chaque rayon Sp ne coupe la courbe qu'en deux points p et p'. Donc cette courbe est du second degré. Il faut actuellement montrer que cette conique est homothétique à Σ. Or, si l'on prend pour la tangente RR' l'une ou l'autre des tangentes issues des points S et S' (lesquelles sont les asymptotes réelles ou imaginaires de Σ), on obtient pour p et q des points situés à l'infini sur ces tangentes. Or Σ a elle-même des points à l'infini (réels ou imaginaires) sur ces droites. Donc les deux courbes sont homothétiques (*Géom. sup.*, n° 472).

Il est de plus évident que les points C et C' appartiennent à la courbe Σ', et qu'on a $Sp' = S'q$ et $Sp = S'q'$. Donc, en désignant par Δ le diamètre de Σ qui est conjugué à la tangente RR', si l'on veut prouver que le produit des obliques Sp, $S'q$ est proportionnel à Δ^2, il suffit de prouver qu'on a

$$Sp.Sp' = \lambda.\Delta^2;$$

or, en vertu des propriétés générales des courbes (*Géom.*

sup., n° 480), on a l'équation

$$\frac{Sp.Sp'}{SC.SC'} = \frac{\Delta'^2}{\overline{OC}^2},$$

Δ' étant le demi-diamètre de Σ qui est parallèle à Sp. $SC.SC'$ est une constante, et, à cause de l'homothétie des coniques Σ et Σ', on a $\Delta' = \mu.\Delta'$. Donc $Sp.Sp' = \lambda.\Delta^2$.

C. Q. F. D.

Il est à remarquer que les points i et S sont les points doubles de l'involution déterminée par les segments pp', uu'. Ainsi, on pourrait arriver à la démonstration du dernier théorème en se servant d'une des équations d'involution convenablement choisie; mais la démonstration précédente suffit.

§ IV. — *Propriétés relatives à un système de coniques décrites des mêmes foyers.*

14. Les premières propositions de ce paragraphe sont de simples définitions. Je vais donc simplement rapporter le texte de M. Chasles, afin de ne pas rompre la chaîne des idées et de bien les préciser.

« Concevons deux coniques quelconques, mais concentriques, et, pour fixer les idées, supposons d'abord qu'on puisse leur mener des tangentes communes, lesquelles formeront un parallélogramme circonscrit aux deux courbes. Prenons pour foyers conjugués deux sommets opposés du parallélogramme. A ces foyers correspondra la même courbe Σ dans les deux coniques, parce que cette courbe est une hyperbole qui a pour asymptotes les deux tangentes communes aux deux coniques, issues du foyer que l'on considère. Nous dirons que les deux coniques sont *homofocales*, parce qu'à l'un des deux foyers correspond, dans chacune des deux courbes, *une même conique relative* Σ.

» Ces deux foyers sont deux centres d'homologie des deux coniques. Le parallélogramme circonscrit aux deux courbes peut devenir imaginaire; mais les deux sommets considérés comme deux centres d'homologie subsistent et conservent toutes leurs propriétés. D'après cela, nous dirons (nous bornant aux coniques concentriques) que :

» *Deux coniques quelconques concentriques ont toujours deux foyers conjugués communs, c'est-à-dire auxquels correspond, dans les deux courbes, une même conique relative.*

» En d'autres termes :

» *Deux coniques quelconques concentriques peuvent toujours être considérées comme deux coniques homofocales.*

» Il est clair que pour une troisième conique, inscrite dans le même parallélogramme que les deux premières, ou ayant les mêmes centres d'homologie, ces deux mêmes points seront encore deux foyers conjugués, dont la conique relative Σ sera la même.

» Donc, *Des coniques concentriques inscrites dans un même quadrilatère, ou, plus généralement, ayant deux mêmes centres d'homologie communs, forment un système de coniques homofocales, dont les foyers sont les deux centres d'homologie.*

» Ces coniques se rangent en deux séries : dans chaque série sont celles qui ne se rencontrent pas, mais qui rencontrent toutes celles de la seconde série. »

15. La considération de ces coniques donne lieu à plusieurs théorèmes intéressants. On a d'abord celui-ci :

« *Étant données deux coniques concentriques, si on leur mène deux tangentes parallèles, et que du centre commun on abaisse sur ces tangentes des obliques parallèles au diamètre qui leur est conjugué dans la conique Σ, la différence des carrés des deux obliques sera dans un rapport* *constant avec le carré de ce diamètre auquel elles sont parallèles.* »

En effet, soient (*fig.* 3) Pp, Qq deux tangentes parallèles menées à deux coniques concentriques, et Sq la direction du diamètre qui leur est conjugué dans la conique Σ. Si l'on mène OQ parallèle à Sq, et qu'on désigne par Δ le diamètre en question de Σ, il s'agit de prouver qu'on aura

$$\overline{OQ}^2 - \overline{OP}^2 = \lambda . \Delta^2.$$

Menons les tangentes parallèles et diamétralement opposées, lesquelles coupent Sq en p' et q'; on a, comme il a été démontré ci-dessus (13),

$$Sp . Sp' = \lambda . \Delta^2 \quad \text{et} \quad Sq . Sq' = \lambda' . \Delta^2.$$

Mais, π étant le milieu commun des segments pp' et qq', on a

$$Sp = S\pi + \pi p, \quad Sp' = S\pi - \pi p,$$
$$Sq = S\pi + \pi q, \quad Sq' = S\pi - \pi q.$$

Donc

$$Sp . Sp' = S\pi^2 - \pi p^2 = S\pi^2 - \overline{OP}^2,$$

et

$$Sq . Sq' = S\pi^2 - \pi q^2 = S\pi^2 - \overline{OQ}^2,$$

et enfin

$$Sp . Sp' - Sq . Sq' = \overline{OQ}^2 - \overline{OP}^2 = \lambda'' . \Delta^2. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Autrement. Appliquons aux coniques le théorème de l'art. 737 de la *Géométrie supérieure*. Deux coniques étant données, si l'on mène une tangente quelconque à la première et les deux tangentes parallèles à la seconde, puis deux droites parallèles à cette tangente par les deux sommets du quadrilatère circonscrit, ou centres d'homologie, on a la relation

$$\frac{ma . ma'}{mb . mb'} = \text{const.},$$

m, a, a', b, b' étant les points où une transversale arbitraire coupe les trois tangentes et les deux droites. La transversale étant Sq, les points en question sont, sur la figure précédente, q, p, p', σ, s. On a donc

$$\frac{qp \cdot qp'}{q\sigma \cdot qS} = \text{const.}$$

Or, en vertu du théorème (13),

$$q\sigma \cdot qS = q'S \cdot qS = \lambda \cdot \Delta^2;$$

et l'on a d'ailleurs

$$qp \cdot qp' = (q\pi - \pi p)(q\pi + \pi p) = \overline{OQ}^2 - \overline{OP}^2.$$

Donc

$$\overline{OQ}^2 - \overline{OP}^2 = \lambda \cdot \Delta^2. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On voit que si les points S et S' sont les foyers véritables, le théorème devient celui-ci :

Deux coniques homofocales étant données, si l'on mène une tangente à la première et deux tangentes parallèles à la seconde, le produit des distances de la première tangente aux deux autres est constant. Si les coniques sont deux ellipses, ce produit est égal à la différence des carrés des petits axes ou des grands axes.

16. Passons au théorème suivant. Il s'agit de démontrer que *quand deux coniques (concentriques et de mêmes foyers relatifs) se coupent, leurs tangentes en un point de rencontre sont parallèles à deux diamètres conjugés de la conique* Σ.

Soient (*fig.* 4) at et at' les tangentes en question issues du point commun a. Par le foyer S menons Sf parallèle à at, et soit Se la droite conjuguée à Sf, laquelle est, en direction, le diamètre de Σ conjugué à Sf ou at. Il suffit de prouver que Se et at' sont parallèles.

Le point e se trouve à l'intersection du diamètre aa' conjugué à at et de la polaire PP' du point S; donc les quatre points a, e, a', f sont en rapport harmonique. Soit I le point de concours des deux sécantes communes ab, $a'b'$

(ici ce point I est à l'infini); la polaire PP′ concourt au même point (ceci se déduit sans difficulté des théorèmes 716 et 721 de la *Géométrie supérieure*). Joignons If; les quatre droites Ia, Ie, Ia', If forment un faisceau harmonique, puisqu'elles sont issues du même point et passent par a, e, a' et f. Or on sait (*voir* ci-après la démonstration) que la polaire pp' du point S relative à la deuxième conique passe aussi en f et forme un faisceau harmonique avec l'autre polaire PP′ et les deux axes de symptose. Donc If se confond avec pp'.

Le point f est donc le pôle [relatif à la deuxième conique A] d'une droite passant par le foyer S et parallèle au diamètre de A′ qui est conjugué à aa', puisque ce point f se trouve aussi sur aa'. Il est donc le pôle d'une parallèle menée par le point S à la tangente at'. Or il est, par construction, le pôle de Se, relativement aux deux coniques. Donc Se est parallèle à at'. C. Q. F. D.

17. Voici maintenant comment on démontre la propriété harmonique des axes de symptose et des polaires PP′, pp', sur laquelle repose le raisonnement qui précède.

Les deux axes de symptose et les deux polaires du centre d'homologie S concourent au même point (*Géom. sup.*, n^os^ 716 et 721 appliqués aux coniques). Menons par le point S une transversale quelconque qui coupe la première conique en a, a', la seconde en b, b' et les deux axes de symptose en c, c'. Les six points a, a'; b, b'; c, c' sont en involution (*Géom. sup.*, n° 743, appliqué aux coniques). Or, si la transversale devient une tangente commune aux deux coniques, les points a et a' se confondent en un seul e, et les deux b, b' en un seul f; ces deux points e, f sont les *points doubles* de l'involution; donc ils divisent harmoniquement le segment cc'. Or ils se trouvent sur les polaires du centre d'homologie S. Donc les quatre droites en question forment un faisceau harmonique.

§ V. — *Propriétés des points correspondants.*

18. Soient m, m' les points où deux coniques d'une série sont rencontrées par une conique de l'autre série; nous appellerons ces points *correspondants*. Voici quelles sont leurs propriétés :

Soient pris, sur deux coniques, deux systèmes de deux points correspondants m, m' et n, n' :

1°. *Les deux droites* mn', $m'n$, *divisées respectivement par les demi-diamètres de la conique* Σ *qui leur sont parallèles, donnent des quotients égaux;*

2°. *Ces deux droites sont tangentes à une même conique homofocale aux proposées;*

3°. *Deux points correspondants étant pris sur deux coniques homofocales, les carrés des demi-diamètres qui aboutissent à ces points, divisés respectivement par les carrés des demi-diamètres de la conique* Σ *qui leur sont parallèles, ont leur différence constante.*

Pour démontrer ces trois propositions, supposons qu'on fasse subir à la figure la déformation homographique déjà employée ci-dessus (5). La conique Σ deviendra un cercle, et toutes les coniques deviendront véritablement *homofocales*. Il suffit alors de prouver :

1°. *Que les cordes* mn' *et* $m'n$ *sont égales;*

2°. *Que ces cordes sont tangentes à une même conique homofocale aux proposées;*

3°. *Que les carrés des demi-diamètres qui aboutissent à deux points correspondants ont leur différence constante.*

Soient

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2, \quad a'^2y^2 + b'^2y^2 = a'^2b'^2,$$
$$a''^2y^2 - b''^2x^2 = -a''^2b''^2,$$

les équations de deux ellipses et d'une hyperbole homofocales, pour lesquelles on a par conséquent

$$b^2 = a^2 - c^2, \quad b'^2 = a'^2 - c^2, \quad -b''^2 = a''^2 - c^2,$$

les points de rencontre de la première ellipse et de l'hyperbole ont évidemment pour coordonnées

$$x = \frac{a''}{c} \cdot a, \qquad y = \frac{b''}{c} \cdot b;$$

celles relatives à la seconde ellipse ont pour valeurs

$$x' = \frac{a''}{c} \cdot a', \qquad y' = \frac{b''}{c} \cdot b';$$

d'où

$$\frac{x}{x'} = \frac{a}{a'} \quad \text{et} \quad \frac{y}{y'} = \frac{b}{b'}.$$

C'est-à-dire que *les coordonnées de deux points correspondants sont toujours proportionnelles aux axes suivant lesquels elles sont dirigées*, propriété fondamentale qui sert souvent de définition aux *points correspondants*.

D'après cela, on aura (*fig.* 5)

$$\overline{Om}^2 = x^2 + y^2 = \frac{a^2 a''^2 + b^2 b''^2}{c^2} \quad \text{et} \quad \overline{Om'}^2 = a'^2 a''^2 + b'^2 b''^2;$$

d'où l'on tire

$$\overline{Om'}^2 - \overline{Om}^2 = \frac{a''^2(a'^2 - a^2) + b''^2(b'^2 - b^2)}{c^2} = \frac{(a''^2 + b''^2)(a'^2 - a^2)}{c^2}$$

$$= a'^2 - a^2 = \text{const.},$$

en ayant égard aux expressions qui donnent la valeur de c^2. La troisième proposition se trouve ainsi démontrée.

Soient actuellement ξ, η les coordonnées d'un second point n pris sur la première ellipse et ξ', η' celles du point n' *correspondant* sur la seconde. Il s'agit de prouver que $nm' = n'm$.

On a, comme on l'a vu plus haut,

$$\frac{x}{x'} = \frac{\xi}{\xi'} = \frac{a}{a'} \quad \text{et} \quad \frac{y}{y'} = \frac{\eta}{\eta'} = \frac{b}{b'};$$

on a ensuite

$$\overline{nm'}^2 = (\xi - x')^2 + (\eta - y')^2, \quad \overline{mn'}^2 (\xi' - x)^2 + (\eta' - y)^2,$$

$$\overline{nm'}^2 = \left(\xi - x\frac{a'}{a}\right)^2 + \left(\eta - y\frac{b}{b'}\right)^2,$$

$$\overline{mn'}^2 = \left(\xi\frac{a'}{a} - x\right)^2 + \left(\eta\frac{b'}{b} - y\right)^2;$$

d'où

$$\overline{nm'}^2 - \overline{mn'}^2 = \left(\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2}\right)(a^2 - a'^2) + \left(\frac{\eta^2}{b^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)(b^2 - b'^2).$$

D'ailleurs on a

$$a^2 - a'^2 = b^2 - b'^2;$$

donc

$$\overline{nm'}^2 - \overline{mn'}^2 = (a^2 - a'^2)\left[\left(\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2}\right) - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)\right];$$

mais on a aussi

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

parce que les points n et m sont sur la première ellipse ; donc enfin

$$\overline{nm'}^2 - \overline{n'm}^2 = 0, \quad \text{ou} \quad nm' = n'm:$$

ce qui démontre le premier théorème.

Il reste encore à démontrer la seconde proposition relative à la conique homofocale que touchent les cordes mn' et $m'n$, et cela peut se faire de deux manières, soit au moyen d'une vérification analytique analogue à celle qui précède, soit par la Géométrie pure. Je vais exposer les deux solutions, dont la seconde, qui ne s'appuie que sur des théorèmes de la *Géométrie supérieure*, rentre plus particulièrement dans l'esprit général et dans le but du présent écrit.

Il s'agit de prouver que les deux diagonales mn', nm' sont tangentes à une conique homofocale aux proposées. Les coordonnées des quatre points m, m', n, n', sont, comme il a été trouvé ci-dessus,

$$\text{pour le point } m \quad x = \frac{a''}{c}\,a, \quad y = \frac{b''}{c}\,b,$$

$$m' \quad x' = \frac{a''}{c}\,a', \quad y' = \frac{b''}{c}\,b',$$

$$n \quad \xi = \frac{a'''}{c}\,a, \quad \eta = \frac{b'''}{c}\,b,$$

$$n' \quad \xi' = \frac{a'''}{c}\,a', \quad \eta' = \frac{b'''}{c}\,b'.$$

Les équations des deux droites mn', nm' sont donc

$$(cx - a'''a) = \frac{a''a - a'''a'}{b''b - b'''b'}\,(cy - b''b),$$

$$(cx - a''a') = \frac{a''a' - a'''a}{b''b' - b'''b}\,(cy - b''b').$$

Soit

$$\frac{x^2}{\varphi^2} + \frac{y^2}{\varphi^2 - c^2} = 1,$$

l'équation d'une conique homofocale aux proposées. L'équation d'une droite tangente à cette courbe et dont la direction est donnée est de la forme

$$y = gx \pm \sqrt{\varphi^2(1 + g^2) - c^2}.$$

Cette droite coïncidera avec la droite mn', si l'on a

$$g = \frac{b''b - b'''b'}{a''a - a'''a'},$$

et

$$\varphi^2(1 - g^2) - c^2 = \frac{(ab'a''b''' - ba'b''a''')^2}{c^2(aa'' - a'a''')^2}$$

ou

$$\varphi^2\left[(a''a - a'''a')^2 + (b''b - b'''b')^2\right] - c^2(a''a - a'''a$$
$$= \frac{(aa''b'b''' - a'a'''bb'')^2}{c^2}$$

Cette équation détermine le demi grand axe φ de la conique tangente à la droite mn'. Développant, et mettant à la place de b^2, b'^2, b''^2, b'''^2 leurs expressions (a^2-c^2), (a'^2-c^2), $(c^2-a''^2)$, $(c^2-a'''^2)$, on a

$$\begin{aligned} c^2.\varphi^2 [a^2 + a'^2 + a''^2 + a'''^2 - 2aa'a''a''' - 2bb'b''b''' - 2c^4] \\ = (a^2a'^2a''^2 + a^2a'^2a''^2 + a^2a''^2a'''^2 + a'^2a''^2a'''^2)\, c^2 \\ - 2aa'a''a'''(aa'a''a''' + bb'b''b''' + c^4). \end{aligned}$$

Or, si l'on fait le même calcul à l'égard de la droite nm', c'est-à-dire, si l'on cherche le demi grand axe de la conique homofocale aux proposées, tangente à cette droite, on trouve la même équation, et par conséquent la même valeur du demi grand axe φ. Donc les deux droites mn' et nm' sont tangentes à une même conique. C. Q. F. D.

Pour démontrer la même proposition par les seules ressources de la Géométrie, je remarquerai d'abord que, si l'on transforme le théorème qui fait l'objet du n° 757 de la *Géométrie supérieure* par la méthode des *polaires réciproques*, en plaçant le centre du cercle *directeur* en l'un des deux points e, f qui ont chacun même polaire dans les trois cercles donnés (*Voir, pour cette transformation, le n° 16 du chapitre II, page 70*), on obtient l'énoncé suivant, qui est le réciproque du premier et qui concerne, non plus des cercles de même axe radical, mais bien des coniques homofocales :

Étant données trois coniques homofocales, si une corde de longueur variable se meut, de manière à rester tangente à l'une tandis que ses deux extrémités glissent sur les deux autres, respectivement, le point de concours des tangentes menées par ces extrémités à la première conique décrit une quatrième conique homofocale aux proposées.

Cela posé, désignons (*fig.* 5) par C, C' les deux ellipses mn, $m'n'$, et par Σ, Σ' les deux hyperboles mm', nn'. Soit enfin U une cinquième conique homofocale aux proposées et tangente à la corde $m'n$. Je dis que cette conique U est aussi touchée par la corde mn'. En effet, si l'on fait rouler la corde $m'n$ sur U, tandis que ses extrémités glissent d'un mouvement continu sur les deux coniques Σ, Σ', on l'amènera nécessairement à passer par le point m. Soit alors n'' le point où son autre extrémité s'appuie sur Σ'. Il s'agit de prouver que n'' appartient aussi à la conique C' et que, par conséquent, il se confond avec n'.

Les cordes $m'n$, mn'' sont tangentes à une même conique U homofocale avec les deux Σ, Σ' sur lesquelles leurs extrémités s'appuient, respectivement. Donc, en vertu du théorème réciproque cité plus haut, les tangentes à U, menées par leurs extrémités, savoir $m'i$, ni et mi', $n''i'$, se coupent, deux à deux, en i et i' sur une sixième conique U' homofocale aux proposées.

Actuellement, considérons les deux cordes ni et mi'. Elles sont tangentes à U, et leurs extrémités s'appuient, respectivement, sur deux autres coniques C et U' homofocales avec U. Donc, en vertu du même théorème, les tangentes à U, menées par ces extrémités, doivent se couper sur une conique décrite des mêmes foyers que C, U et U'. Ces tangentes sont nm', im' pour la première, mn'', $i'n''$ pour la deuxième, et leurs points de concours sont m' et n''. Or m' appartient à la conique C' homofocale aux coniques C, U et U'; donc le point n'' appartient aussi à C', puisqu'il n'y a qu'une seule conique C' qui puisse satisfaire à cette condition et passer par le point m'. Donc enfin le point n'', qui se trouve à la fois sur C' et sur Σ', se confond avec le point n', ce qui démontre que la corde mn' est, comme $m'n$, tangente à la conique U.

Nota. — Si l'on faisait la transformation du théorème du n° 757 de la *Géométrie supérieure* par la méthode générale des *figures corrélatives*, et non plus par celle des polaires réciproques, on obtiendrait un théorème corrélatif, analogue au précédent et facile à énoncer, concernant des coniques inscrites dans le même quadrilatère, dont les coniques homofocales ne sont, comme on sait, qu'un cas très-particulier. La proposition elle-même que je viens de démontrer s'appliquerait donc, sous un énoncé beaucoup plus général et par des raisonnements absolument analogues, à de telles coniques. Mais il me suffit d'indiquer ici ce nouveau théorème qui m'entraînerait dans une digression trop étendue, et sur lequel je me propose de revenir ailleurs.

19. Les trois propositions du n° 18 sont donc démontrées pour des coniques *véritablement* homocales, et même, d'après ce que je viens de dire, la seconde, qui d'ailleurs est *projective*, est aussi démontrée pour les coniques *relativement* homofocales dont il s'agit dans les énoncés primitifs (page 131). Les deux autres propositions s'étendent aussi à ces coniques, comme on va le voir.

En effet, avant de subir la déformation homographique, qui en a fait des coniques homofocales, les coniques données étaient simplement concentriques et avaient les mêmes foyers *relatifs*, c'est-à-dire qu'il leur correspondait une même conique relative Σ. Dans la déformation Σ est devenue un cercle, et si l'on désigne par r et r' les rayons de ce cercle qui sont parallèles, respectivement, aux cordes mn', $m'n$, ou aux rayons Om, Om', on peut mettre les relations exprimées par les propositions 1° et 3° sous la forme

$$\frac{mn'}{r} = \frac{m'n}{r'} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{Om'}^2}{r'^2} - \frac{\overline{Om}^2}{r^2} = \text{const.}$$

Donc, quand on passera à la figure primitive, on aura, en vertu des relations métriques, qui ont lieu dans ce mode particulier de déformation homographique (*Géom. sup.*, n° 534), les relations suivantes qu'il fallait démontrer :

$$\frac{MN'}{d} = \frac{M'N}{d'} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{OM'}^2}{d'^2} - \frac{\overline{OM}^2}{d^2} = \text{const},$$

dans lesquelles d et d' sont les diamètres de la conique Σ qui sont parallèles, respectivement, à MN′ et M′N ou à OM′ et OM.

SECTION II.

GÉNÉRALISATION DES PROPRIÉTÉS DES DIAMÈTRES CONJUGUÉS.

20. Nous avons eu à nous occuper, dans la première section de ce chapitre, des systèmes de deux droites telles que le pôle de l'une, par rapport à une conique, se trouve sur l'autre; ce sont les deux droites que l'on nomme *droites conjuguées par rapport à la conique* (*Géom. sup.*, n° 687).

Ces droites jouissent de propriétés nombreuses, dont celles des *diamètres conjugués* des sections coniques ne sont que des cas particuliers. Je vais en exposer plusieurs, en suivant la marche tracée dans l'*Aperçu historique*. Je commencerai par les relations descriptives, et je passerai ensuite aux relations métriques.

21. Le point de concours de deux tangentes rectangulaires qui roulent sur une conique S, décrit un cercle D concentrique à la conique. Faisons une déformation homographique de la figure, et considérons les deux droites rectangulaires comme étant deux diamètres d'un cercle C, qui soient conjugués entre eux.

Nous aurons dans la nouvelle figure deux coniques S′, C′, deux droites tangentes à la conique S′, rencontrant la droite I qui correspond à l'infini de la première figure, en deux points conjugués par rapport à la conique C′ (*Géom. sup.*, n° 687). Le point de concours de ces deux droites engendrera une conique D′ correspondante au cercle D (*Géom. sup.*, n° 547 *bis*), et la droite I sera un *axe de symptose* des deux coniques C′, D′, parce que les deux cercles C et D de la première figure ont pour corde commune la droite située à l'infini (*Géom. sup.*, n° 719). Enfin cette droite I aura même *pôle* dans les deux coniques S′ et D′, parce que ce pôle correspondra au centre commun des deux courbes S et D.

On a donc ce théorème :

Étant données deux coniques quelconques, si, sur une droite fixe, on prend arbitrairement deux points conjugués par rapport à la seconde, et que, par ces deux points, on mène deux tangentes à la première, le point de concours de ces deux tangentes décrira une troisième conique qui aura la droite fixe pour axe de symptose commun avec la seconde; et le pôle de cette droite, par rapport à cette nouvelle conique, sera le même que par rapport à la première des deux proposées.

22. Si la droite I est à l'infini, on en conclut que :

Étant données deux coniques, si l'on mène deux tangentes à la première, qui soient parallèles à deux diamètres conjugués de la seconde, le point d'intersection de ces deux tangentes sera sur une troisième conique, homothétique à la seconde.

Cette troisième conique est homothétique à la seconde, parce qu'elle a deux points communs avec elle à l'infini (*Géom. sup.*, n° 472).

23. Si la droite I est elle-même tangente à la première conique, il est clair que tout point de cette droite appartiendra à la troisième conique, parce qu'on pourra le considérer comme l'intersection de deux tangentes à la première conique, menées par les deux points conjugués des systèmes dont il fait partie, l'une de ces tangentes étant la droite I elle-même. Il résulte de là que la troisième conique est le système de deux droites dont l'une est la droite fixe I. Donc,

Étant données deux coniques et une droite fixe tangente à la première, si, par deux points de cette droite, conjugués par rapport à la seconde, on mène deux tangentes à la première, le point d'intersection de ces deux tangentes décrira une droite.

24. Le théorème du n° 21, transformé corrélativement, donne le suivant :

Étant données deux coniques quelconques, si, par un point fixe, on mène deux droites conjuguées par rapport à la seconde, la corde déterminée par deux des points de rencontre de ces droites avec la première conique, enveloppera une troisième conique, qui aura pour centre d'homologie avec la seconde le point fixe, et ce point aura même polaire dans cette troisième courbe et dans la première des deux proposées.

25. Le théorème précédent donne comme corollaires les deux suivants :

1°. *Si la seconde conique est un cercle ayant son centre au point fixe, la troisième aura son foyer en ce point, et sa directrice, relative à ce foyer, sera la polaire du point fixe par rapport à la première.*

2°. *Si les deux coniques ont le point fixe pour foyer commun, ce point sera aussi un foyer de la troisième, qui aura pour directrice correspondante la directrice de la première relative à ce foyer.*

Dans ces deux théorèmes, l'angle tournant, formé par les deux droites conjuguées, est un angle droit.

26. La somme des carrés des perpendiculaires abaissées des extrémités de deux diamètres conjugués d'une conique sur un diamètre fixe est constante.

Si l'on applique à cet énoncé le principe des relations métriques du n° 513 de la *Géométrie supérieure*, on aura le théorème suivant :

Si, par un point fixe, on mène deux droites conjuguées *par rapport à une conique, et qu'on prenne sur chacune d'elles un des deux points où elle coupe la conique, la somme des carrés des distances de ces deux points à une droite fixe menée par le point donné, divisés respectivement par les carrés des distances des mêmes points à la polaire du point fixe, sera constante.*

27. Si la droite fixe est parallèle à la polaire du point fixe, on en conclut aisément que :

Si, par un point fixe, on mène deux droites conjuguées par rapport à une conique, la somme des carrés des segments compris entre le point fixe et deux des points où les deux droites rencontrent la conique, divisés respectivement par les carrés des segments compris entre ces deux points et la polaire du point fixe, sera constante, quel que soit le système des deux droites conjuguées.

Au reste, ce théorème n'est qu'un cas particulier du théorème suivant, qui a une grande généralité.

28. Soient deux axes rectangulaires OX, OY, et une droite quelconque menée par le point O. Que par le point m de cette droite on mène deux droites perpendiculaires respectivement aux deux axes et les rencontrant en A′, B′, on aura

$$\overline{Om}^2 = \overline{OA'}^2 + \overline{OB'}^2 .$$

Ainsi le second membre est constant, quels que soient les deux axes rectangulaires qu'on aura choisis. Si A et B sont les deux points où ces axes rencontrent un cercle décrit du point O comme centre, on pourra mettre l'équation ci-dessus sous la forme suivante :

$$(1) \qquad \frac{\overline{OA'}^2}{\overline{OA}^2} + \frac{\overline{OB'}^2}{\overline{OB}^2} = \text{const.}$$

Faisons la figure corrélative. Nous aurons une conique; une droite Z, corrélative du point O, et sur cette droite deux points x, y, conjugués par rapport à la conique. Soient P, Q les polaires de ces deux points; elles seront deux droites conjuguées de la conique, relatives au pôle i de la droite Z par lequel elles passent toutes deux. Ce sont les droites qui correspondent aux points situés à l'infini sur les axes OX, OY de la première figure. Nous aurons encore, sur la droite Z, un troisième point correspondant à la droite Om, et si l'on mène par ce point une transversale M, elle correspondra au point m. Aux deux perpendiculaires mA', mB' correspondront les deux points p et q où la droite M rencontre les deux droites conjuguées dont nous venons de parler.

Donc, aux quatre points O, A', A et ∞ de la première figure, situés sur OX, correspondront dans la nouvelle figure quatre droites passant par le point x, savoir : 1° la droite Z; 2° la droite xp; 3° l'une des deux tangentes menées du point x à la conique, c'est-à-dire la droite qui joint ce point à l'un des points de rencontre de la conique par la polaire P du point x; et 4° la droite xi.

Le rapport anharmonique de ces quatre droites est égal à celui des quatre points correspondants de la première figure (*Géom. sup.*, n° 578), lequel est $\frac{\text{OA}'}{\text{OA}}$. Exprimons le rapport anharmonique des quatre droites par celui des quatre points où elles rencontrent la polaire P.

Soient α, a', a les trois premiers de ces points, dont le quatrième est i, on aura

$$\frac{\text{OA}'}{\text{OA}} = \frac{\alpha a'}{\alpha a} : \frac{ia'}{ia}.$$

On aurait de même, pour la droite Q, l'égalité

$$\frac{\text{OB}'}{\text{OB}} = \frac{\beta b'}{\beta b} : \frac{ib'}{ib};$$

donc l'équation (1) devient

$$\left(\frac{\alpha a'}{\alpha a} : \frac{ia'}{ia}\right)^2 + \left(\frac{\beta b'}{\beta b} : \frac{ib'}{ib}\right)^2 = \text{const.}$$

ou

$$(2) \qquad \left(\frac{ia}{\alpha a} : \frac{ia'}{\alpha a'}\right)^2 + \left(\frac{ib}{\beta b} : \frac{ib'}{\beta b'}\right)^2 = \text{const.},$$

c'est-à-dire que :

Étant données une conique et une transversale, si, autour d'un point i, *pris arbitrairement, on fait tourner deux droites conjuguées par rapport à la conique, et qu'on désigne par* α, β *les points où elles rencontrent la polaire du point fixe; par* a, b, *deux des quatre points où elles rencontrent la courbe; et enfin par* a', b' *les deux points où elles coupent la transversale, on aura toujours la relation* (2), *quel que soit le système des deux droites conjuguées.*

Si la transversale est à l'infini, on retrouve le théorème du n° 27.

29. Si le point i est le centre de la conique, les points α, β sont à l'infini, les rapports $\frac{\alpha a'}{\alpha a}$, $\frac{\beta b'}{\beta b}$ sont égaux à l'unité, et l'on a

$$\frac{ia^2}{ia'^2} + \frac{ib^2}{ib'^2} = \text{const.}$$

Cette équation exprime que :

La somme des carrés de deux demi-diamètres conjugués d'une conique, divisés respectivement par les carrés des segments faits sur ces demi-diamètres par une transversale, est constante.

30. Si le point i est un des deux foyers, et qu'en même temps la transversale soit à l'infini, on aura ce théorème :

Si, autour d'un foyer d'une conique, on fait tourner un angle droit, la somme des carrés des rayons vecteurs, divisés respectivement par les carrés des segments compris *sur ces rayons entre la courbe et la directrice correspondante à ce foyer, est constante.*

31. Dans l'équation (2) du n° 28 remplaçons le rapport $\frac{\alpha a}{\alpha a'}$, par le rapport des perpendiculaires ap, $a'p'$, abaissées des deux points a et a' sur la polaire z du point i; et pareillement pour le rapport $\frac{\beta b}{\beta b'}$: l'équation deviendra

$$(3) \qquad \left(\frac{ia}{ap}\right)^2 : \left(\frac{ia'}{a'p'}\right)^2 + \left(\frac{ib}{bq}\right)^2 : \left(\frac{ib'}{b'q'}\right)^2 = \text{const.}$$

Actuellement, soit V le point de rencontre de la polaire Z et de la transversale; joignons iV et menons, perpendiculairement à cette droite, une droite id qui coupe la transversale en d; enfin, abaissons la perpendiculaire de sur Z; on aura

$$\frac{a'p'}{ia'} = \lambda.\cos(a'id),\ \lambda \text{ étant une constante},$$

et l'on aura pareillement

$$\frac{b'q'}{ib'} = \lambda.\cos(a'id);$$

de sorte que l'équation deviendra

$$\left(\frac{ia}{ap}\right)^2 \cos^2(a'id) + \left(\frac{ib}{bq}\right)^2 \cos^2(a'id) = \text{const.}$$

Dans cette équation la direction de la droite id est arbitraire, comme l'était celle de la transversale qu'elle a remplacée. Pour une seconde droite id perpendiculaire à la première, on aura une seconde équation qui, ajoutée à la première, donnerait

$$\frac{ia^2}{ap^2} + \frac{ib^2}{bq^2} = \text{const.}$$

Donc, *si, par un point fixe, on mène deux droites conjuguées par rapport à une conique, et que sur chacune* *d'elles on prenne un des deux points où elle coupe la courbe, les deux points ainsi déterminés sont tels, que les carrés de leurs distances au point fixe, divisés respectivement par les carrés de leurs distances à la polaire du point fixe, sera constante, quel que soit le système des deux droites conjuguées.*

32. Si le point i est un foyer, la propriété est évidente à priori, et il en résulte que l'équation (3) se réduit à la suivante :

$$\frac{a'p'^2}{i'a'^2} + \frac{b'q'^2}{ib'^2} = \text{const.}$$

Elle exprime que : *Étant donnés un point fixe et deux droites sur un plan, si autour de ce point on fait tourner deux axes rectangulaires qui rencontrent la première droite en deux points, la somme des carrés des distances de ces points à la deuxième droite, divisés respectivement par les carrés de leurs distances au point fixe, sera constante.*

33. On sait que la somme des carrés des perpendiculaires abaissées des quatre extrémités des deux diamètres conjugués d'une conique sur une droite fixe est constante.

Donc on aura le théorème suivant, en vertu du principe du n° 513 de la *Géométrie supérieure* :

Si, par un point fixe, on mène deux droites conjuguées par rapport à une conique, la somme des carrés des distances des quatre points où elles rencontrent la courbe à une droite fixe arbitraire, divisés respectivement par les carrés des distances de ces points à la polaire du point fixe, sera constante, quel que soit le système des deux droites conjuguées.

34. Si la droite fixe de la première figure est celle qui correspond à l'infini de la seconde, on aura ce nouveau théorème (*Géom. sup.*, n° 514) :

Si, par un point fixe, on mène deux droites conjuguées par rapport à une conique, la somme des valeurs inverses *des carrés des distances des quatre points où elles rencontrent la courbe à la polaire du point fixe, sera constante pour tous les systèmes de deux droites conjuguées.*

On voit ce que devient le théorème si le point fixe est le foyer de la conique.

35. Si l'on applique successivement le théorème (33) à deux droites fixes rectangulaires, on aura deux équations qui, ajoutées membre à membre, donneront lieu au théorème suivant :

Si, par un point fixe, on mène deux droites conjuguées par rapport à une conique, elles rencontreront la courbe en quatre points, dont les carrés des distances à un deuxième point quelconque, divisés respectivement par les carrés des distances de ces points à la polaire du premier point fixe, auront une somme constante.

36. Soient deux diamètres conjugés d'une conique; si, d'un point fixe O, on mène des droites aux quatre points A, a, B, b où ils rencontrent la courbe, on sait que la somme des carrés de ces quatre droites est constante, quel que soit le système des deux diamètres conjugués, et l'on a

$$\mathrm{OA}^2 + \mathrm{O}a^2 + \mathrm{OB}^2 + \mathrm{O}b^2 = \text{const.}$$

Soient A′, a', B′, b' les points où les deux diamètres conjugués rencontrent un cercle décrit du point O comme centre, on pourra écrire l'équation ci-dessus de la manière suivante :

$$\frac{\overline{\mathrm{OA}}^2}{\overline{\mathrm{OA'}}^2} + \frac{\overline{\mathrm{O}a}^2}{\overline{\mathrm{O}a'}^2} + \frac{\overline{\mathrm{OB}}^2}{\overline{\mathrm{OB'}}^2} + \frac{\overline{\mathrm{O}b}^2}{\overline{\mathrm{O}b'}^2} = \text{const.}$$

Faisons la figure homographique, et désignons par les mêmes lettres les points correspondants, dans cette figure, aux points O, A, a, etc., de la première. Soient de plus L, l, M, m les points où les quatre droites OA, Oa, OB, Ob dans la nouvelle figure, coupent la droite qui correspond à l'infini de la première; on aura, par la relation du n° 514 de la *Géométrie supérieure*, le théorème suivant :

Étant données deux coniques et une droite fixe, si par le pôle de cette droite par rapport à la première conique, on mène deux droites conjuguées par rapport à cette conique, qui la rencontreront aux quatre points A, a, B, b, *et que par le pôle de la droite pris par rapport à la seconde conique on mène quatre rayons aboutissant à ces points, et rencontrant la seconde conique aux quatre points* A′, a′, B′, b′, *et la droite fixe aux points* L, l, M, m, *on aura l'équation*

$$\left(\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OA}'}:\frac{\mathrm{LA}}{\mathrm{LA}'}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{O}a}{\mathrm{O}a'}:\frac{la}{la'}\right)^2+\ldots=\text{const.},$$

quel que soit le système des deux droites conjuguées pris par rapport à la première conique.

37. Si le point O est le foyer de la première conique et que la droite fixe soit sa directrice correspondante à ce foyer; que le point O soit aussi le pôle de cette droite par rapport à la seconde courbe, et qu'on remplace, dans l'équation générale, chaque rapport $\frac{\mathrm{LA}}{\mathrm{LA}'}$ par le rapport des perpendiculaires abaissées sur des points A, A′ sur cette droite, on aura l'énoncé suivant :

Si, autour d'un point fixe, on fait tourner deux droites rectangulaires, qui rencontreront en quatre points une conique aussi donnée, la somme des carrés des distances de ces points à la polaire du point fixe, divisés respectivement par les carrés des distances de ces mêmes points au point fixe, sera constante.

38. Si, dans le théorème du n° 36, la première courbe est un cercle concentrique à la seconde, et que le point O soit le centre commun des deux courbes, on aura l'équation

$$\frac{1}{\overline{\mathrm{OA}'}^2}+\frac{1}{\overline{\mathrm{OB}'}^2}=\text{const.},$$

quel que soit le système des deux axes rectangulaires pris dans la seconde conique.

Si la deuxième conique est le système de deux droites, on retrouve le théorème déjà énoncé au n° 31.

Celui du n° 32 en est aussi une conséquence; il suffit de faire, relativement aux données de la question, les mêmes hypothèses que dans le n° 37.

39. La somme des carrés des perpendiculaires abaissées des extrémités de deux demi-diamètres conjugués sur un diamètre fixe est constante, quel que soit le système des deux diamètres.

Dans la figure corrélative on aura une conique; une droite fixe et, sur cette droite, deux points conjugués par rapport à la courbe; on aura, de plus, deux tangentes menées par ces deux points respectivement; un point fixe pris sur la droite fixe, et correspondant au diamètre fixe de la première figure; et enfin un second point fixe, correspondant à l'infini de la première figure, qui sera le pôle de la droite par rapport à la conique.

Appliquons le principe du n° 589 de la *Géométrie supérieure*, nous aurons ce théorème :

Si, par deux points pris sur une droite fixe et conjugués par rapport à une conique, on mène deux tangentes à la conique, la somme des carrés des distances de ces tangentes à un point fixe arbitraire, divisés respectivement par les carrés des distances de ces tangentes au pôle de la droite fixe, sera constante.

40. Les droites menées du pôle de la droite fixe aux points de contact des tangentes sont les polaires des deux points conjugués; donc elles sont deux droites conjuguées par rapport à la conique. Ainsi le théorème prend cet énoncé :

Si, par un point fixe O, *on mène deux droites conjuguées par rapport à une conique, les tangentes à la co-*

nique en deux des points où elles coupent cette courbe jouissent de cette propriété, que la somme des carrés de leurs distances à un point fixe pris arbitrairement sur la polaire du point O, divisés respectivement par les carrés de leurs distances à ce point O, sera constante, quel que soit le système des deux droites conjuguées.

41. Soient i le point fixe pris sur la polaire, α le point où l'une des tangentes rencontre la droite Oi; le rapport des distances de cette tangente aux deux points i et O sera égal à $\frac{\alpha i}{\alpha O}$, donc on aura

$$\frac{\overline{\alpha i}^2}{\overline{\alpha O}^2} + \frac{\overline{\beta i}^2}{\overline{\beta O}^2} = \text{const.}$$

42. Si la droite Oi est parallèle à la polaire du point O, les segments αi, βi sont égaux comme étant infinis et comptés sur une même droite. Donc

Si, par un point fixe, on mène deux droites conjuguées par rapport à une conique, les tangentes menées par deux des points où ces droites rencontrent la courbe, feront sur une droite menée par le point fixe parallèlement à la polaire de ce point deux segments dont la somme des valeurs inverses des carrés sera constante, quel que soit le système des deux droites conjuguées.

43. Si le point fixe est le centre de la conique, sa polaire est la droite de l'infini; toute droite menée par ce centre peut être considérée comme parallèle à cette polaire. Il en résulte que :

Les tangentes à une conique, menées par les extrémités de deux demi-diamètres conjugués, font, sur un diamètre fixe, deux segments dont les carrés ont la somme de leurs valeurs inverses constante.

44. De ce principe, que chaque système de deux droites conjuguées d'une conique, relatives à un point fixe O,

forme, en direction, un système de deux diamètres conjugués d'une seconde conique qui a son centre en ce point, et qui a ce point pour centre d'homologie avec la proposée, nous avons conclu, dans le courant du Mémoire, la relation suivante :

$$\mathrm{S}a' = \lambda \frac{\mathrm{S}a}{ap},$$

ap étant la distance du point a de la première conique à la polaire du point fixe.

Or on a

$$\mathrm{S}a'^2 + \mathrm{S}b'^2 = \text{const.},$$

$\mathrm{S}a'$ et $\mathrm{S}b'$ étant deux demi-diamètres conjugués de la seconde courbe ; donc

$$\frac{\overline{\mathrm{S}a}^2}{\overline{ap}^2} + \frac{\overline{\mathrm{S}b}^2}{\overline{bp}^2} = \text{const.}$$

C'est le théorème déjà démontré (31).

45. Si l'on a deux systèmes de deux demi-diamètres conjugués de la seconde conique, on sait que le parallélogramme construit sur les deux premiers est égal en surface à celui qui est construit sur les deux autres. On en conclut, relativement à la première conique, que :

Si l'on a, dans une conique, un système de deux droites conjuguées relatives à un point, la surface du parallélogramme construit sur deux quelconques de ces droites, divisée par le produit des perpendiculaires abaissées des extrémités de ces droites sur la polaire du point fixe, est constante, quel que soit le système de ces deux droites conjuguées.

CHAPITRE IV.

DU PRINCIPE DE CORRESPONDANCE ANHARMONIQUE. APPLICATIONS AUX COURBES DU SECOND, DU TROISIÈME ET DU QUATRIÈME DEGRÉ.

SECTION Ire.

SUR UNE MANIÈRE PARTICULIÈRE DE CONSIDÉRER L'HOMOGRAPHIE ET L'INVOLUTION. — APPLICATIONS DE CETTE MÉTHODE A LA GÉNÉRATION DES COURBES, ETC. (*).

§ I. — *Définitions.*

1. Les définitions des *divisions* ou *faisceaux homographiques*, et des *divisions* ou *faisceaux en involution*, données aux nos 99 et 182 du *Traité de Géométrie supérieure*, reposent sur la notion du rapport anharmonique, et elles ont leurs avantages propres, comme il est aisé de s'en convaincre en suivant les belles conséquences qui en découlent, dans l'ouvrage que je viens de citer. Cependant il est des cas où il est préférable de considérer l'homographie et l'involution sous un point de vue qui, bien qu'identique au fond avec celui qui précède, en diffère néanmoins dans la forme, et peut contribuer à faciliter beaucoup l'étude de certaines questions.

(*) Depuis que ceci a été écrit, M. Chasles a publié, dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, une Note remarquable sur le même sujet (*séance du 24 décembre 1855*).

2. Ainsi nous dirons que :

Une propriété fondamentale et caractéristique des séries homographiques, et qui suffit à les définir complétement, c'est qu'à un point m de l'une ne correspond qu'un point m' de l'autre, et réciproquement. Et de même pour des faisceaux de droites (*Géom. sup.*, n° 142).

Nous dirons aussi qu'une propriété fondamentale et caractéristique des séries en involution, c'est qu'un point (ou droite) quelconque de l'une, étant considéré comme appartenant successivement aux deux séries, a le même point (ou droite) homologue dans les deux cas (*Géom. sup.*, n^os^ 237 et 248).

3. M. Chasles, dans ses leçons à la Faculté des Sciences de Paris, a déjà rapidement indiqué les ressources singulières que présentent ces deux énoncés. C'est dans le but de les faire connaître aux jeunes gens qui se livrent à l'étude de cette branche de la science que j'ai écrit ce chapitre, où, après avoir donné quelques développements à la pensée de l'auteur, j'en fais l'application à certaines questions, et en particulier aux théorèmes énoncés sans démonstration, dans le *Mémoire sur la construction géométrique des racines des équations du* 3^e^ *et du* 4^e^ *degré*. (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, tome XLI, page 677 et suiv.)

§ II. — *Propositions fondamentales.*

4. Occupons-nous, en premier lieu, de l'*homographie*, et supposons qu'en traitant une question de géométrie, étrangère d'ailleurs aux fonctions *transcendantes*, on soit conduit à considérer deux séries de points sur deux droites distinctes, ou sur la même droite, ou deux faisceaux de droites issues de deux sommets distincts ou d'un seul, ou bien encore une série de points en ligne droite, et un faisceau de droites convergentes en un seul point.

Proposition I. — *S'il arrive qu'à un point* (ou à une droite) *de la première série, il ne correspond qu'un point* (ou une droite) *de la seconde, et réciproquement, on peut en conclure, immédiatement et sans plus de recherches, que les deux séries sont homographiques:* propriété qui suffit souvent pour donner une solution intuitive de la question proposée.

En effet, il est évident que la relation qui existe entre les deux séries peut toujours se traduire en une équation entre deux variables. Cette équation sera *purement algébrique,* et ne contiendra aucune transcendante, puisque, par hypothèse, la question elle-même en est exempte, et ne comporte que des relations algébriques. Chacune des deux séries peut être regardée comme étant déterminée par la suite des valeurs données à chacune des deux variables, et comptées, à partir de deux origines fixes (ou d'une seule), sur la même droite s'il s'agit de points, ou bien autour d'un point fixe et à partir de deux axes fixes s'il s'agit de droites.

Or, par hypothèse, à une valeur quelconque de l'une des variables il ne correspond qu'une seule valeur de l'autre, et réciproquement. Donc la relation algébrique en question ne peut être que de la forme

$$\mathrm{A}m.\,\mathrm{B}'m' + \lambda.\,\mathrm{A}m + \mu.\,\mathrm{B}'m' + \nu = 0$$

s'il s'agit de points, ou bien

$$\operatorname{tg}(\mathrm{A},\mathrm{M}).\,\operatorname{tg}(\mathrm{B}',\mathrm{M}') + \lambda.\,\operatorname{tg}(\mathrm{A},\mathrm{M}) + \mu.\,\operatorname{tg}(\mathrm{B}',\mathrm{M}') + \nu = 0$$

s'il s'agit de droites.

Ces expressions, où il n'entre pas le produit de deux segments relatifs au même point m ou m' (ou à la même droite M ou M′), expriment l'homographie des deux séries de points ou de droites (*Géom. sup.,* chap. VII). Donc la proposition est démontrée.

Passons au cas de l'involution.

5. Proposition II. — *Si*, dans la question de géomé-

trie, telle qu'elle est posée au n° 4, *les deux séries de points* (ou de droites) *qu'on est conduit à considérer, sont telles, qu'à un point* (ou droite) *de l'une il correspond toujours deux points* (ou droites) *de l'autre, tandis qu'à chacun de ceux-ci, indistinctement, il n'en correspond qu'un seul dans la première série, on peut en conclure immédiatement que la deuxième série se compose de segments* (ou d'angles) *en involution.*

En effet (supposons, pour abréger le discours, qu'il s'agisse de séries de points), soient m, m' les deux points de la deuxième série qui correspondent au point M de la première; m et m' étant, comme ci-dessus, déterminés par les valeurs des variables estimées sur une droite à partir d'une origine fixe, et de même pour le point M. Les séries des points m et des points m' seront homographiques entre elles, en vertu de la proposition I, parce que dès qu'on obtient un point m, il lui correspond aussitôt un point m', et que, réciproquement, si l'on obtient ce point m', il lui correspond le point m. Mais il y a ici plus qu'une simple homographie. Car puisque, par hypothèse, au point M correspondent simultanément les deux points m et m', chacun de ces points, étant considéré comme faisant partie de l'une ou de l'autre division, a le même homologue, ce qui caractérise l'*involution* des deux séries de points. On peut dire encore que, dans l'équation qui exprime l'homographie des deux séries, on doit pouvoir changer les points m dans les points m', ce qui exige que l'équation soit symétrique en m et m'. Or cette condition implique aussi l'involution (*Géom. sup.*, n° 241). Donc la proposition est démontrée.

6. On sent tout de suite la fécondité de ces deux propositions générales, et comment elles peuvent souvent ramener la solution de certaines questions à des considérations purement intuitives. En voici d'abord quelques exemples.

§ III. — *Applications des propositions précédentes.*

1. — *Homographie.*

7. 1°. Prenons deux points fixes O, O′ sur une conique. Par le point O menons une série de rayons Oa, Ob, Oc,... ; chacun d'eux ne rencontre la courbe qu'en un seul point a, b, c,..., et, par suite, ne donne lieu qu'à un seul rayon correspondant O′a, O′b, O′c. Réciproquement, chaque rayon O′a,... ne donne lieu qu'à un seul rayon conjugué Oa,.... Donc, par la proposition I, les deux séries de rayons sont homographiques.

2°. Soient L, L′ deux tangentes fixes à une conique. A chaque point a,... de L correspondra une seule tangente à la conique, et, par suite, un seul point a',... sur L′, et, réciproquement, au point a',... correspondra le seul point a. Donc les deux séries de points formées sur deux tangentes fixes à une conique, par une tangente mobile, sont homographiques.

3°. Soient S, S′, S″,... des coniques circonscrites au même quadrilatère ABCD. Par le point A, menons une transversale arbitraire AL qui rencontre les coniques successives en une série de points a, a', a'',..., respectivement. Chacun de ces points détermine la conique sur laquelle il se trouve et lui correspond. Menons une seconde transversale AL′ qui rencontre les coniques en b, b', b'',.... Les points de cette seconde série correspondent, un à un, aux points a, a', a'',... de la première. Donc ces deux séries sont homographiques.

On obtiendrait, avec la même facilité, un théorème *corrélatif* du précédent pour des coniques inscrites au même quadrilatère.

4°. Les coniques S, S′, S″,... restant soumises à la même condition que 3°, prenons, par rapport à chacune d'elles, la polaire d'un point quelconque de leur plan. Toutes ces polaires P, P', P'',... passent par un même point (*Géom. sup.*, n° 748, étendu aux coniques), et, de plus, à chaque conique il n'en correspond qu'une seule. Donc ces polaires, qui correspondent une à une respectivement aux points a, a', a'',..., forment un faisceau qui est homographique avec cette division de points, et qui l'est aussi, par conséquent, avec le faisceau formé par les polaires relatives à un second point quelconque.

C'est l'un des théorèmes sur lesquels repose la construction de la courbe du troisième degré passant par neuf points. (Chasles, *Comptes rendus*, 1853.)

On obtiendrait, de même, un théorème corrélatif de celui-ci.

Dans l'exemple que je viens de donner, il n'est pas nécessaire de s'appuyer sur le n° 748 de la *Géométrie supérieure*, pour démontrer que les polaires P, P', P'',... passent par un même point. Ce théorème, dû à M. Lamé, est lui-même une conséquence facile de la première des deux propositions fondamentales.

En effet, menons dans le plan des coniques une transversale quelconque L, qui coupe les polaires respectivement en une série de points m, m', m'',.... Une seconde transversale L' les coupera, respectivement, en des points n, n', n'',.... Cela posé, à chacune des coniques il ne correspond qu'un point m sur L, et qu'un point n sur L'. Réciproquement, à chaque point m il ne correspond qu'une seule conique, puisque toutes les courbes sont d'ailleurs assujetties à la condition de passer par les quatre mêmes points (réels ou imaginaires), et que la nouvelle condition de couper harmoniquement chaque segment, tel que pm, achève de déterminer complétement chacune d'elles. Il ne correspond donc au point m qu'une seule polaire, et, partant, qu'un seul point n sur la seconde transversale. Il résulte de là que la série des points m est homographique à celle des points n; et, comme cette propriété subsiste pour toutes les transversales qu'on pourrait mener, il faut nécessairement que toutes les polaires passent par un même point.

C. Q. F. D.

5°. Quatre plans tangents à une surface gauche, menés par une même génératrice, ont leur rapport anharmonique égal à celui de leurs quatre points de contact. (CHASLES, *Mémoire sur les surfaces du 2e degré engendrées par une ligne droite*, page 5.)

En effet, les quatre points sont en ligne droite, les plans passent par une même droite, et, de plus, les points et les plans se correspondent, un à un, respectivement. Donc, etc.

6°. On verrait de même que :

Quatre plans étant menés arbitrairement par une même génératrice d'une surface gauche, les quatre points où ces plans touchent la surface ont leur rapport anharmonique égal à celui des quatre points où ces mêmes plans sont normaux à la surface (*même Mémoire*, page 8).

Passons au cas de l'involution.

2. — *Involution.*

8. 7°. Dans le cas de l'exemple 3° ci-dessus, menons une seconde transversale arbitraire L', ne passant plus par l'un des sommets du quadrilatère inscrit. Elle coupe chaque courbe en deux points d, δ; d', δ'; d'', δ'';.... Ces points correspondent, deux par deux, et sans distinction de l'un ou de l'autre, aux points a, a', a'',... de la transversale L, respectivement; et aux deux points d, δ,... de chaque couple correspond le seul point a de la première transversale. Donc, en vertu de la seconde proposition, les segments $d\delta$, $d'\delta'$, $d''\delta''$,... sont en involution.

Si chaque conique se réduit à deux droites, on retrouve un théorème connu, concernant le quadrilatère et ses diagonales (*Géom. sup.*, n° 339).

Et l'on obtiendrait, par un raisonnement tout semblable, deux théorèmes corrélatifs.

8°. D'un point O, on mène une série de cordes qui déterminent deux points chacune sur une conique située dans leur plan. Si on joint un point quelconque O′ de la conique avec les deux extrémités de chaque corde, on aura des couples de droites, passant par un même point et correspondants aux transversales, un à une respectivement. Donc les angles dont le point O′ est le sommet commun, forment une série en involution (*Géom. sup.*, n° 700).

Le théorème cesserait d'être vrai si l'on prenait, pour le sommet, un point qui ne fût pas situé sur le périmètre de la conique. A la vérité, à chaque transversale il ne correspondrait bien qu'une seule corde et qu'un seul angle, comme ci-dessus. Mais, à chaque angle ne correspondrait *plus une seule corde*, et *l'on* n'aurait pas *cette réciprocité qui est une condition indispensable de la proposition II.*

9°. Si plusieurs angles circonscrits à une conique ont leurs sommets situés en ligne droite, leurs côtés marquent sur une tangente fixe une série de segments en involution (*Géom. sup.*, n° 702). Car à chaque point de la droite il correspond un segment, c'est-à-dire deux points sur la tangente, et réciproquement, à chacun de ces points, indistinctement, il ne correspond qu'un seul et même point sur la droite.

On voit encore ici que la réciprocité requise n'existerait pas si la seconde droite, au lieu d'être tangente à la conique, était quelconque. Car chaque point de cette droite déterminerait deux points sur la première droite au lieu d'un seul.

9. Je ne multiplierai pas davantage ces exemples. Ceux

qui précèdent suffisent pour montrer les avantages de la méthode, et je vais passer à la démonstration des théorèmes énoncés par M. Chasles à la page 3 de son *Mémoire sur la construction des racines des équations du troisième et du quatrième degré* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, second semestre 1855).

§ IV. — *Applications diverses.*

10. Théorème I. — *Quand quatre segments* M m, M′ m′,..., *pris sur une même droite, sont en involution, les pôles d'un point de la droite, relatifs à ces segments, ont leur rapport anharmonique constant, quel que soit ce point.*

Ce rapport constant s'appelle le rapport anharmonique des quatre segments.

Démonstration. — Soient P, p, deux points de la droite par rapport auxquels on obtient respectivement les pôles π, ϖ, π', ϖ',..., des segments correspondants Mm, M′m',.... A chaque pôle π de la série π, π',..., correspond un seul point ϖ de la série ϖ, ϖ',..., et réciproquement. Donc, en vertu de la proposition I, ces deux séries sont homographiques, ce qui démontre le théorème.

Si le point P est pris à l'infini, les pôles π, π',..., deviennent les points milieux α, α',..., des segments. Donc, *quand des segments sont en involution sur une droite, quatre quelconques d'entre eux ont leur rapport anharmonique égal à celui de leurs points milieux.*

Autrement. Soit O le point central de l'involution, soient aussi ν, ν',..., les points milieux des segments Pn, Pn',..., qui divisent harmoniquement les segments donnés, à partir du point fixe P.

λ et μ étant des constantes, on a les équations

$$\mathrm{OM}.\mathrm{O}m = \mu$$

(*Géom. sup.*, n° 197) et

$$OM.Om + O.nOP = 2O\alpha.O\nu$$

(*Géom. sup.*, n° 66). D'où

$$\mu + On.OP - 2O\alpha.O\nu.$$

Mais on a (*Géom. sup.*, n° 4)

$$O\nu = \frac{On + OP}{2};$$

donc il vient, en faisant $OP = \lambda$,

$$O\alpha.On + \lambda(O\alpha - On) + \mu = 0,$$

équation d'homographie entre les deux points variables et correspondants α et n. Donc, etc....

Autrement. Décrivons une conique quelconque tangente à la droite donnée, et, par les deux extrémités de chaque segment, menons deux tangentes à la conique. On obtiendra ainsi quatre sommets d'angles circonscrits situés en ligne droite (*Géom. sup.*, n° 702) et correspondants, un à un, aux quatre segments respectivement. Les pôles et les sommets d'angles circonscrits se correspondent un à un; donc leurs rapports anharmoniques sont égaux. Or le second est constant; donc le premier l'est aussi.

11. Théorème II. — *Si d'un point fixe pris sur une conique, on mène des droites aux extrémités des quatre segments* Mm, M′m′,..., *les quatre cordes que ces droites interceptent dans la conique, lesquelles, comme on sait, passent par un même point, ont leur rapport anharmonique égal à celui des quatre segments.*

Démonstration. — A chaque segment correspondent une seule corde et un seul point milieu; donc ces points et ces cordes se correspondent avec une entière réciprocité. D'ailleurs les uns sont en ligne droite et les autres passent par un même point; donc il y a correspondance anharmonique. Mais il y a aussi correspondance entre les segments et leurs points milieux; donc le théorème est démontré.

Autrement. Soient O le point de concours des cordes Aa, A$'a'$, A$''a''$, A$'''a'''$, qui rencontrent en α, α', α'', α''' la droite Pα, menée, parallèlement à la droite donnée, par le point P de la conique; Pμ, Pμ', Pμ'', Pμ''' les rayons menés du point P aux points milieux des segments donnés; et ν, ν', ν'', ν''' les points où ces rayons rencontrent respectivement les cordes correspondantes Aa, A$'a'$,... : ces points sont évidemment les conjugués harmoniques des points α, α', α'', α''', par rapport aux segments Aa, A$'a'$, A$''a''$, A$'''a'''$. Soit enfin Q le pôle de la droite Pα, par rapport à la conique.

Les quatre droites Qν, Qν', Qν'', Qν''' sont les polaires des points α, α', α'', α'''; leur rapport anharmonique est donc égal à celui de ces quatre points (*Géom. sup.*, n° 691), et, par suite, il est égal à celui des quatre cordes OA, OA$'$, OA$''$, OA$'''$. Donc les points ν, ν', ν'', ν''' sont situés sur une conique qui passe en O et en Q (*Géom. sup.*, n^{os} 541 et suivants). Or cette conique passe aussi en P; car, quand le point α est en P, le point ν y est aussi. Donc (*Géom. sup.*, n° 556) les quatre rayons Oν, Oν', Oν'', Oν''', c'est-à-dire les quatre cordes, ont leur rapport anharmonique égal à celui des quatre rayons Pν, Pν', Pν'', Pν''', et, par suite, à celui des quatre points milieux μ, μ', μ'', μ''', ou à celui des quatre segments. C. Q. F. D.

12. Théorème III. — *Si, dans l'équation du troisième degré à deux variables*

$$x^2(az+b)+x(a'z+b')+(a''z+b'')=0,$$

les variables représentent des segments comptés sur une droite indéfinie Ox *à partir d'une origine* O, *de manière* *qu'une valeur de* z *détermine un point* n, *et les deux valeurs correspondantes de* x *deux points* M, m, *formant un segment* Mm : 1° *tous les segments* Mm *sont en involution; 2° les points* n *correspondent anharmoniquement à ces segments.*

Démonstration. — Ce théorème est une conséquence directe de la seconde proposition générale. Les segments sont en involution parce que les deux points qui forment les extrémités de l'un quelconque d'entre eux correspondent à la fois à un même point n, et que, au contraire, à un de ces points ne correspond qu'un seul point n. Ce point n correspond avec le milieu du segment Mm, et *vice versâ*. Donc il y a correspondance anharmonique entre la série des points n et celle des points milieux des segments, ou celle des segments eux-mêmes, en vertu du théorème I, n° 10.

13. Théorème IV — *Si dans l'équation du quatrième degré à deux variables*

$$x^2(az^2+bz+c)+x(a'z^2+b'z+c')+(a''z^2+b''z+c'')=0$$

le déterminant des neuf coefficients est nul, ce qu'on exprime par la relation

$$a(b'c''-b''c')+a'(b''c-bc'')+a''(bc'-b'c)=0,$$

les racines conjuguées de l'équation sont doubles, c'est-à-dire que les deux valeurs de x *qui correspondent à une valeur donnée de* z *correspondent aussi, toutes les deux à la fois, à une autre valeur de* z; *et si ces couples de racines conjuguées représentent des segments* Mm *et* Nn *sur une même droite, ces segments jouissent des deux propriétés suivantes :*

1°. *Les segments* Mm *sont en involution, et pareillement les segments* Nn;

2°. *Ceux-ci correspondent anharmoniquement aux premiers.*

Démonstration. — Les deux valeurs de x sont données par une équation du second degré, dont les coefficients sont

$$\frac{a' z^2 + b' z + c'}{az^2 + bz + c} \quad \text{et} \quad \frac{a'' z^2 + b'' z + c''}{az^2 + bz + c}.$$

Pour que les deux valeurs de x répondent à la fois à une valeur z' de z, il faut nécessairement que ces coefficients conservent la même valeur quand on y remplacera z par z', ce qui donne lieu aux deux équations

$$\frac{a' z^2 + b' z + c'}{az^2 + bz + c} = \frac{a' z'^2 + b' z' + c'}{az'^2 + bz' + c}$$

et

$$\frac{a'' z^2 + b'' z + c''}{az^2 + bz + z} = \frac{a'' z'^2 + b'' z' + c''}{az'^2 + bz' + c}.$$

Faisons, pour abréger,

$$d = \frac{b}{a}, \quad e = \frac{c}{a}, \quad d' = \frac{b'}{a'}, \text{ etc.};$$

les deux équations deviennent, respectivement,

$$\text{(A)} \qquad z' = \frac{z(e' - e) + (e' d - ed')}{z(d - d') + (e - e')}$$

et

$$z' = \frac{z(e'' - e) + (e'' d - ed'')}{z(d - d'') + (e - e'')}.$$

Si l'on égale ces deux valeurs de z', on arrive, après quelques réductions, à l'équation

$$\begin{aligned} &z^2 [(e'' - e)(d - d') - (e' - e)(d - d'')] \\ &+ z [(e'' d - ed'')(d - d') - (e' d - ed')(d - d'')] \\ &+ (e'' d - ed'')(e - e') - (e' d - ed')(e - e'') = 0, \end{aligned}$$

laquelle, devant avoir lieu quel que soit z, exige que les coefficients de z^2 et de z et que le terme constant soient séparément nuls. On a ainsi trois nouvelles équations de condition, dont chacune se réduit, en développant, à la suivante :

$$\text{(B)}\quad a(b''c'-b'c'')+a'(bc''-b''c)+a''(b'c-bc')=0.$$

Donc, si ce *déterminant* est nul, les deux valeurs de x qui répondent à une valeur de z, répondront aussi toutes les deux à la fois à une autre valeur de z, et à une seule, puisque l'une ou l'autre des équations (A), qui donnent z' en fonction de z, est du premier degré.

La première de ces équations (A) peut s'écrire

$$zz'(d-d')+(z+z')(e-e')+(ed'-e'd)=0,$$

et, sous cette nouvelle forme, elle montre que les points N et n (qui répondent à z et à z') forment deux divisions homographiques en involution, puisqu'elle est du premier degré et, de plus, symétrique en z et z'.

14. Ainsi il est démontré que quand l'équation de condition (B) entre les coefficients de l'équation proposée a lieu, les valeurs de z se correspondent deux à deux, jouissant de la propriété, que deux valeurs correspondantes donnent, l'une et l'autre, les deux mêmes valeurs de x; et ces couples de valeurs correspondantes déterminent des segments nN en involution.

En outre, les deux valeurs de x déterminées par chaque valeur de z donnent lieu aussi à des segments mM qui forment une seconde involution. Car x et x' étant les deux valeurs de x déterminées par deux valeurs différentes z, z', il s'ensuit que la valeur x mise dans l'équation donne les deux valeurs z, z', et de même la valeur x'; d'où l'on conclut, en vertu de ce qui vient d'être démontré, que ces couples de valeurs x, x' déterminent des segments mM en involution, de même que les couples de valeurs z, z'.

Il reste à démontrer que deux segments correspondants mM et nN *se correspondent anharmoniquement*.

En effet, puisque les deux valeurs x, x' correspondent tout à la fois à la valeur z et à la valeur z', on a

$$x + x' = -\frac{a'z^2 + b'z + c'}{az^2 + bz + c}$$

et

$$x + x' = -\frac{a'z'^2 + b'z' + c'}{az'^2 + bz' + c}.$$

Donc, en faisant $x + x' = \lambda$, λ étant une variable que déterminent les deux valeurs conjuguées de x, et par conséquent le segment mM, puisque ces segments sont en involution, on peut dire que les deux valeurs z et z' sont les racines d'une même équation

$$(a\lambda + a')z^2 + (b\lambda + b')z + (c\lambda + c') = 0.$$

Or cette équation fait voir que les couples de racines donnent lieu à des segments en involution qui correspondent anharmoniquement aux valeurs de la variable λ. Mais les couples de valeurs de x correspondent aussi anharmoniquement aux valeurs de λ, en vertu de la relation

$$x + x' = \lambda.$$

Donc, etc.

Ainsi les différentes parties du théorème se trouvent démontrées.

15. Je vais actuellement donner quelques applications des deux propositions qui font l'objet de ce chapitre, à la théorie des courbes du 3ᵉ et 4ᵉ ordre. On en déduit, en premier lieu, une solution très-simple de la question proposée sous le nº 306, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, et que j'ai déjà traitée par une autre méthode, dans la livraison d'août de ce recueil.

§ V. — *Applications aux courbes du troisième et du quatrième ordre.*

La question est celle-ci :

Par un point S, *pris sur l'un des côtés d'un quadrilatère, on mène des rayons à chacun des points* a', a'', a''', ...

marqués sur une droite fixe, et on décrit la conique tangente à chaque rayon et aux quatre côtés du quadrilatère. Puis, par chacun des points b, b′, b″,... *appartenant, sur la même droite, à une série homographique à la première, on mène deux tangentes à la conique correspondante. Ces tangentes, que j'ai nommées* rayons tangentiels, *coupent les* rayons pivotants Sa, Sa′,... *en des points situés sur une courbe du troisième degré.*

Je vais démontrer qu'une droite quelconque L rencontre la courbe en trois points.

En effet, les rayons pivotants marquent sur cette droite une série de points M, N,...; les rayons tangentiels y marquent une série de segments mm', nn',...; ceux-ci correspondent, respectivement, aux points M, N,..., et, réciproquement, chacun des points M correspond, à la fois, aux deux extrémités m, m' du segment conjugué. Donc les segments sont en involution et ils correspondent anharmoniquement aux points M, N,....

D'après cela, et en se reportant au 3ᵉ théorème énoncé par M. Chasles dans son *Mémoire sur la contrusction des racines des équations du 3ᵉ et du 4ᵉ degré* (voir nº 12), on peut regarder ces points et ces segments comme représentant, à partir d'une origine fixe prise sur la droite, les valeurs respectives et conjuguées des variables d'une équation du troisième degré, telle que

$$x^2(az+b)+x(a'z+b')+(a''z+b'')=0.$$

Quand un rayon pivotant rencontre sur la droite L l'un des rayons tangentiels qui lui est conjugué, ce point appartient à la courbe et il est l'un des points d'intersection de cette courbe par la droite L. Mais alors les valeurs de x et de z sont égales; l'équation devient

$$Az^3+Bz^2+Cz+D=0,$$

ce qui prouve que la droite L coupe la courbe en trois points. Cette courbe est donc du troisième degré. C. Q. F. D.

Quant à la détermination de ces trois points, elle s'obtient géométriquement par les constructions remarquables que M. Chasles fait connaître dans le Mémoire récent dont j'ai parlé ci-dessus.

16. Je supposerai encore qu'on se propose de démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME. — *Étant donnés sur un même plan :* 1° *deux divisions homographiques* a, b, c, ..., a', b', c', ..., *sur une droite* L ; 2° *une conique tangente à cette droite et un point* S *extérieur à la droite. On joint* Sa, Sb, ..., *et, par les points homologues* a', b', ..., *on mène à la conique les tangentes* a't, b't', ... *qui coupent les rayons correspondants, chacune en un point. Le lieu de ce point variable est une courbe du troisième degré, qui passe deux fois par le point* S.

Démonstration. — Je vais prouver qu'une transversale quelconque L' rencontre la courbe en trois points. Les rayons Sa, ..., et les tangentes $a't$, ... coupent L' en des points $\alpha, \beta, \gamma, \ldots ; \alpha' \beta', \gamma', \ldots$; à chaque point α, il ne correspond qu'un seul point α' ; mais la réciproque n'est pas vraie, car le point α' est l'intersection de deux tangentes distinctes $\alpha' a'$, $\alpha' p'$, auxquelles correspondent sur L deux points a et p de la première division, et par conséquent aussi deux points a et π sur L'. Ainsi, aux deux points α et π considérés simultanément il ne correspond qu'un seul point α', et à ce point α' correpondent à la fois les deux points α, π, c'est-à-dire le segment $\alpha\pi$. On a donc sur L' une série de segments en involution correspondants anharmoniquement à une série de points. La relation qui lie ces deux séries peut s'exprimer par une équation du troisième degré à deux variables

$$x^2(az+b)+x(a'z+b')+(a''z+b'')=0,$$

dans laquelle les variables représenteront des segments comptés sur la droite indéfinie L′ à partir d'une origine fixe O, comme ci-dessus dans le troisième théorème du Mémoire de M. Chasles. Si, dans cette équation, on fait $x = z$, on exprimera que les rayons Sa et les tangentes correspondantes $a' t$ se coupent sur L′. Les racines de l'équation du troisième degré en z répondront donc aux points de rencontre de L′ avec la courbe. On voit que ces points sont au nombre de trois, et la méthode de M. Chasles permettra de les construire.

Ainsi la courbe est du troisième degré.

Cet exemple fait voir le danger qu'il y aurait à ne pas bien s'assurer de la nature de la réciprocité qui existe entre les deux séries de points. Car ici il semblerait au premier abord que, puisqu'à un rayon Sa il ne correspond qu'une seule tangente, et qu'à une tangente $a' t$ il ne correspond qu'un seul rayon Sa, il semblerait, dis-je, que les points α, β, γ,..., α', β', γ',... devraient se correspondre aussi, *un à un respectivement*. Une étude plus attentive de la question fait voir que la réciprocité n'a pas lieu de cette manière; et l'on en est d'ailleurs immédiatement averti dans le cas actuel. Car, si cette correspondance simple existait, les deux divisions α, β, γ,..., α', β', γ',... seraient homographiques; donc aussi les deux séries α', β', γ',..., a', b', c'..., ce qui est impossible puisque la droite L′ n'est pas une deuxième tangente fixe à la conique sur laquelle roule la tangente mobile qui marque les points de division.

Cette courbe du troisième degré passe par les points doubles des deux divisions homographiques a, b, c,..., a', b', c',..., et par le point qui, dans la première, est l'homologue du point de contact de la conique et de L, regardé comme faisant partie de la seconde. La courbe touche la conique et passe deux fois par le point S, où elle *se noue* pour jeter à droite et à gauche deux branches infinies ayant une asymptote commune tangente à la conique.

17. Les exemples qui précèdent suffisent pour donner une idée précise de la manière dont on doit appliquer les deux propositions qui ont été démontrées au début de ce chapitre. Mais je veux en donner d'autres plus généraux, qui montreront mieux encore toute l'étendue des ressources qu'elles présentent. Ainsi l'on verra avec quelle facilité elles conduisent à divers modes de génération des courbes du 3^e et du 4^e degré, et même comment elles sont susceptibles de s'étendre à celles d'un ordre supérieur.

18. Je supposerai donc qu'on ait, sur une même droite, une série de segments en involution Mm, $M'm'$, . . . , et une série de points n, n', . . . , correspondant anharmoniquement à ces segments, comme par exemple leurs points milieux, ou bien leurs pôles pris relativement à un point fixe quelconque de la droite sur laquelle ils sont décrits.

Si, d'un point fixe P pris dans le même plan, on mène des rayons aux extrémités M, m de chaque segment, et que d'un autre point fixe P$'$ on mène des rayons Pn, . . . , aux points homologues, ces derniers rayons rencontreront les premiers, respectivement, en des points situés sur une courbe du troisième ordre.

En effet, si l'on mène une transversale quelconque L, elle coupera les rayons PM, pm, . . . , en des points formant une série de segments en involution, et les segments Pn, . . . , en des points formant une division homographique à celle des segments. Si l'on prend pour variables x et z les distances respectives de ces points à une origine fixe O de cette transversale, on aura entre les variables une équation de la forme

$$x^2(az+b)+x(a'z+b')+(a''z+b'')=0 \quad (\text{n}^\circ\ \mathbf{12}).$$

Pour les points où L coupe la courbe, on a $x=z$, et l'équation devient du 3^e degré en x seul. Ses racines feront connaître les points d'intersection qui sont par conséquent au nombre de trois, comme il fallait le démontrer.

Remarque. — Cette courbe passe une fois par le point P′, deux fois par le point P, et une fois par chacun des points doubles de l'involution décrite sur la droite donnée. Dans le cas général, elle se compose de trois branches infinies, dont une seule traverse la droite donnée, et dont les deux autres ont une asymptote commune parallèle à cette droite. Les deux autres asymptotes sont aussi, l'une et l'autre, communes à deux branches distinctes, et elles coupent la courbe en deux points qui sont, comme on sait, en ligne droite avec le point où la première asymptote la coupe elle-même.

Dans le cas particulier où la droite PP′ coupe la droite donnée en un point situé entre les deux points doubles de l'involution, deux des branches deviennent imaginaires, ainsi que leur point de croisement P, et il ne reste qu'une seule branche ayant une asymptote parallèle à la droite *donnée*.

19. Les couples de droites (PM, pm), (PM′, pm'),..., peuvent être remplacés par des coniques, qui auront, comme on sait, quatre points communs (réels ou imaginaires). L'intersection de ces coniques par les rayons homologues du faisceau P′n, P′n',..., qui leur est homographique, engendrera une courbe du 3^e degré passant par le sommet P′ et par les quatre points communs aux coniques.

C'est l'un des deux modes de description employés par M. Chasles pour construire la courbe du 3^e degré passant par neuf points.

20. Prenons une série de coniques inscrites au même quadrilatère. Leurs centres sont en ligne droite, et forment une série homographique à celle des coniques. Par un point quelconque P, menons deux tangentes à chaque conique. Nous aurons, autour de ce point, une série d'angles en in-

volution, correspondant anharmoniquement aux centres des coniques, et par conséquent aux rayons qui joignent ces centres à un point quelconque P′ du plan de la figure. Ces rayons couperont encore les côtés des angles correspondants sur une courbe du 3e degré passant par le point P′.

Au lieu des centres des coniques, on peut prendre, pour la série de points, celle des pôles d'une droite quelconque pris relativement à elles, etc., etc.

21. Qu'on prenne sur une même droite deux séries de segments en involution, se *correspondant anharmoniquement;* puis, qu'on joigne les extrémités des premiers Mm,..., à un point fixe P, et celles des seconds Nn,..., à un autre point P′. Les rayons (P′N, P′n),..., couperont les rayons conjugués (PM, Pm),..., en des points situés sur une courbe du quatrième ordre.

Car ces deux faisceaux, étant coupés sur une transversale L, y marqueront deux séries de points en involution qu'on pourra rapporter à une origine fixe, et qui auront entre eux une relation de la forme

$$x^2(az^2+bz+c)+x(a'z^2+b'z+c')+(a''z^2+b''z+c'')=0$$

dans laquelle le déterminant des neuf coefficients sera nul (Théorème IV, n° 13).

Par conséquent, les points pour lesquels $x=z$, c'est-à-dire les points où L coupe la courbe, sont au nombre de quatre, puisqu'ils sont donnés par les racines d'une équation du 4e degré.

Remarque. — On peut se donner de bien des manières les deux séries de segments qui se correspondent anharmoniquement. Par exemple, on pourra former une série de points homographiques à celle des points milieux de la série de segments, et regarder ces nouveaux points comme les points milieux de la deuxième série de segments, dont deux pourront être pris arbitrairement (*Géom. sup.*, n° 232).

On pourra encore couper deux coniques quelconques par un faisceau de transversales issues d'un point fixe de leur plan, et projeter ensuite les cordes interceptées dans chacune d'elles sur une droite quelconque, en prenant pour centres de projection respectifs un point de chacune de ces coniques. Les segments obtenus formeront deux séries homographiques de segments en involution, etc., etc.

22. La série d'angles (PM, *pm*),... peut être remplacée par une série de coniques ayant quatre points communs, et pareillement la série (PN, *pn*),..., pourvu que les coniques des deux faisceaux se correspondent aussi anharmoniquement.

On retrouve ainsi le mode de génération des courbes du quatrième ordre donné par M. Chasles.

On peut prendre également deux séries de coniques inscrites dans deux quadrilatères différents, et qu'on fera se correspondre anharmoniquement. Si, par deux points fixes P, P′, on mène des couples de tangentes à ces coniques, les tangentes de la première série couperont celles de la seconde série ou les points situés sur une courbe du quatrième ordre, etc., etc.

Le *second théorème général*, concernant la génération des courbes du quatrième ordre, qui est donné par M. Chasles (*Comptes rendus*, 1853, 2e semestre, page 375), est encore une conséquence fort simple des principes qui viennent d'être exposés. Il est ainsi conçu :

Étant donnés deux systèmes de quatre points a, b, c, d et a′, b′, c′, d′, *le lieu d'un point tel, que le rapport anharmonique* r *des droites menées de ce point aux quatre* a, b, c, d, *et le rapport anharmonique* r′ *des droites menées du même point aux quatre* a′, b′, c′, d′, *aient entre eux la relation constante*

$$\alpha . rr' + \beta . r + \gamma . r' + \delta = 0,$$

est une courbe du quatrième ordre qui passe par les huit points fixes.

En effet, chaque valeur de r détermine une conique S passant par la *base* (a, b, c, d); de même chaque valeur de r' détermine une conique S' reposant sur la base (a', b', c', d'). Mais, en vertu de l'équation, à une valeur de r il ne correspond qu'une valeur de r', et réciproquement. Donc le faisceau S correspond anharmoniquement au faisceau S', et, par conséquent, ces coniques se coupent sur une courbe du quatrième ordre.

23. Les considérations qui précèdent peuvent être généralisées ainsi qu'il suit :

Soit un faisceau de courbes du m[ième] *ordre, liées anharmoniquement à des courbes du* n[ième] *ordre formant un second faisceau, de telle sorte qu'à une courbe du premier faisceau il n'en corresponde qu'une seule du second faisceau, et réciproquement. Les courbes homologues se couperont en* mn *points, appartenant à une courbe de l'ordre* m + n.

En effet, une transversale quelconque coupera le premier faisceau en une série de points groupés m par m, et le second faisceau en une série de points groupés n par n, correspondants aux premiers, groupe à groupe. Si l'on rapporte tous ces points à une origine fixe, on pourra évidemment les lier entre eux par une équation à deux variables x et z du degré $(m+n)$, qui deviendra du degré $(m+n)$ en x seul pour tous les points communs aux deux séries de groupes, c'est-à-dire pour les points d'intersection de la droite et de la courbe, laquelle sera par conséquent du degré $m+n$.

Dans chaque cas, la difficulté consistera à *lier anharmoniquement* les deux faisceaux, ce qui ne pourra se faire qu'en s'appuyant sur quelque propriété générale commune à toutes les courbes (en nombre infini) d'un même ordre

m qui ont $\frac{m(m+3)}{2} - 1$ points communs, c'est-à-dire un point de moins qu'il n'en faut pour déterminer une courbe de cet ordre. Et de même pour les courbes de l'ordre n.

C'est ainsi que, dans la génération des courbes du troisième et du quatrième ordre, on emploie des faisceaux de coniques, qu'on lie anharmoniquement en se fondant sur la propriété qu'ont quatre coniques, passant par quatre mêmes points, d'avoir le même rapport anharmonique que les polaires d'un point quelconque de leur plan prises relativement à elles.

Mais on voit, en même temps, que cette connaissance de la génération des courbes d'un ordre supérieur ne peut être que l'œuvre lente du temps; qu'on ne pourra s'y élever que de proche en proche, et en étudiant toutes les propriétés de celles qui les précèdent dans la hiérarchie, avec cette patience et cette sûreté d'investigation que la géométrie sait, mieux peut-être que toute autre science, apporter dans ses recherches, parce que ne pouvant guère ni sauter ni courir, s'il m'est permis de parler ainsi, elle ne laisse inaperçu aucun des détails de la route qu'elle parcourt.

§ VI. — *Démonstration de quelques théorèmes énoncés par M. Chasles, dans le Mémoire cité plus haut.*

24. Le paragraphe V du Mémoire de M. Chasles est ainsi conçu :

« Qu'on ait un faisceau de courbes du troisième ordre
» passant toutes par neuf mêmes points, et qu'en un de ces
» points a on mène les tangentes aux courbes, que nous
» appellerons M, M′, M″, etc.; la corde qui joint deux
» quelconques des neuf points rencontre chacune des
» courbes en un troisième point, de sorte qu'on a sur
» cette droite une série de points n, n', n'', etc. *Ces*

» *points correspondent anharmoniquement aux tangen-*
» *tes* M, M′, M″, etc. . . . .

» D'où l'on peut conclure que si des points n, n', etc., on
» abaisse sur les tangentes M, M′, etc., respectivement des
» perpendiculaires, ou, plus généralement, des obliques
» sous un même angle et dans un même sens de rotation,
» toutes ces droites envelopperont une parabole, et, par
» conséquent, leurs pieds sur les tangentes seront sur une
» courbe du troisième ordre, ayant un point double en a,
» point de contact de toutes les tangentes. »

Il s'agit de démontrer ces deux conclusions.

Soient A, A′, A″, . . ., les pieds des obliques; les angles aAn, $aA'n'$, . . ., sont tous égaux entre eux, par hypothèse, et décrits dans le même sens de rotation. Donc (*Géom. sup.*, page 461, n° 651) leurs côtés marquent sur la droite, à l'infini, deux divisions homographiques. L'une de ces divisions est homographique au faisceau des côtés Aa, $A'a$, . . ., parce que tous ces côtés sont issus du même point a; donc elle est homographique à la division formée par les points n, n', ... Donc enfin celle-ci est homographique à la division formée, à l'infini, par les seconds côtés An, $A'n'$, . . ., des angles A, A′, ... Donc ces côtés, qui joignent, deux à deux, les points homologues de ces deux divisions, enveloppent une conique; et cette conique est une parabole, parce que l'une des deux droites fixes auxquelles elle est tangente, est située à l'infini.

Il faut prouver actuellement que les points A, A′, . . ., sont sur une courbe du troisième ordre.

En effet, la circonférence de cercle, menée par les trois points a, A, n rencontre la droite L, sur laquelle sont les points n, n', . . . en un point F, tel que l'angle aFn est le supplément de l'angle constant aAn; donc toutes les autres circonférences menées, respectivement, par les autres points A', n'; A'', n''; . . ., et par le point a, passent par ce point F. Il résulte de là que les points A, A',. . . se trouvent sur un faisceau de cercles passant par les deux points fixes a et F; ces cercles correspondent anharmoniquement aux points n, n', . . . et par conséquent aux droites aA, aA$'$,. . . . Donc les points A, A',. . . sont sur une courbe du troisième ordre, d'après le théorème général de M. Chasles sur la description de ces courbes.

On sait que la courbe du troisième ordre, ainsi décrite, passe par les quatre points d'intersection des coniques du premier faisceau et par le sommet du faisceau de droites. Ici les coniques sont des cercles; deux de leurs quatre points d'intersection sont imaginaires et situés à l'infini sur un cercle (*Géom. sup.*, n° 651). Donc, en premier lieu, la courbe du troisième ordre a deux points imaginaires, à l'infini, sur un cercle, c'est-à-dire qu'elle a deux asymptotes imaginaires, coïncidentes avec les asymptotes d'un cercle. Le point a est un point double de la courbe. Les tangentes en ce point sont les rayons doubles des deux faisceaux homographiques formés, l'un par les droites aA, aA$'$,. . ., l'autre par les tangentes en a aux cercles aAn, A$'an$,. . ., parce que la droite aA_n, quand elle a l'une de ces deux positions, coupe le cercle qui lui correspond, et qui a cette même droite pour tangente, en un point qui appartient à la courbe du troisième ordre, et qui est infiniment voisin du point a dans la direction de cette tangente aA_n.

On peut concevoir d'une autre manière la génération de la courbe du troisième ordre en question.

En effet, menons par le point a une tangente à la parabole; les obliques nA, n'A$'$,. . ., y marqueront une série de points p, p',. . ., homographique à la division n, n',. . . . Faisons passer une série de cercles par les points a, A, p; a, A', p';. . ., respectivement. Tous ces cercles auront pour tangente commune en a la droite aT, qui fait avec ap l'angle paT égal à l'angle constant sous lequel on abaisse les obliques. Chaque point p détermine un cercle, et réciproquement chaque cercle détermine un seul point p; donc la série de cercles est homographique à la série $p, p', \ldots$, et par conséquent à la série de droites aA, aA$'$,.... Donc ces deux faisceaux se coupent sur une courbe du troisième ordre, tangente en a à la droite T, que tous les cercles touchent en ce point. La droite aT est donc une des deux tangentes à la courbe au point double. Pour trouver la seconde, il suffit de considérer l'autre tangente à la parabole issue du point a, et la série de points $q, q', q'', \ldots$, qu'y marquent les obliques npA, $n'p'$A$'$, $n''p''$A$''$,.... Si l'on fait passer une nouvelle série de cercles par les points a, A, q; a, A$'$, q'; ..., respectivement, tous ces cercles seront tangents en a à une nouvelle droite aT, qui fait avec aq l'angle qaT$'$ égal à l'angle de rotation des obliques, et ils formeront un nouveau faisceau homographique au faisceau de droites aA, A$'a$,.... La courbe du troisième ordre résulte donc aussi de l'intersection de ces deux faisceaux, et par conséquent elle a pour tangente, en son point a, la droite aT$'$. Ainsi elle admet deux tangentes distinctes aT, aT$'$ au point a; donc ce point est *double*.

On pourrait enfin démontrer que la courbe, lieu géométrique des points A, A$'$,..., est du troisième ordre, en prouvant, au moyen du raisonnement employé aux n^{os} 15 et 16 du présent chapitre, qu'une transversale quelconque ne la rencontre qu'en trois points. Mais il me semble inutile d'entrer à ce sujet dans de nouveaux détails.

25. Le § XI du Mémoire de M. Chasles exprime le théorème suivant :

« Qu'on ait un faisceau de courbes du troisième ordre,
» passant par les neuf mêmes points d'intersection a, b,
» c, etc. La corde bc qui joint deux de ces points rencontre

» les courbes en des points n, n', etc., et une transversale » quelconque, menée par un des deux points b, c, ou par » un autre a, les rencontre en des couples de points m, M; » m', M', etc.; *ces couples de points sont en involution* » *et correspondent anharmoniquement aux points* n, » n', *etc.* Car à un point m de la transversale ne corres- » pond qu'un point n sur la corde, mais à un point n de » cette droite correspondent deux points m, M sur la trans- » versale.

» *Remarque.* — On peut conclure de là que si l'on joint » chaque point n aux deux points correspondants m, M » par deux droites nm, nM, toutes ces droites enveloppent » une courbe de troisième classe quand la transversale est » menée par un des deux points b, c, et simplement une » conique quand la transversale est menée par un autre » point a. »

Il s'agit de prouver ces deux dernières propositions.

Supposons, en premier lieu, que la transversale soit menée par l'un des deux points b ou c, par le point b par exemple. Il suffit de prouver que, d'un point quelconque P on ne peut mener que trois tangentes à la courbe. Projetons tous les segments Mm, M'm', etc., en Qq, Q'q', etc., sur la droite bc, par des rayons issus du point P. On aura sur cette droite : 1° une série de points n, n', etc.; 2° une série de segments en involution Qq, Q'q', etc.; et ces segments correspondront anharmoniquement aux points n, n', etc., ainsi que cela avait lieu pour les segments Mm, M'm', etc. Il est clair que la droite variable Pn sera une tangente de la courbe, quand le point n coïncidera avec l'une ou l'autre des extrémités Q, q du segment qui lui correspond. Or nous avons vu plus haut, n° 12, que cette coïncidence a lieu pour trois positions du point n seulement. Donc le théorème est démontré.

Mais si la transversale L est menée par l'un quelconque a

des six autres points d'intersection des courbes du troisième degré, la question change de face. Dans le cas précédent, le point n ne pouvait jamais se trouver au point de rencontre b de la transversale et de la droite bc, parce que, d'après l'hypothèse, le point b n'est pas un point double. Ici, au contraire, le point n peut être placé (dans une de ses positions particulières) au point de concours i de la transversale aL et de la droite bc. Quand il s'y trouve, l'un des points M ou m du segment correspondant s'y trouve évidemment aussi. Donc, en faisant comme tout à l'heure la projection des segments sur la droite bc, on voit que, quel que soit le point projetant P, l'équation du troisième degré, d'où dépend la détermination des points de coïncidence cherchés, a une racine constante, ou nulle si l'on place l'origine des variables au point i lui-même. Cette équation se réduit donc d'elle-même au second degré.

On peut dire encore que toute droite menée par le point i est une tangente à la courbe, qui dès lors devient, abstraction faite de ce point, une courbe de seconde classe, c'est-à-dire une conique.

26. Le § XII du Mémoire est ainsi conçu :

« Autour d'un point P d'une courbe de troisième ordre à
» point double, on fait tourner une transversale N qui
» rencontre la courbe en deux points μ, μ_1, et du point
» double O on mène les droites $O\mu$, $O\mu_1$ que nous appe-
» lons les droites m et M. On reconnaît immédiatement

. . . .

» que *les couples de droites* M, m *forment une involution*
» *et correspondent anharmoniquement aux droites* N.

» *Remarque.* — Les deux tangentes à la courbe du
» troisième ordre en son point double forment un couple
» de droites appartenant à l'involution. Et réciproque-
» ment, si l'on mène par le point double des couples de
» droites en involution tels, que les deux tangentes à la

» courbe en ce point forment un des couples, *les cordes*
» *interceptées dans la courbe entre ces droites passeront*
» *toutes par un même point de la courbe.*

» Si les deux tangentes ne forment pas un couple faisant
» partie de l'involution, les cordes sous-tendues ne passent
» plus par un même point, *mais elles enveloppent une*
» *conique.* »

Le *réciproquement* de la *remarque* se démontre comme il suit :

Si les cordes interceptées dans la courbe ne passaient pas par un même point, on pourrait, par le troisième point où l'une quelconque d'entre elles coupe la courbe, mener une série de cordes qui, en achevant la construction indiquée dans le théorème, donnerait lieu à un faisceau de droites en involution dont ferait partie le couple des tangentes à la courbe au point double. Or ce faisceau aurait en commun, avec celui qui est donné, deux couples de droites, savoir : ces deux tangentes et les deux droites $P\mu$, $P\mu_1$ déterminées par la corde $n\mu\mu_1$ que nous avons choisie. Donc les deux faisceaux se confondent, ce qui démontre la proposition.

D'après cela, si les deux tangentes ne forment pas un couple faisant partie de l'involution, les cordes ne passent plus par un même point. Pour démontrer qu'elles enveloppent une conique, il faut prouver que deux quelconques d'entre elles sont divisées homographiquement par les autres.

Or chacune de ces deux cordes n'est coupée par une autre corde qu'en un seul point, et ces deux points se correspondent anharmoniquement, si réciproquement par ce point on ne peut mener qu'une seule autre corde et non pas deux. En d'autres termes, il faut prouver que trois cordes ne peuvent passer par un même point.

En effet, si trois cordes passaient par un même point P, on pourrait décrire une courbe du troisième ordre passant par leurs extrémités et ayant le même point double que la proposée, et cette courbe passerait aussi par le point P, en vertu du théorème XII. D'ailleurs elle se confondrait avec la courbe donnée, comme ayant en commun avec elle six points et un point double. Donc les tangentes au point double feraient partie de l'involution, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc, etc.

SECTION II.

CONSTRUCTIONS DIVERSES DE LA COURBE DU TROISIÈME ORDRE. — QUESTIONS CONCERNANT LES INTERSECTIONS DE CES COURBES.

§ VII. — *Construction de la courbe du troisième ordre dans divers cas particuliers.*

27. La construction générale de la courbe du troisième ordre s'applique à différents cas particuliers que M. Chasles a indiqués rapidement dans le cours d'un Mémoire inséré aux *Comptes rendus* de l'année 1853 (premier semestre, page 947).

Ce sont précisément ces cas particuliers que je me propose d'examiner et de résoudre ici. On verra dans ce nouveau travail des applications variées des théories de la *Géométrie supérieure,* dont les ressources sont inépuisables.

Pour abréger le discours, j'appellerai *base* d'un faisceau de coniques les quatre points communs à toutes ces coniques; ainsi, B étant la *base,* (B, *e*) signifiera la conique qui passe par les quatre points de la base et par un cinquième point *e*. La lettre P représentera toujours, comme dans le Mémoire, le sommet du faisceau des droites *génératrices*.

28. Premier cas. — *Deux des neuf points donnés sont imaginaires.*

On donne, par exemple, une droite L sur laquelle se trouvent les deux points imaginaires, leur point milieu ω et le rectangle $m\varepsilon . m\varphi$ de leurs distances à un point fixe m de la droite L; ces données pouvant d'ailleurs être explicites, ou bien impliquées dans une équation du second degré à une inconnue (*Géom. sup.*, n^os 86, 87).

On comprendra ces deux points dans la *base* B du faisceau, c'est-à-dire qu'on fera passer toutes les coniques génératrices par ces deux points et par deux autres points réels a, b. La construction s'achèvera ensuite comme à l'ordinaire.

La détermination de chacune de ces coniques exige quelques détails.

Soit c un cinquième point par lequel doit passer une des coniques. Joignons ab, qui coupe L en M, et, par le point c, menons, parallèlement à L, la droite cM$'$ qui rencontre ab en M$'$ et la conique elle-même en un point inconnu c'. Le théorème de Newton (*Géom. sup.*, n° 480) donne

$$\frac{M\varepsilon . M\varphi}{Ma . Mb} = \frac{M'c . M'c'}{M'a . M'b}.$$

Tout est connu dans cette équation, à l'exception de M$'c'$. Car le produit $M\varepsilon . M\varphi$ est égal à

$$\begin{aligned}(Mm + m\varepsilon).(Mm + m\varphi) &= \overline{Mm}^2 + Mm\,(m\varepsilon + m\varphi) + m\varepsilon . m\varphi \\ &= \overline{Mm}^2 + 2\,Mm . m\omega + m\varepsilon . m\varphi,\end{aligned}$$

relation où tout est donné, par hypothèse.

On connaîtra donc le point c'. On trouvera, sans plus de difficulté, le point a' de la courbe, qui se trouve sur la droite aa' parallèle à bc, ce qui fait cinq points réels, au moyen desquels on pourra effectuer sur la conique toutes les constructions que la question réclame.

Remarque. — Si, pour représenter les points imaginaires, on donnait une conique T et une droite L, on ramènerait les données aux précédentes, en observant que le théorème de Newton fait immédiatement connaître le rectangle $m\varepsilon . m\varphi$, et que le point milieu ω est précisément le point où L est coupée par le diamètre de T qui est conjugué à la direction de L.

Ainsi la question est complétement résolue.

29. Deuxième cas. — *Quatre des points donnés sont imaginaires, par couples.*

On prendra ces quatre points pour *base* du faisceau des coniques génératrices, et la construction suivra comme à l'ordinaire.

Il reste seulement à faire voir comment on peut faire passer une conique par quatre points imaginaires et par un cinquième point réel.

Je supposerai d'abord que le système des quatre points imaginaires soit donné au moyen de deux coniques tracées (ou simplement déterminées par cinq conditions), et qui ne se coupent en aucuns points réels.

Par le cinquième point a menons une transversale, coupant les deux coniques en des points h, h'; i, i', et la conique, qu'on veut déterminer, en un point inconnu a'. Les trois segments hh', ii', aa', sont en involution (*Géom. sup.*, n° 743). Donc on obtiendra facilement le point a' (*Géom. sup.*, n° 213).

On obtiendra de la sorte autant de points qu'on le voudra.

L'une des coniques données peut être remplacée par l'ensemble de deux droites, qui seront par conséquent les *axes de symptose* de la première et de celle qu'on a à construire. La solution est encore la même. Car si jj' est le segment intercepté par ces droites sur la transversale, il y a encore involution entre les trois segments hh', jj', aa' (*Géom. sup.*, n° 714, *Corollaire*).

Enfin on peut ne donner que deux droites L, L' sur lesquelles se trouvent, deux par deux, les points imaginaires $\varepsilon, \varphi; \gamma, \theta$. Mais alors il faut connaître de plus leurs points milieux ω, ψ, et les rectangles de leurs distances à deux points fixes pris sur L et sur L', ou, ce qui en est une conséquence, au point de rencontre m de ces deux droites. Ainsi l'on connaît $m\varepsilon.m\varphi$ et $m\gamma.m\theta$.

Par le cinquième point a menons, parallèlement à L, une droite $aa'n$, qui coupe la conique cherchée en un point inconnu a' et la droite L' en n. On aura, comme ci-dessus,

$$\frac{na'.na}{n\gamma'.n\theta}=\frac{m\varepsilon.m\varphi}{m\gamma.m\theta},$$

équation où tout est connu, excepté a'.

Ayant obtenu a', on mènera par ce point une parallèle $a'n'$ à L', et l'on obtiendra pareillement un autre point b; et ainsi de suite, de proche en proche.

Remarque. — Deux des points imaginaires peuvent être donnés à l'infini sur une conique ou sur un cercle. Dans la première hypothèse, toutes les coniques génératrices, passant d'ailleurs par les deux points imaginaires donnés sur la droite L, seront *homothétiques* à la conique donnée (*Géom. sup.*, n° 472), et, dans la seconde, elles seront toutes des cercles ayant pour axe radical avec le cercle donné la droite L elle-même (*Géom. sup.*, n° 719).

30. Troisième cas. — *Six des points donnés sont imaginaires, par couples.*

On prendra pour *base* quatre de ces points (ε, φ), (γ, θ), comme dans le deuxième cas, et on construira la courbe du troisième ordre, non plus par la première construction où l'on cherche un dixième point *générateur* P, mais par la seconde indiquée à la page 276 des *Comptes rendus* de 1853 (deuxième semestre). En effet, rien n'empêchera de supposer que deux des trois points a', b', c', par lesquels passent toutes les coniques du second faisceau, sont imaginaires; et cela ne présentera aucune difficulté, en vertu de ce qui précède.

31. Quatrième cas. — *On demande que la courbe soit tangente à une ou plusieurs droites en des points donnés.*

Ce cas est traité par M. Chasles lui-même à la page 952 des *Comptes rendus*.

Soient, par exemple, A, B, C, D, quatre tangentes données, et a, b, c, d, les quatre points de contact, pris sur elles, respectivement. i est le cinquième point donné pour compléter les conditions du problème.

(a, b, c, d) sera la base du faisceau. Quatre des cinq coniques à déterminer pour trouver le sommet générateur P, le seront par la condition qu'elles doivent toucher les droites A, B, C, D, respectivement. La cinquième est (a, b, c, d, i).

Pas de difficulté par conséquent.

32. Cinquième cas. — *On donne sept points* a, b, c, d, e, f, g, *et l'on demande que la courbe ait un contact du premier ordre avec une conique donnée au point* h.

On prend pour base (a, b, c, d), et l'on mène la tangente en h à la conique donnée. Le problème est ramené à celui du quatrième cas.

33. Sixième cas. — *On donne six points* a, b, c, d, e, f *et trois points infiniment voisins* (g, h, i) *sur une conique* S; *en d'autres termes, on demande que la courbe ait un contact du deuxième ordre avec cette conique.*

On prendra pour base $[a, b, (g, h)]$, c'est-à-dire que toutes les coniques génératrices seront tangentes, au point g, à la tangente ghL menée en g à la conique S. On aura ainsi immédiatement les quatre coniques

$$(B, c)\ (B, d)\ (B, e)\ (B, f).$$

Il reste à construire la conique (B, i).

S et (B, i) ayant trois points communs (g, h, i) en g, n'en ont plus qu'un autre inconnu x. Leurs axes de symptose sont gL et gx. Soit m le point où gL coupe ab; soit y

le point inconnu où gx coupe ab; soient enfin ε, φ les points de rencontre (réels ou imaginaires) de ab avec S. Les trois segments ab, $\varepsilon\varphi$, my, sont en involution. Il sera donc facile de construire le point y (*Géom. sup.*, n° 213).

y fait connaître x et par suite détermine (B, i).

34. Septième cas. — *On donne cinq points* a, b, c, d, e, *et quatre points infiniment voisins* (f, g, h, i) *sur une conique* S; *en d'autres termes, on demande que la courbe ait avec* S *un contact du troisième ordre.*

On prendra (f, g, h, i) pour base B, ce qui fournira les cinq coniques génératrices (B, a) (B, b), (B, c) (B, d), (B, e). Voici comment on détermine chacune d'elles, (B, a) par exemple.

S et (B, a) ont leurs deux axes de symptose confondus en un seul, suivant la tangente fL menée à S au point f.

Par le point a menons une transversale quelconque qui coupe fL en m, S en ε, φ, et (B, a) en un point inconnu a' qu'il s'agit de déterminer.

m est le point double d'une involution dont aa' et $\varepsilon\varphi$ sont deux segments. On aura donc facilement a'. Par exemple, l'équation $\overline{Om}^2 = O\varepsilon . O\varphi$ fera connaître le point central O.

Après quoi, l'équation $Oa' = \dfrac{\overline{Om}^2}{Oa}$, fera connaître a.

35. Huitième cas. — *On donne quatre points* a, b, c, d *et cinq points infiniment voisins* (e, f, g, h, i) *sur une conique* S; *en d'autres termes, on demande que la courbe ait, en* e, *avec* S *un contact du quatrième ordre.*

On prendra (e, f, g, h) pour base (*voir* le septième cas). Les quatre coniques (B, a), (B, b), (B, c), (B, d) se construiront comme précédemment. La cinquième conique sera S elle-même évidemment.

Remarque. — Dans ces deux derniers cas, le rapport anharmonique des quatre coniques (B, a), B, $b)$, (B, c), (B, d) ne pourra s'obtenir qu'en prenant, par rapport à elles, les polaires d'un point quelconque de leur plan, et encore faudra-t-il avoir le soin de ne pas prendre ce point sur la tangente gL, parce que, dans ce cas, toutes les polaires se confondant en une seule et même droite, il y aurait indétermination apparente.

36. Neuvième cas. — *On donne six points* a, b, c, d, e, f, *et trois points infiniment voisins* (g, h, i) *en ligne droite; en d'autres termes, on demande que la courbe ait un point d'inflexion en* g, *dans une direction donnée* gL.

On prendra pour base [a, b, (g, h)], c'est-à-dire que toutes les coniques génératrices, passant en a et b, seront tangentes en g à la droite gL. Les coniques (B, c), (B, d), (B, e), (B, f) se détermineront sans difficulté; quant à la cinquième (B, i), elle se réduit évidemment au système des deux droites ab et ghi ou gL'.

Si l'on se sert des tangentes aux coniques en a pour déterminer les rapports anharmoniques λ, λ' des coniques auxiliaires Σ, Σ', on remarquera que la tangente en a à la conique (B, i) est précisément la droite ab elle-même.

37. Dixième cas. — *On donne trois points* a, b, c; *trois autres points infiniment voisins et en ligne droite* (d, e, f); *et trois autres points infiniment voisins et en ligne droite* (g, h, i); *en d'autres termes, on demande que la courbe ait deux inflexions, l'une en* d *suivant* dL, *et l'autre en* g *suivant* gL'.

On prendra pour base [(d, e), (g, i)], c'est-à-dire que toutes les coniques génératrices seront tangentes en d et g aux droites dL et gL'. On aura ainsi les coniques (B, a), (B, b), (B, c); puis (d, e, f, g, i), c'est-à-dire le système des deux droites dL, gL'; et enfin (d, e, g, h, i), c'est-à-dire encore une fois les deux droites dL, gL'.

Pour obtenir ensuite les rapports anharmoniques λ, λ', on prendra les polaires d'un point quelconque par rapport aux trois coniques et à l'angle (dL, gL'), ce qui donnera évidemment $\lambda = \lambda'$, au moyen de quoi on construira Σ et Σ' sur les bases respectives (a, b, c, d), (a, b, c, g). Or ceci revient, en définitive, à placer le point P sur la droite dg, de manière que les quatre droites Pa, Pb, Pc, Pd correspondent anharmoniquement aux quatre coniques (B, a), (B, b), (B, c) (dL, gL').

Autrement. Il est aussi simple et plus général de regarder les deux points d et g comme étant les points d'intersection d'une droite donnée L avec une conique aussi donnée; car on peut ainsi supposer que ces points soient imaginaires. Dans tous les cas, le pôle Q de la droite L, par rapport à la conique, est toujours réel et facile à déterminer, et les droites Qd, Qg sont les tangentes (réelles ou imaginaires) à la conique, en ses points d et g. Donc, si l'on décrit la courbe du troisième ordre qui touche la conique donnée aux points d et g, et qui de plus passe par les points f et h de Qd et de Qg, infiniment voisins de d et de g respectivement, cette courbe aura, en ces points, deux inflexions (réelles ou imaginaires).

Les droites Qd, Qg représentent la quatrième conique, comme dans la première construction.

Corollaire I. — Si le troisième point c est sur la droite dg, il suffit d'y placer le point P qui, dans le cas où c est quelconque, est lui-même sur cette ligne.

Corollaire II. — Enfin, si le point b est lui-même sur cette droite et infiniment voisin du point c, on place le sommet P en ce point. On regarde les droites dgb, ehc, qui coïncident en une seule dgb, comme formant la troisième conique, et l'on prend le rayon ba pour correspondre à la conique (B, a). On résout ainsi cette autre question:

Décrire une courbe du troisième ordre ayant trois inflexions, de directions données, en trois points en ligne droite, et passant par un quatrième point a.

38. Onzième cas. — *On donne six points* a, b, c, d, e, f *et un septième point* g *qui doit être un point double, ordinaire, conjugué ou de rebroussement.*

On prend pour base (a, b, c, g) et on place le point P en g. Les trois coniques (B, d), (B, e), (B, f) correspondent anharmoniquement aux trois rayons Pd, Pe, Pf. Cela suffit évidemment pour déterminer le rayon correspondant à une quatrième conique. La courbe décrite a un point double en P ou g, et les tangentes en ce point sont les *rayons doubles* des deux faisceaux homographiques formés, l'un par les tangentes aux coniques en leur point commun P ou g, et l'autre par les rayons Pd, Pe, Pf,..., correspondants à ces coniques.

Si ces rayons doubles sont réels, le point g sera un point double ordinaire.

S'ils sont imaginaires, le point g sera un point *conjugué* ou *isolé*.

Enfin, s'ils se confondent en un seul, le point g sera un point de rebroussement.

Si l'on veut que les tangentes aux deux branches de la courbe qui passent au point g aient des directions déterminées, il faut diminuer le nombre des conditions. Car ces tangentes (qui peuvent d'ailleurs être réelles, imaginaires ou coïncidentes) étant les rayons doubles des deux faisceaux homographiques, il ne faut plus qu'un seul point a pour achever de déterminer complétement ces faisceaux et, par conséquent, la construction de la courbe du troisième ordre.

§ VIII. — *Questions concernant les intersections de deux courbes du troisième ordre.*

39. Je continuerai, dans ce qui va suivre, à employer les mêmes dénominations. Les coniques *génératrices* seront désignées par les lettres S ou s; les lettres Σ, σ dési-

gueront des coniques auxiliaires que chaque question conduira à considérer. Enfin U, U′ seront des courbes du troisième ordre.

Cela posé, les intersections de deux courbes du troisième ordre donnent lieu aux cinq questions suivantes :

40. Première question. — *Les deux courbes*

$$\left.\begin{matrix}\mathrm{U}\\ \mathrm{U}'\end{matrix}\right\}\ \textit{passent par les points}\ \mathrm{a, b, c, d}\left\{\begin{matrix}\mathrm{e, f, g, h, i,}\\ \mathrm{e', f', g', h', i'.}\end{matrix}\right.$$

On demande de déterminer la conique Σ *sur laquelle se trouvent les cinq autres points d'intersection* u, v, x, y, z.

U et U′ ne sont pas tracées, bien entendu.

Solution. — Prenons pour *base* les quatre points *a*, *b*, *c*, *d*, et désignons cette base par (B). Cherchons le rapport anharmonique des quatre coniques génératrices (B, *e*), (B, *f*), (B, *g*), (B, *h*). [(B, *e*) représente la conique passant par les cinq points *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, et ainsi des autres.] Soit λ ce rapport. Cherchons aussi le rapport anharmonique λ′ des quatre coniques (B, *e*), (B, *f*), (B, *g*), (B, *i*). Décrivons les coniques σ, σ′ qui passent, l'une par les points *e*, *f*, *g*, *h*, l'autre par les points *e*, *f*, *g*, *i*, et qui sont *capables*, respectivement, des rapports λ, λ′ (on sait que ces opérations, de même que celle qui va suivre, n'exigent pas le tracé des coniques). σ et σ′, ayant trois points communs *e*, *f*, *g*, se couperont en un quatrième point réel P, qui est le sommet générateur de la courbe U, et qui appartient à cette courbe.

Cherchons de même le sommet générateur P′ de la courbe U′.

Les cinq rayons générateurs inconnus P*u*, P*v*, P*x*, P*y*, P*z* forment un faisceau qui est homographique avec le faisceau des cinq rayons P′*u*, P′*v*, P′*x*, P′*y*, P′*z*, parce qu'ils sont, l'un et l'autre, homographiques avec le faisceau des coniques génératrices correspondantes (B, *u*), (B, *v*),

$(B, x), (B, y), (B, z)$. La conique cherchée Σ n'est donc autre chose que le lieu géométrique de l'intersection de deux rayons homologues de ces faisceaux, qu'il suffit de former avec les données de la question. Or Σ passe en P et en P′, qui sont déjà connus; on n'a donc que trois nouveaux points de cette courbe à trouver. Voici comment. A la conique génératrice (B, e) correspond le rayon Pe dans le premier faisceau; on cherchera le rayon $P'\varepsilon$ qui lui correspond, quand on la regarde comme faisant partie du second faisceau de coniques; ce qui est facile, comme on sait. On cherchera de même les rayons $P'\varphi$, $P'\chi$ qui correspondent, respectivement, à Pf, Pg. Les trois points E, F, G, où se coupent ces trois couples de rayons homologues, sont les trois points qui, avec P et P′, déterminent la conique cherchée Σ.

Ainsi la question est résolue.

41. Deuxième question. — *On donne les courbes*

$$\left.\begin{matrix} U \\ U' \end{matrix}\right\} \textit{passant par les points } a, b, c, d, e \left\{\begin{matrix} f, g, h, i, \\ f', g', h', i'. \end{matrix}\right.$$

On demande de déterminer les quatre autres points communs aux deux courbes, v, x, y, z, *ou bien deux droites sur lesquelles ils se trouvent deux à deux.*

Solution. — Prenant, pour base des coniques génératrices, a, b, c, d, on détermine, comme ci-dessus, les sommets générateurs P, P′, et par suite la conique Σ passant par e, v, x, y, z.

Prenant ensuite les quatre points a, b, c, e pour base des coniques génératrices, on détermine deux nouveaux sommets générateurs Q, Q′, et par suite une nouvelle conique Σ' passant par les points d, v, x, y, z.

Σ et Σ' se coupent aux quatre points cherchés, qui seront connus, si l'on trace ces coniques.

Mais si l'on veut simplement connaître deux droites sur lesquelles ils se trouvent deux à deux, on y parviendra de la manière suivante.

On prendra une nouvelle base a, b, d, e, qui donnera lieu à deux nouveaux sommets générateurs R, R′, et par suite à une nouvelle conique Σ'' passant par c, ν, x, y, z.

Et enfin une dernière base a, c, d, e, donnera lieu aux deux sommets générateurs T, T′ et à la conique Σ''' passant par b, ν, x, y, z.

Les coniques Σ, Σ', Σ'', Σ''' sont circonscrites au même quadrilatère ν, x, y, z (réel ou imaginaire), c'est-à-dire ont les mêmes *axes de symptose* νx, yz. Coupons la figure par une transversale L; les quatre coniques y interceptent respectivement les segments $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$ et les axes de symptose y interceptent le segment $\varphi\varphi'$. Celui-ci est inconnu, mais les quatre autres sont aisés à déterminer, sans tracer les coniques. Tous sont en involution. Le problème se trouve donc ramené à celui qui est résolu au n° 271 de la *Géométrie supérieure*. On connaîtra ainsi les points φ et φ'.

Une seconde transversale fera connaître deux nouveaux points ψ, ψ' des axes de symptose, qui seront ainsi déterminés, sans qu'on ait tracé aucune conique.

Une troisième transversale fournirait, au besoin, deux points de vérification θ, θ'.

Ainsi la question est complétement résolue.

42. Troisième question. — *On donne*

$$\left.\begin{matrix}\mathrm{U}\\ \mathrm{U}'\end{matrix}\right\}\textit{ passant par } \mathrm{a, b, c, d, e, f,}\left\{\begin{matrix}\mathrm{g, h, i,}\\ \mathrm{g', h', i'.}\end{matrix}\right.$$

On demande de déterminer, soit les trois autres points d'intersection x, y, z *eux-mêmes, soit deux droites* (dont l'une passant par l'un des points donnés) *qui les contiennent deux à deux.*

Solution — En prenant les points a, b, c, d pour base des faisceaux de coniques génératrices, on obtiendra les points générateurs P, P′, et ensuite une conique Σ passant par les points *e*, *f*, *x*, *y*, *z* comme ci-dessus.

Prenant ensuite *a*, *b*, *c*, *e* pour base, on aura deux sommets Q, Q′, et une seconde conique Σ′ passant par *d*, *f*, *x*, *y*, *z*.

Ces deux coniques Σ, Σ′ étant décrites feront connaître les points cherchés *x*, *y*, *z*.

On obtiendra une vérification en prenant une troisième base, *a*, *b*, *c*, *f* par exemple, qui donnera lieu à une troisième conique Σ″ passant par les points *d*, *e*, *x*, *y*, *z*, etc.

Remarquons que l'un des trois points *x*, *y*, *z* sera toujours réel.

Si l'on veut seulement connaître les axes de symptose *ex*, *yz*, on opérera comme dans le problème précédent. Mais on n'aura à se servir qu'une seule fois de la construction du n° 271 de la *Géométrie supérieure*, si l'on a soin de mener l'une des transversales par le point *e*; car, dans ce cas, il ne s'agit que de trouver le sixième point d'une involution dont on connaît cinq points (*Géom. sup.*, n° 213).

43. Quatrième question. — *On donne*

$$\left.\begin{matrix} U \\ U' \end{matrix}\right\} \textit{passant par les points } a, b, c, d, e, f, g \left\{\begin{matrix} h, i, \\ h', i'. \end{matrix}\right.$$

On demande de déterminer les deux autres points d'intersection x, y, *ou bien seulement la droite qui les joint.*

Solution. — On déterminera, comme ci-dessus, deux coniques Σ, Σ′ passant par *e*, *f*, *g*, *x*, *y*, et par *d*, *f*, *g*, *x*, *y*, et qui se coupent aux points cherchés.

Si l'on ne veut connaître que la droite *xy*, on mènera deux transversales, en employant la construction du n° 213 de la *Géométrie supérieure*. On aura un grand nombre de vérifications.

44. CINQUIÈME QUESTION. — *On donne*

$$\left.\begin{matrix}\mathrm{U}\\ \mathrm{U}'\end{matrix}\right\}\textit{passant par } \mathrm{a, b, c, d, e, f, g, h}\left\{\begin{matrix}\mathrm{i},\\ \mathrm{i}',\end{matrix}\right.$$

et l'on demande le neuvième point d'intersection x.

Solution. — Prenant pour base a, b, c, d, on détermine le *sommet générateur* P, qui avec les quatre points e, f, g, h communs aux deux courbes suffit à déterminer la conique Σ qui passe par x.

Une nouvelle base a, b, c, e fera connaître un second sommet Q qui, avec les quatre points d, f, g, h, détermine une autre conique Σ' passant par le point x. Σ et Σ' qui ont trois points communs f, g, h se coupent au quatrième point x toujours réel.

Remarquons que la courbe U′ n'intervient en rien dans la détermination des coniques auxiliaires Σ, Σ'. On en conclut ce théorème déjà connu :

Toutes les courbes du troisième ordre, qui passent par huit points, se coupent en un même neuvième point.

45. Je terminerai ces premiers exercices sur les courbes du troisième ordre en donnant la solution du problème suivant :

PROBLÈME. — *Étant donnés neuf points d'une courbe du troisième ordre, déterminer les points de rencontre de cette courbe avec une traversale* L *aussi donnée.*

Solution. — Cherchez le *sommet* générateur P, et les segments mm', nn', oo' qui sont interceptés sur L par trois coniques génératrices quelconques. Marquez aussi les points M, N, O où L est coupée par les trois rayons générateurs correspondants. Les segments mm', nn', oo' sont en involution et suffisent pour faire connaître tous les autres (*). Ces

(*) Ceci fait bien voir comment, dans toutes ces questions, on peut se passer de déterminer toutes les coniques génératrices pour obtenir le faisceau P, qui leur est homographique. Dès que trois d'entre elles ont fait connaître les trois segments mm', nn', oo', tout est déterminé.

segments correspondent anharmoniquement aux points M, N, O. La question est donc ramenée à celle qui est résolue à la page 4 du Mémoire de M. Chasles *sur la construction géométrique des équations du troisième et du quatrième degré* (*Comptes rendus de l'Académie*, tome XLI, p. 677 et suiv.).

On a même plusieurs constructions différentes qui peuvent servir de vérification.

CHAPITRE V.

TRADUCTION DU TRAITÉ DE MACLAURIN SUR LES COURBES DU TROISIÈME ORDRE,

AVEC DES NOTES ET ADDITIONS.

SECTION I^{re}.

INTRODUCTION. — PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES COURBES GÉOMÉTRIQUES.

Avertissement du traducteur. — J'ai réuni dans cette Introduction diverses propositions générales démontrées par Maclaurin dans la première partie de son *Traité des courbes géométriques,* et sur lesquelles il s'appuie dans la troisième, où il est question, en particulier, des courbes du troisième degré. Mais, afin d'abréger, j'ai quelquefois supprimé les démonstrations de l'auteur anglais, et renvoyé à celles données par M. Chasles dans le tome I^{er} de sa *Géométrie supérieure ;* quelquefois aussi j'en ai donné de nouvelles.

1. Théorème I. — *Si dans le plan d'une courbe géométrique, on mène une série de transversales parallèles entre elles, et qu'on prenne sur chacune le centre des moyennes distances des points où elle rencontre la courbe, le lieu de ce point est une ligne droite.*

Ce théorème, dû à Newton, est démontré dans la *Géométrie supérieure*, article 483, page 351.

2. Théorème II. — *Si par un point* S *on mène dans le*

plan d'une courbe géométrique deux transversales parallèles à deux axes fixes, les produits des segments, réels ou imaginaires, formés sur ces deux droites entre le point S *et la courbe, ont un rapport constant, quel que soit le point* S.

Ce théorème est aussi démontré dans la *Géométrie supérieure*, article 480, page 349. Voici la démonstration de Maclaurin, qu'il est nécessaire de donner pour l'intelligence de ce qui suit.

Dans toute équation algébrique (divisée préalablement par le coefficient de la plus haute puissance de l'inconnue), le dernier terme, qui ne contient pas cette inconnue, est égal au produit des racines de l'équation. Ce principe d'algèbre donne lieu à la propriété importante des courbes géométriques qui vient d'être énoncée.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse d'une courbe du troisième degré, dont l'équation générale est

$$y^3 - (ax + b)y^2 + (cx^2 - dx + e)y - fx^3 + gx^2 - hx + k = 0;$$

soit PM une droite (*) qui rencontre la courbe aux points M, m, μ; on aura (en vertu du principe d'algèbre cité plus haut)

$$\mathrm{PM}.\mathrm{P}m.\mathrm{P}\mu = fx^3 - gx^2 + hx - k.$$

(*) Cette démonstration suppose que la transversale PM, parallèle à l'axe des ordonnées, est issue d'un point P pris sur l'axe des abscisses. Mais il est aisé de voir qu'on peut prendre ce point dans toute autre position. Car, si l'on rapporte la courbe à deux nouveaux axes parallèles aux premiers, et tels, que celui des abscisses passe actuellement par le point P, ce qui revient à changer dans l'équation y et x en $(y + \alpha)$ et $(x + \beta)$, le coefficient f de la plus haute puissance de x n'est pas changé, et, comme c'est le rapport de ce coefficient à l'unité qui exprime celui des segments dont il s'agit, on voit que ce dernier rapport demeure invariable, quel que soit le point P, pourvu que les deux transversales restent toujours parallèles à deux axes fixes, ainsi que l'exige l'énoncé du théorème. (Voir à la fin de cette introduction, n° 14, comment le théorème actuel conduit très-simplement à la construction générale des tangentes aux courbes géométriques.)

(*Note du traducteur.*)

Soient I, R, L les trois points où l'axe des abscisses AP rencontre la courbe, et A l'origine des coordonnées ; AI, AK et AL sont les trois valeurs de x qui répondent à $y = 0$, c'est-à-dire les valeurs qu'on déduirait de l'équation $fx^3 - gx^2 + hx - k = 0$, ou, en d'autres termes, les racines de cette équation. On a donc la suite d'égalités :

$$\begin{aligned} x^3 - \frac{gx^2}{f} + \frac{hx}{f} - \frac{k}{f} &= (x - \mathrm{AI}).(x - \mathrm{AK}).(x - \mathrm{AL}) \\ &= (\mathrm{AP} - \mathrm{AI}).(\mathrm{AP} - \mathrm{AK}).(\mathrm{AP} - \mathrm{AL}) \\ &= \mathrm{IP.KP.LP} = \frac{1}{f}.\ \mathrm{PM.P}m.\mathrm{P}\mu. \end{aligned}$$

Donc le produit des trois segments PM.Pm.Pμ, terminés au point P et à la courbe, est au produit des segments analogues PI.PK.PL, dans le rapport constant du coefficient f à l'unité. Ces raisonnements s'étendent à une courbe d'un degré quelconque, et, par conséquent, le théorème est démontré.

3. Dans le numéro précédent, nous avons supposé que l'abscisse *AP rencontre* la courbe du troisième degré en trois points réels I, K, L. Afin de généraliser cet important théorème, supposons actuellement que la rencontre n'ait lieu qu'en un seul point réel A (et, pour plus de simplicité, prenons ce point pour l'origine des coordonnées). D'après cette hypothèse, x doit s'évanouir en même temps que y, et par conséquent le dernier terme de l'équation est nécessairement de la forme

$$\begin{aligned} fx^3 - gx^2 + hx &= fx\left\{x^2 - \frac{gx}{f} - \frac{h}{f}\right\} \\ &= fx\left\{\overline{\left(x - \frac{g}{2f}\right)}^2 + \left(\frac{h}{f} - \frac{g^2}{4f^2}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Prenons de A vers P (*fig.* 2, *Pl. IV*) une longueur A$a = \frac{g}{2f}$, et, au point a, élevons sur AP la perpendiculaire

$$ab = \frac{\sqrt{4fh - g^2}}{2f},$$

il viendra

$$fx^3 - gx^2 + hx = f.\mathrm{AP}.\left(\overline{a\mathrm{P}}^2 + \overline{ab}^2\right) = f.\ \mathrm{AP}.\overline{b\mathrm{P}}^2;$$

et puisqu'on a, par le théorème précédent,

$$\mathrm{PM}.\ \mathrm{P}m.\ \mathrm{P}\mu = fx^3 - gx^2 + hx,$$

on aura

$$\frac{\mathrm{PM}.\mathrm{P}m.\mathrm{P}\mu}{\mathrm{AP}.\overline{b\mathrm{P}}^2} = f = \text{constante}.$$

D'ailleurs, la valeur de la perpendiculaire ab est toujours réelle quand la transversale AP ne coupe la courbe qu'en un seul point; car, dans ce cas, les racines de l'équation du deuxième degré $fx^2 - gx + h$ sont imaginaires et, par suite, on a $4fh > g^2$, ce qui rend réel le radical $\sqrt{4fh - g^2}$. Donc on peut dire que si une transversale quelconque rencontre en un seul point réel une courbe du troisième degré, le produit des ordonnées $\mathrm{PM}.\ \mathrm{P}m.\ \mathrm{P}\mu$ est au produit de l'abscisse AP, multipliée par le carré de la distance du point P à un certain point déterminé b, dans un rapport constant. Et il est facile de voir que ce point b ne change pas, lors même que l'angle des coordonnées varie, pourvu que l'origine A et la transversale AP *demeurent invariables*.

4. Avant de passer à d'autres propriétés des courbes géométriques, rappelons le lemme suivant, qui résulte des premiers principes du calcul des fluxions.

Lemme. — *Les quantités* x, y, z, u... *étant des variables indépendantes, ainsi que les quantités* X, Y, Z, V,..., *si le produit des premières est à celui des secondes dans un rapport constant, on a* (en employant la notation newtonienne pour représenter les variations différentielles des variables)

$$\frac{\dot{x}}{x}+\frac{\dot{y}}{y}+\frac{\dot{z}}{z}+\frac{\dot{u}}{u}+\ldots=\frac{\dot{X}}{X}+\frac{\dot{Y}}{Y}+\frac{\dot{Z}}{Z}+\frac{\dot{V}}{V}+\ldots \text{ (*)}.$$

Rappelons encore qu'on a coutume d'appeler QUANTITÉS RÉCIPROQUES *l'une de l'autre celles dont le produit donne l'unité, telle que* $\frac{1}{x}$ *et* x, *etc.*

5. THÉORÈME. — *Que, par un point fixe pris dans le plan d'une courbe géométrique, on mène une tranversale qui la rencontre en autant de points qu'elle a de dimensions ; qu'en ces points on mène les tangentes à la courbe et que, par le point fixe, on tire une seconde droite de direction arbitraire, mais qui restera fixe : les segments, compris sur cette droite entre le point fixe et toutes les tangentes à la courbe, auront la somme de leurs réciproques* (ou valeurs inverses) *constante, quelle que soit la première transversale.*

Cette somme sera égale à celle des réciproques des segments compris, sur la même droite fixe, entre le point fixe et ceux où cette droite rencontre la courbe.

On doit avoir soin, en faisant cette somme, d'affecter de signes contraires les segments situés de côtés différents du point fixe.

Démonstration. — Soient (*fig.* 3) P le point fixe donné ; PA, P*a* deux transversales quelconques issues de ce point, qui rencontrent la courbe chacune en autant de points

---

(*) Voici la démonstration du lemme : on a, par hypothèse,

$$x.y.z\ldots=f.X.Y.Z\ldots;$$

donc, en prenant les dérivés,

$$y.z.\dot{x}+x.z\,\dot{y}+x.y.\,\dot{z}+\ldots=f(Y.Z.\dot{X}+X.Z.\dot{Y}+X.Y.\dot{Z})$$

et si l'on divise, membre à membre, cette équation par la précédente, il vient

$$\frac{\dot{x}}{x}+\frac{\dot{y}}{y}+\frac{\dot{z}}{z}+\ldots=\frac{\dot{X}}{X}+\frac{\dot{Y}}{Y}+\frac{\dot{Z}}{Z}+\ldots.$$

C. Q. F. D.

(*Note du traducteur.*)

A, B, C,..., et a, b, c,..., que celle-ci a de dimensions. Soient PK, PL, PM,..., Pk, Pl, Pm,..., les segments interceptés, sur la transversale fixe PE, par les tangentes AK, BL, CM,..., ak, bl, cm,..., on aura, disons-nous, la relation

$$\frac{1}{PK}+\frac{1}{PL}+\frac{1}{PM}+\ldots=\frac{1}{Pk}+\frac{1}{Pl}+\frac{1}{Pm}+\ldots,$$

et cette somme demeurera constante tant que le point P et la droite PE ne changeront pas.

En effet, supposons que les droites ABC, abc, se meuvent parallèlement à elles-mêmes, de telle sorte que leur point de concours P s'avance le long de la droite fixe PE. Comme on a, d'après le théorème du n° 2,

$$AP.BP.CP\ldots=f.\ aP.bP.cP\ldots,$$

on aura aussi, en vertu du lemme précédent,

$$\frac{\dot{AP}}{AP}+\frac{\dot{BP}}{BP}+\frac{\dot{CP}}{CP}+\ldots=\frac{\dot{aP}}{aP}+\frac{\dot{bP}}{bP}+\frac{\dot{cP}}{cP}+\ldots;$$

mais, puisque AP se meut d'un mouvement parallèle, il est facile de voir (*) que la fluxion $\dot{AP}$ de AP est à la fluxion $\dot{EP}$ de EP dans le même rapport que AP est à la

(*) En effet, les triangles semblables PAK, P′A′K donnent

$$\frac{AP}{A'P'}=\frac{PK}{PK'},$$

d'où

$$\frac{AP-A'P'}{AP}=\frac{PK-P'K}{PK}.$$

Or, le point A′ (*fig.* 4.) étant infiniment voisin du point A, AP — A′P′ n'est autre chose que la fluxion $\dot{AP}$ de AP, et PK — P′K est la fluxion $\dot{EP}$ de EP. Donc

$$\frac{\dot{AP}}{AP}=\frac{\dot{EP}}{PK}.$$

C. Q. F. D.

(*Note du traducteur.*)

sous-tangente Pk; donc on a

$$\frac{\dot{AP}}{AP} = \frac{\dot{EP}}{PK}, \text{ et, de même, } \frac{\dot{BP}}{BP} = \frac{\dot{EP}}{PL}; \quad \frac{\dot{CP}}{CP} = \frac{\dot{EP}}{PM} \ldots$$

Donc la relation ci-dessus se transforme en celle-ci :

$$\frac{1}{PK} + \frac{1}{PL} + \frac{1}{PM} + \ldots = \frac{1}{Pk} + \frac{1}{Pl} + \frac{1}{Pm} + \ldots,$$

en divisant par le facteur commun $\dot{EP}$.

Les choses se passent ainsi quand les points K, L, M,... et k, l, m,... sont tous du même côté du point P, parce qu'alors toutes les fluxions sont de même signe; mais si, toutes choses égales d'ailleurs, quelques-uns M, m de ces points tombent de l'autre côté du point P, il arrive nécessairement que certaines ordonnées décroissent pendant que les autres croissent, et qu'on doit prendre leurs fluxions négativement; on aurait, par exemple,

$$\frac{1}{PK} + \frac{1}{PL} - \frac{1}{PM} + \ldots = \frac{1}{Pk} + \frac{1}{Pl} - \frac{1}{Pm} + \ldots.$$

Enfin, il est évident que si la droite fixe PE (qui peut représenter Pa) rencontre la courbe en autant de points D, E, I,... que celle-ci a de dimensions, on aura

$$\frac{1}{PK} + \frac{1}{PL} + \frac{1}{PM} + \ldots = \text{constante} = \frac{1}{PD} + \frac{1}{PE} + \frac{1}{PI} \ldots;$$

ce qui achève de démontrer le théorème.

6. Cette droite PE peut rencontrer la courbe en un nombre de points moindre que ses dimensions. Supposons, pour fixer les idées, que la courbe soit du troisième degré, et que PE la coupe en un seul point D (*fig.* 5). Déterminons le point b comme plus haut, n° 3; menons perpendiculairement à bP la droite bd, qui coupe EP en d; puisqu'on a, n° 3,

$$AP.BP.CP = f.DP.\overline{bP}^2,$$

on aura aussi, d'après le lemme,

$$\frac{\dot{A}P}{AP}+\frac{\dot{B}P}{BP}+\frac{\dot{C}P}{CP}=\frac{\dot{P}D}{PD}+\frac{2\,\dot{b}P}{bP},$$

et enfin, à cause des relations $\frac{\dot{A}P}{AP}=\frac{\dot{E}P}{PK}$, etc.,

$$\frac{1}{PK}+\frac{1}{PL}+\frac{1}{PM}=\frac{1}{PD}+\frac{2}{Pd}.$$

Si Pb se trouvait être perpendiculaire sur EP, Pd deviendrait infini, et le terme $\frac{2}{Pd}$ disparaîtrait de l'équation.

7. Le théorème qui précède fournit un moyen simple de déterminer les asymptotes des courbes géométriques, c'est-à-dire leurs tangentes aux points situés à l'infini.

Soit menée, parallèlement à l'asymptote, une droite PA (*fig.* 6) qui rencontre la courbe aux points A, B,.... Menons une transversale arbitraire qui la coupe en D, E, I,..., et prenons sur cette transversale une longueur PM déterminée par l'équation

$$\frac{1}{PM}=\frac{1}{PD}+\frac{1}{PE}+\frac{1}{PI}+\ldots-\left(\frac{1}{PK}+\frac{1}{PL}+\ldots\right),$$

l'asymptote passera évidemment par ce point M; et si le second membre de l'équation est nul, ce qui donne PM $=\infty$, l'asymptote passera à l'infini, et la branche de la courbe sera parabolique.

8. Théorème.— *Si autour d'un point* P *on fait tourner une droite* PD *qui rencontre une courbe géométrique en autant de points* D, E, I, *etc., qu'il est marqué par son degré, et si l'on prend sur cette droite un point variable* M *tel, qu'on ait constamment*

$$\frac{1}{PM}=\frac{1}{PD}\mp\frac{1}{PE}\mp\frac{1}{PI}\mp\ldots,$$

en observant la règle ordinaire des signes, le lieu du point M *sera une ligne droite.*

En effet, menons par le point P une droite fixe PA qui rencontre la courbe en autant de points A, B, C, etc., qu'il est marqué par son degré, et par ces points menons à la courbe les tangentes AK, BL, CN, etc., qui rencontrent la droite PD en K, L, N, etc. On aura (art. 5, section I, page 203)

$$\frac{1}{\mathrm{PD}} \mp \frac{1}{\mathrm{PE}} \mp \frac{1}{\mathrm{PI}} \mp \ldots = \frac{1}{\mathrm{PK}} \mp \frac{1}{\mathrm{PL}} \mp \frac{1}{\mathrm{PN}} \mp \ldots;$$

$\frac{1}{\mathrm{PM}}$ sera donc égal à cette dernière somme, et comme la droite PA demeure fixe ainsi que les tangentes AK, BL, CN, etc., pendant le mouvement de la transversale autour du pôle P, il s'ensuit que le point M décrira une droite, en vertu d'une proposition connue (*voir*, par exemple, le n° 439 de la *Géométrie supérieure*, page 321).

Si l'on appelle *moyenne harmonique* entre n segments PD, PE, PI, etc., le segment Pm déterminé par l'équation

$$\frac{n}{\mathrm{P}m} = \frac{1}{\mathrm{PD}} \mp \frac{1}{\mathrm{PE}} \mp \frac{1}{\mathrm{PI}} \mp \ldots$$

et que, sur la transversale mobile du théorème précédent, on prenne constamment Pm égal à la moyenne harmonique des segments PD, PE, PI, etc., le point m décrira une ligne droite. En effet, on aura

$$\frac{1}{\mathrm{PM}} = \frac{n}{\mathrm{P}m} \quad \text{ou} \quad \frac{\mathrm{P}m}{\mathrm{PM}} = n.$$

Donc, puisque le point M décrit une droite, il en sera de même du point m.

C'est le fameux théorème de Cotes. Il est démontré dans la *Géométrie supérieure*, n° 482.

Le lecteur trouvera une autre démonstration purement intuitive de ce théorème dans le Mémoire de M. le général

Poncelet, sur l'*Analyse des transversales* (*Journal de Crelle*, 1832, page 31).

9. Pour définir, par une seule proposition générale, la *courbure* des lignes géométriques (*fig.* 7), soit CDR un cercle qui est rencontré en D et R par la droite PR, et en C et N par la droite PC. Soit M le point où la tangente CM coupe PD. Supposons actuellement, tandis que la droite DR demeure immobile, que la transversale PCN se meuve parallèlement à elle-même jusqu'à ce que les trois points P, D, C coïncident, et cherchons ce que devient, *à la limite*, l'expression $\frac{1}{PM} - \frac{1}{PD}$. Pour cela, prenons sur PN un point quelconque q; menons, parallèlement à la tangente CM, la droite qv, qui coupe DR en v, puis DQ parallèle à PN, et enfin, parallèlement à la tangente DT, la droite QV qui coupe DR en V. On aura la suite d'égalités

$$\frac{1}{PM} - \frac{1}{PD} = \frac{DM}{PM.PD} = (\text{à cause de } DM.MR = \overline{CM}^2)\ \frac{\overline{CM}^2.PM}{\overline{PM}^2.PD.MR}$$

$$= \frac{\overline{qv}^2.PM}{\overline{Pv}^2.MR.PM + \overline{Pv}^2 MR.MD}$$

$$(\text{à cause de la proportion } \overline{CM}^2 : \overline{PM}^2 :: \overline{qv}^2 : \overline{Pv}^2)$$

$$= \frac{\overline{qv}^2.PM}{\overline{Pv}^2.MR.PM + \overline{qv}^2.\overline{PM}^2},$$ dont la valeur devient à *la limite* (c'est-à-dire quand PM s'évanouit et que qv et Pv coïncident avec QV et DV) $= \frac{\overline{QV}^2}{\overline{DV}^2.DR}$.

Il est clair que cette valeur limite de $\frac{1}{PM} - \frac{1}{PD}$ est encore la même si les points D et C appartiennent à une courbe quelconque dont CDR soit le cercle osculateur au point D. Cette remarque permet d'établir le *théorème fondamental* suivant.

10. Théorème. — *D'un point quelconque* D *d'une courbe géométrique* (fig. 8), *soient menées deux transversales quelconques* DE, DA *qui la rencontrent, respectivement, en autant de points* D, I, E, . . . , D, A, B, . . . *qu'elle a de dimensions. Soient* DK, DL, . . . , *les segments interceptés sur la première transversale par les tangentes menées aux points de rencontre de la seconde. Soit encore* QV *une parallèle quelconque à la tangente* DT *au point* D, *et soit aussi* $m = \frac{\overline{QV}^2}{\overline{DV}^2}$. *Si l'on prend sur* DE *une longueur* DR *telle, qu'on ait* $\frac{m}{DR} = \frac{1}{DE} + \frac{1}{DI} + \ldots - \left(\frac{1}{DK} + \frac{1}{DL} + \ldots\right)$, *le cercle décrit sur la corde* DR, *tangentiellement à* DT, *sera le cercle osculateur au point* D, *c'est-à-dire le cercle qui a la même courbure que la courbe proposée en ce point.*

En effet, on a généralement (n° 5, dernier alinéa),

$$\frac{1}{PK} + \frac{1}{PL} + \frac{1}{PM} + \ldots = \frac{1}{PD} + \frac{1}{PE} + \frac{1}{PI} + \ldots,$$

et, d'après le lemme précédent, quand les trois points P, D, C se confondent en un seul D, on a

$$\frac{1}{PM} - \frac{1}{PD} = \frac{\overline{QV}^2}{\overline{DV}^2 . DR} = \frac{m}{DR}.$$

Donc on a

$$\frac{m}{DR} = \frac{1}{DE} + \frac{1}{DI} + \ldots - \left(\frac{1}{DK} + \frac{1}{DL} + \ldots\right). \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Le sens dans lequel on doit porter la longueur DR est indiqué par le signe final du second membre de l'équation.

Si DA est la bissectrice de l'angle EDT, la construction devient un peu plus simple; QV = DV; $m = 1$, et on a

$$\frac{1}{DR} = \left(\frac{1}{DE} + \frac{1}{DI} + \ldots\right) - \left(\frac{1}{DK} + \frac{1}{DL} + \ldots\right).$$

11. Les mêmes principes conduisent directement à un

autre théorème général qui sert à déterminer la *variation de la courbure* d'une ligne géométrique quelconque, c'est-à-dire la mesure de l'angle de contingence compris entre la courbe et son cercle osculateur. Mais avant d'aborder ce théorème, il convient d'expliquer ici, plus clairement qu'on ne le fait d'habitude, ce qu'on doit entendre par cette variation de la courbure.

Une courbe quelconque (*fig.* 9) s'écarte de sa tangente en vertu de sa *courbure*, dont la mesure n'est autre que celle de l'angle de contingence compris entre la tangente et le cercle osculateur. De même, elle se sépare de son cercle osculateur à cause de la *variation de sa courbure*, dont la mesure est précisément celle de l'angle de contingence compris entre la courbe et le cercle osculateur. Supposons que la droite TE, perpendiculaire à la tangente DT, rencontre la courbe en E et le cercle osculateur en *r*. La variation de la courbure, DT étant supposé donné, pourra être représentée, à la limite, par E*r*, qui sous-tend l'angle de contingence ED*r*. Cette variation est, *à la limite*, proportionnelle à $\frac{Er}{\overline{DT}^3}$. (*)

(*) Ceci peut se prouver de la manière suivante : Soient

$$y = fx \quad \text{et} \quad Y = FX$$

deux courbes quelconques. A partir de la même abscisse $x = X$, augmentons cette abscisse d'une quantité indéterminée h; les fonctions y et Y deviendront

$$y + y'h + \frac{1}{2}y''h^2 + \frac{1}{6}y'''h^3 + \frac{1}{24}y^{\text{IV}}h^4 + \ldots,$$

et

$$Y + Y'h + \frac{1}{2}Y''h^2 + \frac{1}{6}Y'''h^3 + \frac{1}{24}Y^{\text{IV}}h^4 + \ldots,$$

dont la différence

$$\delta = (y - Y) + h(y' - Y') + \frac{1}{2}h^2(y'' - Y'') + \frac{1}{6}h^3(y''' - Y''') + \ldots,$$

exprime celle des ordonnées des deux courbes qui répondent à l'abscisse commune $x + h$. Si les courbes se coupent au point pour lequel $x = X$, Le cercle définit d'une manière précise et naturelle la courbure des lignes géométriques, mais il ne saurait servir à exprimer la *variation* de cette courbure, puisque la sienne propre est nulle. On est donc obligé de recourir à la parabole ou à toute autre section conique. Mais, de même que dans le nombre infini des cercles tangents à la courbe au point donné, il n'y en a qu'un qui soit *osculateur* et qui ait avec la courbe un contact tellement intime, qu'aucun autre ne peut passer entre lui et la courbe; de même aussi, parmi les paraboles en nombre infini qui ont la même courbure que la courbe au point donné, il n'y en a qu'une qui soit affectée de la même variation de courbure en ce point et qui ait avec elle une osculation telle, que tous les autres arcs paraboliques qu'on peut imaginer passent nécessairement ou en dedans ou en dehors, sans pouvoir se glisser entre les deux. J'ai fait voir dans d'autres ouvrages

---

on a

$$y = Y;$$

si elles se touchent en ce point, c'est-à-dire si elles ont en commun un second point infiniment voisin, les premières *dérivées* y' et Y' sont égales, et l'on a

$$y' - Y' = 0$$

(*voir* Lacroix ou Francœur, *Calcul différentiel*); si elles ont même courbure en ce point, c'est-à-dire un troisième point infiniment voisin commun, on a

$$y'' = Y''.$$

C'est le cas du cercle osculateur et d'une courbe quelconque. Il vient alors

$$\delta = \frac{1}{6} h^3 (y''' - Y'''),$$

en supposant h assez petit pour annuler tous les termes qui suivent dans le développement; d'où l'on voit que la différence des troisièmes dérivées qui exprime d'une manière intime la divergence de deux courbes a pour valeur

$$6 \frac{\delta}{h^3}.$$

Ce qu'il s'agissait de montrer.

(*Note du traducteur.*)

que cette condition suffit pour la déterminer (*) (*voir* n[os] 14, 15 et suivants).

Soient (*fig.* 9) DE l'arc de la courbe, DT la tangente et TEK une droite, parallèle à la normale, sur laquelle on prend le point K tel, qu'on ait toujours $ET.TK = \overline{DT}^2$. Le lieu géométrique de ce point K est une certaine courbe SKF qui rencontre en S la normale DS, et dont la tangente SV, au point S, vient couper en V la tangente DT. DS est évidemment le diamètre du cercle osculateur, et son point milieu S′ est le centre de courbure. Joignons VS′; faisons, de l'autre côté de DS, l'angle SDN = S′VD, et soit N le point où le cercle osculateur est rencontré par le côté DN de l'angle SDN. La parabole qui a DN pour diamètre et pour paramètre de ce diamètre, et qui, de plus, touche en D la droite DT, est précisément la parabole osculatrice cherchée (**). Elle a, tout à la fois, la même courbure et

(*) Pour le cercle osculateur, on a trois équations de condition, savoir l'égalité des ordonnées au point de contact et celle de deux premières *dérivées*; et pour la parabole osculatrice, on en a une quatrième, savoir *l'égalité des troisièmes dérivées*; en d'autres termes, le cercle est assujetti à passer par trois points de la courbe infiniment voisins, et la parabole par quatre. C'est ce qui fait que ces deux courbes osculatrices sont entièrement déterminées. (*Note du traducteur.*)

(**) En partant de ce principe (qui sera démontré plus loin) que *dans toute parabole, la variation de la courbure en un point quelconque est proportionnelle à la tangente trigonométrique de l'angle compris entre le diamètre et la normale qui passent en ce point, divisée par le carré du rayon de courbure*, il est facile de prouver que la parabole construite dans les conditions que Maclaurin vient d'indiquer est précisément la parabole osculatrice de la courbe donnée. En effet, il suffit de prouver que la variation de sa courbure au point D, qui, en vertu du principe admis est exprimée par $\dfrac{\text{tang SDN}}{\overline{DS'}^2}$, est la même que celle de la courbe en ce point, laquelle a pour valeur à la limite $\dfrac{rE}{\overline{TD}^3}$. Or on a

$$\text{tang SDN} = \text{tang S'VD} = \frac{S'D'}{VD} = \frac{1}{2}\frac{SD}{VD} = (\text{à la limite})\ \frac{1}{2}\frac{SK'}{KK'}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{S'K'}{TD} \times \frac{SK'}{TD.\overline{SD}^2} = \frac{rE}{\overline{TD}^3};$$

la même variation de courbure, au point D, que la courbe proposée, tandis que les autres paraboles, qu'on décrirait dans les mêmes conditions, mais sur une corde du cercle osculateur autre que DN, auraient simplement la même courbure (*), sans être affectées de la même variation de courbure.

Au lieu de considérer directement la variation de la courbure, Newton s'est plutôt occupé de la variation du rayon de courbure qu'il exprime par $\frac{\dot{r}}{\dot{S}}$ (r étant le rayon de courbure et S l'arc de la courbe). Mais on passe aisément de là à l'expression de la variation de la courbure; car la courbure étant inversement proportionnelle à son rayon, c'est-à-dire étant proportionnelle à $\frac{1}{r}$, sa variation, prise par rapport à celle de l'arc de la courbe, se trouve naturel-

---

or on a

$$\mathrm{SD} = \frac{\overline{\mathrm{TD}}^2}{\mathrm{T}r},$$

et par construction

$$\mathrm{TK} = \mathrm{K'D} = \frac{\overline{\mathrm{TD}}^2}{\mathrm{TE}}.$$

Donc

$$\mathrm{SK'} = \mathrm{SD} - \mathrm{K'D} = \overline{\mathrm{TD}}^2\left(\frac{1}{\mathrm{T}r} - \frac{1}{\mathrm{DE}}\right) = \frac{\overline{\mathrm{TD}}^2 \cdot r\mathrm{E}}{\mathrm{T}r.\mathrm{TE}}.$$

Par conséquent

$$\frac{\mathrm{SK'}}{\mathrm{TD}.\overline{\mathrm{SD}}^2} = \frac{\overline{\mathrm{TD}}^2 \cdot r\mathrm{E}}{\mathrm{DT}.\overline{\mathrm{SD}}^2.\mathrm{T}r.\mathrm{TE}} = \frac{\mathrm{TD}.r\mathrm{E}}{\overline{\mathrm{SD}}^2.\mathrm{T}r.\mathrm{TE}} = \frac{r\mathrm{E}}{\mathrm{TD}.\mathrm{SD}.\mathrm{TE}} = \frac{r\mathrm{E}}{\overline{\mathrm{TD}}^3},$$

parce qu'à la limite on a

$$\mathrm{SD}.\mathrm{TE} = \overline{\mathrm{TD}}^2.$$

Le théorème est donc démontré.

(*) Ceci sera également démontré plus loin.

(*Note du traducteur.*)

lement exprimée par $-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{r}{S}$; elle est donc égale à la première multipliée par $\frac{1}{r^2}$ et prise en signe contraire.

Ajoutons que, dans une courbe quelconque DE, la variation du rayon de courbure est proportionnelle à la tangente trigonométrique de l'angle DVS′ et que, dans une parabole quelconque, elle est proportionnelle à la tangente de l'angle compris entre le diamètre qui passe au point de contact et la normale en ce point. Ces dernières propositions se déduisent du théorème suivant (*), comme nous le ferons voir ci-après.

12. Théorème. — *Soient* (*fig.* 10), D *un point d'une courbe géométrique;* DS *le diamètre du cercle osculateur au point* D, *diamètre qui rencontre la courbe en autant de points* D, A, B, *etc., qu'elle a de dimensions;* DT *la tangente qui rencontre la courbe aux points I, etc., dont le nombre est plus faible de deux que ses dimensions, et qui coupe en* K, L, *etc., les tangentes* AK, BL, *etc.*

La variation de la courbure peut s'exprimer par le produit

$$\frac{1}{DS}\cdot\left(\frac{1}{DK}+\frac{1}{DL}+\ldots-\frac{1}{DI}-\ldots\right).$$

Démonstration. — En effet, menons la droite Dk qui coupe la courbe aux points e, i,... et le cercle osculateur en R, et supposons que l'angle kDT soit aussi petit que nous le voudrons. Soit encore Dab la bissectrice du supplément de cet angle, qui rencontre la courbe en D, a, b, etc., puis menons les tangentes ak, bl, etc., qui coupent DK en k, l, etc.; on aura, en vertu du théorème précédent (nº 10),

$$\frac{1}{DR}=\frac{1}{De}+\frac{1}{Di}+\ldots-\frac{1}{Dk}-\frac{1}{Dl}\ldots,$$

(*) Cette déduction est indiquée à la suite du nº 13, note 2, et aux nºs 14, 15 et suivants. (*Note du traducteur.*)

d'où

$$\frac{1}{DR} - \frac{1}{De} = \frac{Re}{DR.De} = \frac{1}{Di} - \frac{1}{DK} - \frac{1}{Dl} \cdots$$

Donc, *à la limite*, quand les droites DK et Dk coïncident, ce qui fait évanouir l'angle KDk, on a

$$\frac{Re}{DR.De} = \frac{1}{DI} - \frac{1}{DK} - \frac{1}{DL} - \cdots$$

Soit erT une perpendiculaire à la tangente DK, qui coupe cette tangente en T et le cercle osculateur en r; on a, à la limite, l'égalité,

$$\frac{re}{Re} = \frac{eT}{De} \; (*);$$

donc

$$\frac{Re}{DR.De} = \frac{re}{DR.eT} = \frac{re.DS}{DR.DT^2} = \frac{re.DS}{DT^3};$$

car, à la limite, DR = DT. Or la valeur de l'angle de contingence rDe, ou la variation de la courbure, est, comme nous l'avons vu (n° 11), proportionnelle à $\frac{re}{DT^3}$; donc, en vertu des égalités précédentes, elle est proportionnelle à

$$\frac{1}{DS} \cdot \left(\frac{1}{DI} - \frac{1}{DK} - \frac{1}{DL} \cdots \right). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

13. On déduit aisément de là l'expression de la variation du rayon de courbure. En effet, si l'on joint SI, SK, SL, etc., cette variation est égale à l'excès de la somme des tangentes des angles DKS, DLS, etc., sur la somme des tangentes des

(*) Le triangle eDT donne $\frac{eT}{De}$ = tang eDT. Le triangle erR devient, à la limite, rectangle en r et donne $\frac{er}{eR}$ = tang eRr; mais, dans le cercle SDR, on a angle eDT = angle eRr; donc

$$\frac{eT}{De} = \frac{re}{De}.$$

(*Note du traducteur.*)

angles DIS (*). Le signe final de cette différence indique si la courbure augmente ou diminue.

Qu'on prenne donc sur la tangente DT une longueur DV telle, qu'on ait

$$\frac{1}{DV}=\frac{1}{DK}+\frac{1}{DL}+\ldots-\frac{1}{DI}-\ldots;$$

qu'on joigne VS' et qu'on fasse l'angle SDN = DVS' en menant la droite DN qui coupe en N le cercle osculateur. La parabole décrite tangentiellement à DT, avec un paramètre égal à DN et dont DN serait un diamètre, aura, au point D, la même variation de courbure que la courbe proposée (**).

(*) On a

$$DI = DS \,.\, \text{tang}\, DIS\,; \quad DK = DS\,.\,\text{tang}\, DKS\ldots;$$

on peut donc écrire l'équation du n° 12 de la manière suivante :

$$\frac{1}{\overline{DS}^2}(\text{tang}\, I - \text{tang}\, K - \text{tang}\, L\ldots) = \text{variation de la courbure.}$$

Pour passer de là à la variation du rayon de courbure, nous avons vu qu'il faut multiplier par $\overline{DS}^2$ et changer le signe; on aura donc pour cette variation

$$\text{tang}\, K + \text{tang}\, L + \ldots - \text{tang}\, I - \ldots \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Il est clair qu'en écrivant $\frac{1}{2DS'}$, au lieu de $\frac{1}{DS}$, on introduirait les angles DIS', DKS', DLS',..., au lieu des angles DIS, DKS, DLS,..., sans altérer la valeur du résultat.

(**) D'après la manière dont le point V est déterminé, la variation du rayon de courbure s'exprime simplement par

$$\frac{DS'}{DV} = \text{tang}\, DVS' = \text{tang}\, SDN,$$

ce qui justifie la première des deux propositions énoncées à la fin du n° 11. Quant à la seconde de ces propositions, qui est relative à la variation de la courbure d'une parabole quelconque du second degré, elle n'est qu'un corollaire d'une propriété générale des courbes du deuxième degré, démontrée par Maclaurin dans la seconde partie de son *Traité des courbes géométriques*. Pour l'établir clairement, il est nécessaire d'entrer avec l'auteur anglais dans quelques détails nouveaux, dont la longueur sera justifiée par l'intérêt qui s'attache au sujet même, et qui feront l'objet des nos 13 et suivants.

(*Note du traducteur*.)

14. Addition du Traducteur. — *Construction des tangentes aux courbes géométriques.* — Les dernières propositions qui sont relatives à la détermination du rayon de courbure et de sa différentielle dans les courbes géométriques, supposent que l'on connaît la tangente au point de contact, et Maclaurin ne dit pas comment cette tangente est construite. « Nous nous étonnons, dit M. Chasles, page 148 de l'*Aperçu historique*, qu'il n'ait pas eu l'idée de construire aussi d'une » manière purement géométrique, et sans calcul, cette » tangente. Ce problème était du même ordre et plus facile » que celui du cercle osculateur. » En effet, ce problème se résout très-simplement à l'aide du théorème de Newton, qui fait l'objet du n° 2 de cette Introduction. Nous allons donner, en nous appuyant sur ce théorème, la solution qui est indiquée dans une Note de l'*Aperçu historique*, page 221. Nous nous bornerons à y ajouter la démonstration que M. Chasles a supprimée à cause de son extrême facilité.

Soit P un point pris arbitrairement dans le plan d'une courbe géométrique d'un degré quelconque; PA, Pa, deux transversales quelconques qui rencontrent respectivement la courbe aux points A, A′, A″, A‴, . . . ; a, a', a'', a''', ... f étant un coefficient constant; on aura, en vertu du théorème de Newton (n° 2),

$$\mathrm{PA}.\mathrm{PA}'.\mathrm{PA}''.\mathrm{PA}''',\ldots = f.\mathrm{P}a.\mathrm{P}a'.\mathrm{P}a''.\mathrm{P}a''',\ldots,$$

Pour un autre point Π et deux nouvelles transversales parallèles aux premières, on aurait de même

$$\Pi\alpha.\Pi\alpha'.\Pi\alpha''\ldots = f.\Pi\beta.\Pi\beta'.\Pi\beta''\ldots$$

Supposons que le point P soit infiniment voisin du point m de la courbe où l'on veut mener la tangente; la droite infiniment petite Aa sera l'élément de la courbe ou de sa tangente, et on aura

$$\frac{\text{PA}}{\text{P}a}=f.\frac{\text{P}a'.\text{P}a''\ldots}{\text{PA}'.\text{PA}''\ldots}=\frac{\text{P}a'.\text{P}a''\ldots}{\text{PA}'.\text{PA}''\ldots}\times\frac{\Pi\alpha.\Pi\alpha'.\Pi\alpha''\ldots}{\Pi\beta.\Pi\beta'.\Pi\beta''\ldots},$$

en remplaçant f par sa valeur tirée de la seconde équation.

Les quatre groupes de produits qui forment cette expression sont connus; on connaîtra donc $\frac{\text{PA}}{\text{P}a}$, c'est-à-dire $\frac{m\text{A}}{ma}$; donc, si l'on porte sur les transversales mA et ma deux longueurs finies qui soient entre elles dans ce rapport, la droite qui en joindra les extrémités sera parallèle à la tangente cherchée. Le problème est donc résolu.

Le théorème de Carnot (*Géom. sup.*, n° 476) donne également un moyen aussi simple que général, de déterminer le cercle osculateur en un point quelconque d'une courbe géométrique. En effet, soit ABC un triangle quelconque dont les côtés rencontrent respectivement la courbe aux points a, a',..., b, b',..., c, c',...; ce théorème donne la relation

$$\frac{\text{A}a.\text{A}a'\ldots}{\text{A}c.\text{A}c'\ldots}\times\frac{\text{B}b.\text{B}b'\ldots}{\text{B}a.\text{B}a'\ldots}\times\frac{\text{C}c.\text{C}c'\ldots}{\text{C}b.\text{C}b'\ldots}=+1.$$

Faisons passer par les trois points a, b', a', un cercle qui coupe une seconde fois au point β le côté PC du triangle; on a, par les propriétés des sécantes dans le cercle,

$$\text{B}a.\text{B}a'=\text{B}b'.\text{B}\beta,$$

de sorte que l'équation donne pour la valeur de Bβ,

$$\text{B}\beta=\frac{\text{A}a.\text{A}a'\ldots}{\text{A}c.\text{A}c'\ldots}\times\frac{\text{B}a''\ldots}{\text{B}b.\text{B}b''\ldots}\times\frac{\text{C}c.\text{C}c'\ldots}{\text{C}b.\text{C}b'\ldots}.$$

Actuellement, si les deux points a et a' sont infiniment rapprochés du point b', auquel cas le sommet B est lui-même sur la courbe au point b', où l'on veut déterminer le rayon de courbure, le cercle $ab'a'\beta$ est le cercle osculateur, dont l'équation précédente fait connaître la corde Bβ interceptée sur le côté BC du triangle, puisque tout est connu dans le second membre de cette équation. Le cercle est donc déterminé puisqu'on connaît d'ailleurs la tangente et, par conséquent, la normale en b' sur laquelle se trouve son centre.

Il faut seulement remarquer que cette solution suppose que la courbe donnée est entièrement tracée.

(*Voir la Note finale du* Mémoire sur la dualité et l'homographie, *qui fait suite à l'*Aperçu historique.)

15. Soit (*fig.* 11) DT la tangente à une section conique au point D; DE, DA deux transversales arbitraires issues de ce point, et K le point où DE rencontre la tangente menée par le point A. Menons EN et KM parallèles à DT; enfin prenons sur DE une ligne $DR = \frac{KM}{KE} \cdot EN$. Le point R appartiendra au cercle osculateur au point D.

En effet, si l'on suppose ce cercle décrit et passant en R, on a (10)

$$\frac{\overline{QV}^2}{\overline{DV}^2 . DR} = \frac{1}{DE} - \frac{1}{DK} = \frac{KE}{DE.DK},$$

d'où

$$DR = \frac{DE.DK}{KE} \cdot \frac{\overline{QV}^2}{\overline{DV}^2}.$$

Mais, à cause des relations évidentes

$$\frac{QV}{DV} = \frac{KM}{KD} = \frac{EN}{ED},$$

il vient

$$DR = \frac{KM}{KE} \cdot EN,$$

ce qui est précisément la longueur indiquée, à priori, par la construction ci-dessus.

Si la tangente AK (*fig.* 12) est parallèle à DE (c'est-à-dire si DE est la corde *conjuguée* au diamètre qui passe en A), il vient

$$DR = \frac{\overline{EN}^2}{DE};$$

donc si DE est un diamètre, DR est le *paramètre* du diamètre DE, comme on le sait par la théorie des coniques (*).

16. Par un point D d'une conique (*fig.* 13), menons la tangente DT et une sécante quelconque DE. Soit DA la bissectrice de l'angle EDT. Joignons AE qui coupe en V la parallèle DV à la tangente AK; enfin menons VR parallèle à DA. Le cercle osculateur en D passera en R, et DR en sera le diamètre si l'angle EDT est droit. En effet, les triangles semblables donnent

$$\frac{VR}{AD}=\frac{EV}{EA}=\frac{DR}{DK} \quad \text{et} \quad \frac{EV}{EA}=\frac{DE}{EK};$$

donc

$$\frac{DR}{DK}=\frac{DE}{EK} \quad \text{et} \quad DR=\frac{1}{DE}-\frac{1}{DK}.$$

Donc DR est la corde du cercle osculateur (10).

Si la tangente AK est parallèle à DE (*fig.* 14) (les tangentes AK et DT sont dans ce cas également inclinées sur la droite DA qui est par conséquent parallèle à l'un des axes principaux de la conique), les points R et E coïncident, et le cercle osculateur passe par le point E.

(*) Quand une conique est rapportée à deux diamètres conjugués, le *paramètre* du diamètre a' (voir, à cet égard, l'*Algèbre de Maclaurin*, Partie III, chapitre II, § 28, ligne 10) a pour valeur $\frac{4b'^2}{2a'}$, b' et a' étant les demi-diamètres conjugués en question. Or il est clair qu'ici on a

$$DE = 2a' \quad \text{et} \quad EN = 2b'.$$

Le théorème prouve que : « *Si en un point d'une conique on mène le cercle* » *osculateur, la corde que ce cercle intercepte sur le diamètre de la conique* » *qui passe en ce point est précisément le paramètre de ce diamètre* » et ceci explique pourquoi toutes les paraboles tangentes en D à la droite DV (n° 11 *fig.* 9) et décrites sur des cordes quelconques du cercle osculateur (dans les conditions indiquées à ce numéro) ont en commun ce cercle osculateur c'est-à-dire ont toutes la même courbure que la courbe proposée.

(*Note du traducteur.*)

Remarquons encore que la relation $\frac{DR}{DK}=\frac{DE}{KE}$ donne

$$\frac{DR-DE}{DE}=\frac{DK-KE}{KE}; \quad \text{ou} \quad \frac{ER}{DE}=\frac{DE}{KE}.$$

Donc DE est une *moyenne géométrique* entre ER et EK.

17. Soit DE (*fig.* 15) une transversale qui rencontre une conique aux points D et E, et soit V le point de concours des tangentes en ces points (c'est-à-dire le *pôle* de la transversale). Soit DOA le diamètre de la conique qui aboutit au point D. Faisons l'angle DVr = EDO; DR = 2 Dr sera la corde du cercle osculateur. En effet, supposons ce cercle décrit et passant par le point R; menons la tangente AK, qui coupe DE en K et EV en Z (point milieu de LK, comme on sait), puis EN parallèle à DT. On a (n° 15)

$$\frac{DR}{KA}=\frac{EN}{EK}.$$

Les triangles semblables donnent aussi

$$\frac{KZ}{KE}=\frac{VD}{DE}.$$

Donc

$$\frac{DV}{DE}=\frac{DR}{EN};$$

les triangles DVr et EDr sont donc semblables, et l'angle DVr = angle EDO; ce qui justifie la construction énoncée.

18. Théorème. — *La variation de la courbure est en raison directe de la tangente trigonométrique de l'angle compris entre le diamètre et la normale qui passent au point donné, et en raison inverse du carré du rayon de courbure en ce point.*

En effet, soit DR (*fig.* 16) le diamètre du cercle osculateur. La variation de la courbure est proportionnelle à $\frac{1}{DR.DV}$ (12); or $\frac{Dr}{DV}=\frac{DE}{EN}$ (17). Donc cette variation est proportionnelle à

$$\frac{EN}{ED} \cdot \frac{1}{\overline{DR}^2} = \frac{1}{\overline{DR}^2} \cdot \text{tang}\, EDO.$$

Quant à la variation du rayon de courbure, elle est simplement proportionnelle à tang EDO (11, 5e alinéa).

Prolongeons le diamètre DO jusqu'à la rencontre du cercle osculateur en n. Si l'on décrit une parabole tangente en D à la droite DT et qui ait Dn pour diamètre en direction, et pour paramètre de ce diamètre en grandeur, ce sera la parabole osculatrice de la conique (*).

19. Du point V menons la tangente VH au cercle osculateur et joignons HD. L'angle RDH est le complément de DrV; donc

$$RDH = DVr = EDO.$$

La variation du rayon de courbure est donc proportionnelle à la tangente de l'angle RDH, et cette variation s'évanouit quand les droites DR et DH coïncident.

SECTION II.

DES COURBES DU TROISIÈME DEGRÉ.

1. On a beaucoup écrit sur les sections coniques (**); mais peu d'auteurs ont abordé cette branche de la haute Géométrie qui traite des courbes du troisième degré. J'espère pourtant montrer qu'elle n'est ni stérile ni dénuée de charmes. Les lignes du troisième ordre jouissent en effet

(*) Car, d'après la présente proposition, elle a même *variation de courbure* que la conique, et, d'après le nota du n° 15, elle a aussi même *courbure* qu'elle, puisqu'elle a pour *paramètre* de son diamètre dirigé suivant Dn la corde même Dn du cercle osculateur.

(*Note du traducteur.*)

(**) L'auteur dit : « On a écrit jusqu'à satiété » *usque ad fastidium fere*; il ne prévoyait pas les beaux travaux qui ont tant enrichi, depuis lors, la théorie des coniques.

de propriétés nombreuses, très-différentes de celles que Newton fit autrefois connaître, et qui me semblent bien dignes d'attirer l'attention des géomètres.

On sait qu'une courbe du troisième degré ne peut être rencontrée par une droite qu'en trois points; cela vient de ce qu'une équation du troisième degré n'a que trois racines, qui peuvent être toutes réelles. Ainsi, toute droite qui coupe une courbe du troisième degré en deux points réels, la rencontre nécessairement en un troisième point, ou bien est parallèle à l'asymptote de la courbe, ce qui rentre dans le principe général, puisque dans ce cas le troisième point de rencontre est situé à l'infini. Cela vient de ce que si deux des racines d'une équation du troisième degré sont réelles, la troisième l'est également. Il suit de là qu'une tangente à la courbe la coupe toujours en quelque autre point, car le point de tangence équivaut à deux points d'intersection. Si cette tangente coupe la courbe en l'un de ses *points d'inflexion*, elle est en même temps sécante en ce point. Si deux branches se rencontrent, la courbe a un *point double*, et la tangente en ce point à l'une des branches coupe l'autre branche en ce même point. Enfin, toute autre droite menée par le point double coupe la courbe en un autre point, mais nécessairement en un seul.

2. PROPOSITION I. — *Soient deux parallèles qui rencontrent, respectivement, en trois points une courbe du troisième degré; si l'on prend sur chacune d'elles le centre des moyennes distances de ces points d'intersection, et qu'on joigne ces deux centres par une droite, cette droite passera par le centre des moyennes distances de toute autre transversale parallèle à ces deux-là* (voir *Géom. sup.*, n° 483).

3. PROPOSITION II. — *Étant donnée une droite fixe qui coupe en trois points une courbe du troisième degré, si l'on mène deux transversales quelconques parallèles entre*

elles, les produits des segments compris sur chacune de ces transversales entre la droite fixe et la courbe, seront entre eux dans le même rapport que les produits des segments compris, sur la droite donnée, entre la courbe et les parallèles (voir *Géom. sup.*, art. 480).

Ces deux théorèmes sont attribués à Newton.

4. Proposition III (fig. 1, *Pl. IV*). — *Les données restant les mêmes que dans la proposition précédente, supposons que la droite fixe ne rencontre la courbe qu'en un point réel. Le produit des segments* PM, Pm, Pμ, *compris sur l'une des parallèles, sera au produit des segments* pN, pn, pν, *compris sur la seconde, dans le même rapport que le produit* $AP.\overline{bP}^2$, *formé par le segment* AP *et le carré de la distance* bP *du point* P *à un certain point* b (facile à déterminer (*), *est au produit* $Ap.\overline{bP}^2$, *formé par le segment* Ap *et par le carré de la distance du point* p *au même point* b.

5. Proposition IV (fig. 2). — *Soient deux droites* PD, PA, *issues d'un point quelconque* P; D, E, F *et* A, B, C *les points où elles rencontrent, respectivement, une courbe du troisième degré; soient menées les tangentes* AK, BL, CM *qui coupent la droite* PD *en* K, L, M; *la moyenne harmonique des trois segments* PK, PL, PM *coïncidera avec la moyenne harmonique des segments* PD, PE, PF (**).

Si PD′ ne rencontre la courbe qu'en un point réel D′, on cherchera un point d, facile à déterminer (***), et la moyenne harmonique des trois segments PK, PL, PM sera à la moyenne harmonique des segments PD′ et $\frac{1}{2}$ Pd dans le rapport de 3 à 2 (****).

(*), (**), (***) Ces théorèmes se trouvent démontrés dans l'Introduction.

(****) Le point d est tel, qu'on a

$$\frac{1}{PK}+\frac{1}{PL}+\frac{1}{PM}=\frac{1}{PD'}+\frac{2}{Pd},$$

6. Proposition V. — *Si autour d'un point fixe* P *on fait tourner une transversale* PD, *et qu'on prenne constamment sur elle* PM *égal à la moyenne harmonique des trois segments* PD, PE, PF, *le lieu du point* M *sera une ligne droite.*

C'est le *théorème* de Cotes. Il a été démontré ci-dessus.

7. Proposition VI. — *Trois points d'une courbe du troisième degré étant pris en ligne droite, si l'on mène en ces points les tangentes à la courbe, ces tangentes rencontreront la courbe en trois nouveaux points situés en ligne droite.*

Soit FGH (*fig.* 3) la transversale; FA, GB, HC les trois tangentes; A, B, C leurs points de rencontre respectifs avec la courbe. Joignons AB; il faut prouver que cette droite AB passe par le point C. Supposons qu'elle rencontre la courbe en un autre point M, la tangente HC en N et la transversale en P. On a (Prop. IV)

$$\frac{1}{PA}+\frac{1}{PB}+\frac{1}{PM}=\frac{1}{PA}+\frac{1}{PB}+\frac{1}{PN};$$

donc PN = PM, ce qui exige que les trois points N, M, C coïncident. Donc, etc.

Remarque du traducteur. — Ce théorème est une conséquence immédiate d'une proposition beaucoup plus générale, donnée par M. le général Poncelet dans son *Mémoire sur l'Analyse des transversales* (*) (Journal de Crelle, année 1832, page 129). En voici l'énoncé :

---

donc

$$=\frac{1}{PD'}+\frac{1}{\frac{1}{2}Pd}.$$

Si Pl et Pl' sont les moyennes harmoniques des deux membres de l'équation, celle-ci devient

$$\frac{3}{Pl}=\frac{2}{Pl'}$$

(*Géom. sup.*, n° 62), ce qui démontre la fin du théorème.

(*) Je dois la connaissance de ce beau Mémoire à l'obligeance de

Si parmi les neuf intersections d'une ligne plane du troisième ordre avec trois transversales arbitraires, six quelconques appartiennent à une même ligne du second ordre, les trois intersections restantes seront à une simple ligne droite; et réciproquement, si trois quelconques de ces neuf intersections, appartenantes à des transversales distinctes, sont situées sur une même droite, les six intersections restantes seront à une simple ligne du second ordre.

Le lecteur me saura gré, sans doute, de reproduire ici la démonstration de l'illustre auteur.

Soit une courbe plane du troisième degré considérée comme transversale d'un triangle quelconque ABC tracé sur son plan et dont les côtés la coupent respectivement en a, a', a''; b, b', b''; c, c', c''.

Le théorème de Carnot donne la relation

$$\frac{\mathrm{A}a.\mathrm{A}a'.\mathrm{A}a''}{\mathrm{A}c.\mathrm{A}c'.\mathrm{A}c''}\cdot\frac{\mathrm{B}b.\mathrm{B}b'.\mathrm{B}b''}{\mathrm{B}a.\mathrm{B}a'.\mathrm{B}a''}\cdot\frac{\mathrm{C}c.\mathrm{C}c'.\mathrm{C}c''}{\mathrm{C}b.\mathrm{C}b'.\mathrm{C}b''}=+1;$$

supposons, en particulier, que le système des trois couples de points a, a'; b, b'; c, c' soient à une ligne quelconque du second ordre, on aura aussi

$$\frac{\mathrm{A}a.\mathrm{A}a'}{\mathrm{A}c.\mathrm{A}c'}\cdot\frac{\mathrm{B}b.\mathrm{B}b'}{\mathrm{B}a.\mathrm{B}a'}\cdot\frac{\mathrm{C}c.\mathrm{C}c'}{\mathrm{C}b.\mathrm{C}b'}=+1,$$

ce qui réduit l'équation primitive à cette autre

$$\frac{\mathrm{A}a''}{\mathrm{A}c''}\cdot\frac{\mathrm{B}b''}{\mathrm{B}a''}\cdot\frac{\mathrm{C}b''}{\mathrm{C}c''}=+1,$$

laquelle exprime que les trois dernières intersections a'', b'', c'' sont en ligne droite. La réciproque est évidente et le théorème est par conséquent démontré.

M. Chasles, qui, en me l'adressant, m'a fait particulièrement remarquer ces théorèmes intéressants.

La ligne du second ordre peut être remplacée par le système de deux droites quelconques. Elle peut l'être aussi par le système de deux droites coïncidentes. C'est le cas de la proposition V de Maclaurin, qui n'est ainsi qu'une conséquence du théorème démontré ci-dessus, ainsi que je l'avais annoncé.

On en conclut encore (*voir* le Mémoire déjà cité) que :

Les trois asymptotes d'une ligne du troisième ordre rencontrent la courbe en trois nouveaux points qui sont en ligne droite.

Car leurs six points de tangence sont sur une même droite, celle de l'infini. M. Poncelet en déduit ce nouveau théorème :

Si par l'un des points d'inflexion d'une courbe du troisième ordre on mène trois transversales arbitraires, les six intersections nouvelles de ces transversales et de la courbe seront à une simple ligne du second ordre, de sorte que trois quelconques d'entre elles, appartenantes à des transversales distinctes, ayant été prises sur une même droite, les trois autres seront également à une autre droite.

Le corollaire III de la proposition VII de Maclaurin découle de là naturellement, et M. Poncelet en conclut aussi que :

Les trois points d'inflexion d'une courbe du troisième ordre sont toujours en ligne droite. C'est la proposition X de Maclaurin.

8. *Corollaire.* — On conclut de la proposition précédente que, si A, B, C sont trois points en ligne droite d'une courbe du troisième degré, qu'on mène les lignes AF et BG tangentes en F et G et qu'on joigne FG qui coupe la courbe en H, la droite CH sera tangente en H. Supposons, en effet, que la tangente en H coupe la courbe en un point autre que C, ce point serait avec les trois A, B, C sur une même ligne droite, qui couperait ainsi la courbe en quatre points;

ce qui est impossible. Cette conséquence peut aussi se déduire, quoique un peu plus péniblement, de la proposition II.

De même, si A*f* est tangente en *f*, et que G*f* coupe la courbe en *h*, C*h* sera tangente en *h*, et si par les points A, B, C, on mène à la courbe toutes les tangentes possibles, les points de contact seront, trois à trois respectivement, en ligne droite.

9. Proposition VII. — *Si d'un point d'une courbe du troisième ordre, on mène deux tangentes à la courbe, la corde de contact coupera la courbe en un second point, et les tangentes en ces deux points se couperont sur la courbe.*

C'est-à-dire que si AF et AG (*fig.* 4) sont les deux tangentes, FG la corde de contact et HC la tangente en H, CA sera tangente en A. Ceci résulte du corollaire précédent; car en y faisant coïncider les deux points A et B, la droite CBA devient tangente en A.

10. *Corollaire I.* — Si du point C de la courbe, on mène deux tangentes en A et H, et du point A deux nouvelles tangentes AF, AG, la corde de contact FG passera par H.

11. *Corollaire II.* — Soient menées AC, tangente en A, sécante en C; AF et CH tangentes en F et H, ainsi que la droite de contact FH qui coupe la courbe en G; la droite AG sera tangente en G. Et si par le point C on mène C*h* tangente en *h*, qu'on joigne *h*F et *h*G qui rencontrent la courbe en *f* et *g*, les droites A*f* et A*g* seront tangentes en *f* et en *g*.

12. *Corollaire III.* — Soient AF et AG (*fig.* 5) deux tangentes issues d'un point d'inflexion A, et FG la corde de contact qui coupe la courbe en H; la droite AH sera tangente en ce point. En effet, si la tangente en H coupait la courbe en un point autre que A, la droite menée de ce point de rencontre au point d'inflexion A serait tangente

au point A (proposition VII), ce qui est impossible. On voit d'ailleurs que, d'un point d'inflexion A, on ne peut mener à la courbe que trois tangentes, sans compter celle qui est à la fois tangente et sécante en ce point, et que les trois points de contact sont en ligne droite. De plus, les points d'inflexion sont les seuls points de la courbe qui jouissent de cette propriété que les trois tangentes qui en sont issues ont leurs points de contact en ligne droite. Car soient F, G, H, trois points en ligne droite, et supposons que les tangentes en ces points concourent en un point de la courbe *a*, autre que l'un de ses points d'inflexion ; menons *ae* tangente en *a* et sécante en *e* ; la droite *e*H toucherait la courbe en H, en vertu du théorème VII ; les droites *e*H et *a*H seraient donc en même temps tangentes en H, ce qui est absurde. Donc, etc.

13. Proposition VIII. — *D'un point quelconque d'une courbe du troisième degré soient menées trois tangentes à la courbe; si l'on joint deux des points de contact, cette corde coupe la courbe en un point. Joignant ce point au troisième point de contact, on obtient une droite qui coupe la courbe en un nouveau point. La tangente en ce dernier point est précisément la droite qui le joint au point donné.*

Soient A le point donné (*fig.* 4) ; AF, AG, A*f* les tangentes en F, G, *f*; G*f* une des cordes de contact qui coupe la courbe en N ; NF la droite qui joint le point N au troisième point de contact F et qui coupe la courbe en *g*. Il faut prouver que A*g* est tangente en *g*. En effet, soit menée AC tangente en A et sécante en C ; les points G, N, *f* étant en ligne droite et les tangentes en G et *f* passant par A, il résulte de la proposition VII que la tangente en N coupe la courbe en C, au même point que la tangente en A. Mais les points F, N, *g* sont aussi en ligne droite, et les tangentes FA et NC rencontrent la courbe en A et C ; donc, puisque AC est tangente en A, la tangente en g doit passer par A (proposition VI, Coroll.).

14. *Corollaire.* — On conclut de là que si l'on veut décrire la courbe, étant données trois tangentes concourant en un même point ainsi que leurs trois points de contact, on trouve immédiatement un quatrième point de contact, ainsi que la tangente en ce point, laquelle passe par le point de concours des trois autres. On en conclut aussi, que d'un point d'une ligne du troisième ordre on ne peut mener à la courbe que quatre tangentes, sans compter celle qui la touche en ce point même. Car, si l'on pouvait en mener une cinquième, on voit, par ce qui précède (*), qu'on en pourrait mener une infinité, ce qui est absurde. Au reste, on donnera plus loin, art. 27, une nouvelle démonstration de ce corollaire.

15. Proposition IX. — *Si d'un point d'inflexion on mène trois tangentes à la courbe, la corde des contacts coupera harmoniquement toute transversale menée par ce point et terminée à la courbe.*

Soit A le point d'inflexion (*fig.* 5); AF, AG, AN les tangentes en F, G, H. Menons par le point A une transversale quelconque qui rencontre la courbe en B et C, et la corde des contacts FH en P; on aura

$$\frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AC} \quad (**).$$

En effet, les trois tangentes en F, G, H concourant au

(*) Supposons qu'on ait une cinquième tangente Af' tangente en f'; en joignant $f'G$, on détermine un nouveau point N' qui, joint au point F, donne un nouveau point g' tel, que Ag' est tangente en ce point, d'après la proposition même. Ce point g' en fournirait un autre g'', et ainsi de suite à l'infini.

(**) On ne doit pas s'attendre à trouver dans Maclaurin le principe absolu des signes, tel qu'il a été établi par M. Chasles dans sa *Géométrie supérieure.* Néanmoins il y a souvent égard.

même point A, on a (proposition IV)

$$\frac{1}{PB}+\frac{1}{PA}-\frac{1}{PC}=\frac{3}{PA};\quad \text{d'où}\quad \frac{1}{PB}-\frac{1}{PC}=\frac{2}{PA};$$

ce qui prouve que (*Géom. sup.*, art. 61) PA est la moyenne harmonique entre les deux segments PB et PC, terminés à la courbe. Donc, etc.

Ce théorème exprime une propriété remarquablement simple des courbes du troisième degré.

16. *Corollaire I.* — Toute droite qui divise harmoniquement deux transversales quelconques issues d'un point d'inflexion et terminées à la courbe, divise de même toute autre transversale issue de ce point (*).

17. *Corollaire II.* — Si une parallèle à l'asymptote, menée par un point d'inflexion, coupe la droite FH en R et la courbe en O, on aura

$$\frac{1}{RO}=\frac{2}{RA};\quad \text{d'où}\quad RA=2\,RO.$$

Remarque du traducteur. — Les propriétés du point d'inflexion A et de la corde de contact FG offrent une analogie frappante avec celles du *pôle* et de la *polaire* dans les courbes du second degré. Aussi M. Chasles donne-t-il à la droite FG la dénomination de *polaire* (*Aperçu historique*, Note XX, page 349).

Dans cette Note, l'auteur s'appuyant sur la proposition IX de Maclaurin, prouve très-simplement qu'une courbe quelconque du troisième degré peut toujours être regardée comme étant l'ombre ou la perspective d'une des cinq paraboles divergentes (théorème dû à Newton), ou comme

---

(*) On peut conclure de là que les droites C c, B b, qui joignent deux points de sécance, se coupent sur GPF; car les rapports anharmoniques des points A, B, P, C, et A, b, p, c sont égaux; or deux points homologues coïncident en A; donc, etc. Donc GPF est le lieu du point de concours Q. Ce théorème est, du reste, démontré plus loin.

(*Note du traducteur.*)

celle d'une des cinq courbes du troisième degré qui ont un centre.

L'*Aperçu historique* étant devenu fort rare, on sera sans doute bien aise de trouver ici la démonstration textuelle de M. Chasles :

On sait que toute courbe du troisième degré a un ou trois points d'inflexion; qu'on la projette, c'est-à-dire qu'on en fasse la perspective, de manière que l'un de ses points d'inflexion passe à l'infini; sa polaire, à cause de la proposition IX de Maclaurin, deviendra un *diamètre* de la courbe. C'est là l'origine des diamètres dans les courbes du troisième degré.

» Maintenant, que la perspective soit faite de manière que non-seulement le point d'inflexion, mais la tangente à la courbe en ce point, passe tout entière à l'infini, la courbe aura un diamètre et n'aura aucune asymptote, elle sera purement parabolique. Il est donc démontré qu'une courbe quelconque du troisième degré *peut être projetée perspectivement suivant une des cinq paraboles divergentes*; *d'où résulte* que, réciproquement, ces cinq courbes peuvent produire, par leur ombre, toutes les autres. C'est le théorème de Newton.

» Actuellement, prenons la polaire d'un point d'inflexion de la courbe proposée, et projetons cette courbe, perspectivement, de manière que cette polaire passe à l'infini; il résulte, de la proposition IX de Maclaurin, que le point d'inflexion sera en projection le centre de la courbe. Ainsi donc toute courbe du troisième degré peut être projetée perspectivement suivant une courbe ayant un centre; d'où résulte que, réciproquement, les cinq courbes qui ont un centre peuvent produire, par leur ombre, toutes les autres.

» Ce théorème et celui de Newton peuvent être compris sous ce seul énoncé, savoir :

» *Ainsi que les courbes du second degré ne peuvent donner* *lieu qu'à une seule espèce de cône, de même les courbes du troisième degré ne peuvent donner lieu qu'à cinq espèces de cônes;*

» *En coupant ces cônes d'une certaine manière, on forme les cinq paraboles divergentes;*

» *En les coupant d'une autre manière, on forme les cinq courbes qui ont un centre* (Aperçu historique, page 349). »

18. PROPOSITION X. — *Toute droite qui passe par deux points d'inflexion passe aussi par le troisième, ou bien est parallèle à l'asymptote des branches infinies de la courbe (dont le troisième point d'inflexion se trouve alors à l'infini).*

Soient (*fig.* 6) A et *a* deux points d'inflexion; la droite A*a* coupe la courbe au point a qui est aussi un point d'inflexion; c'est là ce qu'il faut prouver. En effet, supposons que la tangente en a coupe la courbe en *e*, les trois points A, *a*, *e* seraient en ligne droite (*); mais les points A, *a*, a sont en ligne droite, par hypothèse. Cette ligne rencontrerait donc la courbe en quatre points, ce qui est absurde.

Menons, parallèlement à l'asymptote, la droite AO qui coupe la courbe en O, et la ligne OQ, tangente en O, sécante en Q. Si l'on joint AQ, cette droite passera par le point D où la courbe est coupée par son asymptote (**).

(*) Ceci résulte de la proposition VI. Car les trois points étant en ligne droite, les tangentes en ces points coupent la courbe en trois points situés en ligne droite. Or les tangentes en A et *a* coupent la courbe en A et *a*; donc les trois points A, *a*, *e* seraient en ligne droite.

(**) AO coupe la courbe à l'infini. Les tangentes aux trois points A, O et ∞, coupent donc la courbe en trois points situés en ligne droite. Or l'une coupe en A, l'autre en Q et la troisième en D; donc, etc.

Pour démontrer la dernière partie de la proposition X, que l'auteur passe sous silence, il suffit d'ajouter : si A *a* coupe la courbe en trois points, le théorème démontre que le troisième point est un point d'inflexion, et si elle ne le coupe qu'en deux, c'est une preuve qu'elle est parallèle à l'asymptote. Donc, etc. (*Notes du traducteur.*)

19. PROPOSITION XI. — *D'un point d'inflexion* A (fig. 5) *on mène à la courbe les tangentes* AF, AG, AH *et deux sécantes quelconques* ABC, A*bc*. *Si l'on joint* B*b* *et* C*c*, *ou* B*c* et *b*C, *ces droites se couperont sur la corde des contacts* FH.

Supposons, en effet, que B*b* rencontre FH en Q et que BC la rencontre en P; joignons QA et QC; on a (proposition IX)

$$\frac{AB}{Ac}=\frac{PB}{Pc};$$

les droites QA, QB, QP, QC forment donc un faisceau harmonique, d'où il résulte que

$$\frac{Ab}{Ac}=\frac{pb}{pc},$$

c et p étant respectivement les points de rencontre de AB avec QC et FH; c sera donc un point de la courbe (proposition IX), et il en résulte que B*b* et C*c* concourent au même point Q de FH. On prouverait de même que *Bc* et *bC* se coupent en q sur cette même droite.

20. *Corollaire I.* — D'un point Q de la droite FH, soient menées les transversales QB, QC qui coupent la courbe aux points B, *b*, M et C, *c*, N. Les droites CB, *cb*, MN concourent au point d'inflexion A, et les droites B*c* et *b*C, M*c* et N*b*, B*b* et C*c*, NB et MC se couperont, deux à deux, sur FH (*).

21. *Corollaire II.* — Les tangentes en B et C se coupent en un point T de la droite FH. Donc, réciproquement, si d'un point quelconque de FH on mène deux tangentes à la courbe, la corde de contact passera par le point d'inflexion.

(*) Cet énoncé de Maclaurin est évidemment incomplet. Il faut ajouter que les deux transversales QB, QC, au lieu d'être arbitraires toutes deux, doivent être choisies de manière à former un faisceau harmonique avec la *polaire* GF et avec la droite QA, qui joint le point Q au point d'inflexion.

Et si l'on prend un second point T', duquel on mène deux nouvelles tangentes et qu'on joigne, inversement, les points de contact des tangentes issues de T avec les points de contact des tangentes issues de T', on aura de nouvelles cordes de contact qui se couperont sur la droite FH (*).

22. *Corollaire III.* — Soient A un point d'inflexion; B, C, *b*, *c*, les points de rencontre de la courbe par deux transversales issues du point A; la droite FH est, par cela même, déterminée. Car les droites B*b* et C*c* se rencontrent en Q, et les droites B*c* et *b*C en *q*. La droite Q*q* est précisément la corde des contacts FGH. Or, si, outre ces cinq points, on en donne deux autres M et *m*, la courbe du troisième degré assujettie à passer par sept points A, B, *b*, *c*, M et *m* et à avoir une inflexion en A, est complétement déterminée. Car les points M et *m* fixent (proposition IX) les points de rencontre N et *n* des sécantes AM et A*m* avec la courbe, et l'on a ainsi neuf conditions pour déterminer la courbe. Si l'on donnait, au contraire, trois nouveaux points M, *m*, S, au lieu de deux, il y aurait surabondance de conditions; car ces trois points en fourniraient trois autres N, *n*, *s*, ce qui ferait en tout onze conditions. De même encore, si l'on donne un point d'inflexion A, deux tangentes AF, AG, et leurs points de contact F, G et deux autres points M et *m*, la courbe est déterminée. Car on connaît la droite FG et par suite deux nouveaux points N et *n*, en tout neuf conditions (**).

23. *Corollaire IV.* — Si les droites HB, HC (*fig.* 7) sont tangentes à la courbe en B et C, la corde de contact CB passe par le point d'inflexion A; les droites CG et FB concourent en un point V de la courbe, et la ligne VH est tangente en V

(*) Ceci se démontre comme on l'a fait plus haut dans un cas analogue (*voir* la note du nº 16). (*Note du traducteur.*)

(**) On peut remarquer que, dans tous les cas, le point d'inflexion tient lieu de trois conditions. (*Note du traducteur.*)

(proposition VII). Maintenant, pour déterminer la tangente au point d'inflexion A, il suffit de mener AV qui coupe en L la ligne PL, menée par le point P parallèlement à AH, de prendre le milieu X du segment PL et de joindre AX. En effet, supposons que la tangente en A coupe en S la droite FH (proposition IV; ici deux points de sécance de la transversale coïncident en H); on aura

$$\frac{1}{PS}+\frac{2}{PH}=\frac{1}{PH}+\frac{1}{PG}-\frac{1}{PF};$$

d'où

$$\frac{1}{PS}+\frac{1}{PH}=\frac{1}{PG}-\frac{1}{PF}.$$

Mais AC est divisée harmoniquement aux points P et B; donc les droites VA, VF, VP et VG forment un faisceau harmonique, qui étant coupé par la transversale PH en F, P, G, K donne

$$\frac{1}{PG}-\frac{1}{PF}=\frac{2}{PK}.$$

PK est donc la moyenne harmonique des segments PS et PH; donc, si l'on mène PL parallèle à AH, les droites AV, AS seront coupées en X et L, de telle sorte que PX = XL (*). Donc, etc.

24. Proposition XII. — *D'un point* A *d'une courbe du troisième degré* (fig. 8), *on mène deux tangentes en* F *et* G; *la corde de contact* FG *rencontre la courbe en* H, *et la tangente en* A *coupe la courbe en* M. *La droite* HM *est coupée en* L *par la droite* FLK *parallèle à* AH, *et l'on prend* FK = 2FL. *Ceci posé, si l'on joint* HK, *toute transversale telle que* AB, *issue du point* A, *sera divisée harmoniquement par les droites* HK *et* AF, *en* N *et*

(*) Les droites AP, AH, AK, AS forment un faisceau harmonique; donc la transversale PL les coupe en rapport harmonique. Mais le point d'intersection H et AH est à l'infini. Donc PX = XL (*Géom. sup.*, n° 37).

P, *et par la courbe, en* B *et* C ; *c'est-à-dire qu'on aura la relation*

$$\frac{NB}{NC}=\frac{PB}{PC}.$$

En effet, soit T le point de rencontre de AB avec la tangente HM (*), on aura (proposition IV),

$$\frac{1}{PB}+\frac{1}{PA}-\frac{1}{PC}=\frac{2}{PA}+\frac{1}{PT}=\frac{2}{PN}$$

(par construction et harmoniquement). Donc NC est divisée harmoniquement en B et P, et l'on a

$$\frac{NB}{NC}=\frac{PB}{PC}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

25. *Corollaire I.* — Donc, si deux droites quelconques, issues du point A, sont divisées harmoniquement en N et n, de telle sorte qu'on ait

$$\frac{PB}{PC}=\frac{BN}{NC} \quad \text{et} \quad \frac{pb}{pc}=\frac{bn}{nc},$$

toute autre droite, issue du même point, sera aussi divisée harmoniquement par la droite HF et par la droite HK que déterminent les deux transversales données.

26. *Corollaire II.* — Si la courbe n'a pas de point double, et si la droite HK la rencontre en deux points f et g, les droites Af et Ag seront tangentes en ces points. En effet, supposons que le point B coïncide avec le point N, ce qui arrive quand N se trouve en f, point de rencontre de HK

(*) HM est tangente en H à cause de la proposition VII. Ensuite les quatre droites HF, HL, HK, HA forment, par construction, un faisceau harmonique coupé en P, T, N, A par la transversale PA; donc on a la relation

$$\frac{1}{PA}+\frac{1}{PT}=\frac{2}{PN},$$

comme l'indique le texte de la proposition.

(*Note du traducteur.*)

avec la courbe. Alors l'équation ci-dessus $\frac{1}{PB} \mp \frac{1}{PC} = \frac{2}{PN}$ devient $\frac{1}{PC} = \frac{1}{PN}$. Donc les points B et C coïncident en un seul, et par conséquent la droite qui joint ce point au point A est tangente à la courbe en ce point même. D'autre part, si la tangente Af est donnée, la droite HK doit passer par le point de contact f, car on a dans ce cas PB = PC, et, par suite, les points B, C, N coïncident.

27. *Corollaire III.* — Si HK ne coupe la courbe qu'au point H, on ne pourra mener du point A que deux tangentes à la courbe. En général, d'un point A d'une courbe du troisième degré, on ne peut mener à la courbe que quatre tangentes telles que AF, AG, Af, Ag. Car si l'on pouvait en mener une cinquième Aφ, la droite HK devrait passer par ce point φ, et l'on aurait ainsi quatre points situés sur la même transversale : ce qui est absurde.

28. PROPOSITION XIII. — *Si d'un point d'une courbe du troisième degré on mène quatre tangentes à la courbe, les cordes de contact se couperont sur la courbe, et toute transversale, issue du point donné, sera divisée harmoniquement par la courbe et par deux quelconques des cordes de contact passant par les quatre points de tangence.*

Soient A (*fig.* 8) le point donné, AF, AG, Af, Ag les tangentes aux points F, G, f, g. Joignons FG et fg, qui sont rencontrées en P et N par la transversale ABC, issue du point A; NC sera divisée harmoniquement en B et P, et l'on aura la relation

$$\frac{NC}{NB} = \frac{CP}{PB}.$$

(*) En effet, Fg coupe la courbe en R, point de contact de la tangente MR, issue du point M où la tangente en A coupe la courbe (proposition VII), et Gf coupe la courbe au même point, en vertu de la même proposition. Le même raisonnement s'applique au point L.

(*Note du traducteur.*)

Ceci est une conséquence du corollaire II de la proposition XII (par la réciproque). Les cordes de contact FG, fg se rencontrent en H sur la courbe, d'après le même corollaire, et de même les cordes Ff, Gg, Fg et Gf se coupent deux à deux sur la courbe aux points E et R (*). On voit aussi que MA, ME, MR, MH sont quatre tangentes aux points A, E, R, H, issues du point M. Donc, en vertu du théorème, les cordes de contact AE et HK, AR et HE, AH RE se coupent deux à deux sur la courbe.

Remarque du traducteur. — La figure représente un quadrilatère complet, dont les six sommets s'appuient sur la courbe, et le théorème exprime que *quand un quadrilatère satisfait à cette condition, les tangentes à la courbe, menées par deux sommets opposés, se coupent sur cette courbe.*

C'est la généralisation d'un théorème analogue dans les courbes du deuxième degré (*Aperçu historique*, page 149).

29. *Corollaire.* — Les droites HK, HB, HP, HC forment un faisceau harmonique. Donc, si les droites HB et HC coupent la courbe en b et c, les points A, b, c seront en ligne droite. En effet, si Ab coupe la courbe en b et c', HF en p et HK en n, on aura (proposition XII)

$$\frac{nc'}{nb} = \frac{pc'}{pb};$$

mais si b et c'' sont les points où Ab coupe le faisceau harmonique, on a

$$\frac{nc''}{nb} = \frac{pc''}{pb};$$

donc les points c, c' et c'' coïncident, et le corollaire est démontré.

30. Proposition XIV. — *D'un point quelconque* A *d'une courbe du troisième degré, qui a un point double en* O, *soient menées* AF *et* AG *tangentes en* F *et* G, *la*

corde de contact FG *coupera la courbe en* H ; *qu'on joigne* OH *et qu'on mène par le point* A *une transversale quelconque* AB *qui coupe la courbe en* B *et* C, *la droite* FG *en* P *et la droite* OH *en* N. *La droite* NP *sera divisée harmoniquement aux points* B *et* C, *et l'on aura la relation*

$$\frac{\mathrm{PB}}{\mathrm{PC}}=\frac{\mathrm{BN}}{\mathrm{NC}}.$$

En effet, joignons AO qui coupe FG en p et la tangente HL en t; puisque O est un point double, l'équation de la proposition IV donne

$$\frac{2}{p\mathrm{O}}+\frac{1}{p\mathrm{A}}=\frac{2}{p\mathrm{A}}+\frac{1}{pt};$$

d'où

$$\frac{1}{p\mathrm{A}}+\frac{1}{pt}=\frac{2}{p\mathrm{O}}.$$

Ainsi pA est divisée harmoniquement en t et O. Donc les droites Hp, Ht, HO, HA forment un faisceau harmonique. Si PA rencontre la tangente LH en T, on a (*proposition IV*)

$$\frac{1}{\mathrm{PC}}+\frac{1}{\mathrm{PB}}+\frac{1}{\mathrm{PA}}=\frac{2}{\mathrm{PA}}+\frac{1}{\mathrm{PT}},$$

d'où

$$\frac{1}{\mathrm{PC}}+\frac{1}{\mathrm{PB}}=\frac{1}{\mathrm{PA}}+\frac{1}{\mathrm{PT}}.$$

Mais le faisceau harmonique, coupé par la transversale PA, donne la relation

$$\frac{1}{\mathrm{PA}}+\frac{1}{\mathrm{PT}}=\frac{2}{\mathrm{PN}};$$

donc on a

$$\frac{1}{\mathrm{PC}}+\frac{1}{\mathrm{PB}}=\frac{2}{\mathrm{PN}},$$

et conséquemment,

$$\frac{\mathrm{PB}}{\mathrm{PC}}=\frac{\mathrm{BN}}{\mathrm{NC}}.\qquad \text{C. Q. F. D.}$$

31. *Corollaire.* — Si la tangente HL rencontre en Z la droite GZ parallèle à AH et qu'on prenne GV = 2GZ, la droite HV passera par le point double de la courbe, si elle en a un (*).

Si une droite G*ra* coupe AH et HR en *a* et *r*, les droites *r*A et R*a* se couperont en *m* sur la droite H*m* qui fait partie du faisceau harmonique et qui passe par le point double (*Géom. sup.*).

32. PROPOSITION XV. — *Si d'un point d'une courbe du troisième degré on mène deux tangentes, et que d'un autre point de la courbe on mène des droites au point de contact des deux tangentes, ces droites couperont la courbe en deux nouveaux points, et les tangentes en ces points se couperont sur la courbe.*

Soient A (*fig.* 10) le point donné; AF et AG les tangentes en F et G; P un autre point de la courbe.

Soient menées les droites PF, PG qui coupent la courbe aux points K et L. Les tangentes en K et en L se couperont sur la courbe, en un point B, qu'on détermine en menant en P la tangente PC, sécante en C, et en joignant AC qui coupe la courbe au point cherché B. En effet, les points F, P, K étant en ligne droite, et les tangentes en F et P coupant la courbe en A et C, il s'ensuit que la tangente en K passe par B (proposition VI). Et, par la même raison, la tangente en L passe aussi par le point B.

33. *Corollaire.* — Soient donc A et B (*fig.* 11) deux points quelconques d'une courbe du troisième degré; de chacun d'eux menons à la courbe quatre tangentes, savoir : AF, AG, A*f*, A*g*, et, BK, BL, B*k*, B*l*. Joignons FK et LG, FL et *g*K, F*l* et G*k*, G*l* et F*k*; ces huit droites se

---

(*) Car la transversale GZ, étant parallèle à l'une (AH) des droites du faisceau harmonique qui a son sommet en H, doit être coupée par les trois autres en deux segments GV et VZ égaux entre eux.

(*Note du traducteur.*)

couperont, deux à deux, sur la courbe, aux points P, Q, q, p; et, si l'on mène les tangentes en ces quatre points, elles iront toutes concourir au point C où la transversale AB rencontre la courbe. Donc encore, si l'on a trois points d'une courbe du troisième degré en ligne droite, et que de chacun d'eux on mène quatre tangentes à la courbe, la droite qui joindra deux quelconques des points de contact coupera la courbe en l'un des autres points de contact, et l'on aura toujours quatre droites concourantes en un même point de contact.

Remarque du traducteur. — 1°. Il résulte du corollaire, n° 33, combiné avec la proposition VI, n° 7, que les trois points P, k, f sont en ligne droite. On a donc ce théorème :

Une courbe du troisième degré étant composée d'une branche infinie et d'un ovale, si, par trois points A, B, C *pris en ligne droite sur la branche infinie, on mène les tangentes à l'ovale, on aura six points de contact distribués, trois par trois, dans deux régions distinctes de l'ovale; et si l'on joint par des cordes les trois points de contact de chaque région, on formera deux triangles* qLG, FKp *dont les côtés iront se couper, deux à deux, sur la branche infinie, en trois points* f, K, P, *situés en ligne droite.*

Ces triangles sont donc *homologiques*, et l'on en conclut, d'après une propriété bien connue due à Desargues, que leurs sommets sont placés, deux à deux, sur trois droites concourantes en un même point. Ces droites pq, LK, GF ne sont autre chose que les cordes de contact relatives aux trois points donnés A, B, C. On a ainsi une démonstration très-simple du théorème suivant, énoncé par M. Chasles (*Nouvelles Annales de Mathématiques,* année 1854), et dont M. Padula a donné une solution analytique :

Une courbe du troisième degré étant composée d'une branche infinie et d'un ovale, si par trois points de la *branche infinie on mène les tangentes à l'ovale, les trois cordes de contact passent par un même point.*

Je ferai remarquer qu'on pourrait encore déduire ce théorème du précédent, en s'appuyant sur la proposition 359 de la *Géométrie supérieure*. Le théorème de Maclaurin donne aussi, au moyen d'un raisonnement entièrement semblable à celui qui précède, un second théorème analogue à celui de M. Chasles, et qui est ainsi conçu :

Une courbe du troisième degré étant composée d'une branche infinie et d'un ovale, si l'on prend trois points en ligne droite sur la branche infinie, et que par l'un d'eux on mène deux tangentes à l'ovale, tandis que par les deux autres on mène, respectivement, deux tangentes à la branche infinie, les trois cordes de contact ainsi déterminées passent par un même point.

2°. La *fig.* 11 représente un hexagone inscrit qLGpKF; on a donc ce théorème :

Si un hexagone a ses six sommets et deux des trois points de concours de ses côtés opposés sur une courbe du troisième degré, le troisième de ces points de concours est aussi sur la courbe.

C'est une extension du théorème de Pascal sur l'hexagone inscrit aux coniques [*Aperçu historique*, page 149 (*)]. Mais il n'a pas, dans la théorie des courbes du troisième ordre, la même portée que dans celle des coniques. Car, si pour ces dernières il exprime une relation générale entre six points *quelconques* de la courbe, c'est-à-dire un de plus qu'il n'en faut pour la déterminer, ici il n'établit de liaison qu'entre des points dont le nombre est tout juste suffisant

(*) Ce théorème a été présenté, pour la première fois, sous ce point de vue, par le général Poncelet dans le Mémoire déjà cité : *Analyse des transversales appliquées à la recherche des propriétés projectives des lignes et surfaces géométriques*, inséré dans le Journal mathématique de M. Crelle, tome VIII, année 1832, page 132.

pour déterminer la courbe, et qui sont, en outre, choisis dans des positions *très-particulières*.

34. Proposition XVI. — *Soient* F *et* G (fig. 10) *deux points d'une courbe du troisième degré tels, que les tangentes en ces points se coupent en* A *sur la courbe. D'un autre point quelconque* P *de la courbe, qu'on mène les droites* PF, PG *sécantes en* K *et* L; *si l'on joint* FL *et* GK, *ces droites se couperont sur la courbe. De plus, les tangentes en* K *et* L *et celles en* P *et* Q *se couperont, respectivement, sur la courbe en* B *et* C, *de telle manière que les trois points* A, B, C *seront en ligne droite.*

En effet, soient menées la tangente en P, qui coupe la courbe en C, et AC qui la rencontre en B; les droites BK, BL seront, en vertu de la proposition précédente, tangentes aux points K et L. Supposons que LF coupe la courbe en Q; si GK ne passe pas par ce point Q, elle coupera la courbe en un autre point q. Donc, puisque les trois points L, F, Q sont en ligne droite, et que les tangentes en L et F sont sécantes en B et A, il résulte de la proposition VII que la tangente en Q passera par C. De même, les points G, K, q étant en ligne droite, et les tangentes en G et K étant sécantes en A et B, la tangente en q passera par C. Les deux droites CQ, Cq sont donc toutes deux tangentes à la courbe, et comme elles sont issues du même point C, les points Q et q coïncident. S'il en était autrement, on pourrait (proposition VIII) mener du point C plus de quatre tangentes à la courbe. En effet, soient Af et Ag les tangentes en f et g issues du point A; joignons Lf et Lg qui coupent la courbe en m et n; les droites Cm et Cn seront tangentes en m et n. On aurait ainsi cinq tangentes issues du point C, savoir: CP, CQ, Cm, Cn, Cq; ce qui est en contradiction avec le corollaire III de la proposition XII.

35. *Corollaire I.* — Si le point P est donné, ainsi que deux points F et G, tellement choisis, que les tangentes en ces

points se coupent sur la courbe, on connaît le point de la courbe Q où vont concourir les cordes FL et GK. Si l'on mène par le point P une transversale quelconque PRV qui coupe la courbe en R et V, puis les droites QR, QV qui la rencontrent en *r* et *v*, les points P, *r*, *v* seront en ligne droite ; car on a vu que les tangentes en P et Q se coupent sur la courbe (*).

36. *Corollaire II.* — Si l'on prend quatre points F, G, K, L sur une courbe du troisième degré, de manière que les tangentes en F et G et celles en K et L se rencontrent, deux à deux, sur la courbe, les cordes de contacts inverses FK et GL, FL et GK se couperont aussi sur la courbe.

37. Proposition XVII. — *Soient* F *et* G *deux points d'une courbe du troisième degré* (fig. 10) *tels, que les tangentes en ces points se coupent sur la courbe, et quatre autres points* L, K, f, g, *tels, que les droites* LF *et* GK, Ff *et* Gg *se coupent, deux à deux, sur la courbe. Les droites* L*f et* gK, Lg *et* K*f se couperont aussi, deux à deux, sur la courbe.*

En effet, les tangentes en *f* et *g* et celles en K et L se coupent, deux à deux, sur la courbe, en vertu de la proposition XV (**). Donc, en appliquant le deuxième corollaire de la proposition XVI, le théorème est démontré.

38. Lemme. — *Trois droites* IC, IH *et* CH (fig. 12, Pl. V) *sont*

(*) La démonstration peut être complétée comme il suit. Quand le point A se meut sur la courbe, le point Q y demeure immobile, tant que P est un point fixe, puisque le point Q est le point de contact de la tangente menée du point C, lequel dépend uniquement de la position du point P. Si A se confond avec P, les lignes LF et GK coïncident entre elles et avec la corde de contact F′G′ relative au point P. Ainsi les points Q et P de la *fig.* 10 représentent ici les points H et A de la *fig.* 8, et ils jouissent de toutes les propriétés de ces derniers, notamment de celle énoncée dans le corollaire de la proposition XIII. Cette propriété démontre le théorème du corollaire I, n° 35.

(**) Le point R joue, à l'égard des deux *f* et *g*, le même rôle que P à l'égard de K et L. (*Notes du traducteur.*)

données de position, ainsi que trois points F, G, S *situés en ligne droite. On prend un point* Q *sur* IC; *on joint* QF *qui rencontre* IH *en* L, *et* QG *qui rencontre* HC *en* P; *on joint* FP, *puis* SL *qui coupe* FP *et* QP *en* K *et* N. *Ces points* K *et* N *seront sur deux droites déterminées.*

En effet, joignons IN, qui coupe GS en m, et par le point N menons parallèlement à FS, une droite qui coupe IC, IH et LQ en x, u, r; FG rencontre IC, IH et HC en a, b, h. Puisque

$$\frac{Nx}{Nr}=\frac{Ga}{GF} \text{ et } \frac{Nr}{Nu}=\frac{SF}{Sb},$$

on aura

$$\frac{Nx}{Nu}=\frac{ma}{mb}=\frac{Ga\,.\,SF}{GF\,.\,Sb}=\text{const.}$$

Le point m est donc déterminé et par suite la droite INm. On prouverait de même que le point k est déterminé de position.

39. *Corollaire.* — Si les points S et G coïncident (*fig.* 12 *bis*), le point m se confond avec le point G. Joignons donc IG qui coupe HC en D, et CF qui coupe HI en E; la droite DE sera le lieu de K, point de concours des droites GL et FP (*).

40. PROPOSITION XVIII. — *Soit* PGLFQK *un quadri-*

(*) Voici une démonstration de ce corollaire, directe et indépendante du lemme. Quatre droites FQ (*fig.* 12 *bis*) issues de F, ont leur rapport anharmonique égal à celui des quatre droites correspondantes GQ, issues de G, puisque ces droites se coupent, respectivement, sur IC. Donc quatre points L ont leur rapport anharmonique égal à celui des quatre points correspondants P. Donc le faisceau des droites FP, qui a son sommet en F, est homographique avec le faisceau des droites GL, qui a son sommet en G. Or ces deux faisceaux ont un rayon commun suivant FG (ce qui arrive quand le point Q est en a). Donc l'intersection K de deux rayons homologues décrit une droite qui passe en P et E, parce que les deux points sont eux-mêmes les intersections des rayons homologues GE, FC et FD, GI.

(*Note du traducteur.*)

latère complet inscrit (fig. 13), *dont les six sommets s'appuient sur une courbe du troisième degré dans les conditions indiquées à la proposition XVI. Qu'on mène les droites* IC, CH, HI *tangentes en trois des sommets* Q, P, L, *non situés en ligne droite. Enfin qu'on joigne* IG, *qui coupe en* D *la tangente* CH, et HF *qui coupe en* E *la tangente* CI. *Les points* D, K, E *seront situés sur une droite tangente à la courbe au point* K.

En effet, supposons que les droites QEL et FKP pivotent autour du pôle F, et les droites LGP et QKG autour du pôle G, tandis que les points Q, L, P glissent le long des tangentes QI, LI et PC; alors le point K se mouvra sur DE, en vertu du corollaire précédent. Supposons que les points Q, D, P, soient précisément les points de contact des tangentes QI, LI et PC, le point K sera lui-même un point de la courbe, en vertu de la proposition XV. Si les points Q, L, P éprouvent alors un déplacement infiniment petit le long des tangentes, ils ne cesseront pas de se trouver sur la courbe; le point K s'y trouvera aussi, et dans une position infiniment voisine de celle qu'il occupait. Il aura donc marché sur la courbe suivant la tangente : mais il n'a pas cessé d'appartenir à la droite DE; donc cette droite est précisément la tangente au point K.

41. *Corollaire I.* — De même, si les droites AF et AG, tangentes en F et G, rencontrent en M et N la droite IH tangente en L, la droite MP coupera en *d* la tangente AG, et la droite QN coupera en *e* la tangente AF; la droite *de* passera par K et touchera la courbe en ce point. Les quatre points D, *d*, *e*, E seront donc sur une même droite.

Remarque du traducteur. — Ce corollaire donne lieu au théorème suivant :

Étant donné un quadrilatère complet, dont les six sommets s'appuient sur une courbe du troisième degré, si l'on mène les tangentes en quatre de ses sommets, choisis de *manière que trois ne soient pas en ligne droite, on formera un quadrilatère circonscrit dont les diagonales rencontreront la courbe aux points où se croisent les côtés opposés du quadrilatère inscrit.*

C'est encore la généralisation d'un théorème relatif aux coniques.

42. *Corollaire II.* — Deux points quelconques C et B étant pris sur la courbe, si de chacun d'eux on mène deux tangentes, savoir · CQ et CP du point C, BL et BK du point B, tangentes qui se coupent deux à deux aux points I, H, E, D; alors il arrivera que les droites LQ et EH, LP et ID se couperont deux à deux sur la courbe aux points F et G. Et les tangentes en F et G se couperont aussi sur la courbe en un point A de la droite BC. (Ceci résulte des propositions XVI et XVIII.)

43. *Corollaire III.* — Étant donnés trois points appartenant à une courbe du troisième degré et situés en ligne droite, ainsi que deux tangentes issues de chacun d'eux, on peut, en vertu de la proposition XVIII, *déterminer* six points de contact. Soient A, B, C trois points de la courbe situés en ligne droite, et AM, AN, BMI, BDE, CD, CE, six tangentes issues, respectivement, de ces trois points, et se coupant mutuellement, comme l'indique la figure, aux points M, N, *e*, *d*; H, D, *h*, *c*; I, E, *n*, *m*. Joignons N*e*, M*d*, ID, EH, *mh* et *nc*; ces droites couperont, respectivement, les tangentes CI, CD, AN, AM, BH et BE aux points de contact Q, P, G, F, L et K. La construction de la courbe est donc déterminée. Cependant le problème admet plusieurs solutions, c'est-à-dire qu'il y a plusieurs courbes du troisième degré qui passent par les trois points A, B, C et qui touchent les six droites données; ces courbes sont en nombre déterminé. En effet, qu'on mène les droites N*e*, M*d*, ID, EH, *nc* et *mh*, qui coupent en *p*, *q*, *f*, *g*, *l*, *k* les tangentes CD, CE, AM, AN, BM et BD. La courbe du

troisième degré satisfera aux conditions du problème en touchant les droites CD et CE, soit en P et Q, soit en *p* et *q*; les droites AM et AN, soit en F et G, soit en *f* et *g*; et les droites CD et CE, soit en L et K, soit en *l* et *k*. Il est donc prouvé qu'il y a plusieurs courbes du troisième degré qui satisfont aux conditions proposées, mais elles sont en nombre déterminé, et par conséquent le problème est lui-même déterminé (*).

44. *Corollaire IV*. — Étant donnés deux points A et B d'une courbe du troisième degré, ainsi que quatre tangentes AM, AN, BM et BD et trois de leurs points de contact F, G, L, on connaît tout de suite le quatrième K, où la tangente BD touche la courbe. En effet, les droites N*e* et LF concourent en Q et la droite QG coupe la tangente BD au point K où celle-ci coupe la courbe. On connaît aussi P, point de concours des droites LG et M*d*. Remarquons que ce point P est aussi le point de concours des droites M*d* et FL, c'est-à-dire qu'il est nécessairement le point de concours commun des trois droites LG, M*d* et FK. En effet, soit M*ed*N un quadrilatère circonscrit quelconque; soient pris les points Q et P sur les diagonales N*e* et M*d*; la droite QFL coupera les côtés opposés M*e* et MN en F et L; PL coupera le côté N*d* en G, et QG coupera le côté *de* en K; et il résulte de ce qui précède (proposition XVI) que les points F, L, P sont en ligne droite (**). Il est donc prouvé que la condition im-

(*) Le problème admet huit solutions différentes. (*Note du traducteur.*)

(**) On peut démontrer plus directement que les points F, K, P sont en ligne droite, ainsi qu'il suit. Soit Q le point de rencontre de la courbe par la droite LF qui joint deux points de tangence, pris dans les deux systèmes A et B. Si l'on joint QG, cette droite coupera en K la tangente donnée BK, et ce point K sera le point de contact de BK, puisque, d'après la proposition XVI, QG et BK doivent se couper sur la courbe au point de tangence de cette dernière droite, et la même proposition prouve que les cordes LG et FK se coupent en P sur la courbe. Donc, etc. (Ici, c'est le point Q qui joue le rôle du point P de la proposition XVI, et réciproquement.)
(*Note du traducteur.*)

posée aux trois droites LG, M*d* et FK de passer par un même point n'implique aucune contradiction et qu'elle ne rend pas impossible la solution du problème.

45. PROPOSITION XIX. — *Soient* D, E, F (fig. 14) *trois points d'une courbe du troisième degré situés en ligne droite et tels, que les trois tangentes menées en ces points soient parallèles. Soit pris sur* DF *le point* P *tel, que* 2 PF *soit la moyenne harmonique entre* PD *et* PE. *Toute transversale issue du point* P *coupera la courbe en* f, d, e *de telle manière qu'on aura toujours* 2 Pf *moyenne harmonique entre* Pd et Pe. *L'énoncé suppose d'ailleurs que les points* d *et* e *sont d'un même côté du point* P, *et* f *du côté opposé.*

En effet, si les tangentes DK, EL, FM coupent *df* en K, L, M, on aura (*voir* l'Introduction, n° 5)

$$\frac{1}{Pf}-\frac{1}{Pd}-\frac{1}{Pe}=\frac{1}{PM}-\frac{1}{PK}-\frac{1}{PL}.$$

Soit menée Q*q*, parallèlement aux tangentes, par le point Q qui, avec le point P, divise harmoniquement le segment FD, de sorte qu'on ait

$$\frac{PE}{EQ}=\frac{PD}{DQ},$$

et supposons que Q*q* coupe *fd* en *q*, on aura

$$\frac{2}{Pq}=\frac{1}{PK}+\frac{1}{PL}.$$

Le second membre de l'équation ci-dessus devient donc égal à $\frac{1}{PM}-\frac{2}{Pq}$. Mais on a

$$\frac{Pq}{PM}=\frac{PQ}{PF},$$

et, par hypothèse,

$$2\,PF=PQ,$$

d'où

$$2\,PM=Pq.$$

Donc le second membre de l'équation est égal à

$$\frac{1}{\mathrm{PM}} - \frac{1}{\mathrm{PM}} = 0\,;$$

donc

$$\frac{1}{\mathrm{P}f} = \frac{1}{\mathrm{P}d} + \frac{1}{\mathrm{P}e}\,;$$

donc $2\mathrm{P}f$ est moyenne harmonique entre $\mathrm{P}d$ et $\mathrm{P}e$.

C. Q. F. D.

46. *Corollaire I.* — Joignons $\mathrm{D}d$ et $\mathrm{E}e$ qui se coupent en V; les droites VQ et $\mathrm{F}f$ seront parallèles, et si r est le point de rencontre de VQ et de fd, on aura

$$\mathrm{P}f = \frac{1}{2}\mathrm{P}r.$$

En effet, PD est divisée harmoniquement en E et Q, par hypothèse ; donc $\mathrm{P}d$ est aussi divisée harmoniquement en e et r; donc

$$\frac{2}{\mathrm{P}r} = \frac{1}{\mathrm{P}d} + \frac{1}{\mathrm{P}e} = \frac{1}{\mathrm{P}f}\,; \qquad \mathrm{P}f = \frac{1}{2}\mathrm{P}r\,;$$

et, comme

$$\mathrm{PF} = \frac{1}{2}\,\mathrm{PQ}\,,$$

il s'ensuit que $\mathrm{F}f$ est parallèle à VQ.

47. *Corollaire II.* — De même, si l'on prend sur la droite DF un point p tel, que $2p\mathrm{D}$ soit la moyenne harmonique entre $p\mathrm{E}$ et $p\mathrm{F}$, toute transversale, issue du point p, coupera la courbe en trois points tels, que le segment intercepté par la courbe sur cette transversale d'un côté du point p sera toujours égal à la moitié de la moyenne harmonique des deux segments interceptés de l'autre côté du point p.

48. Lemme. — *Par le centre de gravité d'un triangle soit menée une transversale qui rencontre en trois points ses trois côtés. Le segment intercepté sur cette droite d'un*

côté du centre de gravité sera toujours égal à la moitié de la moyenne harmonique des deux segments situés du côté opposé.

Soit P (*fig.* 15) le centre de gravité du triangle VTZ, dont les côtés sont coupés en F, D, E, par la transversale PF; il faut prouver qu'on a

$$\frac{1}{PF} = \frac{1}{PD} + \frac{1}{PE}.$$

En effet, par le point P menons, parallèlement au côté VZ, la droite MPL qui coupe les côtés VT et ZT en L et M et qui coupe en N la droite VN parallèle au côté ZT. On a

$$MP = PL \quad \text{et} \quad TL = 2\,VL.$$

Les triangles semblables TLM, VLN donnent donc

$$LM = 2\,LN,$$

d'où

$$LN = LP \quad \text{et} \quad PN = 2\,PM,$$

d'où

$$PK = 2\,PF.$$

Mais de ce qu'on a PL = LN et VE parallèle à PN, il en résulte que les droites VP, VL, VN et VE forment un faisceau harmonique. Donc les points P, D, K, E sont en rapport harmonique, et l'on a la relation

$$\frac{1}{PD} + \frac{1}{PE} = \frac{2}{PK} = \frac{1}{PF},$$

qu'il s'agissait de démontrer.

49. Proposition XX. — *Soient données trois tangentes* VT, VX, TZ (fig. 16) *à une courbe du troisième degré, de telle manière que les trois points de contact se trouvent sur une même ligne droite passant par le centre de gravité du triangle* VTZ *formé par ces trois tangentes. Toute transversale menée par le centre de gravité, coupera la*

courbe, d'un côté en c, *et du côté opposé en* a *et* b, *de telle sorte qu'on aura toujours* 2 P c *moyenne harmonique entre* P a *et* P b.

En effet, supposons que P c rencontre les côtés du triangle VTZ en f, d, e, et coupe en k la droite VN parallèle au côté TZ ; on aura

$$2\,\mathrm{P}f = \mathrm{P}k,$$

d'où

$$\frac{1}{\mathrm{P}f} = \frac{2}{\mathrm{P}k} = (\text{en vertu du lemme})\,\frac{1}{\mathrm{P}d} + \frac{1}{\mathrm{P}e} = \frac{1}{\mathrm{P}a} + \frac{1}{\mathrm{P}b} - \frac{1}{\mathrm{P}c}$$

$$+ \frac{1}{\mathrm{P}f}\ (\text{en vertu du théorème démontré dans l'Introduction, n}^{\circ}\ 5).$$

Donc

$$\frac{1}{\mathrm{P}c} = \frac{1}{\mathrm{P}a} + \frac{1}{\mathrm{P}b};$$

c'est-à-dire que Pc est moitié de la moyenne harmonique des segments Pa et Pb. C. Q. F. D.

50. PROPOSITION XXI.—*Soient* V (fig. 17) *un point double d'une courbe du troisième degré;* VT *et* VZ *les tangentes en ce point, qui sont coupées en* T *et* Z *par la droite* TZ *tangente au point* F *qui est tel, qu'on a* FT=FZ. *Qu'on joigne* FV, *sur laquelle on prend* FP $= \frac{1}{3}$ FV. *Une transversale quelconque issue du point* P *coupera la courbe en* c *d'une part, et en* a *et* b *de l'autre, et* 2 P c *sera toujours la moyenne harmonique des segments* P a *et* P b, *c'est-à-dire qu'on aura la relation*

$$\frac{1}{\mathrm{P}c} = \frac{1}{\mathrm{P}a} + \frac{1}{\mathrm{P}b}.$$

En effet, puisque F est le milieu de TZ et que PF $= \frac{1}{3}$ FV, P est le centre de gravité du triangle VTZ. P se trouve d'ailleurs sur la droite des contacts FV. Donc le théorème résulte de la proposition XX.

51. *Corollaire I.* — Si l'on joint Va, Vb, Fc, le point P sera aussi le centre de gravité du triangle nVm, formé par ces trois droites, et aussi celui du triangle fhx formé par les tangentes en a, b, c. Si Va et Vb coupent Fc en m et n, on aura donc toujours

$$Fm = Fn \ (*).$$

52. *Corollaire II.* — La droite Vk parallèle à Fc divise la droite Pab harmoniquement au point k, et la droite kx, qui joint ce point k au point de concours x des tangentes en a et b, est parallèle à la tangente cy au point c (**).

53. *Corollaire III.* — Étant donnés les deux points a et c, où la courbe est coupée par une transversale quelconque issue du point P, le troisième point b est déterminé. En effet, les droites Va et Fc se coupent en m; si l'on prend,

---

(*) En effet, si l'on mène VK parallèle à Fc; puisque PV = 2PF, on aura Pk = 2 Pc; donc $\frac{2}{Pk} = \frac{1}{Pa} + \frac{1}{Pb}$; les droites VP, V$a$, V$k$, V$b$ forment donc un faisceau harmonique, coupé en nFm et ∞ par la transversale Fc parallèle au rayon VK; donc Fn = Fm. Ainsi P est le centre de gravité du triangle mnV. On voit aussi, par la réciproque de la proposition XX, que P est le centre de gravité du triangle formé par les trois tangentes en a, b, c; car, 1° ce point se trouve sur la droite qui joint les trois contacts, et 2° la transversale FPV, menée par ce point est telle, que 2 PF = PV, c'est-à-dire $\frac{1}{PF} = \frac{1}{PV} + \frac{1}{PV}$, ce qui exprime la propriété énoncée par la proposition XX.

(*Note du traducteur.*)

(**) Pour démontrer cette dernière proposition, considérons les quatre droites xP, xa, xk, xb, qui coupent la transversale cy en e, f, g, h. Ces quatre droites forment un faisceau harmonique, puisque les points P, a, k, b, sont en rapport harmonique. Donc les points h, e, f, g sont aussi en rapport harmonique. Mais $he = ef$, puisque P est le centre de gravité du triangle fhx, formé par les trois tangentes en a, b, c (*Corollaire I*); donc le point g est à l'infini. Donc xk est parallèle à cy. C. Q. F. D.

(*Note du traducteur.*)

de l'autre côté du point F, $Fn = Fm$, la droite Vn coupera Pa au point cherché b.

54. Proposition XXII. — *Par un point quelconque* P *soit menée une droite parallèle à l'asymptote des branches infinies de la courbe, et qui la rencontre en* a *et* c. *Soit menée par le même point une transversale quelconque qui coupe la courbe en* D, E, F, *et qui rencontre respectivement, en* k, m *et* l, *les tangentes menées aux points* a *et* c *et l'asymptote de la courbe. Si les points* D, E, k, l, m, *sont d'un même côté du point* P, *et* F *du côté opposé, on aura*

$$\frac{1}{Pl} = \frac{1}{PD} + \frac{1}{PE} - \frac{1}{PF} = \frac{1}{Pk} - \frac{1}{Pm},$$

relation dans laquelle on devra changer les signes des segments, quand ils se trouveront, par rapport à P, *dans des positions contraires à l'hypothèse qui est faite dans l'énoncé.*

Cette proposition est une conséquence du théorème démontré à l'Introduction, n° 5. Ce théorème donne, en effet,

$$\frac{1}{Pk} + \frac{1}{Pl} + \frac{1}{Pm} = \frac{1}{PD} + \frac{1}{PE} - \frac{1}{PF}.$$

55. *Corollaire I.* — Si PD passe par le point de concours des tangentes ak et cm, et qu'on prenne sur cette droite le segment PM égal à la moyenne harmonique entre les segments PD, PE, PF, on aura

$$\frac{1}{Pl} = \frac{3}{PM} - \frac{2}{Pk};$$

donc $\frac{2}{3}$ PM sera la moyenne harmonique des segments Pl et $\frac{1}{2}$ Pk. Et s'il arrive que les tangentes ak et cm concourent au point M (auquel cas $Pl = PM$), l'asymptote passera aussi par le point M.

56. *Corollaire II.* — Dans le cas de la proposition XIX (*fig.* 14), où les trois points de contact sont en ligne droite et les trois tangentes parallèles, que l'on prenne le point P comme il est dit dans cette même proposition. Si aPc est une parallèle à l'asymptote et si les tangentes ak et cm rencontrent PD en k et m, on aura

$$\frac{1}{Pl}=\frac{1}{Pk}+\frac{1}{Pm}$$

(parce que, dans ce cas,

$$\frac{1}{PD}+\frac{1}{PE}-\frac{1}{PF}=0,$$

en vertu de cette même proposition), c'est-à-dire que Pl est égal à la moitié de la moyenne harmonique entre Pk et Pm. Mais si les tangentes Ak et Cm concourent (comme dans la figure) au même point de Pd, on aura

$$Pl=\frac{1}{2}Pk.$$

Enfin la relation de la proposition XIX

$$\frac{1}{Pf}=\frac{1}{Pd}+\frac{1}{Pe},$$

qui sera ici (pour la transversale aPc)

$$\frac{1}{Pf}=\frac{1}{Pc}+\frac{1}{\infty},$$

prouve que $Pa=Pc$.

57. *Corollaire III.* — On peut faire une remarque semblable dans le cas de la proposition XX où trois points de contact D, E, F (*fig* 16) sont sur une même ligne droite qui passe par le centre de gravité P du triangle circonscrit VTZ. Si l'on prend la transversale aPc parallèle à l'asymptote, et s'il arrive alors que les tangentes en a et c soient toutes deux parallèles à la corde des contacts DP, l'asymptote sera

à l'infini (*), et la courbe aura, par conséquent, une branche parabolique.

58. *Corollaire IV.* — Les données étant les mêmes que dans la proposition XXI, soient (*fig.* 19) cPa une transversale parallèle à l'asymptote, k et m les points de rencontre de VF par les tangentes en a et en c; on a

$$\frac{1}{Pl}=\frac{1}{Pk}+\frac{1}{Pm}.$$

Si la courbe a un diamètre, ce diamètre passe nécessairement par le point double V et par le point F, milieu de la tangente TFZ. Prenons donc de F vers V, $FP=\frac{1}{3}FV$; menons cPa parallèle à l'asymptote, ainsi que la tangente ak qui coupe le diamètre en k. Puis, de l'autre coté du point P, prenons $Pl=\frac{1}{2}Pk$; la droite menée par le point l parallèlement à la tangente TZ, conjuguée au diamètre, sera l'asymptote de la courbe (**). Et si ak est parallèle au diamètre, la courbe a une branche parabolique.

(*) En effet, puisqu'on se trouve dans les conditions de la proposition XX, on a

$$\frac{1}{PD}+\frac{1}{PE}-\frac{1}{PF}=0,$$

et la relation générale de l'article 54 devient simplement

$$\frac{1}{Pl}=\frac{1}{PK}+\frac{1}{Pm}.$$

Or les points K et l sont, par hypothèse, à l'infini. Donc

$$Pl=\infty.$$

C. Q. F. D.

(**) En effet, dans ce cas, les points K et m coïncident, et la relation ci-dessus devient

$$\frac{1}{PL}=\frac{2}{PK},$$

d'où

$$Pl=\frac{1}{2}PK.$$

Donc aussi, si la tangente aK est parallèle au diamètre, l'asymptote est à l'infini.

L'asymptote peut se déterminer d'une manière plus générale par la règle suivante due à Newton. Supposons qu'une transversale quelconque PD,

59. Proposition XXIII. — *D'un point quelconque* D (fig. 20) *d'une courbe du troisième degré, soient menées deux transversales quelconques* DEI, DAB *qui coupent la courbe en* E *et* I, A *et* B. *Soient menées les tangentes* AK, BL *qui coupent* DE *en* K *et en* L. *Soit pris* DG *moyenne harmonique entre les segments* DE, DI; *puis* DH *moyenne harmonique entre les segments* DK, DL. *Soit encore pris* DV *moyenne géométrique entre* DG *et* DH; *soit menée, parallèlement à la tangente* DT, *la droite* VQ *qui coupe* DAB *en* Q. *Soit enfin* R *le point où la droite* DE *est coupée par le cercle osculateur au point* D; *le segment* QV *sera une moyenne proportionnelle entre les segments* HG *et* 2DR.

En effet, on a, en vertu du théorème demontré au n° 10 de l'Introduction,

$$\frac{QV^2}{DV^2.DR} = \frac{1}{DE} + \frac{1}{DI} - \frac{1}{DK} - \frac{1}{DL} = \frac{2}{DG} - \frac{2}{DH}$$

$$= \frac{2DH - 2DG}{DG.DH} = \frac{2HG}{DV^2},$$

parce que $DV^2 = DG.DH$ par construction. Donc

$$QV = HG.2DR. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

60. *Corollaire I.* — Supposons donc que sur DE on prenne Dr troisième proportionnelle aux segments HG et $\frac{1}{2}$ QV; puis, qu'on mène par le point r une perpendiculaire à DE: cette perpendiculaire coupera la normale DO (menée à la courbe en D) en un point O qui sera le centre du cercle osculateur. Si les points E, I, K, L, sont tous du même côté

---

menée par le point P, coupe la courbe en D, E, I. PB étant parallèle à l'asymptote, et M étant le point où cette asymptote coupe la transversale PD, on a, en vertu du théorème cité à la proposition IV et démontré dans l'Introduction,

$$\frac{1}{PK} + \frac{1}{PL} + \frac{1}{PM} = \frac{1}{PD} + \frac{1}{PE} + \frac{1}{PI},$$

relation qui détermine le point M. (*Note du traducteur.*)

du point D, DH sera plus grand ou plus petit que DG, selon que la moyenne harmonique entre les segments DK et DL interceptés par les tangentes, sera plus grande ou plus petite que la moyenne harmonique entre les segments DE et DI, interceptés par la courbe.

61. *Corollaire II.* — Si DA est la bissectrice de l'angle EDT, on aura

$$QV = DV \quad \text{et} \quad 2GH.DR = DV^2 = DG.DH.$$

Donc on a, dans ce cas,

$$\frac{HG}{DG} = \frac{DH}{2DR}.$$

62. *Corollaire III.* — Si la transversale DA tourne autour du pôle D, la droite DE restant la même et par conséquent aussi le segment HG, la différence des moyennes harmoniques DH et DG augmentera ou diminuera comme le carré de VQ. Car la quantité $\frac{QV^2}{HG}$ demeure constamment égale au double de la corde fixe 2DR.

63. *Corollaire IV.* — Si l'une des tangentes BL et AK (*fig.* 21), BL par exemple, est parallèle à DE; qu'on mène, parallèlement à la tangente DT, les droites GX et KZ qui rencontrent AB en X et Z; on aura

$$\frac{GX.KZ}{DG.DK.DR} = \frac{1}{DE} + \frac{1}{DI} - \frac{1}{DK} = (^*) \frac{2}{DG} - \frac{1}{DK} = \frac{2DK - DG}{DK.DK}.$$

Donc

$$\frac{GX.KZ}{DR} = 2DK - DG \quad \text{et} \quad \frac{2DK - DG}{KZ} = \frac{GX}{DR}.$$

(*) C'est l'équation ci-dessus $\frac{QV^2}{DV^2.DR} = \ldots$, dans laquelle on prend $\frac{GX}{GD}$ et $\frac{KZ}{KD}$ pour $\frac{QV}{DV}$, et où on fait $\frac{1}{DL} = \frac{1}{\infty} = 0$.

(*Note du traducteur.*)

Si la tangente AK devient, à son tour, parallèle à DE (ce qui peut arriver dans les courbes du troisième degré), il viendra

$$\frac{DG}{GX} = \frac{GX}{2DR},$$

car, dans ce cas,

$$\frac{GX^2}{DG^2 . DR} = \frac{2}{DG},$$

puisque

$$\frac{1}{DK} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Donc

$$GX^2 = DG . 2DR.$$

64. *Corollaire V.* — Si DE est parallèle à l'asymptote, et, par conséquent, ne coupe la courbe qu'en un seul point E autre que D, et si en même temps la tangente DL est parallèle à l'asymptote, on aura

$$\frac{KE}{KZ} = \frac{EY}{ER}.$$

En effet, on a dans ce cas (*fig.* 22)

$$\frac{2}{DG} = \frac{1}{DE} + \frac{1}{\infty};$$

donc

$$DG = 2DE \quad \text{et} \quad GX = 2EY.$$

L'équation

$$\frac{2DK - DG}{KZ} = \frac{GX}{DR}$$

devient ainsi celle qu'il s'agit de démontrer.

65. *Corollaire VI.* — Si D est un point d'inflexion, le point H coïncidera avec le point G, ceci résulte de la proposition IX, corollaire I; HG s'évanouissant, on aura DR infiniment grand. Donc la courbure au point d'in-

flexion est infiniment petite, comme on le prouve par d'autres considérations.

66. *Corollaire VII.*—Soient V (*fig.* 23) un point double ; DA une parallèle à l'asymptote.

Supposons que les droites VQ, HZ, parallèles à la tangente DT, coupent la droite DA en Q et Z ; que DV coupe l'asymptote en L, et que DH soit la moyenne harmonique entre DK et DL. On aura

$$\frac{2\,\mathrm{VH}}{\mathrm{HN}}=\frac{\mathrm{VQ}}{\mathrm{DR}}.$$

Si DA est bissectrice de l'angle TDV, on aura

$$\frac{\mathrm{DR}}{\mathrm{DV}}=\frac{\mathrm{DH}}{2\,\mathrm{VH}}\,(*).$$

67. Proposition XXIV. — *Soit* D (fig. 24) *un point quelconque d'une courbe du troisième degré ;* I *le point où la tangente en* D *rencontre la courbe. Soient* DS *le diamètre du cercle osculateur, lequel diamètre coupe la courbe en* A *et* B ; K *et* L *les points où* DI *est coupée par les tangentes en* A *et* B. *Qu'on prenne* DH *moyenne harmonique entre*

(*) L'équation

$$\frac{\mathrm{Q'V'^2}}{\mathrm{DV'^2.DR}}=\frac{1}{\mathrm{DE}}+\frac{1}{\mathrm{DI}}-\left(\frac{1}{\mathrm{DK}}+\frac{1}{\mathrm{DL}}\right)$$

devient ici, en remarquant que

$$\frac{\mathrm{Q'V'}}{\mathrm{DV'}}=\frac{\mathrm{QV}}{\mathrm{DV}}=\frac{\mathrm{HN}}{\mathrm{DH}}$$

et que

$$\mathrm{DE}=\mathrm{DI}=\mathrm{DV},\ \frac{\mathrm{QV}.}{\mathrm{DV}}.\frac{\mathrm{HN}}{\mathrm{DH}}.\frac{1}{\mathrm{DR}}=2\left(\frac{1}{\mathrm{DV}}-\frac{1}{\mathrm{DH}}\right)=\frac{2(\mathrm{DH}-\mathrm{DV})}{\mathrm{DV.DH}}=\frac{2\,\mathrm{HV}}{\mathrm{DV.DH}},$$

d'où

$$\frac{2\mathrm{HV}}{\mathrm{HN}}=\frac{\mathrm{VQ}}{\mathrm{DR}}.$$

Si DA est la bissectrice de l'angle TDV, QV = DV et HN = DH ; l'équation devient

$$\frac{2\,\mathrm{VH}}{\mathrm{DH}}=\frac{\mathrm{DV}}{\mathrm{DR}}.$$

(*Note du traducteur.*)

DH *et* DL, *puis* DV *tel, qu'on ait*

$$\frac{DV}{DI}=\frac{DH}{2DI-DH};$$

la variation de la courbure sera en raison inverse du rectangle SD.DV; *et si l'on joint* VS, *la variation du rayon de courbure sera proportionnelle à la tangente trigonométrique de l'angle* DVS.

En effet, d'après un théorème de l'Introduction, nº 12, la variation de la courbure est proportionnelle à

$$\frac{1}{DS}\times\left(\frac{1}{DK}+\frac{1}{DL}-\frac{1}{DI}\right)=\frac{1}{DS}\cdot\left(\frac{1}{DH}-\frac{2}{DI}\right)$$
$$=\frac{1}{DS}\cdot\frac{2DI-DH}{DH.DI}=\frac{1}{DS.DV}.$$

Quant à la variation du rayon de courbure, elle est, en vertu du théorème (13) de l'Introduction, proportionnelle à $\frac{DS}{DV}$, et, par conséquent, proportionnelle à la tangente de l'angle DVS. On a vu aussi dans l'Introduction comment on pourra déterminer la parabole osculatrice, c'est-à-dire la parabole ayant au point D même courbure et même variation de courbure que la courbe.

68. *Corollaire.* — Si la tangente BL (*fig.* 25) est parallèle à la tangente DT, on a

$$\frac{DI}{DV}=\frac{DK}{IK}\ (*).$$

(*) Car on a alors

$$\frac{2}{DH}=\frac{1}{DK}+\frac{1}{\infty}\quad\text{ou}\quad DH=2DK$$

et la relation

$$\frac{DV}{DI}=\frac{DH}{2DI-DH}$$

devient

$$\frac{DV}{DI}=\frac{2DK}{2(DI-DK)}=\frac{DK}{IK}.$$

C. Q. F. D.

(*Note du traducteur.*)

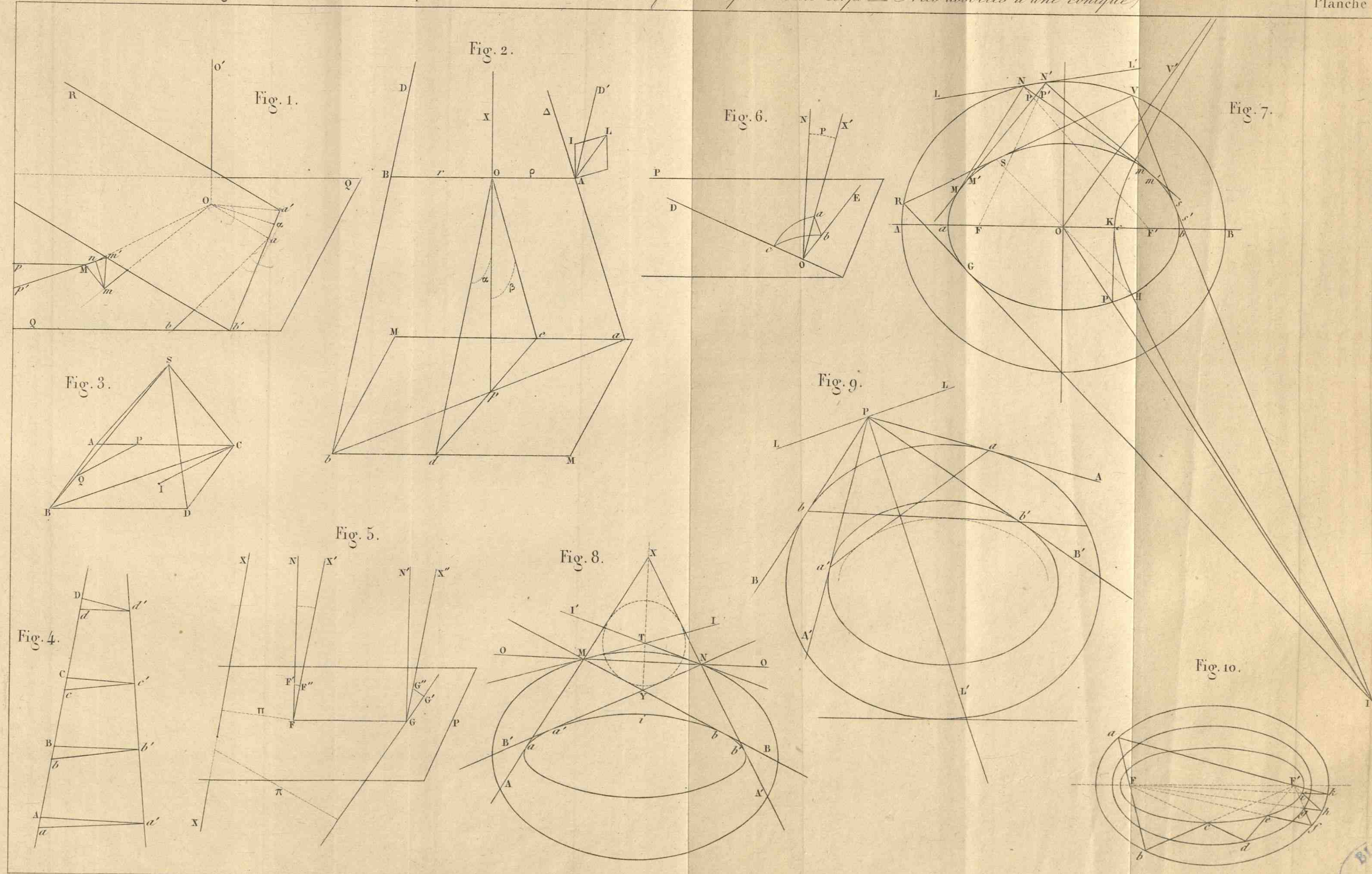
Si la seconde tangente AK est aussi parallèle à DT, on aura DV = DI (puisque DH est alors infini), et la variation de la courbure sera proportionnelle à $\frac{1}{\mathrm{DS}.\mathrm{DI}}$. Si, dans ce cas, DT est parallèle à l'asymptote de la courbe (*fig.* 26), la variation de la courbure est nulle. Donc, de même que la variation de la courbure est nulle à l'extrémité des axes des sections coniques, de même, dans les courbes du troisième degré, cette variation est nulle à l'extrémité des diamètres qui coupent à angle droit leurs cordes conjuguées.

Scolie. — Il existe encore plusieurs autres théorèmes relatifs aux tangentes et à la courbure des courbes du troisième degré. Soient, par exemple (*fig.* 27), F et G deux points tels, que les tangentes en ces points se coupent en A sur la courbe. Qu'on prolonge FG jusqu'à la rencontre de la courbe en H. Soit TAC la tangente en A. Qu'on fasse l'angle FAN = GAT de l'autre côté des droites FA, GA. Soit enfin N le point de rencontre de AN et de FG. Si les cercles osculateurs en F et G coupent respectivement la droite FG en B et b, on aura

$$\frac{\mathrm{GB}}{\mathrm{F}b}=\frac{\mathrm{NF}.\mathrm{FH}}{\mathrm{NG}.\mathrm{GA}}.$$

Etc.

FIN.



Legay imp. r. de la Bucherie, 1. Paris. *Mallet-Bachelier, éditeur.* *Dulos sc.*

Fig. 1.

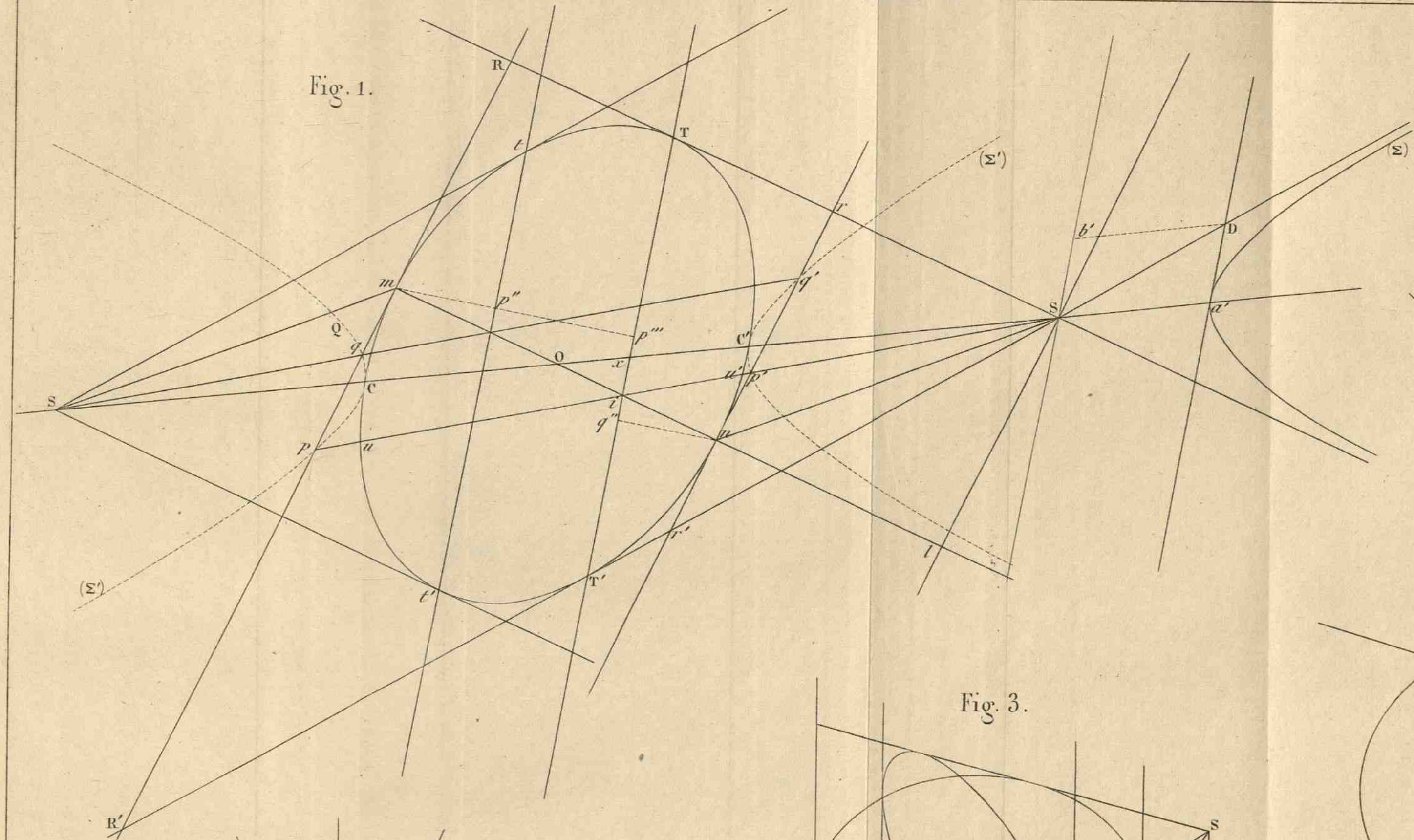


Fig. 2.

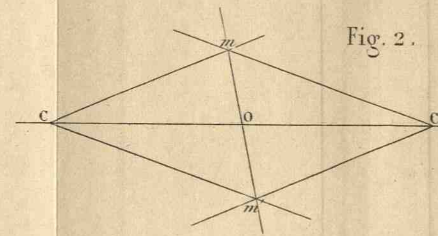


Fig. 3.

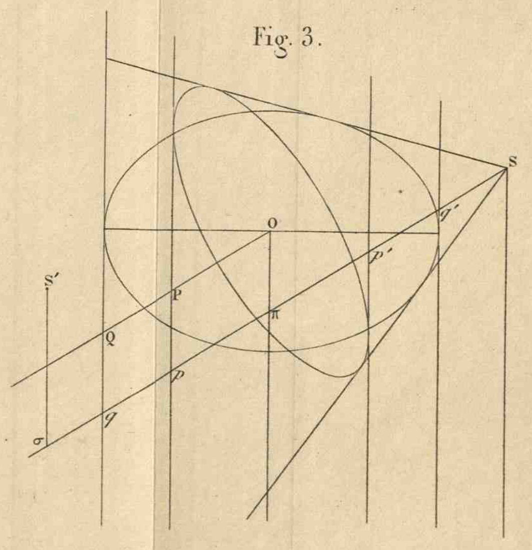


Fig. 4.

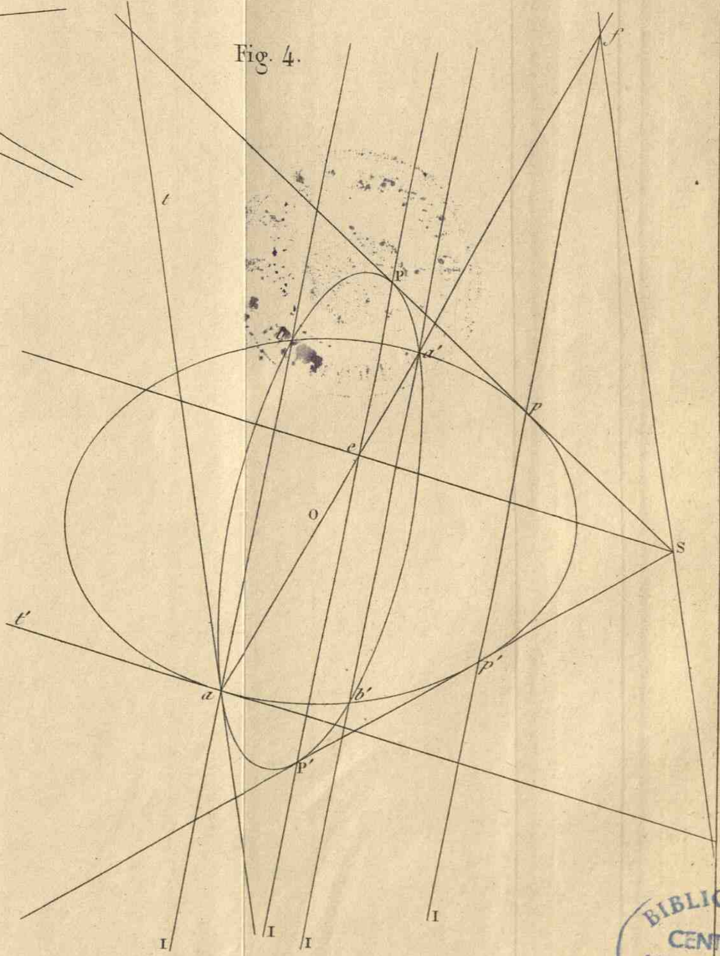


Fig. 5.

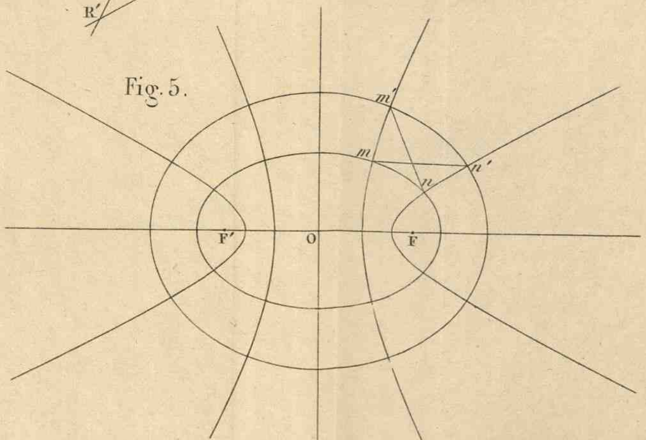


Fig. 1.

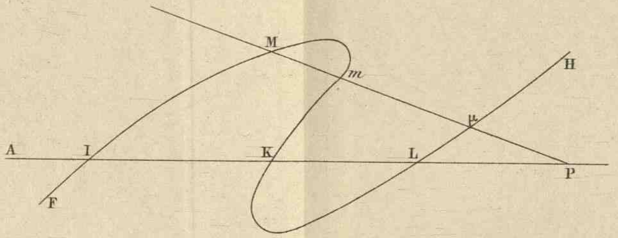


Fig. 2.

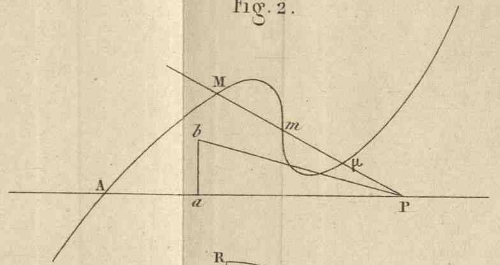


Fig. 3.

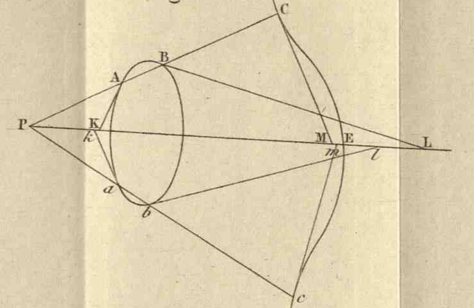


Fig. 4.

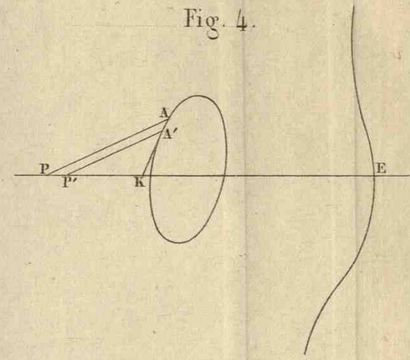


Fig. 6.

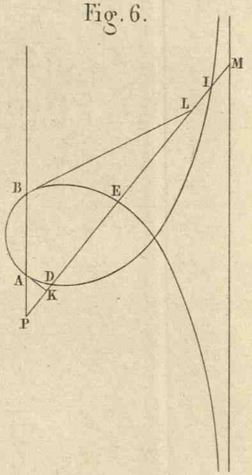


Fig. 7.

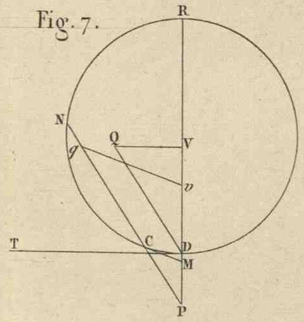


Fig. 8.

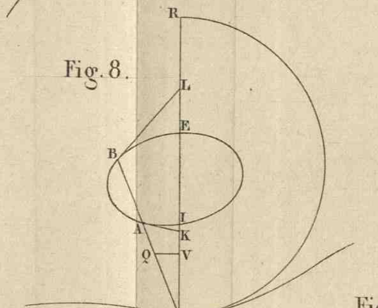


Fig. 9.

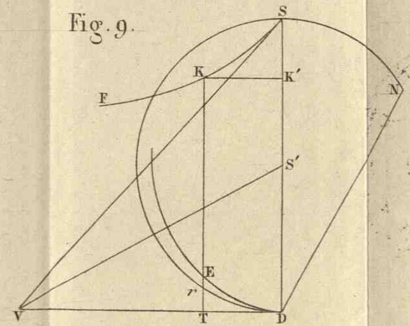


Fig. 5.

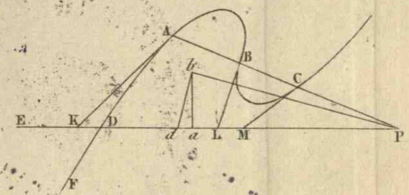


Fig. 12.

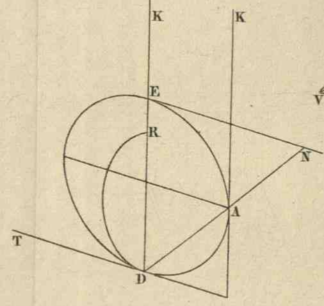


Fig. 11.

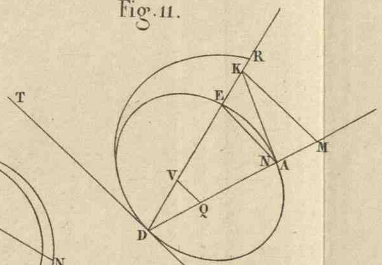


Fig. 10.

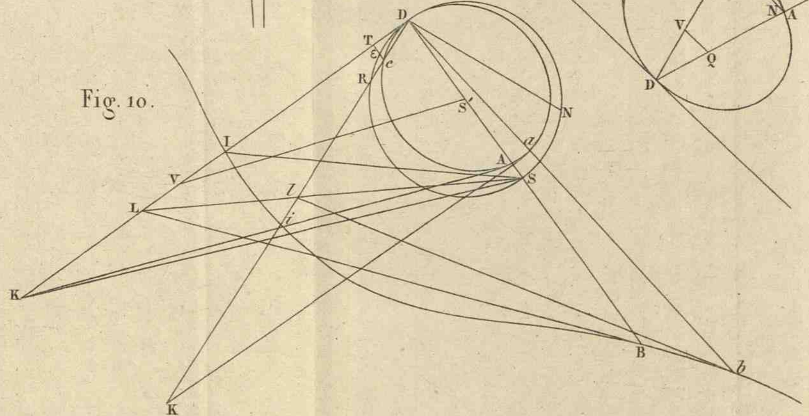


Fig. 13.

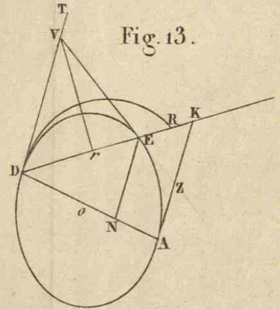


Fig. 14.

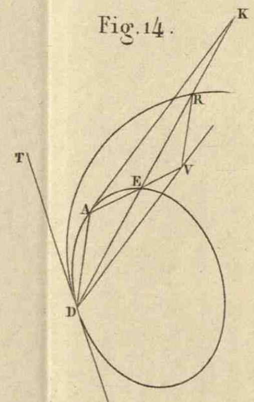


Fig. 15.

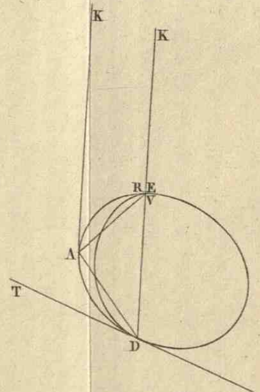
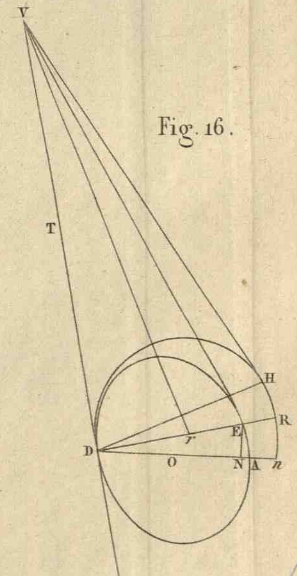
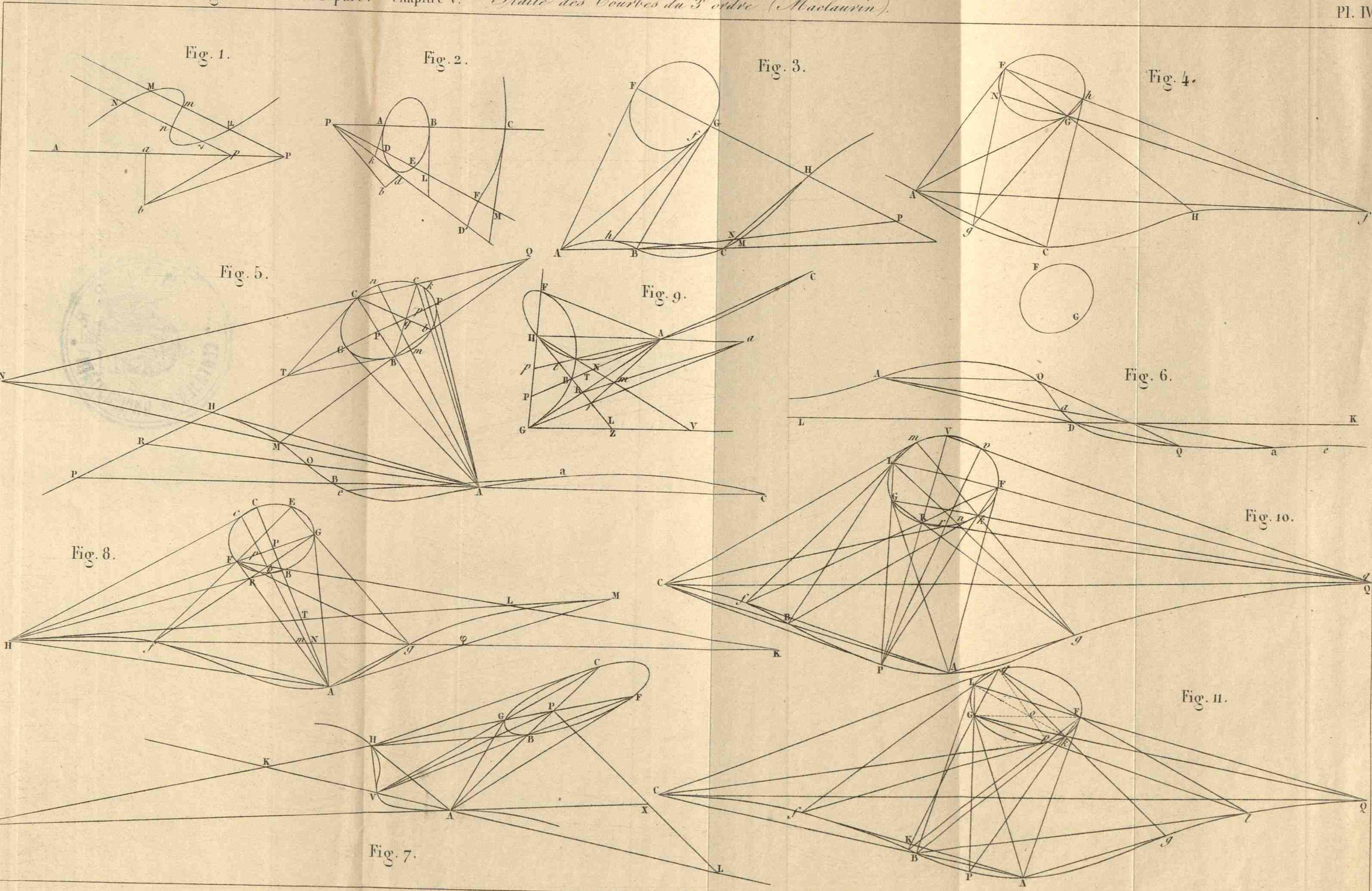
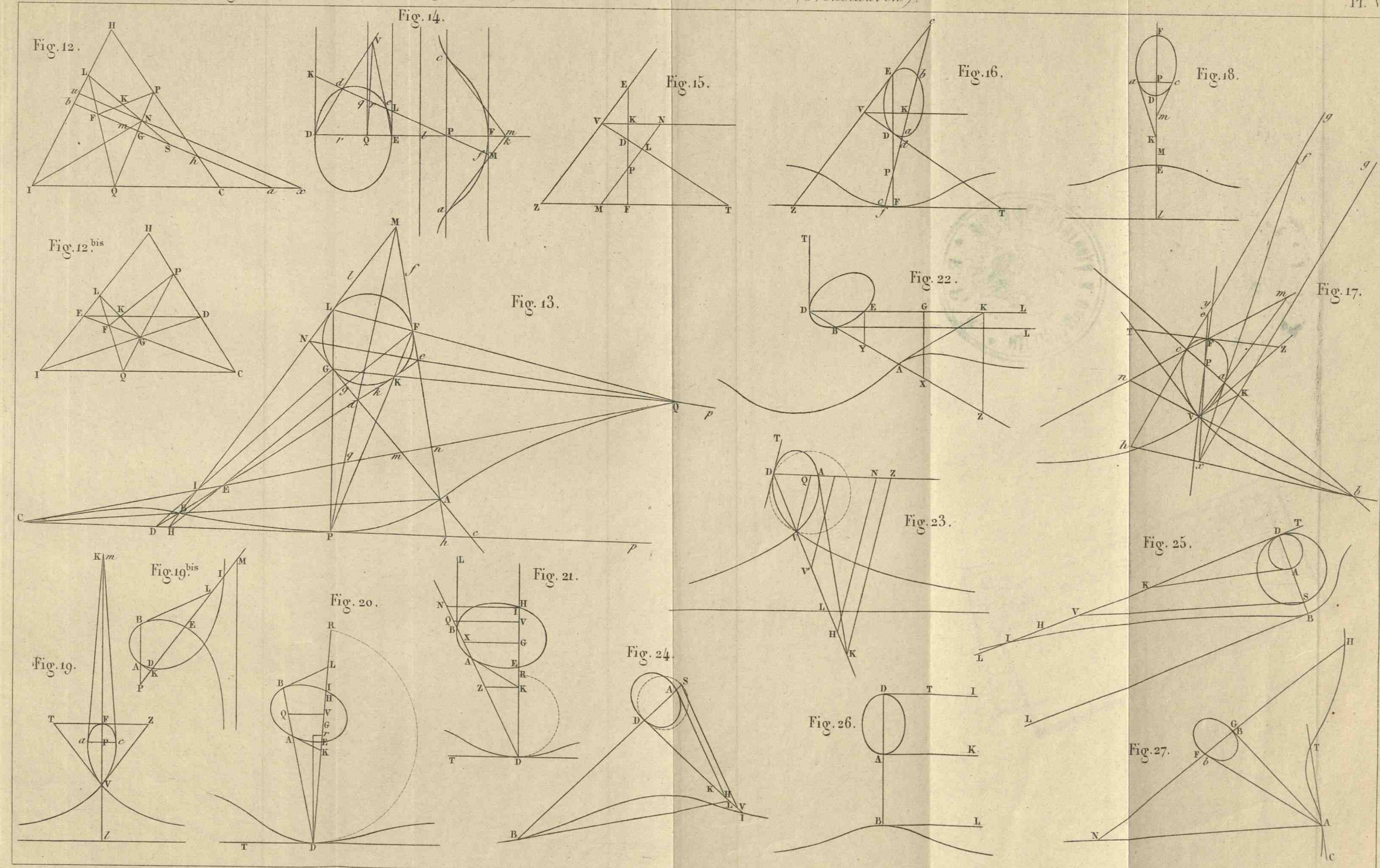


Fig. 16.





Mallet-Bachelier, éditeur. Dulos sc.



Mallet Bachelier, éditeur. *Dulos sc.*

Paris. — Imprimerie de MALLET-BACHELIER, rue du Jardinet, 12.

Paris. — Imprimerie de MALLET-BACHELIER, rue du Jardinet, 12.