

5676.

LEÇONS
SUR LES
SYSTÈMES ORTHOGONAUX
ET LES
COORDONNÉES CURVILIGNES.



1956

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS,
24634 Quai des Grands-Augustins, 55.

COURS DE GÉOMÉTRIE DE LA FACULTÉ DES SCIENCES.

LEÇONS

SUR LES

SYSTÈMES ORTHOGONAUX

ET LES

COORDONNÉES CURVILIGNES,

PAR

GASTON DARBOUX,

MEMBRE DE L'INSTITUT,

DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES ET PROFESSEUR DE GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE
A L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

TOME I.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1898

(Tous droits réservés.)

110916

PRÉFACE.

L'Ouvrage dont je publie aujourd'hui le premier Volume est consacré à l'exposition d'une théorie qui trouve son origine dans les travaux de Lamé, mais qui, dans ces derniers temps, a été l'objet d'un assez grand nombre de recherches.

Dans les *Leçons sur la théorie des surfaces*, j'avais déjà fait connaître, d'une manière incidente, différentes propriétés des systèmes triples orthogonaux et des coordonnées curvilignes; mais j'avais réservé le développement régulier et systématique des théories qui se rattachent à ce beau sujet pour le nouveau Traité dont je commence aujourd'hui la publication.

Mes collègues, MM. C. Guichard, professeur à l'Université de Clermont, et E. Cosserat, professeur à l'Université de Toulouse, ont bien voulu m'aider dans la correction des épreuves et me prêter leur dévoué concours pendant l'impression; je tiens à leur faire agréer, cette fois encore, mes bien vifs et bien sincères remerciements.

G. DARBOUX.

Paris, 21 novembre 1897.



LEÇONS

SUR LES

SYSTÈMES ORTHOGONAUX

ET LES

COORDONNÉES CURVILIGNES.

LIVRE I.

L'ÉQUATION DU TROISIÈME ORDRE.

CHAPITRE I.

LES FAMILLES DE LAMÉ. THÉORÈME DE DUPIN ET SA RÉCIPROQUE.

Équations aux dérivées partielles auxquelles satisfont les paramètres α, β, γ de trois familles orthogonales, considérés comme fonctions des coordonnées rectilignes x, y, z d'un point de l'espace. — Application du théorème de Cauchy : on peut déterminer un système triple orthogonal par la condition que les trois familles de surfaces qui le composent interceptent sur une surface donnée des courbes données assujetties à la condition de ne pas se couper mutuellement à angle droit. — Élimination de deux des trois paramètres. L'élimination de l'un d'eux conduit immédiatement au théorème de Dupin : « Les surfaces qui composent un système triple orthogonal se coupent mutuellement suivant leurs lignes de courbure. » — Réciproque de ce théorème : « Si l'on a deux familles de surfaces se coupant à angle droit, suivant des courbes qui soient lignes de courbure pour les surfaces de l'une des deux familles, il existe une troisième famille complétant le système orthogonal. » — Cette réciproque permet d'établir que le paramètre de toute famille faisant partie d'un système triple doit satisfaire à une équation aux dérivées partielles du troisième ordre, qui est à la fois nécessaire et suffisante, c'est-à-dire dont toute solution conduira à un système triple. — On donne le nom de *famille de Lamé* à toute famille qui fait partie d'un système triple orthogonal. — Pour former l'équation aux dérivées partielles du troisième ordre, dont l'existence a été reconnue dès 1866

par l'auteur, mais qui a été obtenue, pour la première fois, sous forme développée, par M. Cayley, on définit d'abord une opération différentielle $\varepsilon_u v$, et l'on établit quelques propriétés de ce symbole. — On établit ensuite, par un raisonnement nouveau, que toute la difficulté du problème des systèmes orthogonaux se ramène à l'intégration de l'équation du troisième ordre, que l'on écrit sous la forme d'un déterminant très simple du sixième ordre. — Vérification de résultats obtenus antérieurement par M. Bouquet, relativement aux familles représentées par une équation de la forme $u = \varphi(x) + \psi(y) + \chi(z)$, et par M. V. Puiseux, relativement à un système d'axes particulier. — Forme nouvelle et irrationnelle sous laquelle on peut mettre l'équation du troisième ordre, en introduisant les dérivées de la fonction H, définie par la relation

$$\frac{1}{H} = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

— Indications sommaires sur les *caractéristiques* d'une équation aux dérivées partielles ou d'un système d'équations aux dérivées partielles, dans le cas de trois variables indépendantes, et application au problème actuel. On peut toujours déterminer un système triple orthogonal par la condition que les surfaces (A), qui composent une de ses trois familles, coupent une surface (Σ) suivant des courbes données (C) et aient, suivant ces courbes, un contact du second ordre avec certaines surfaces (S), qui contiennent ces courbes, à moins que les courbes (C) ne soient des lignes de courbure des surfaces (S), ou que les surfaces (S) ne soient orthogonales à la surface (Σ). Dans ces deux cas d'exception, le problème devient impossible ou indéterminé.

1. Supposons les points de l'espace rapportés à un système d'axes rectangulaires Ox, Oy, Oz et considérons trois familles de surfaces obtenues en égalant à des constantes trois fonctions données α, β, γ de x, y, z . Pour que deux surfaces appartenant à des familles différentes se coupent partout à angle droit, il faudra évidemment que les trois fonctions α, β, γ , auxquelles nous donnerons le nom de *paramètres* des trois familles de surfaces, satisfassent identiquement aux trois conditions suivantes :

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} \frac{\partial \gamma}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial z} \frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \gamma}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \gamma}{\partial y} \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} \frac{\partial \alpha}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \alpha}{\partial z} \frac{\partial \beta}{\partial z} = 0, \end{cases}$$

qui constituent un système d'équations aux dérivées partielles propres à déterminer les fonctions α, β, γ .

Ce système n'est pas de ceux que l'on peut intégrer d'une manière complète. Nous en ferons connaître des solutions nombreuses, contenant des constantes, des fonctions arbitraires d'une variable en nombre quelconque, ou même une fonction arbitraire de deux variables accompagnée de plusieurs fonctions arbitraires d'une variable. Mais, si l'on veut conserver une terminologie qui a quelque chose d'un peu indéterminé, un théorème général de Cauchy permet de montrer que la solution générale du système (1) dépend en réalité de *trois fonctions arbitraires de deux variables*.

Remarquons, en effet, que, si l'on pose

$$(2) \quad \begin{cases} K_1 = -\frac{\partial\beta}{\partial x} \frac{\partial\gamma}{\partial x} - \frac{\partial\beta}{\partial y} \frac{\partial\gamma}{\partial y}, \\ K_2 = -\frac{\partial\gamma}{\partial x} \frac{\partial\alpha}{\partial x} - \frac{\partial\gamma}{\partial y} \frac{\partial\alpha}{\partial y}, \\ K_3 = -\frac{\partial\alpha}{\partial x} \frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y} \frac{\partial\beta}{\partial y}, \end{cases}$$

les formules (1) peuvent être résolues par rapport aux dérivées $\frac{\partial\alpha}{\partial z}$, $\frac{\partial\beta}{\partial z}$, $\frac{\partial\gamma}{\partial z}$ et nous donnent

$$(3) \quad \frac{\partial\alpha}{\partial z} = \sqrt{\frac{K_2 K_3}{K_1}}, \quad \frac{\partial\beta}{\partial z} = \sqrt{\frac{K_1 K_3}{K_2}}, \quad \frac{\partial\gamma}{\partial z} = \sqrt{\frac{K_1 K_2}{K_3}}.$$

Ces valeurs seront finies et déterminées tant qu'aucune des quantités K_1 , K_2 , K_3 ne se réduira à zéro.

Cela posé, supposons que l'on donne les valeurs α_0 , β_0 , γ_0 , fonctions de deux variables x et y , auxquelles se réduisent les fonctions α , β , γ pour une valeur déterminée de z , par exemple pour $z = 0$; supposons que ces valeurs aient été choisies de manière à n'annuler aucune des quantités K_1 , K_2 , K_3 et satisfassent d'ailleurs aux conditions bien connues de continuité et d'uniformité que nous négligeons d'énoncer. Les équations (3) détermineront, pour $z = 0$, des valeurs finies et déterminées pour les trois dérivées $\frac{\partial\alpha}{\partial z}$, $\frac{\partial\beta}{\partial z}$, $\frac{\partial\gamma}{\partial z}$; et, par suite, d'après le théorème général de Cauchy que nous venons de rappeler, il existera des fonctions α , β , γ qui satisferont au système (1) et se réduiront respectivement à α_0 , β_0 , γ_0 pour $z = 0$.

2. Cette proposition d'analyse s'interprète géométriquement de la manière suivante : donner les valeurs $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ de α, β, γ pour $z = 0$, c'est faire connaître les courbes suivant lesquelles le plan des xy est coupé par chacune des trois familles qui doivent composer le système orthogonal. Supposer qu'aucune des quantités K_1, K_2, K_3 n'est nulle, c'est admettre que ces courbes de section ne se coupent pas mutuellement à angle droit. On est donc en droit d'énoncer la proposition suivante :

On peut déterminer un système triple orthogonal par la condition que les trois familles de surfaces dont il doit se composer coupent un plan quelconque suivant trois familles de courbes, assujetties à la seule condition de ne pas se couper mutuellement à angle droit.

3. En substituant à l'une des variables indépendantes x, y, z une fonction quelconque θ de ces trois variables, on reconnaîtra que la proposition précédente peut être généralisée et qu'un système triple orthogonal est pleinement déterminé si l'on donne les sections, non plus par un plan, *mais par une surface quelconque*, des trois familles dont il se compose. Ici encore, la condition pour que le théorème de Cauchy soit applicable est que les courbes de section appartenant à des familles différentes ne se coupent pas mutuellement à angle droit.

4. Les remarques précédentes, simples conséquences du théorème général de Cauchy, nous indiquent, d'une manière nette, quel doit être le degré de généralité de la solution la plus étendue ; et l'on voit que, s'il était possible d'obtenir la solution complète, elle devrait avoir le degré de généralité d'une expression, dépendant de trois fonctions arbitraires de deux variables. Cette solution complète, nous l'avons déjà dit, est loin d'être connue ; mais l'étude du système fondamental (1) a conduit à différents résultats, que nous ferons connaître successivement.

On peut d'abord, comme on le fait en Algèbre et en Analyse, essayer de la méthode par élimination et tâcher de réduire l'intégration du système (1) à la détermination d'une seule fonction. Voici comment s'exprime à ce sujet J.-A. Serret dans un *Mémoire*

sur les surfaces orthogonales paru, en juin 1847, au *Journal de Liouville* (t. XII, p. 241).

« D'ailleurs, si l'on différencie les équations (1) par rapport à x, y, z autant que possible et de manière à n'avoir de dérivées que jusqu'à l'ordre p inclusivement, on aura, en comptant les équations (1), un nombre d'équations marqué par $\frac{p(p+1)(p+2)}{2}$ et le nombre des dérivées des quantités β et γ sera

$$\frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{3} - 2;$$

pour que l'élimination de ces dérivées soit possible, il faut que le premier nombre surpasse le second, ce qui donne

$$p = 6 \quad \text{ou} \quad > 6.$$

» Si l'on prend $p = 6$, on aura alors 168 équations entre lesquelles on pourra éliminer les dérivées de β, γ , et il restera deux équations aux dérivées partielles auxquelles devra satisfaire le paramètre α de toute surface susceptible de faire partie d'un système triple. Cette dernière circonstance de deux conditions auxquelles le paramètre α est assujéti permet de penser que le nombre des surfaces susceptibles de faire partie d'un système triple pourrait bien être assez limité. »

* La phrase qui termine cette citation montre combien était peu avancée la théorie des équations aux dérivées partielles en 1847. Étant données deux telles équations que doit vérifier une même fonction, il peut se faire qu'elles n'aient aucune solution commune ou bien une solution plus ou moins étendue. Pour apprécier le degré de généralité de cette solution, il suffit de différencier jusqu'à un certain ordre et d'examiner si quelques-unes des équations ainsi obtenues ne sont pas des conséquences de toutes les autres. Il y a là une étude qui a été entreprise dans ces derniers temps et a donné naissance à de nombreux travaux de MM. Méray, Riquier, Bourlet, Tresse et Delassus (1). Mais il est curieux de remarquer ici que J.-A. Serret aurait pu corroborer en apparence

(1) Voir en particulier :

RIQUIER, *Mémoire sur l'existence des intégrales dans un système différentiel quelconque et sur la réduction d'un semblable système à une forme linéaire*

sa conclusion en montrant que les deux équations du sixième ordre ne sont pas les seules auxquelles doit satisfaire la fonction α .

Si l'on donne, en effet, à p la valeur 7, par exemple, on aura cette fois 252 équations entre lesquelles il faudra éliminer 238 dérivées, ce qui laissera 14 équations d'ordre égal ou inférieur à 7. Or les deux équations du sixième ordre différenciées donneraient au plus 8 équations du sixième ou du septième ordre; de sorte qu'il faudrait leur adjoindre au moins 6 équations du septième ordre.

Nous laissons de côté tous ces calculs; car, dans le cas actuel comme dans beaucoup d'autres, et par suite de la forme particulière des équations qui composent le système (1), la méthode d'énumération pure et simple conduit à des résultats complètement erronés. Nous allons voir, en effet, que l'on peut ramener l'intégration du système (1) à celle d'une seule équation aux dérivées partielles du troisième ordre à laquelle doit satisfaire l'une des trois fonctions α , β , γ .

5. Deux des équations (1) déterminent les rapports mutuels des dérivées de β et peuvent être mises sous la forme suivante :

$$(4) \quad \frac{\frac{\partial \beta}{\partial x}}{\frac{\partial \gamma}{\partial y} \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial \gamma}{\partial z}} = \frac{\frac{\partial \beta}{\partial y}}{\frac{\partial \gamma}{\partial z} \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial z} \frac{\partial \gamma}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial \beta}{\partial z}}{\frac{\partial \gamma}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial y} - \frac{\partial \gamma}{\partial y} \frac{\partial \alpha}{\partial x}};$$

de sorte que la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction β existe est que l'équation aux différentielles totales

$$(5) \quad \left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial \gamma}{\partial x} & \frac{\partial \alpha}{\partial x} & dx \\ \frac{\partial \gamma}{\partial y} & \frac{\partial \alpha}{\partial y} & dy \\ \frac{\partial \gamma}{\partial z} & \frac{\partial \alpha}{\partial z} & dz \end{array} \right| = 0$$

soit complètement intégrable.

et complètement intégrable du premier ordre (Académie des Sciences, Mémoires des Savants étrangers, t. XXXII).

DELASSUS (E.), Extension du théorème de Cauchy aux systèmes les plus généraux d'équations aux dérivées partielles (Annales de l'École Normale, t. XIII, 3^e série, p. 421).

Ces travaux contiennent, d'ailleurs, toutes les indications bibliographiques nécessaires.

Cette équation est de la forme

$$L dx + M dy + N dz = 0;$$

et la condition pour qu'elle admette comme intégrales des surfaces composant une famille est, comme on sait, que l'on ait identiquement

$$L \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y} \right) + M \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z} \right) + N \left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x} \right) = 0.$$

Appliquant ici cette condition, nous trouvons la relation

$$(6) \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial z} \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial z^2} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2} - \frac{\partial \alpha}{\partial z} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial z} \right. \\ & \left. - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \gamma}{\partial x} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} + \frac{\partial \gamma}{\partial y} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2} \right) + \dots = 0, \end{aligned} \right.$$

les termes non écrits s'obtenant par des permutations circulaires effectuées sur x, y, z .

Les deux fonctions γ, α doivent donc satisfaire uniquement à la deuxième des équations (1) et à la précédente (6). Si l'on ajoute à cette dernière la relation identique

$$\left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial z} \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) \times \left[- \frac{\partial \alpha}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial \gamma}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2} \right) \right] + \dots = 0,$$

elle prend la forme plus simple

$$(7) \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial x} & \frac{\partial \gamma}{\partial x} & \delta_\alpha \frac{\partial \gamma}{\partial x} - \delta_\gamma \frac{\partial \alpha}{\partial x} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial y} & \frac{\partial \gamma}{\partial y} & \delta_\alpha \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \delta_\gamma \frac{\partial \alpha}{\partial y} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial z} & \frac{\partial \gamma}{\partial z} & \delta_\alpha \frac{\partial \gamma}{\partial z} - \delta_\gamma \frac{\partial \alpha}{\partial z} \end{vmatrix} = 0,$$

où l'on a introduit, pour abréger l'écriture, le symbole δ_{uv} défini par la relation

$$(8) \quad \delta_{uv} = \delta_v u = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z}.$$

On n'a donc plus qu'à déterminer les fonctions α, γ , satisfai-

sant à l'équation (7) et à l'équation

$$(9) \quad \delta_\gamma \alpha = \delta_\alpha \gamma = 0.$$

Cette dernière ne contient que les dérivées du premier ordre de α et de γ , tandis que l'équation (7) contient toutes les dérivées du second ordre de ces deux fonctions. Mais une propriété remarquable du symbole $\delta_u v$ va nous permettre d'éliminer de l'équation (7), soit les dérivées de second ordre de α , soit celles de γ .

On a, en effet, comme on le vérifie sans peine, l'identité

$$(10) \quad \frac{\partial}{\partial x} \delta_u v = \delta_u \frac{\partial v}{\partial x} + \delta_v \frac{\partial u}{\partial x};$$

et l'on déduit, par suite, de la différentiation de l'équation (9) les trois suivantes :

$$\delta_\gamma \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \delta_\alpha \frac{\partial \gamma}{\partial x} = 0,$$

$$\delta_\gamma \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \delta_\alpha \frac{\partial \gamma}{\partial y} = 0,$$

$$\delta_\gamma \frac{\partial \alpha}{\partial z} + \delta_\alpha \frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0,$$

qui permettent évidemment de faire disparaître les dérivées secondes de γ dans l'équation (7) et de ramener cette équation à la forme suivante

$$(11) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial x} & \frac{\partial \gamma}{\partial x} & \delta_\gamma \frac{\partial \alpha}{\partial x} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial y} & \frac{\partial \gamma}{\partial y} & \delta_\gamma \frac{\partial \alpha}{\partial y} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial z} & \frac{\partial \gamma}{\partial z} & \delta_\gamma \frac{\partial \alpha}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

Elle ne contient plus alors que les dérivées premières de la fonction γ , et elle est *homogène et du second degré* par rapport à ces dérivées.

6. Avant d'aller plus loin, nous allons donner l'interprétation géométrique de l'équation (11). Remarquons qu'en vertu de l'équation (9) ou de la deuxième des équations (1), la direction

définie par les formules

$$(12) \quad \frac{dx}{\frac{\partial \gamma}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial \gamma}{\partial y}} = \frac{dz}{\frac{\partial \gamma}{\partial z}}$$

est celle d'une tangente à la surface de paramètre α . Nous allons montrer que cette direction est celle de l'une des lignes de courbure de la surface.

En effet, comme $\delta_\gamma \frac{\partial \alpha}{\partial x}$, $\delta_\gamma \frac{\partial \alpha}{\partial y}$, $\delta_\gamma \frac{\partial \alpha}{\partial z}$ représentent des quantités proportionnelles aux variations de $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$, $\frac{\partial \alpha}{\partial y}$, $\frac{\partial \alpha}{\partial z}$, lorsqu'on se déplace suivant cette direction, l'équation (11) peut se mettre sous la forme

$$(13) \quad \begin{vmatrix} dx & \frac{\partial \alpha}{\partial x} & d \frac{\partial \alpha}{\partial x} \\ dy & \frac{\partial \alpha}{\partial y} & d \frac{\partial \alpha}{\partial y} \\ dz & \frac{\partial \alpha}{\partial z} & d \frac{\partial \alpha}{\partial z} \end{vmatrix} = 0:$$



et elle exprime que, lorsqu'on se déplace suivant la direction définie par les formules (12), la droite, dont les cosinus directeurs sont proportionnels à $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$, $\frac{\partial \alpha}{\partial y}$, $\frac{\partial \alpha}{\partial z}$, c'est-à-dire la normale à la surface de paramètre α , engendre une surface développable. Nous pouvons donc énoncer les deux propositions suivantes, dont la première est due, comme l'on sait, à Dupin :

Les surfaces appartenant aux trois familles d'un système triple orthogonal se coupent mutuellement suivant leurs lignes de courbure (1).

(1) Ce théorème célèbre a été énoncé et démontré par Dupin dans les *Développements de Géométrie* parus en 1813. Voir dans le IV^e Mémoire de cet Ouvrage, p. 239, l'énoncé et une première démonstration géométrique de la proposition. Voir aussi dans le V^e Mémoire, p. 326, une démonstration analytique des plus élégantes où Dupin s'appuie sur sa théorie des tangentes conjuguées.

Nous pouvons également renvoyer le lecteur à nos *Leçons sur la théorie des surfaces* (I^{re} Partie, p. 209), où la démonstration du théorème de Dupin s'appuie sur une proposition générale relative aux systèmes conjugués.

Réciproquement, si l'on a deux familles de surfaces se coupant à angle droit et si les lignes d'intersection des surfaces qui appartiennent à deux familles différentes sont lignes de courbure pour les surfaces de l'une des deux familles, il existe une troisième famille formée de surfaces coupant les précédentes à angle droit.

Ces deux propositions peuvent être réunies dans l'énoncé suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour que deux familles de surfaces qui se coupent à angle droit admettent une troisième famille de surfaces trajectoires orthogonales est que les lignes d'intersection des surfaces qui appartiennent à deux familles différentes soient lignes de courbure pour les surfaces de l'une des deux familles.

Cette proposition n'est pas autre chose que la traduction, en langage géométrique, de l'équation de condition (13). Il en résulte implicitement que, lorsque les lignes d'intersection sont lignes de courbure pour les surfaces de l'une des familles, elles sont aussi lignes de courbure pour les surfaces de l'autre famille. Nous rencontrons ici, on le voit, une application très particulière d'un théorème célèbre de Joachimsthal d'après lequel si deux surfaces se coupent sous un angle constant, l'intersection ne peut être ligne de courbure de l'une des surfaces sans être ligne de courbure de l'autre ⁽¹⁾.

7. Les propositions de Géométrie que nous venons d'établir nous conduisent directement au but que nous avons en vue et nous permettent d'établir les conditions auxquelles doit satisfaire le paramètre α d'une famille de surfaces pour que cette famille fasse partie d'un système triple orthogonal.

Considérons en effet un point quelconque (x, y, z) de l'espace ; il passe par ce point une surface de la famille, et, pour cette surface, les directions des lignes de courbure seront déterminées par

⁽¹⁾ *Leçons sur la théorie des surfaces* (II^e Partie, p. 393).

deux systèmes tels que les suivants

$$(14) \quad \frac{dx}{L} = \frac{dy}{M} = \frac{dz}{N},$$

$$(15) \quad \frac{\delta x}{L'} = \frac{\delta y}{M'} = \frac{\delta z}{N'},$$

où L, M, N, L', M', N' désignent des fonctions assez compliquées des dérivées premières et secondes de α , fonctions qui dépendent d'ailleurs d'un même radical carré. D'après le théorème de Dupin, les tangentes aux lignes de courbure de chaque système doivent être les normales à l'une des familles de surfaces que l'on doit associer à la famille donnée. Il doit donc exister des facteurs λ, λ' , tels que les deux expressions

$$(16) \quad \lambda(L dx + M dy + N dz), \quad \lambda'(L' dx + M' dy + N' dz)$$

soient respectivement des différentielles exactes. Je dis que si cette condition est vérifiée pour la première différentielle, elle le sera également pour la seconde.

Supposons, en effet, qu'il existe un facteur λ tel que l'on puisse poser

$$(17) \quad \lambda(L dx + M dy + N dz) = d\beta;$$

alors les surfaces de paramètres α et β se couperont mutuellement à angle droit et suivant des lignes de courbure des surfaces de paramètre α . Donc, d'après la réciproque, énoncée plus haut, du théorème de Dupin, il existera une troisième famille de surfaces coupant à angle droit à la fois les surfaces de paramètre α et les surfaces de paramètre β ; et les normales aux surfaces de cette troisième famille seront évidemment les tangentes aux lignes de courbure définies par le système (15). Il existera donc un facteur λ' tel que l'on ait

$$(18) \quad \lambda'(L' dx + M' dy + N' dz) = d\gamma,$$

et γ sera le paramètre de la troisième famille qui complète le système orthogonal.

Les conditions pour qu'il existe des facteurs λ, λ' propres à rendre les expressions (16) des différentielles exactes s'expriment respectivement, nous l'avons déjà vu, par les deux rela-

tions

$$L \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y} \right) + M \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z} \right) + N \left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x} \right) = 0,$$

$$L' \left(\frac{\partial M'}{\partial z} - \frac{\partial N'}{\partial y} \right) + M' \left(\frac{\partial N'}{\partial x} - \frac{\partial L'}{\partial z} \right) + N' \left(\frac{\partial L'}{\partial y} - \frac{\partial M'}{\partial x} \right) = 0.$$

Il résulte évidemment du raisonnement précédent que chacune de ces équations est une conséquence de l'autre, et, par suite, qu'elles se réduisent à une seule. Comme on passe de l'une à l'autre en changeant le signe d'un radical, on voit que l'équation finale à laquelle devra satisfaire le paramètre α sera nécessairement rationnelle.

Cette équation unique en α est évidemment du troisième ordre. De plus, elle est linéaire par rapport aux dérivées de cet ordre; et l'on peut déduire, de l'analyse précédente, que toute solution particulière α , déterminant une famille de surfaces sur lesquelles il existera deux séries distinctes de lignes de courbure, fournira un système triple orthogonal dont on déterminera les deux autres familles par l'intégration de deux équations aux différentielles totales et à trois variables.

Pour rappeler les immortels travaux de Lamé sur les coordonnées curvilignes, nous désignerons sous le nom de *familles de Lamé* toutes les familles de surfaces qui feront partie d'un système triple orthogonal, c'est-à-dire toutes celles dont le paramètre satisfera à l'équation du troisième ordre à laquelle nous avons été conduits.

8. Les recherches que nous venons d'exposer, et par lesquelles la solution du problème des systèmes triples de surfaces orthogonales se trouve ramenée à l'intégration de l'équation aux dérivées partielles du troisième ordre à laquelle doit satisfaire le paramètre de chacune des familles qui composent le système orthogonal, ont été développées et publiées pour la première fois en 1866 dans le *Bulletin de la Société philomathique* et dans la Thèse de doctorat de l'auteur ⁽¹⁾. Cette réduction du problème à l'intégration

⁽¹⁾ *Sur les surfaces orthogonales* (*Bulletin de la Société philomathique*, p. 16; 1866).

Sur les surfaces orthogonales (*Annales de l'École Normale*, 1^{re} série, t. III, p. 97; 1866).

d'une seule équation offrait l'avantage de donner des notions précises sur l'ordre de difficulté de la détermination des systèmes orthogonaux. Ce problème, exigeant l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du troisième ordre à trois variables indépendantes, apparaissait ainsi comme étant beaucoup plus difficile que la plupart des autres questions de la Géométrie infinitésimale, dont la solution se ramène en général à l'intégration d'une équation du second ordre à deux variables indépendantes.

Il convient de rappeler ici que, déjà dans un Mémoire publié en 1862, M. O. Bonnet avait obtenu, par une voie toute différente, la réduction du problème que nous étudions à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du troisième ordre ⁽¹⁾.

(¹) BONNET (O.), *Mémoire sur les surfaces orthogonales* (*Comptes rendus*, t. LIV, p. 554 et 655; mars 1862). Dans ce Mémoire sur lequel nous aurons à revenir, M. Bonnet propose une méthode de recherche des systèmes orthogonaux reposant sur les considérations suivantes : Décomposant le problème en deux, M. Bonnet cherche d'abord les directions des normales aux surfaces qui font partie du système triple orthogonal. A cet effet, il exprime les neuf cosinus déterminant les directions des normales aux trois surfaces qui se coupent en un point au moyen des trois angles d'Euler θ , φ , ψ ; et il trouve que ces angles doivent satisfaire aux trois équations

$$(a) \quad \begin{cases} \sin \psi \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \cos \psi \frac{\partial \theta}{\partial \rho} = 0, \\ \cos \psi \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \rho_1} - \sin \psi \frac{\partial \theta}{\partial \rho_1} = 0, \\ \cos \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \rho_2} + \frac{\partial \psi}{\partial \rho_2} = 0, \end{cases}$$

où ρ , ρ_1 , ρ_2 désignent les paramètres des trois familles de surfaces qui composent le système orthogonal.

Le système d'équations précédent est assurément très simple. M. Bonnet prouve que, si l'on choisit comme variables indépendantes φ , ρ , ρ_1 , la fonction ψ satisfera à une équation du troisième ordre dont l'intégration entraînerait celle du système (1). Il ne restera plus alors qu'à chercher les quantités désignées par Lamé sous le nom de H , H_1 , H_2 . Chacune d'elles doit satisfaire à trois équations aux dérivées partielles du second ordre dont l'intégration amènera trois fonctions arbitraires d'une variable. Cette intégration sera nécessaire à la solution complète du problème proposé; elle ne sera pas toujours possible, mais, il faut le reconnaître, elle sera incomparablement plus facile que celle du système (a), qui doit introduire trois fonctions arbitraires de deux variables indépendantes.

On le voit, la méthode de réduction exposée dans le texte est tout à fait différente de celle de M. Bonnet, avec laquelle on l'a trop souvent confondue; il est même intéressant, au point de vue de la théorie des équations aux dérivées partielles, de remarquer qu'elle n'en était nullement le corollaire. Un système

L'équation du troisième ordre, dont nous avons démontré l'existence et indiqué le mode de formation, a été, pour la première fois, développée et calculée par Cayley (1). Les recherches de l'illustre géomètre ont donné naissance à une série de travaux, que nous allons maintenant exposer (2). Voici d'abord comment on peut former et présenter, sous une forme élégante, l'équation du troisième ordre, qui définit les familles de Lamé. Nous commencerons par étendre un peu une notation déjà employée en définissant une opération différentielle et en indiquant quelques formules qui s'y rapportent.

9. Considérons des fonctions $u, v, w, \alpha, \beta, \dots$ de n variables indépendantes x_1, x_2, \dots, x_n ; je désignerai par le symbole δ_u l'opération suivante

$$(19) \quad \delta_u = \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \frac{\partial}{\partial x_n},$$

que l'on peut écrire sous la forme plus simple

$$(20) \quad \delta_u = u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + u_n \frac{\partial}{\partial x_n},$$

d'équations aux dérivées partielles, servant à déterminer plusieurs fonctions, ne conduit pas nécessairement, par l'élimination de toutes les fonctions moins une, à une seule équation. Il aurait pu se faire que le paramètre ρ de l'une des familles, considéré comme fonction de x, y, z , dût satisfaire à un certain nombre d'équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur au troisième.

Pour rendre plus sensible, par un exemple emprunté à cette théorie, la remarque précédente, supposons que, considérant x, y, z comme des fonctions de ρ, ρ_1, ρ_2 , on se propose d'éliminer y, z et de déterminer x . C'est un problème très intéressant et qui n'a pas encore été résolu; mais, précisément parce qu'il n'a pas été traité, on ne peut affirmer *a priori* que x , considérée comme fonction de ρ, ρ_1, ρ_2 , sera déterminée par une seule équation aux dérivées partielles. On peut même affirmer qu'il en sera autrement.

(1) CAYLEY (A.), *Sur la condition pour qu'une famille de surfaces donnée puisse faire partie d'un système triple orthogonal* (*Comptes rendus*, 2^e semestre 1872, t. LXXV, p. 116, 177, 246, 324, 381 et 1800; et *Collected mathematical Papers*, vol. VIII).

(2) DARBOUX (G.), *Sur l'équation du troisième ordre dont dépend le problème des surfaces orthogonales* (*Comptes rendus*, 1873, t. LXXVI, p. 41, 83, 160).

LÉVY (MAURICE), *Sur une réduction de l'équation à différences partielles du troisième ordre qui régit les familles de surfaces susceptibles de faire partie d'un système orthogonal* (*Comptes rendus*, 1873, t. LXXVII, p. 1435).

en convenant d'adopter les notations suivantes, qui seront employées dans la suite,

$$(21) \quad u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad u_{ik} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}, \quad u_{ikl} = \frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l}.$$

Il résulte immédiatement de là que l'on a

$$(22) \quad \begin{cases} \delta_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}, \\ \delta_u v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n = \delta_v u, \\ \delta_u(\alpha\beta) = \alpha\delta_u\beta + \beta\delta_u\alpha, \end{cases}$$

et, plus généralement,

$$(23) \quad \delta_u \Pi(\alpha, \beta, \gamma, \dots) = \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} \delta_u \alpha + \frac{\partial \Pi}{\partial \beta} \delta_u \beta + \frac{\partial \Pi}{\partial \gamma} \delta_u \gamma + \dots$$

Remarquons encore l'identité suivante, qui nous sera très utile,

$$(24) \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \delta_u v = \delta_u v_i + \delta_v u_i.$$

Cette formule contient des dérivées secondes : en voici une, plus générale et du même genre. Posons

$$(25) \quad \begin{pmatrix} v, w \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w, v \\ u \end{pmatrix} = \sum_i \sum_k v_i w_k u_{ik};$$

on trouvera par un calcul facile

$$(26) \quad \delta_v \delta_w u = \delta_v \delta_u w = \begin{pmatrix} v, w \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v, u \\ w \end{pmatrix},$$

et de même

$$(26)' \quad \begin{cases} \delta_w \delta_u v = \begin{pmatrix} w, u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w, v \\ u \end{pmatrix}, \\ \delta_u \delta_v w = \begin{pmatrix} u, v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u, w \\ v \end{pmatrix}; \end{cases}$$

ce qui donne

$$(27) \quad \delta_v \delta_w u + \delta_w \delta_v u - \delta_u \delta_v w = 2 \begin{pmatrix} v, w \\ u \end{pmatrix} = 2 \sum_i \sum_k v_i w_k u_{ik}.$$

10. Voyons maintenant ce que deviennent ces formules tout à fait générales, lorsqu'on fait des hypothèses particulières.

Supposons que les fonctions ν , ω satisfassent aux équations

$$(28) \quad \delta_u \nu = 0, \quad \delta_u \omega = 0;$$

alors nous allons établir que, si l'on a une relation quelconque entre les fonctions ν , ω , leurs dérivées premières et d'autres fonctions quelconques, α , β , ...,

$$(29) \quad \Pi(\nu_i, \dots, \omega_k, \dots, \nu, \omega, \alpha, \beta, \dots) = 0,$$

on pourra toujours, par la différentiation, en déduire une relation du même genre, c'est-à-dire ne contenant que les dérivées premières de ν , ω . On déduit, en appliquant la formule (23) à l'équation précédente,

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 = \delta_u \Pi &= \sum \frac{\partial \Pi}{\partial \nu_i} \delta_u \nu_i + \sum \frac{\partial \Pi}{\partial \omega_k} \delta_u \omega_k \\ &+ \frac{\partial \Pi}{\partial \nu} \delta_u \nu + \frac{\partial \Pi}{\partial \omega} \delta_u \omega + \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} \delta_u \alpha + \dots \end{aligned} \right.$$

Les deux premiers termes du second membre contiennent seuls des dérivées secondes de ν , ω ; mais, en tenant compte des conditions (28) et appliquant la formule (24), on a

$$\delta_u \nu_i = -\delta_\nu u_i, \quad \delta_u \omega_k = -\delta_\omega u_k.$$

La formule (30) devient donc

$$(31) \quad 0 = -\sum \frac{\partial \Pi}{\partial \nu_i} \delta_\nu u_i - \sum \frac{\partial \Pi}{\partial \omega_k} \delta_\omega u_k + \frac{\partial \Pi}{\partial \nu} \delta_u \nu + \frac{\partial \Pi}{\partial \omega} \delta_u \omega + \sum \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} \delta_u \alpha;$$

et, sous cette forme, toutes les dérivées secondes de ν , ω sont éliminées. C'est ce qu'il fallait établir.

En appliquant le même procédé à la nouvelle équation, on voit que, par des différentiations successives, on pourra obtenir autant d'équations qu'on le voudra, contenant seulement ν , ω et leurs dérivées premières : par suite, on pourra éliminer ces fonctions et leurs dérivées par la combinaison des équations ainsi obtenues.

Examinons en particulier le cas où il existe entre ν , ω une relation de la forme

$$(32) \quad \sum_i \sum_k A^{ik} \nu_i \omega_k = 0,$$

où les coefficients A^{ik} sont des fonctions quelconques ne contenant pas ν, ω ; nous obtiendrons, en appliquant la formule (31), la nouvelle relation

$$(33) \quad \sum_i \sum_k \nu_i \omega_k \left(\delta_u A^{ik} - \sum_h A^{ih} u_{kh} - \sum_h A^{hk} u_{ih} \right) = 0,$$

de forme semblable à celle d'où on l'a déduite.

41. Nous allons appliquer ces remarques générales au problème que nous avons en vue. Pour cela, nous supposerons les axes rectangulaires; nous mettrons x, y, z à la place de x_1, x_2, x_3 , et nous désignerons par u, ν, ω les paramètres des trois familles qui composent le système orthogonal. On aura ici

$$(34) \quad \delta_\nu \omega = 0, \quad \delta_u \omega = 0, \quad \delta_u \nu = 0.$$

Les fonctions ν, ω satisfont donc aux deux conditions que nous avons admises précédemment

$$(35) \quad \delta_u \nu = 0, \quad \delta_u \omega = 0,$$

et il y a entre leurs dérivées la relation

$$(36) \quad \delta_\nu \omega = \nu_1 \omega_1 + \nu_2 \omega_2 + \nu_3 \omega_3 = 0,$$

tout à fait semblable à celle que nous avons donnée plus haut (32). Il suffit de supposer

$$A^{ii} = 1, \quad A^{ik} = 0.$$

En appliquant alors, avec ces hypothèses particulières, la formule (33), nous aurons

$$(37) \quad \sum_i \sum_k \nu_i \omega_k u_{ik} = 0.$$

Cette formule résulterait aussi de l'identité (27), où le premier membre devient nul en vertu des relations d'orthogonalité.

Les équations (35), (36), (37) permettent de déterminer, en fonction des dérivées premières et secondes de u , les rapports mutuels des dérivées premières de ν, ω ; et elles expriment, comme on l'a vu, que les surfaces de paramètres ν, ω coupent les surfaces de paramètre u suivant des lignes de courbure.

110916

De l'équation (37) déduisons encore une nouvelle équation ne contenant que les dérivées premières de ν , ω . L'équation (32) devient identique à la précédente (37) si l'on pose

$$A^{ik} = u_{ik}.$$

L'application de la formule (33) nous donnera donc la nouvelle équation

$$(38) \quad \sum_i \sum_k \nu_i \omega_k \left(\delta_u u_{ik} - 2 \sum_h u_{ih} u_{kh} \right) = 0.$$

Les équations (35) à (38) suffisent maintenant à l'élimination des dérivées premières de ν , ω . Elles vont ainsi nous conduire à une équation du troisième ordre à laquelle devra satisfaire le paramètre u , considéré comme fonction de x, y, z ; mais auparavant, pour montrer que cette équation, évidemment nécessaire, est aussi suffisante, nous substituerons au raisonnement donné plus haut (n° 7) le suivant, qui est moins élémentaire, mais qui s'appliquera à des cas plus généraux.

Les équations (35) et (37) déterminent complètement les rapports des dérivées premières de ν et de ω . Si on les supposait résolues, elles nous donneraient, par exemple, pour ν un système de la forme

$$(39) \quad \frac{\partial \nu}{\partial x} = \frac{\partial \nu}{\partial y} = \frac{\partial \nu}{\partial z},$$

L, M, N étant des fonctions des dérivées des deux premiers ordres de u . On peut dire qu'il faut et il suffit, pour que le système précédent ne soit pas impossible, que la relation, obtenue en différentiant les équations qui le composent par rapport à x, y, z , et en éliminant les dérivées secondes de ν , soit une conséquence du système lui-même. Mais, à cette remarque évidente on doit ajouter la suivante : les six relations que l'on obtient en différentiant le système ne suffisent pas à déterminer les dérivées secondes de ν en fonction des dérivées premières. En éliminant ces dérivées secondes, on obtiendra la condition bien connue d'intégrabilité

$$L \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y} \right) + M \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z} \right) + N \left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x} \right) = 0,$$

et il restera seulement cinq équations distinctes entre les dérivées secondes de φ , qui feront connaître toutes ces dérivées si l'on se donne arbitrairement l'une d'elles. Il était clair d'ailleurs, *a priori*, que l'on ne pouvait déterminer toutes les dérivées secondes puisque le système (39) ne change pas si l'on remplace φ par $\varphi(\varphi)$, ce qui permet, pour chaque système de valeurs de x, y, z , de donner telle valeur que l'on voudra à l'une des dérivées secondes de la fonction φ .

Ce point étant admis, il est inutile, pour trouver les conditions d'intégrabilité des équations qui déterminent les rapports des dérivées de φ, ω , de résoudre les équations (35) à (37), comme nous venons de le supposer. Il suffira de différentier successivement, par rapport à x, y, z , ces quatre équations, et d'éliminer ensuite les dérivées secondes de φ et de ω . Il devra y avoir dix équations distinctes contenant ces dérivées secondes; les autres, d'où l'on aura chassé les dérivées secondes, devront être toutes vérifiées en vertu des équations (35) à (37). Or, en différentiant ces quatre équations, on obtient douze relations dont la combinaison nous a déjà donné les formules (37) et (38). Les dix équations restantes seront celles d'où l'on ne peut plus faire disparaître les dérivées secondes; cela résulte des remarques précédentes. Ainsi, les conditions d'intégrabilité seront données par les deux équations (37) et (38). L'une d'elles (37), faisant partie du système proposé, sera toujours vérifiée, et il suffit que l'équation (38) soit une conséquence du système des équations (35) à (37).

Cette méthode montre bien pourquoi les deux conditions d'intégrabilité relatives aux fonctions φ, ω se réduisent à une seule. L'une d'elles fait partie du système même qui sert à la définition de ces deux fonctions.

12. Après avoir ainsi établi, par un nouveau raisonnement, la réduction du problème à une équation aux dérivées partielles du troisième ordre, voyons comment on peut obtenir cette équation et éliminer les dérivées de φ, ω entre les équations précédentes (35) à (38). Si l'on pose, pour abrégé,

$$(40) \begin{cases} A_{ik} = \delta_u u_{ik} - 2\delta_{u_i} u_k \\ = u_1 u_{ik1} + u_2 u_{ik2} + u_3 u_{ik3} - 2(u_{i1} u_{k1} + u_{i2} u_{k2} + u_{i3} u_{k3}), \end{cases}$$

on aura d'abord les trois équations

$$(41) \quad \begin{cases} \nu_1 \omega_1 + \nu_2 \omega_2 + \nu_3 \omega_3 = 0, \\ \nu_1 \omega_1 u_{11} + \dots + (\nu_1 \omega_2 + \nu_2 \omega_1) u_{12} + \dots = 0, \\ \nu_1 \omega_1 A_{11} + \dots + (\nu_1 \omega_2 + \nu_2 \omega_1) A_{12} + \dots = 0. \end{cases}$$

Ces équations sont symétriques par rapport à ν et à ω et ne contiennent que les six combinaisons $\nu_i \omega_i$, $\nu_i \omega_k + \nu_k \omega_i$. Nous pouvons en former trois autres toutes semblables. Pour cela, nous emploierons les deux équations

$$\begin{aligned} u_1 \nu_1 + u_2 \nu_2 + u_3 \nu_3 &= 0, \\ u_1 \omega_1 + u_2 \omega_2 + u_3 \omega_3 &= 0; \end{aligned}$$

et nous les ajouterons après les avoir multipliées respectivement par ω_i , ν_i , i recevant les valeurs 1, 2, 3. Nous obtenons ainsi le système

$$(42) \quad \begin{cases} 2\nu_1 \omega_1 u_1 + (\nu_1 \omega_2 + \nu_2 \omega_1) u_2 + (\nu_1 \omega_3 + \nu_3 \omega_1) u_3 = 0, \\ (\nu_1 \omega_2 + \nu_2 \omega_1) u_1 + 2\nu_2 \omega_2 u_2 + (\nu_2 \omega_3 + \nu_3 \omega_2) u_3 = 0, \\ (\nu_1 \omega_3 + \nu_3 \omega_1) u_1 + (\nu_2 \omega_3 + \nu_3 \omega_2) u_2 + 2\nu_3 \omega_3 u_3 = 0. \end{cases}$$

Éliminons maintenant les combinaisons $\nu_i \omega_i$, $\nu_i \omega_k + \nu_k \omega_i$, considérées comme des inconnues indépendantes, entre ces trois équations et les précédentes (41); nous aurons l'équation finale

$$(43) \quad S = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{22} & A_{33} & A_{23} & A_{31} & A_{12} \\ u_{11} & u_{22} & u_{33} & u_{23} & u_{31} & u_{12} \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2u_1 & 0 & 0 & 0 & u_3 & u_2 \\ 0 & 2u_2 & 0 & u_3 & 0 & u_1 \\ 0 & 0 & 2u_3 & u_2 & u_1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation, rationnelle et entière, est linéaire par rapport aux dérivées du troisième ordre de u , du troisième degré par rapport à celles du second, du quatrième par rapport à celles du premier. Elle ne contient ni la fonction ni les variables indépendantes. Si l'on écrit à part et si l'on désigne par K l'ensemble des termes qui contiennent les dérivées du troisième ordre, elle est de la forme

$$(44) \quad S = K - \Omega = 0,$$

où K n'est plus que du premier degré par rapport aux dérivées du second ordre et où Ω est du troisième degré par rapport à celles du premier ou du second ordre. Elle se reproduira évidemment lorsqu'on changera les axes coordonnés. L'emploi des substitutions élémentaires auxquelles se ramène toute transformation de coordonnées rectangulaires permet, en effet, de reconnaître que le déterminant S conserve dans tous les cas sa valeur absolue, et qu'il change de signe seulement si l'orientation n'est pas la même dans l'ancien système d'axes et dans le nouveau.

13. Comme vérification, nous allons retrouver d'abord une équation donnée en 1846 par M. Bouquet (1). Supposons que l'on cherche les solutions de la forme

$$(45) \quad u = X + Y + Z,$$

où X, Y, Z sont des fonctions de x, y, z respectivement; A_{ik}, u_{ik} seront nuls lorsque i et k seront différents. On aura

$$A_{11} = X'X''' - 2X''^2, \quad \dots, \quad u_{11} = X'', \quad \dots,$$

et l'équation se réduira à la suivante

$$(46) \quad S = 2X'Y'Z' \begin{vmatrix} X'X''' - 2X''^2 & Y'Y''' - 2Y''^2 & Z'Z''' - 2Z''^2 \\ X'' & Y'' & Z'' \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui est conforme au résultat de M. Bouquet.

14. Comme nouvelle vérification, supposons que, considérant un point de l'espace, on choisisse un système d'axes formé par les directions principales et la normale à la surface de paramètre u qui passe en ce point. On aura, en ce point,

$$(47) \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 0, \quad u_{23} = 0.$$

Il restera

$$(48) \quad S = 2u_1^2(u_{22} - u_{33})(u_1 u_{123} - 2u_{12}u_{13}),$$

(1) BOUQUET (J.), *Note sur les surfaces orthogonales* (*Journal de Liouville*, 1^{re} série, t. XI, p. 446; décembre 1846). C'est dans ce Mémoire qu'a été établi, pour la première fois, le fait important qu'une famille quelconque de surfaces ne saurait faire partie d'un système triple orthogonal.

ce qui est conforme à un résultat obtenu en 1863 par M. PUISEUX (1).

L'expression précédente donne la forme la plus simple à laquelle on puisse, par un choix convenable des axes et à l'égard d'un point déterminé de l'espace, réduire l'équation proposée. Les deux fonctions que nous avons appelées K et Ω deviennent ici

$$(49) \quad \begin{cases} K = 2u_1^4(u_{22} - u_{33})u_{123}, \\ \Omega = 4u_1^3(u_{22} - u_{33})u_{12}u_{13}. \end{cases}$$

Sous cette forme réduite, on voit qu'elles ont une existence indépendante et que, si l'on remplace u par $\varphi(u)$, en tenant compte des conditions (47), elles se reproduisent multipliées par $\varphi'^6(u)$. Elles sont nulles toutes les deux si la famille de paramètre u est composée, soit de sphères ou de plans, soit de surfaces parallèles. Dans le premier cas, en effet, on a

$$u_{22} - u_{33} = 0.$$

Dans le second, on peut écrire d'une manière générale

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = f(u).$$

En différentiant et tenant compte des relations (47), il viendra, pour l'origine des coordonnées,

$$u_{12} = 0, \quad u_{13} = 0, \quad u_{123} = 0;$$

et, par suite

$$K = 0, \quad \Omega = 0.$$

Il serait facile de déterminer toutes les familles satisfaisant à la fois à ces deux équations; mais je négligerai l'examen de cette question pour m'attacher à une conséquence plus importante qu'on peut déduire de l'existence de la forme réduite (48).

15. Posons

$$(50) \quad \frac{1}{H} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}.$$

L'expression

$$(51) \quad \Sigma r_i \alpha_i E_{ii} = \begin{pmatrix} r, \alpha \\ H \end{pmatrix}$$

(1) PUISEUX (V.), *Note sur les systèmes de surfaces orthogonales* (*Journal de Liouville*, 2^e série, t. VIII, p. 335; 1863).

se reproduit quand on change les axes coordonnés. Cela résulte de l'expression (27) du symbole $\begin{pmatrix} v, w \\ u \end{pmatrix}$ en fonction des δ qui sont évidemment des invariants. Remplaçons $v_i w_i, v_i w_k + w_i v_k$ par les quantités qui leur sont proportionnelles, obtenues au moyen des formules (42) et des deux premières (41), et nous obtiendrons un déterminant

$$(52) \quad T = \begin{vmatrix} H_{11} & H_{22} & H_{33} & H_{23} & H_{13} & H_{12} \\ u_{11} & u_{22} & u_{33} & u_{23} & u_{13} & u_{12} \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2u_1 & 0 & 0 & 0 & u_3 & u_2 \\ 0 & 2u_2 & 0 & u_3 & 0 & u_1 \\ 0 & 0 & 2u_3 & u_2 & u_1 & 0 \end{vmatrix},$$

qui se reproduira au signe près et de la même manière que S, quand on changera les axes coordonnés. Au reste, on peut reconnaître directement cette propriété en remarquant que les trois premières lignes du déterminant sont formées avec les six dérivées secondes des trois fonctions

$$H, \quad u, \quad \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2},$$

et que les trois dernières, si on leur ajoutait la seconde ligne multipliée soit par x , soit par y , soit par z , seraient formées de même avec les six dérivées secondes des fonctions

$$ux, \quad uy, \quad uz.$$

Voyons ce que devient ce déterminant lorsqu'on choisit le système d'axes indiqué plus haut et pour lequel on a les conditions (47). On trouve alors

$$T = 2u_1^3(u_{22} - u_{33})H_{23} = 2u_1^3(u_{22} - u_{33})(2u_{12}u_{13} - u_1u_{123})H^3.$$

On a donc l'identité

$$(53) \quad T = -SH^3,$$

qui, une fois établie dans ce cas particulier, subsiste d'une manière générale; et l'on voit que l'équation du problème peut aussi s'écrire

$$(54) \quad T = 0.$$

L'introduction des dérivées secondes de la fonction H , à la place des quantités A_{ik} , est due à Cayley.

16. Nous terminerons ce Chapitre en examinant une question essentielle, et nous nous proposerons de déterminer les *caractéristiques*, soit de l'équation aux dérivées partielles du troisième ordre (52), soit du système fondamental (1). Commençons par l'équation du troisième ordre, que nous écrirons sous la forme (38). Pour obtenir les caractéristiques, il suffit de se borner aux termes qui contiennent les dérivées du troisième ordre de u et d'y remplacer chaque dérivée u_{ikh} par le produit $p_i p_k p_l$, p_i , p_k , p_l désignant les dérivées premières d'une certaine fonction θ qui, égale à une constante, définira les *surfaces caractéristiques*.

En effectuant cette substitution, on trouvera sans peine que l'on a

$$\delta_u u_{ik} = p_i p_k \delta_u \theta,$$

et l'équation aux dérivées partielles qui détermine les caractéristiques sera

$$\delta_u \theta \delta_v \theta \delta_w \theta = 0.$$

Elle se décomposera ainsi en trois facteurs, et l'on reconnaît immédiatement que les trois séries correspondantes de caractéristiques sont formées de surfaces assujetties à l'unique condition d'être trajectoires orthogonales de l'une des familles qui composent le système orthogonal.

On aurait pu prévoir ce résultat à l'aide de la proposition énoncée au n° 3. Quand on essaye de déterminer les intégrales d'une équation ou d'un système d'équations aux dérivées partielles par les conditions initiales qui figurent dans le théorème de Cauchy, les caractéristiques sont les ensembles pour lesquels le problème devient indéterminé. Or nous avons vu (n° 3) qu'un système triple est déterminé lorsqu'on se donne les courbes suivant lesquelles les trois familles de surfaces coupent une surface donnée (Σ), à moins que deux des trois familles de courbes tracées sur (Σ) ne soient rectangulaires. Cette condition restrictive définit évidemment les caractéristiques et conduit par une autre voie au résultat obtenu plus haut. En effet, d'après les propriétés élémentaires du trièdre trirectangle, les seules surfaces qui

puissent être coupées suivant deux familles de courbes rectangulaires par les surfaces appartenant à deux familles du système orthogonal sont celles qui sont orthogonales aux surfaces qui composent l'une ou l'autre des trois familles du système.

La proposition relative aux caractéristiques de l'équation du troisième ordre conduit au résultat suivant : on peut toujours déterminer un système triple orthogonal par la condition que les surfaces (A) qui composent une de ses trois familles coupent une surface (Σ) suivant les courbes (C) d'une famille donnée, et aient, suivant ces courbes (C), un *contact du second ordre* avec certaines surfaces (S) contenant ces courbes, à moins que les surfaces (S) ne soient orthogonales à (Σ), ou bien que les courbes (C) ne soient des lignes de courbure des surfaces (S) sur lesquelles elles sont tracées. Dans ces derniers cas, le problème est, en général, impossible, mais il peut être indéterminé.

Des considérations géométriques très simples permettent de confirmer ces résultats. Pour fixer les idées, prenons le premier cas d'exception et supposons que les surfaces (S) soient normales à (Σ) suivant les courbes (C). Les trajectoires orthogonales (C') des courbes (C) sur la surface (Σ) seront évidemment des trajectoires orthogonales des surfaces (S); et, par suite, chaque courbe (C') sera ligne de courbure pour une surface appartenant à l'une ou à l'autre des deux familles qui doivent compléter le système triple cherché. Il suit de là que si, en chaque point d'une courbe (C'), on construit les tangentes principales de la surface (S) qui est, en ce point, orthogonale à (C'), ces droites, étant aussi les tangentes principales de la surface (A) tangente à (S), devront envelopper deux développées de la courbe (C') et, par suite, engendrer deux surfaces développables. Si cette condition n'est pas remplie, le problème sera impossible; si elle l'est, il sera indéterminé.

Si l'on envisage ensuite le second cas d'exception, celui où les courbes (C) sont lignes de courbure des surfaces (S) sur lesquelles elles sont placées, on sera conduit à des conclusions analogues, mais moins simples. Le lecteur pourra s'en rendre compte en supposant que la surface (Σ) se réduise à un plan.

CHAPITRE II.

SYSTÈMES TRIPLES COMPRENANT UNE FAMILLE DE PLANS OU UNE FAMILLE DE SPHÈRES.

Recherche des systèmes triples orthogonaux qui comprennent une famille de plans. — On les obtient en traçant dans un plan deux familles de courbes rectangulaires et en faisant rouler ce plan sur une développable quelconque. — On peut aussi éviter toute considération de roulement et construire les systèmes sans aucune intégration. — Définition des coordonnées curvilignes. — Forme de l'élément linéaire de l'espace dans le système précédent. — Équations qui permettent de définir ce système, débarrassées de tout signe de quadrature. — Si la famille de plans est donnée *a priori*, la détermination des trajectoires orthogonales et, par suite, celle des systèmes triples correspondants dépend de trois quadratures. — Systèmes orthogonaux comprenant une famille de sphères. — Définition des familles similaires de sphères; ce sont celles pour lesquelles le problème des trajectoires orthogonales conduit aux mêmes équations différentielles. — Quand on connaît une famille de sphères on peut, sans aucune intégration, construire les familles similaires. Parmi les familles ainsi déterminées, il y en a une infinité composées de sphères passant par un point fixe; une simple quadrature permet de construire ces familles particulières si l'on connaît une trajectoire orthogonale des sphères primitives. — Grâce aux théorèmes précédents on peut, sans aucune intégration, passer des systèmes triples contenant une famille de plans à ceux qui contiennent une famille de sphères. — Propriété particulière des courbes sphériques : l'intégrale $\int \frac{ds}{r}$ peut être explicitement calculée. — Détermination des trajectoires orthogonales d'une famille donnée de sphères; elle se ramène à l'intégration de deux équations de Riccati dont chaque trajectoire fournit une solution particulière. — Construction des systèmes triples qui comprennent une famille de sphères. — Extension des résultats précédents à l'espace à n dimensions. En donnant une forme convenable aux fonctions a_1, a_2, \dots, a_n et r , on peut, sous forme réelle et sans aucun signe de quadrature, assigner les intégrales générales du système

$$\frac{dx_1}{x_1 - a_1} = \frac{dx_2}{x_2 - a_2} = \dots = \frac{dx_n}{x_n - a_n},$$

a_1, \dots, a_n, r étant des fonctions d'un paramètre t liées à x_1, \dots, x_n par la relation

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 = r^2.$$

Rappel des résultats déjà obtenus sur ce sujet par MM. J.-A. Serret et O. Bonnet.

17. Parmi les propositions contenues dans le Chapitre précédent, nous nous attacherons d'abord à la suivante : *Toute famille*

de plans ou de sphères peut faire partie d'un système triple orthogonal. Nous allons, en premier lieu, déterminer et étudier tous les systèmes orthogonaux que l'on peut ainsi obtenir, c'est-à-dire tous ceux qui comprennent une famille de plans ou de sphères donnée *a priori*.

Commençons par le cas le plus simple et considérons tout d'abord un plan mobile dont les positions successives déterminent la famille de plans que nous supposons donnée. Si nous construisons les courbes qui sont les trajectoires orthogonales du plan mobile, deux quelconques de ces trajectoires couperont chaque position du plan en deux points dont la distance demeurera invariable; car la droite qui joint ces deux points est normale aux courbes décrites par ses extrémités. Donc, *dans chaque position du plan mobile, les points qui décrivent les diverses trajectoires forment une figure plane invariable.*

Le plan de cette figure roule évidemment sur la développable qu'il enveloppe, car tous les points de la figure ont leurs vitesses nulles ou normales au plan; et, par suite, les points situés sur la caractéristique du plan ne peuvent avoir qu'une vitesse nulle. On est donc conduit à la construction suivante :

Pour obtenir tous les systèmes orthogonaux considérés, on fait rouler un plan mobile (P) sur la développable qu'il enveloppe. Si l'on a tracé dans la position initiale du plan deux familles quelconques de courbes orthogonales (C) et (C₁), chacune de ces courbes, entraînée dans le mouvement du plan, engendre une des surfaces qui composent le système orthogonal.

Les surfaces ainsi obtenues ont été déjà considérées par Monge⁽¹⁾; nous leur donnerons le nom de *surfaces-moulures générales*, réservant le nom de *surfaces-moulures cylindriques* pour le cas où la développable enveloppée par le plan (P) se réduit à un cylindre. Ainsi le système triple précédent se compose d'une fa-

(¹) MONGE, *De la surface courbe dont toutes les normales sont tangentes à une même surface développable quelconque (Application de l'Analyse à la Géométrie, 5^e édition, p. 322).*

mille de plans et de deux familles de surfaces-moulures, engendrées respectivement par les courbes (C) et les courbes (C₁).

Un cas particulier de ce système est souvent employé en Physique mathématique : c'est celui dans lequel les plans (P) passent par une droite (D). Alors les surfaces-moulures deviennent des surfaces de révolution qui ont pour axe commun la droite (D).

18. La construction géométrique précédente repose sur la considération du roulement d'un plan sur une surface développable. Il semble au premier abord qu'elle est de nature transcendante et ne pourrait être traduite analytiquement que grâce à l'emploi de relations différentielles ou de quadratures. Il ne sera donc pas inutile de montrer comment, par une suite d'opérations qui ne comporte aucune intégration, on peut former le système triple le plus général répondant à la définition qui vient d'être donnée.

Étant donné un plan mobile (P), ceux de ses points M, M', M'', ... qui décrivent des trajectoires orthogonales du plan forment, nous l'avons vu, une figure invariable, et leurs vitesses, toutes normales au plan, sont à chaque instant parallèles. D'après cela, si l'on mène, par un point fixe O, des droites Om', Om'', ... respectivement parallèles et égales à MM', MM'', ... la figure formée par m', m'', ... sera dans un plan (P') passant en O et parallèle au plan (P); et, de plus, les vitesses de m', m'', ... étant évidemment parallèles à celles de M', M'', ... (1), les différents points m', m'', ... décriront des trajectoires orthogonales du plan (P'). Donnons-nous *a priori* l'une de ces trajectoires (γ'), décrite par le point m'; il suffira, pour cela, de prendre une courbe sphérique quelconque tracée sur une sphère de centre O et de rayon Om'. Le plan (P') sera normal à la courbe; et, pour obtenir une quelconque de ses trajectoires orthogonales, il faudra construire, dans ce plan, le point m'' formant avec O et m' un triangle invariable; m'' décrira la trajectoire demandée. On aura ainsi construit sans intégration l'ensemble formé par le plan (P') et ses trajectoires. Pour passer de là au plan (P), on remarquera

(1) En effet, la vitesse de m', par exemple, est la différence géométrique des vitesses de M' et de M, qui sont parallèles.

que la courbe (Γ) décrite par le point M de ce plan α , à chaque instant, sa tangente parallèle à celle de (γ') . Les deux courbes ont donc aussi, à chaque instant, leurs plans osculateurs parallèles et, pour obtenir (Γ) , il suffira de prendre l'arête de rebroussement d'une développable dont les plans tangents seront assujettis à l'unique condition d'être parallèles aux plans osculateurs de (γ') . Si maintenant on mène par chaque point de (Γ) des droites égales et parallèles aux lignes Om' , Om'' , ..., on obtiendra les points M' , M'' , ... qui sont dans le plan (P) normal à (Γ) et qui décrivent les trajectoires de ce plan. Ainsi se trouvera réalisé, sans quadrature, l'ensemble formé par un plan mobile et par ses trajectoires orthogonales.

19. On peut vérifier très simplement les résultats que nous venons d'établir et déterminer la forme de l'élément linéaire de l'espace quand on emploie les coordonnées curvilignes correspondantes aux systèmes orthogonaux précédents. Rappelons d'abord quelques propositions élémentaires, mais essentielles. Supposons les coordonnées rectangulaires d'un point de l'espace, x, y, z , exprimées d'une manière quelconque en fonction de trois variables indépendantes ρ, ρ_1, ρ_2 , par les formules

$$(1) \quad \begin{cases} x = f(\rho, \rho_1, \rho_2), \\ y = f_1(\rho, \rho_1, \rho_2), \\ z = f_2(\rho, \rho_1, \rho_2). \end{cases}$$

Les variables ρ, ρ_1, ρ_2 constituent ce que Lamé a appelé *un système de coordonnées curvilignes des points de l'espace*. Les surfaces de paramètres ρ, ρ_1, ρ_2 se coupent généralement sous des angles variables; si l'on veut qu'elles se coupent à angle droit, il sera nécessaire et suffisant que l'on ait

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \rho_2} \frac{\partial x}{\partial \rho_1} + \frac{\partial y}{\partial \rho_2} \frac{\partial y}{\partial \rho_1} + \frac{\partial z}{\partial \rho_2} \frac{\partial z}{\partial \rho_1} = 0, \\ \frac{\partial x}{\partial \rho} \frac{\partial x}{\partial \rho_2} + \frac{\partial y}{\partial \rho} \frac{\partial y}{\partial \rho_2} + \frac{\partial z}{\partial \rho} \frac{\partial z}{\partial \rho_2} = 0, \\ \frac{\partial x}{\partial \rho_1} \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial y}{\partial \rho_1} \frac{\partial y}{\partial \rho} + \frac{\partial z}{\partial \rho_1} \frac{\partial z}{\partial \rho} = 0. \end{cases}$$

Ces trois équations fondamentales pourraient remplacer le sys-

tème (1) du Chapitre précédent. Elles conduisent évidemment à la conséquence suivante :

Pour que le système de coordonnées curvilignes défini par les formules (1) soit entièrement orthogonal, il faut et il suffit que le carré de l'élément linéaire de l'espace

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2,$$

exprimé en fonction des différentielles $d\rho$, $d\rho_1$, $d\rho_2$, ne contienne pas les rectangles de ces différentielles, c'est-à-dire soit réductible à la forme

$$(3) \quad ds^2 = H^2 d\rho^2 + H_1^2 d\rho_1^2 + H_2^2 d\rho_2^2.$$

Ce point étant rappelé, considérons un plan mobile (P) qui roule sur une développable et supposons, pour fixer les idées, que ce plan mobile soit le plan des xy d'un trièdre mobile (T) (1). Si la position de ce trièdre dépend d'une variable ρ , qui joue le rôle du temps, et si l'on désigne, suivant l'usage, par ξ , η , ζ les translations, par p , q , r les rotations du trièdre mobile, un point *invariable* du plan des xy aura un déplacement dont les composantes seront

$$(\xi - r\eta) d\rho, \quad (\eta + rx) d\rho, \quad (\zeta + py - qx) d\rho.$$

Pour que le plan roule sur une développable, il faut que les vitesses de tous ses points soient normales au plan. Il faut donc que l'on ait

$$\xi = \eta = r = 0.$$

Alors un point *variable* du plan des xy aura pour composantes de son déplacement

$$dx, \quad dy, \quad (\zeta + py - qx) d\rho;$$

de sorte que l'élément linéaire de l'espace sera donné par la formule

$$(4) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + (\zeta + py - qx)^2 d\rho^2.$$

Si maintenant on substitue à x et y des coordonnées curvi-

(1) Pour la théorie du trièdre mobile, voir le Livre I^{er} de nos *Leçons sur la théorie des surfaces*. Nous y reviendrons d'ailleurs plus loin.

lignes orthogonales quelconques dans le plan, ρ_1 et ρ_2 , on aura

$$(5) \quad \begin{cases} x = \varphi_1(\rho, \rho_2), & y = \varphi_2(\rho_1, \rho_2), \\ dx^2 + dy^2 = H_1^2 d\rho_1^2 + H_2^2 d\rho_2^2; \end{cases}$$

et l'expression de l'élément linéaire prendra la forme

$$(6) \quad ds^2 = H_1^2 d\rho_1^2 + H_2^2 d\rho_2^2 + (\zeta + p\varphi_2 - q\varphi_1)^2 d\rho^2,$$

qui met en évidence la proposition établie plus haut par des considérations géométriques.

20. Proposons-nous maintenant d'écrire les équations qui déterminent tous les systèmes orthogonaux précédents et commençons par écarter le cas où le plan (P) demeurerait parallèle à un plan fixe. Les deux familles qui complètent le système triple seraient alors composées de cylindres orthogonaux ayant toutes leurs génératrices rectilignes perpendiculaires au plan fixe.

Si le plan (P) enveloppe un cylindre, on pourra, en supposant ce cylindre parallèle à l'axe des z , employer les formules suivantes :

Si l'équation du plan est mise sous la forme

$$(7) \quad -X \sin \rho + Y \cos \rho = F'(\rho),$$

les trajectoires orthogonales du plan s'obtiendront en adjoignant à cette équation les deux suivantes :

$$(8) \quad \begin{cases} X \cos \rho + Y \sin \rho = F(\rho) + A, \\ Z = B, \end{cases}$$

où A et B désigneront deux constantes arbitraires. Si l'on fait varier ces constantes en même temps que ρ , on trouvera

$$(9) \quad dX^2 + dY^2 + dZ^2 = dA^2 + dB^2 + [F(\rho) + F'(\rho) + A]^2 d\rho^2.$$

Il suffira ensuite, pour obtenir le système triple le plus général comprenant la famille des plans (P), de remplacer A et B par deux coordonnées curvilignes orthogonales telles que l'on ait

$$(10) \quad dA^2 + dB^2 = H_1^2 d\rho_1^2 + H_2^2 d\rho_2^2.$$

Supposons maintenant que le plan (P) enveloppe une développable non cylindrique. Alors, si l'on mène par un point fixe O

un plan (P') parallèle au plan (P), ce plan (P') coupera la sphère de rayon 1 et de centre O suivant un grand cercle variable qui demeurera orthogonal à une famille de courbes sphériques parallèles.

Ces courbes ne pourront certainement être planes ; soit (γ') l'une d'elles.

Si l'on suppose que l'origine des coordonnées ait été placée en O, et si l'on désigne par x, y, z les coordonnées d'un point de (γ'), on aura ici

$$(11) \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Désignons, suivant l'usage, par s l'arc de cette courbe, par $a, a', a'', b, b', b'', c, c', c''$ les cosinus directeurs de la tangente, de la normale principale et de la binormale à cette courbe, par $\frac{1}{\rho}$ et $\frac{1}{\tau}$ la courbure et la torsion. On aura, comme on sait,

$$(12) \quad \frac{dx}{ds} = a, \quad da = b \frac{ds}{\rho}, \quad db = -\left(\frac{c}{\tau} + \frac{a}{\rho}\right) ds, \quad dc = b \frac{ds}{\tau},$$

et les équations analogues en $a', b', c', a'', b'', c''$. En différentiant successivement l'équation (11) et tenant compte des formules (12), on obtiendra les équations

$$(13) \quad \begin{cases} ax + a'y + a''z = 0, \\ bx + b'y + b''z = -\rho, \\ cx + c'y + c''z = \frac{\tau d\rho}{ds}. \end{cases}$$

Comme on a l'identité suivante :

$$(ax + a'y + a''z)^2 + (bx + b'y + b''z)^2 + (cx + c'y + c''z)^2 = 1,$$

dans laquelle le premier carré est nul, on peut toujours introduire une variable auxiliaire η telle que l'on ait

$$(14) \quad \begin{cases} bx + b'y + b''z = -\sin \eta, \\ cx + c'y + c''z = \cos \eta, \end{cases}$$

c'est-à-dire, en comparant aux deux dernières (13),

$$(15) \quad \rho = \sin \eta, \quad d\rho = \frac{ds}{\tau}.$$

Il suit de là que, dans toute courbe sphérique, on peut évaluer en termes finis l'intégrale $\int \frac{ds}{\tau}$. L'explication de ce résultat est très simple : la courbe décrite sur la sphère par le pôle du plan osculateur, courbe dont l'arc a pour différentielle $\frac{ds}{\tau}$, est précisément la développée sphérique de (γ') .

21. Revenons au plan (P) et remarquons que, par construction, il est, à chaque instant, normal à la tangente correspondante de (γ') . Son équation peut donc s'écrire

$$(16) \quad aX + a'Y + a''Z = u,$$

u dépendant de la même variable que a, a', a'', \dots . Pour chaque trajectoire orthogonale on doit avoir

$$(17) \quad \frac{dX}{a} = \frac{dY}{a'} = \frac{dZ}{a''},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(17)' \quad \begin{cases} c \, dX + c' \, dY + c'' \, dZ = 0, \\ b \, dX + b' \, dY + b'' \, dZ = 0. \end{cases}$$

Posons, en introduisant une variable auxiliaire θ ,

$$(18) \quad cX + c'Y + c''Z = \theta.$$

Nous aurons, en différentiant, tenant compte des relations (11), (15) et des équations différentielles (17)' de la trajectoire,

$$(19) \quad bX + b'Y + b''Z = \frac{d\theta}{d\tau_1},$$

$$(20) \quad aX + a'Y + a''Z = -\frac{\rho}{\tau} \left(\theta + \frac{d}{d\tau_1} \frac{d\theta}{d\tau_1} \right).$$

En comparant cette dernière équation à la première (16) et prenant τ_1 comme variable indépendante, on voit que l'on devra avoir

$$(21) \quad \theta + \frac{d^2\theta}{d\tau_1^2} = -\frac{\tau}{\rho} u,$$

et cette équation différentielle déterminera θ . Elle pourra s'inté-

grer si l'on a mis u sous la forme

$$(22) \quad u = -\frac{\rho}{\tau} [\varphi(\eta) + \varphi''(\eta)],$$

et nous donnera, avec deux constantes,

$$(23) \quad \theta = A \sin \eta + B \cos \eta + \varphi(\eta).$$

Ainsi la trajectoire la plus générale sera donnée par les formules suivantes

$$(24) \quad \begin{cases} cX + c'Y + c''Z = A \sin \eta + B \cos \eta + \varphi(\eta), \\ bX + b'Y + b''Z = A \cos \eta - B \sin \eta + \varphi'(\eta), \\ aX + a'Y + a''Z = -\frac{\rho}{\tau} [\varphi(\eta) + \varphi''(\eta)] = u, \end{cases}$$

qui ne contiennent aucune quadrature et qui conduisent, si l'on fait varier A , B , η , à la relation

$$(25) \quad \begin{cases} dX^2 + dY^2 + dZ^2 = dA^2 + dB^2 \\ + \left[\frac{du}{d\eta} - \frac{\tau}{\rho} [\varphi'(\eta) + A \cos \eta - B \sin \eta] \right]^2 d\eta^2. \end{cases}$$

Ici encore, pour obtenir le système triple le plus général, il faudra substituer à A , B des coordonnées curvilignes orthogonales ρ_1 et ρ_2 , comme nous l'avons fait plus haut.

Si l'on regarde, dans les équations (24), A et B comme des constantes, elles représentent respectivement : la première, le plan osculateur de la trajectoire orthogonale, la seconde le plan passant par la tangente et la binormale, la troisième le plan mobile lui-même.

Si la courbe (γ') et la fonction $\varphi(\eta)$ sont algébriques, il en sera de même de toutes les trajectoires orthogonales.

22. Les développements précédents nous permettent de ramener à de simples quadratures la solution du problème suivant :

Étant donnée *a priori* une famille quelconque de plans, déterminer les trajectoires orthogonales de ces plans et, par suite, les systèmes triples orthogonaux dont fait partie cette famille de plans.

On peut, en effet, prendre l'équation d'un plan quelconque de

la famille sous la forme

$$(26) \quad ax + a'y + a''z = u,$$

où a , a' , a'' et u seront des fonctions d'un paramètre variable, assujetties à vérifier la relation

$$(27) \quad a^2 + a'^2 + a''^2 = 1;$$

si maintenant l'on construit les grands cercles intersections de la sphère, de rayon 1, concentrique à l'origine, par les plans

$$ax + a'y + a''z = 0,$$

on devra prendre pour la courbe (γ') une quelconque de leurs trajectoires orthogonales. Or la détermination de ces trajectoires orthogonales dépend d'une quadrature, celle qui détermine l'arc de la courbe sphérique enveloppe de tous les grands cercles. Une fois connue la courbe (γ'), il restera à intégrer l'équation (21), où u sera donnée; et cette nouvelle intégration exigera encore deux quadratures. Ainsi :

On peut toujours déterminer par trois quadratures les trajectoires orthogonales d'un plan mobile ou, ce qui revient au même, les systèmes triples orthogonaux dont fait partie une famille donnée de plans.

23. Proposons-nous maintenant de trouver tous les systèmes orthogonaux qui comprennent une famille de sphères. Il faudra évidemment commencer par rechercher les trajectoires orthogonales d'une famille de sphères.

Soit, en coordonnées rectangulaires,

$$(28) \quad (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - r^2 = 0$$

l'équation d'une sphère mobile, a , b , c , r étant des fonctions d'un paramètre u . Les courbes trajectoires orthogonales seront définies par les équations différentielles

$$(29) \quad \frac{dx}{x - a} = \frac{dy}{y - b} = \frac{dz}{z - c},$$

jointes à l'équation précédente (28).

Si nous effectuons la substitution définie par les formules

$$(30) \quad x - a = rX, \quad y - b = rY, \quad z - c = rZ,$$

les équations différentielles deviendront

$$(31) \quad \frac{\frac{da}{r} + dX}{X} = \frac{\frac{db}{r} + dY}{Y} = \frac{\frac{dc}{r} + dZ}{Z},$$

avec la condition

$$(32) \quad X^2 + Y^2 + Z^2 = 1.$$

Il résulte immédiatement de cette première transformation qu'il y a une infinité de familles de sphères pour lesquelles la solution dépendra des mêmes équations différentielles en X, Y, Z ; ce sont celles pour lesquelles les fonctions

$$\frac{1}{r} \frac{da}{du}, \quad \frac{1}{r} \frac{db}{du}, \quad \frac{1}{r} \frac{dc}{du}$$

auront la même valeur. Nous dirons que toutes ces familles sont *similaires* (¹).

Ainsi, si a_1, b_1, c_1, r_1 désignent les valeurs que prennent a, b, c, r pour une autre famille de sphères, celle-ci sera *similaire* de la première si l'on a

$$(33) \quad \frac{da}{r} = \frac{da_1}{r_1}, \quad \frac{db}{r} = \frac{db_1}{r_1}, \quad \frac{dc}{r} = \frac{dc_1}{r_1}.$$

Étant données deux familles similaires, on passe des trajectoires de la première famille à celles de la seconde par la substitution

$$(34) \quad \frac{x-a}{r} = \frac{x_1-a_1}{r_1}, \quad \frac{y-b}{r} = \frac{y_1-b_1}{r_1}, \quad \frac{z-c}{r} = \frac{z_1-c_1}{r_1};$$

et l'on peut, en effet, vérifier par un calcul direct que si l'on effectue cette substitution en tenant compte des conditions (33), les équations différentielles (29) se transforment dans les sui-

(¹) Cette définition est empruntée à M. V. Rouquet. Voir à ce sujet les *Leçons sur la théorie des surfaces* (I^{re} Partie, Note de la page 114).

vantes :

$$(35) \quad \frac{dx_1}{x_1 - a_1} = \frac{dy_1}{y_1 - b_1} = \frac{dz_1}{z_1 - c_1}$$

où l'on a

$$(36) \quad (x_1 - a_1)^2 + (y_1 - b_1)^2 + (z_1 - c_1)^2 = r_1^2.$$

Étant donnée une famille dont on connaît les trajectoires orthogonales, on peut employer la construction suivante pour trouver les trajectoires orthogonales de toute famille similaire :

Sur deux sphères correspondantes des deux familles on associe les points dont les coordonnées satisfont aux relations (34), c'est-à-dire les points pour lesquels les rayons des deux sphères sont parallèles. La correspondance ainsi établie entre les deux sphères est une homothétie, qui est directe si r et r_1 sont de même signe, inverse s'ils sont de signes différents. Au reste, on peut obtenir très aisément le centre de cette homothétie.

Désignons par (Γ) , (Γ_1) les courbes lieux des centres des sphères appartenant à deux familles similaires. D'après les formules (33), les tangentes à ces deux courbes sont à chaque instant parallèles; par suite, la ligne des centres des deux sphères demeure tangente à une courbe (K) . Comme on a, d'après les formules (33),

$$(37) \quad \frac{r_1}{r} = \frac{ds_1}{ds},$$

ds et ds_1 désignant les arcs élémentaires de (Γ) et de (Γ_1) , on voit que le point de contact de la ligne des centres des deux sphères avec son enveloppe (K) sera précisément le centre d'homothétie cherché. On peut encore remarquer que ce centre d'homothétie sera à l'intersection de la ligne des centres des deux sphères et de la droite qui joint les centres de courbure de (Γ) et de (Γ_1) .

Quand on connaît une famille particulière de sphères, on peut, sans aucune intégration, déterminer l'ensemble des familles similaires.

Supposons, en effet, que l'on connaisse la courbe (Γ) ; la courbe (Γ_1) pourra être construite sans difficulté; ce sera l'arête de rebroussement d'une développable dont les plans tangents

seront assujettis à l'unique condition d'être parallèles aux plans osculateurs de (Γ) . Connaissant (Γ_1) , nous aurons aussi, grâce à l'une des propriétés précédentes, le centre d'homothétie des deux sphères correspondantes, et, par suite, nous pourrons construire les sphères ayant leur centre sur (Γ_1) . Analytiquement, on peut encore employer la formule

$$\frac{r_1}{r} = \frac{da_1}{da}$$

qui fait connaître r_1 , en grandeur et en signe, lorsqu'on connaît r et les courbes (Γ) , (Γ_1) .

24. Parmi les familles similaires à une famille donnée, il y en a toujours une infinité qui sont composées de sphères passant par un point fixe.

Si l'on considère, en effet, dans les équations (33) a, b, c, r comme données, et a_1, b_1, c_1, r_1 comme des inconnues, on aura seulement trois équations auxquelles on pourra toujours ajouter la suivante :

$$(38) \quad a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - r_1^2 = 0,$$

qui exprime que la sphère passe à l'origine des coordonnées. On aura alors quatre équations pour quatre inconnues.

La démonstration suivante est plus précise.

Supposons que l'on connaisse une trajectoire orthogonale de la famille donnée, c'est-à-dire des fonctions x_0, y_0, z_0 satisfaisant aux équations

$$(39) \quad \begin{cases} \frac{dx_0}{x_0 - a} = \frac{dy_0}{y_0 - b} = \frac{dz_0}{z_0 - c}, \\ (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 + (z_0 - c)^2 = r^2; \end{cases}$$

et voyons si, dans la famille similaire, la trajectoire correspondante peut se réduire à un point, l'origine des coordonnées. Il faudra, d'après les formules (34), que l'on ait

$$(40) \quad \begin{cases} \frac{x_0 - a}{r} = -\frac{a_1}{r_1}, & \frac{y_0 - b}{r} = -\frac{b_1}{r_1}, & \frac{z_0 - c}{r} = -\frac{c_1}{r_1}, \\ r_1^2 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2. \end{cases}$$

On tire de là

$$(41) \quad dx_0 = da - a_1 d \frac{r}{r_1} - \frac{r}{r_1} da_1.$$

En portant cette valeur de dx_0 et les valeurs analogues de dy_0 , dz_0 dans les premières équations (39), il viendra

$$\frac{da}{r} - \frac{da_1}{r_1} = \frac{db}{r} - \frac{db_1}{r_1} = \frac{dc}{r} - \frac{dc_1}{r_1}.$$

Comme les rapports seuls de a_1, b_1, c_1, r_1 sont déterminés par les formules (40), on pourra supposer que le numérateur du premier rapport soit nul, ce qui entraîne, comme il était facile de le prévoir, les relations

$$(42) \quad \frac{da_1}{da} = \frac{db_1}{db} = \frac{dc_1}{dc} = \frac{r_1}{r},$$

d'où l'on déduira, par exemple,

$$(43) \quad \frac{da_1}{a_1} = + \frac{da}{a - x_0} = \frac{d(a - x_0)}{a - x_0} + \frac{dx_0}{a - x_0}.$$

En intégrant, il viendra

$$a_1 = (a - x_0) e^{-\int \frac{dx_0}{x_0 - a}},$$

de sorte que la solution complète s'obtiendra par les formules

$$(44) \quad \frac{r_1}{r} = \frac{a_1}{a - x_0} = \frac{b_1}{b - y_0} = \frac{c_1}{c - z_0} = e^{-\int \frac{dx_0}{x_0 - a}}.$$

Ainsi, dès que l'on connaît une trajectoire orthogonale d'une famille de sphères, une simple quadrature permet de déterminer la famille similaire dans laquelle cette trajectoire correspond à un point, qui est évidemment le point fixe par lequel passent toutes les sphères de la nouvelle famille.

25. Les propositions précédentes nous permettent de montrer comment on pourra, sans aucune quadrature, construire les familles de sphères les plus générales accompagnées de leurs trajectoires orthogonales.

En effet, toute famille de sphères passant par un point fixe O

peut toujours, par une inversion dont le pôle est O, être transformée en une famille de plans. On aura donc une telle famille accompagnée de ses trajectoires orthogonales en soumettant à une inversion une famille de plans et leurs trajectoires orthogonales. De cette famille on pourra, par les constructions indiquées plus haut, passer aux familles similaires qui sont tout à fait générales.

Les calculs correspondants sont tout indiqués. On remplacera soit dans le système (8), soit dans les équations (24), X, Y, Z respectivement par $\frac{2x_1}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$, $\frac{2y_1}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$, $\frac{2z_1}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$; ce qui donnera, si l'on se borne, par exemple au système le plus général (24),

$$(45) \quad \begin{cases} 2(ax_1 + a'y_1 + a''z_1) - u(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) = 0, \\ 2(bx_1 + b'y_1 + b''z_1) - [A \cos \eta - B \sin \eta + \varphi'(\eta)](x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) = 0, \\ 2(cx_1 + c'y_1 + c''z_1) - [A \sin \eta + B \cos \eta + \varphi(\eta)](x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) = 0. \end{cases}$$

Puis on passera à la famille la plus générale par les relations

$$(46) \quad u d\left(\frac{a}{u}\right) = \frac{da_1}{r_1}, \quad u d\left(\frac{a'}{u}\right) = \frac{da'_1}{r_1}, \quad u d\left(\frac{a''}{u}\right) = \frac{da''_1}{r_1},$$

$$(47) \quad \frac{x_1 - \frac{a}{u}}{x_2 - a_1} = \frac{y_1 - \frac{a'}{u}}{y_2 - a'_1} = \frac{z_1 - \frac{a''}{u}}{z_2 - a''_1} = \frac{1}{ur_1}.$$

Le système (8), que nous avons négligé, donnerait les familles de sphères pour lesquelles le lieu des centres est une courbe plane.

On peut résoudre les équations (46) de deux manières différentes, soit en se donnant arbitrairement r_1 et déterminant ensuite a_1, a'_1, a''_1 par des quadratures, soit en remarquant que la courbe décrite par le point de coordonnées a_1, a'_1, a''_1 est l'arête de rebroussement d'une développable dont les plans tangents sont parallèles aux plans osculateurs de la courbe décrite par le point de coordonnées $\frac{a}{u}, \frac{a'}{u}, \frac{a''}{u}$, ce qui permet d'écrire les valeurs de a_1, a'_1, a''_1 sans aucun signe d'intégration. L'une quelconque des équations (46) fera ensuite connaître r_1 .

26. Il ne nous reste plus qu'à indiquer comment on pourra déterminer effectivement les trajectoires orthogonales d'une

famille de sphères *donnée*. Voici le procédé qui nous a paru le plus simple. Soit

$$(48) \quad (X - a)^2 + (Y - b)^2 + (Z - c)^2 = r^2$$

l'équation de la sphère variable dont il s'agit de déterminer les trajectoires. En introduisant les variables imaginaires qui sont les paramètres des deux séries de génératrices rectilignes ⁽¹⁾, on pourra poser

$$(49) \quad \begin{cases} X = a + r \frac{x + y}{xy + 1}, \\ Y = b + ri \frac{y - x}{xy + 1}, \\ Z = c + r \frac{xy - 1}{xy + 1}. \end{cases}$$

En substituant ces expressions de X, Y, Z dans les équations différentielles des trajectoires

$$(50) \quad \frac{dX}{X - a} = \frac{dY}{Y - b} = \frac{dZ}{Z - c},$$

on trouvera que x et y doivent satisfaire aux deux équations

$$(51) \quad \begin{cases} dx = x^2 d\xi_0 - 2x d\eta - d\xi, \\ dy = y^2 d\xi - 2y d\eta - d\xi_0, \end{cases}$$

où l'on a posé

$$(52) \quad \frac{da + i db}{2r} = d\xi, \quad \frac{da - i db}{2r} = d\xi_0, \quad \frac{dc}{2r} = d\eta.$$

En d'autres termes, x et y devront être solutions de deux équations de Riccati. On voit donc que, si l'on connaît une seule trajectoire orthogonale, on aura, par cela même, une solution particulière des deux équations, et la détermination des autres trajectoires orthogonales sera ramenée aux quadratures.

Le résultat précédent peut s'expliquer par des considérations analogues à celles que nous avons développées ailleurs ⁽²⁾. Si l'on considère d'abord une famille de plans et si l'on fait se corres-

⁽¹⁾ *Leçons sur la Théorie des surfaces* (I^e Partie, p. 37 et suiv.).

⁽²⁾ *Leçons sur la Théorie des surfaces* (Livre I, Chap. III).

pondre, sur deux quelconques des plans, les points où ils sont rencontrés par une même trajectoire orthogonale, la correspondance ainsi établie est, nous l'avons vu (n° 17), celle qui existe entre deux figures égales. Si nous transformons par inversion, nous aurons la famille la plus générale de sphères passant par un point fixe; la correspondance établie entre deux des sphères, à l'aide des trajectoires orthogonales, sera, par suite, celle qui résulte d'une inversion, d'un déplacement et d'une inversion, c'est-à-dire, en définitive, d'un nombre pair d'inversions. Cette proposition s'étend immédiatement à une famille quelconque de sphères, puisque, dans deux familles similaires, les pieds des trajectoires orthogonales dessinent, sur les sphères correspondantes, deux figures homothétiques. Ainsi :

Lorsqu'on considère comme correspondants, sur deux sphères d'une famille quelconque, les points où ces deux sphères sont rencontrées par une même trajectoire orthogonale, la correspondance ainsi établie équivaut à un nombre pair d'inversions.

C'est donc une correspondance avec similitude des éléments infiniment petits et il est facile de voir que c'est aussi une homographie ⁽¹⁾. Pour toutes ces raisons, elle transforme les génératrices rectilignes de l'une des sphères dans les génératrices rectilignes de l'autre, et elle conserve les rapports anharmoniques de quatre génératrices quelconques. Supposons donc que l'on connaisse trois trajectoires orthogonales qui coupent une sphère déterminée (S_0) de la famille en trois points a_0, b_0, c_0 et une sphère variable (S) en trois points a, b, c . Pour déterminer la trajectoire orthogonale qui coupe (S_0) en un point m_0 , il suffira de déterminer le point m de (S) par la double condition que les rapports anharmoniques des génératrices rectilignes du premier et du second système qui passent en a, b, c, m soient égaux à ceux des génératrices du même système passant en a_0, b_0, c_0, m_0 , c'est-à-dire soient des nombres constants. En éliminant par différentiation les deux constantes ainsi introduites on doit trouver, comme on sait, deux équations de Riccati.

(1) Toute inversion appliquée à une sphère peut être envisagée comme une homographie.

27. L'explication que nous venons de développer nous permettra de donner rapidement la solution du problème principal que nous avons en vue, c'est-à-dire la détermination de tous les systèmes triples orthogonaux comprenant une famille de sphères.

Après avoir construit l'ensemble formé par ces sphères et leurs trajectoires orthogonales, il suffira, pour obtenir les deux familles qui complètent le système orthogonal, de choisir une sphère particulière de la famille (S_0) et d'associer les trajectoires de telle manière qu'elles rencontrent sur cette sphère les courbes (C_0) et (D_0) qui appartiennent respectivement à deux familles orthogonales quelconques. Il résulte en effet des remarques précédentes que la correspondance établie à l'aide des trajectoires entre la sphère (S_0) et l'une quelconque (S) des sphères de la famille, a lieu avec similitude des éléments infiniment petits. Aux courbes (C_0) et (D_0) de (S_0) correspondront des courbes (C) et (D) de (S) se coupant à angle droit et, par suite, les deux familles de surfaces construites avec les trajectoires qui rencontrent respectivement les courbes (C_0) , (D_0) se couperont partout à angle droit.

28. La question que nous venons de rencontrer et de résoudre à propos des trajectoires orthogonales d'une famille de sphères n'est qu'un cas particulier d'un problème plus général que nous allons examiner en terminant ce Chapitre.

Considérons, dans un espace à n dimensions, les sphères variables représentées par l'équation

$$(53) \quad (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 = r^2,$$

où a_1, a_2, \dots, a_n, r sont des fonctions données d'un même paramètre. Si nous nous proposons de déterminer leurs trajectoires orthogonales, nous serons conduit au système d'équations différentielles

$$(54) \quad \frac{dx_1}{x_1 - a_1} = \frac{dx_2}{x_2 - a_2} = \dots = \frac{dx_n}{x_n - a_n},$$

qui se rencontre dans différentes recherches de Géométrie. M. J.-A. Serret ⁽¹⁾ a eu à l'intégrer, pour $n = 4$, dans la recherche

⁽¹⁾ J.-A. SERRET, *Sur les surfaces dont les lignes de l'une des courbures sont sphériques* (*Comptes rendus*, t. XLII, p. 109; 1856).

des surfaces à lignes de courbure sphériques. Au Chapitre suivant, nous le rencontrerons pour $n = 5$. Dans une Note publiée en 1861, M. O. Bonnet (1) a montré que l'on peut mettre les fonctions a_1, a_2, \dots, a_n, r sous une forme telle que l'intégration du système puisse s'effectuer par de simples quadratures. Nous allons compléter ce résultat en montrant que l'on peut obtenir le même résultat *sans aucun signe d'intégration et sans introduire des imaginaires*, comme l'a fait M. Bonnet.

Notre méthode est identique au début à celle que nous avons suivie pour les sphères aux n^{os} 23 et suiv.; si l'on pose ici

$$(55) \quad \frac{x_i - a_i}{r} = X_i,$$

le système des équations (53), (54) prend la forme

$$(56) \quad \begin{cases} X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 = 1, \\ \frac{da_1}{r} + dX_1 = \frac{da_2}{r} + dX_2 = \dots = \frac{da_n}{r} + dX_n, \end{cases}$$

de sorte que l'on pourra, ici encore, introduire la notion des *familles similaires*. Deux familles qui correspondront respectivement aux fonctions a_i, r et a'_i, r' , et pour lesquelles on aura

$$(57) \quad \frac{da_i}{r} = \frac{da'_i}{r'} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

conduiront au même système (56); et, par suite, les trajectoires orthogonales de l'une des familles se rattacheront à celles de l'autre, à l'aide des formules

$$(58) \quad \frac{x_i - a_i}{r} = \frac{x'_i - a'_i}{r'} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Toutes les propositions établies plus haut pour les familles similaires subsistent ici sans modification. Si l'on connaît une famille de sphères caractérisée par les fonctions a_i, r , il sera possible de déterminer, sans intégration, toutes les familles similaires. Il suf-

(1) O. BONNET, *Note sur l'intégration d'une certaine classe d'équations différentielles simultanées* (Comptes rendus, t. LIII, p. 971; 1861).

fra d'introduire n fonctions A_i dont les rapports seront déterminés par les équations

$$(59) \quad \sum_1^n A_i da_i = 0, \quad \sum_1^n A_i d^2 a_i = 0, \quad \sum_1^n A_i d^{n-1} a_i = 0,$$

puis de déterminer les a'_i en joignant à l'équation

$$(60) \quad \sum_1^n A_i a'_i = \theta,$$

où θ est une fonction arbitraire, les $n - 1$ équations

$$(61) \quad \sum_1^n a'_i d^k A_i = d^k \theta \quad (k = 1, 2, \dots, n - 1).$$

La comparaison de toutes ces équations et de celles qui s'en déduisent par différentiation nous donnera les relations

$$(62) \quad \frac{da_1}{da'_1} = \frac{da_2}{da'_2} = \dots = \frac{da_n}{da'_n},$$

auxquelles il faudra joindre, pour déterminer r' , une relation telle que la suivante

$$(63) \quad \frac{da_i}{da'_i} = \frac{r}{r'}.$$

En appliquant sans modification les raisonnements du n° 24, on démontrera que, parmi les familles similaires d'une famille donnée, il y en a une infinité composées de sphères passant par un point fixe. De sorte que, si l'on peut écrire sans aucun signe de quadrature les équations qui déterminent une famille de plans et l'ensemble de ses trajectoires orthogonales, on pourra d'abord, *par une simple inversion*, obtenir, sans aucun signe de quadrature, la famille la plus générale composée de sphères passant par un point fixe et l'ensemble de ses trajectoires orthogonales, puis passer de là à une des familles similaires, c'est-à-dire à la famille la plus générale de sphères dans un espace à n dimensions. Ainsi, nous sommes ramené à déterminer, dans cet espace, les trajectoires orthogonales d'un plan mobile.

Soit

$$(64) \quad b_1 x_1 + \dots + b_n x_n = u$$

l'équation de ce plan (P). Les trajectoires orthogonales devront satisfaire aux équations différentielles

$$(65) \quad \frac{dx_1}{b_1} = \dots = \frac{dx_n}{b_n}.$$

Ici encore, on pourra reproduire la méthode employée pour le cas de trois variables. Si l'on a résolu le problème pour la famille de plans (P'), parallèles aux proposés et passant par l'origine, définis par conséquent par l'équation

$$(66) \quad b_1 x_1 + \dots + b_n x_n = 0,$$

on pourra, en mettant u sous une forme appropriée, le résoudre aussi pour la famille définie par l'équation (64). Car soient $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ les valeurs correspondantes à une trajectoire du plan précédent (P'); on pourra toujours, comme nous venons de le faire, déterminer, avec une fonction arbitraire et sans aucun signe d'intégration, les solutions du système

$$(67) \quad \frac{dy_1}{dx_1^0} = \frac{dy_2}{dx_2^0} = \dots = \frac{dy_n}{dx_n^0},$$

et en prenant

$$(68) \quad u = b_1 y_1 + \dots + b_n y_n,$$

on voit qu'une solution du système des équations (64), (65) sera fournie par les valeurs

$$x_i = y_i$$

des inconnues x_i . Il ne restera plus qu'à effectuer la substitution

$$(69) \quad x_i = y_i + x'_i,$$

pour être ramené aux plans (P').

Dans ce cas, les équations (65), jointes à celle du plan, nous donnent

$$S x_i dx_i = 0,$$

et, par suite,

$$S x_i^2 = \text{const.}$$

Toutes les trajectoires sont donc sphériques, et elles sont homothétiques à celles qui sont situées sur la sphère de rayon 1, et qu'il suffira de déterminer.

Il suffira donc de supposer la constante égale à 1, et l'on aura à la fois

$$(70) \quad Sx_i^2 = 1, \quad S b_i x_i = 0.$$

Pour continuer, effectuons une inversion dont le pôle sera sur cette sphère et qui, par conséquent, la transformera en un plan. On verra facilement que cela revient à employer les formules suivantes :

$$(71) \quad \begin{cases} x_i = \frac{2y_i}{1 + y_1^2 + \dots + y_{n-1}^2} & (i = 1, 2, \dots, n-1), \\ x_n = \frac{1 - y_1^2 - \dots - y_{n-1}^2}{1 + y_1^2 + \dots + y_{n-1}^2}, \end{cases}$$

de sorte que la première des deux équations (70) sera vérifiée identiquement, et que la seconde deviendra

$$(72) \quad y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{n-1}^2 - 1 - 2 \sum_1^{n-1} \frac{b_i}{b_n} y_i = 0.$$

Quant aux équations différentielles (65), elles se transforment dans celles qui définissent les trajectoires orthogonales de la famille de sphères représentée par l'équation précédente dans l'espace à $n - 1$ dimensions.

29. Nous pourrions nous arrêter là si cette famille était la plus générale dans l'espace à $n - 1$ dimensions. Mais il n'en est pas ainsi; car, pour continuer à employer le langage géométrique, la puissance de l'origine des coordonnées, par rapport à toutes les sphères précédentes, est constante et égale à -1 . En d'autres termes, elles sont orthogonales à une sphère fixe, ayant pour centre l'origine et pour rayon $\sqrt{-1}$. Pour continuer notre recherche, nous allons démontrer la proposition suivante :

On peut toujours, sans aucune intégration, déterminer dans un espace donné la famille la plus générale formée de sphères (S) orthogonales à une sphère fixe donnée (Σ), et si-

miltaire d'une famille de sphères (S') passant par un point fixe.

Soit $n - 1$ le nombre de dimensions de l'espace donné, et soit

$$(73) \quad x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 = k^2$$

l'équation de la sphère (Σ), k^2 pouvant être positif ou négatif. Soit, de même,

$$(74) \quad (x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_{n-1} - a_{n-1})^2 = r^2$$

l'équation de la sphère variable (S), a_1, a_2, \dots, a_{n-1} et r étant des fonctions d'un paramètre. Pour que la sphère (S) soit orthogonale à (Σ), il faudra que l'on ait

$$(75) \quad a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2 - r^2 = k^2.$$

Soit, d'autre part,

$$(76) \quad (x_1 - a'_1)^2 + \dots + (x_{n-1} - a'_{n-1})^2 = r'^2$$

l'équation de la sphère (S') similaire à (S). On peut supposer que le point fixe par lequel elle passe soit l'origine des coordonnées, ce qui donnera

$$(77) \quad a_1'^2 + \dots + a_{n-1}'^2 - r'^2 = 0.$$

Désignons par x_1^0, \dots, x_{n-1}^0 , les coordonnées du point de (S) qui, dans la correspondance entre (S) et (S'), est homologue à l'origine des coordonnées. On aura

$$(78) \quad \frac{x_i^0 - a_i}{r} = \frac{-a'_i}{r'} \quad (i = 1, 2, \dots, n - 1);$$

et, à ces équations, il faudra joindre les suivantes :

$$(79) \quad \frac{da_i}{r} = \frac{da'_i}{r'} \quad (i = 1, 2, \dots, n - 1),$$

par lesquelles on exprime que les deux familles sont similaires. En tirant de l'équation (78) la valeur de x_i^0 et en différenciant, on déduira des relations précédentes les suivantes

$$(80) \quad dx_i^0 = -a'_i d\left(\frac{r}{r'}\right),$$

dont nous aurons à faire usage.

On déduit encore de la comparaison des équations (78), (79), la relation

$$\frac{da'_i}{a'_i} = \frac{da_i}{a_i - x_i^0} = \frac{d(a_i - x_i^0)}{a_i - x_i^0} + \frac{dx_i^0}{a_i - x_i^0},$$

qui donne par l'intégration

$$(81) \quad \frac{a'_i}{a_i - x_i^0} = \frac{r'}{r} = e^{\int \frac{dx_i^0}{a_i - x_i^0}}$$

La quadrature qui figure dans cette formule demeure évidemment la même pour toutes les valeurs de i ; remarquons qu'elle peut ici s'effectuer, car on a

$$\frac{dx_1^0}{a_1 - x_1^0} = \dots = \frac{dx_{n-1}^0}{a_{n-1} - x_{n-1}^0} = \frac{Sx_i^0 dx_i^0}{S(a_i - x_i^0)x_i^0},$$

ou encore, en tenant compte des équations (78) et (75),

$$\frac{dx_i^0}{a_i - x_i^0} = \frac{2Sx_i^0 dx_i^0}{k^2 - S(x_i^0)^2} = -d \operatorname{Log}[S(x_i^0)^2 - k^2].$$

En effectuant l'intégration et portant dans la formule (81), il viendra donc

$$(82) \quad \frac{a'_i}{x_i^0 - a_i} = -\frac{r'}{r} = \frac{2C}{S(x_i^0)^2 - k^2} = \frac{C}{Sx_i^0(x_i^0 - a_i)},$$

C désignant une constante introduite par l'intégration et que l'on pourrait d'ailleurs réduire à l'unité.

On déduit de l'équation précédente

$$(83) \quad S a'_i x_i^0 = C.$$

Si l'on remarque que l'on a d'ailleurs, en vertu des formules (80),

$$\frac{dx_1^0}{a'_1} = \frac{dx_2^0}{a'_2} = \dots = \frac{dx_{n-1}^0}{a'_{n-1}},$$

on voit que la courbe (C) lieu du point $(x_1^0, \dots, x_{n-1}^0)$ sera l'une des trajectoires orthogonales du plan (P), défini par l'équation (83), plan qui est l'inverse de la sphère (S') par rapport à l'origine des coordonnées. Admettons qu'il soit possible d'écrire, sans aucun signe d'intégration, les formules qui déterminent, dans

l'espace considéré, un plan mobile et toutes ses trajectoires orthogonales. On voit qu'alors il sera possible d'écrire, sans signe de quadrature, l'ensemble des valeurs des x_i^0 et des a'_i . Cela posé, on passera du plan (P) à la sphère (S') par une inversion, puis de la sphère (S') à la sphère similaire (S) à l'aide des formules précédentes qui nous donnent

$$(84) \quad \begin{cases} S(x_i^0)^2 + 2C \frac{r}{r'} = k^2, \\ a_i = x_i^0 + a'_i \frac{r}{r'}. \end{cases}$$

Ainsi, il sera possible, comme nous l'avons énoncé, d'écrire, sans aucun signe d'intégration, les formules qui déterminent la sphère mobile (S), orthogonale à (Σ), et ses trajectoires orthogonales.

Toutes les opérations que nous avons successivement effectuées sont réversibles et purement algébriques; de sorte que l'on saura résoudre le problème proposé pour un espace à n dimensions dès qu'on saura le résoudre pour un espace à $n - 1$ dimensions. Nous avons d'ailleurs donné la solution pour le cas de trois dimensions; nous pourrions donc l'étendre progressivement aux espaces d'un nombre de dimensions aussi grand qu'on le voudra.

Comme nous l'avons déjà indiqué plus haut, nous aurons à appliquer, dans le prochain Chapitre, la proposition générale que nous venons d'établir. Elle permet aussi, il est facile de le reconnaître, de déterminer, sans aucun signe d'intégration, toutes les surfaces à lignes de courbure sphériques dans un système, quel que soit le nombre de dimensions de l'espace auquel appartiennent ces surfaces.

CHAPITRE III.

ÉTUDE D'UNE INTÉGRALE PARTICULIÈRE DE L'ÉQUATION DU TROISIÈME ORDRE.

L'équation aux dérivées partielles du troisième ordre qui détermine les familles de Lamé admet des solutions particulières définies par l'équation du premier ordre

$$(a) \quad H = \varphi_0(u)(x^2 + y^2 + z^2) + \varphi_1(u)x + \varphi_2(u)y + \varphi_3(u)z + \varphi_4(u).$$

Le Chapitre actuel est consacré à l'étude de ces solutions. — L'équation précédente comprend d'abord, comme cas particuliers, celle qui caractérise les surfaces parallèles et aussi celle qui caractérise les familles dérivées par inversion d'une famille de surfaces parallèles. — Les trajectoires orthogonales des surfaces sont, dans le premier cas, des droites, et, dans le second cas, des cercles passant par un point fixe. — Pour éclairer la discussion du cas général, on commence par étudier celui où les rapports mutuels des 5 fonctions $\varphi_i(u)$ se réduisent à des constantes. — Les familles de Lamé correspondantes sont alors définies par la construction suivante : on construit les cercles normaux à une surface quelconque (Σ) et à une sphère fixe (S); tous ces cercles sont normaux aux surfaces (Σ') qui composent la famille cherchée. — On construit par points chaque surface (Σ'), en déterminant sur chaque cercle le point où il est normal à (Σ), les deux points où il est normal à (S), et en construisant le quatrième point qui forme, avec les précédents, pris toujours dans le même ordre, un rapport anharmonique constant. — Les deux autres familles qui complètent le système sont évidemment formées de surfaces à lignes de courbure circulaires dans un système. — En appliquant cette construction à une *cyclide de Dupin*, on obtient un système triple *exclusivement* composé de cyclides. — Étude géométrique du cas particulier signalé par M. W. Roberts, où les cyclides sont toutes du troisième degré. — La construction générale précédente donne une *transformation de contact des surfaces avec conservation des lignes de courbure*. Détermination de toutes les transformations de ce genre ; analytiquement elles équivalent à une substitution linéaire orthogonale effectuée sur les six coordonnées d'une sphère. — Retour à l'étude de l'équation (a) dans le cas le plus général. — On peut en donner l'intégrale générale sans introduire aucun signe de quadrature. — Pour interpréter géométriquement la solution, on donne quelques propriétés fondamentales de la fonction H qui, multipliée par du , représente la plus courte distance de deux surfaces infiniment voisines, dans une famille quelconque. Il revient au même de se donner H en chaque point d'une surface, ou de se donner en ces points les cercles osculateurs des courbes trajectoires orthogonales de la famille. — Relation entre H et les cercles osculateurs. — Propriété caractéristique des familles étudiées dans ce Chapitre : les cercles osculateurs des trajectoires orthogonales aux points où elles rencontrent une des surfaces sont orthogonaux à une même sphère, qui varie d'ailleurs avec la surface. — Énoncé de la génération de ces familles à l'aide de transformations infinitésimales.

30. Après avoir donné la construction générale des familles de Lamé composées de sphères ou de plans, et avant de commencer l'étude de l'équation du troisième ordre à laquelle nous avons ramené la solution du problème que nous nous étions proposé, il nous reste encore à indiquer et à définir certaines solutions particulières de cette équation, que met presque immédiatement en évidence la forme sous laquelle elle s'est présentée au Chapitre I.

Nous avons vu en effet (n° 15) qu'on peut l'obtenir en égalant à zéro le déterminant formé avec les six dérivées secondes par rapport à x, y, z des six fonctions

$$u, H, x^2 + y^2 + z^2, ux, uy, uz.$$

Un calcul facile montrera que l'on peut substituer à l'une quelconque de ces fonctions la suivante

$$u_1 = H - (x^2 + y^2 + z^2) \varphi(u) - x \varphi_1(u) - y \varphi_2(u) - z \varphi_3(u) - \varphi_4(u),$$

de sorte que toutes les solutions de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} H &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}} \\ &= \varphi(u)(x^2 + y^2 + z^2) + x \varphi_1(u) + y \varphi_2(u) + z \varphi_3(u) + \varphi_4(u) \end{aligned} \right.$$

appartiendront aussi à l'équation du troisième ordre et feront, par suite, connaître des familles de Lamé. En remplaçant le paramètre u par une fonction convenablement choisie de ce paramètre, on pourra réduire à l'unité une des fonctions φ qui figurent dans le second membre. Par conséquent, l'équation précédente ne contient, en réalité, que quatre fonctions arbitraires de u . Elles figureront dans l'intégrale, à côté de la fonction arbitraire de deux variables, introduite par l'intégration.

31. Un premier cas particulier de l'équation précédente est connu depuis longtemps : c'est celui qui correspond à l'équation

$$(2) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = 1,$$

et pour lequel les surfaces de paramètre u sont parallèles entre

elles. On sait que, pour compléter le système triple, il faut adjoindre aux surfaces parallèles les deux familles de surfaces développables entre lesquelles on peut distribuer les normales communes à toutes ces surfaces. On obtient ainsi un premier système triple dont peut toujours faire partie une surface quelconque donnée à l'avance. On démontrera sans difficulté que ce système est le seul pour lequel une des trois familles orthogonales soit composée de surfaces développables.

En transformant par l'inversion le système précédent, on en obtient un autre qu'il est aisé de définir. A la famille de surfaces parallèles, l'inversion fait correspondre une famille de surfaces dont les trajectoires orthogonales sont des cercles passant par le pôle de l'inversion, c'est-à-dire par un point fixe de l'espace. Si ce point fixe a pour coordonnées a, b, c , un calcul facile montre que le paramètre u de la famille doit satisfaire à une équation aux dérivées partielles de la forme suivante :

$$(3) \quad H = \varphi(u)[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2].$$

Cette équation est encore un cas particulier de celle (1) que nous nous proposons d'étudier. Ici encore, on pourrait réduire la fonction $\varphi(u)$ à une constante, par exemple à l'unité.

32. Les deux hypothèses que nous venons d'envisager rentrent évidemment dans la suivante : on peut supposer que, dans l'équation (1), les rapports mutuels des fonctions $\varphi_i(u)$ ou, ce qui revient au même, que ces fonctions elles-mêmes se réduisent à des constantes. Nous allons d'abord faire l'étude de ce cas particulier ; elle est extrêmement intéressante en elle-même ; et, d'ailleurs, les résultats qu'elle nous fournira nous sont indispensables dans la discussion du cas le plus général.

Soit donc l'équation

$$(4) \quad H = \alpha_0(x^2 + y^2 + z^2) + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \alpha_4,$$

où $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ sont des constantes. Effectuons une inversion dont le pôle soit sur la sphère obtenue en égalant le second membre à zéro ; puis choisissons comme plan des xy le plan dans lequel a été transformée cette sphère. On pourra ainsi, le lecteur le vérifiera aisément, réduire l'équation précédente à la

forme simple

$$H = z,$$

ou, en remplaçant H par sa valeur,

$$(5) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{z^2}.$$

Cette équation admet évidemment l'intégrale complète

$$(6) \quad u = \alpha x + \beta y + \int \sqrt{\frac{1}{z^2} - \alpha^2 - \beta^2} dz,$$

où figurent trois constantes, à savoir α , β et celle qui sera introduite par la quadrature. Les équations des caractéristiques seront

$$(7) \quad \begin{cases} x + \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \sqrt{1 - z^2(\alpha^2 + \beta^2)} = x_0, \\ y + \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \sqrt{1 - z^2(\alpha^2 + \beta^2)} = y_0, \end{cases}$$

x_0 , y_0 étant deux nouvelles constantes. Comme on peut les remplacer par les deux suivantes

$$(8) \quad \frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta}, \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2 = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2},$$

on voit que ce sont des cercles assujettis à couper à angle droit le plan des xy (1).

D'autre part, pour l'équation générale (1), comme pour toutes les équations particulières (2), (3) et (4) que nous en avons déduites, les caractéristiques sont, d'après les théories générales, définies par les équations différentielles

$$(9) \quad \frac{dx}{\frac{\partial u}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial u}{\partial y}} = \frac{dz}{\frac{\partial u}{\partial z}},$$

et représentent, par suite, les trajectoires orthogonales des familles de paramètre u .

En rapprochant cette remarque de la construction que nous

(1) Pour avoir la représentation complète de la caractéristique, il faut adjoindre à chaque point du cercle les valeurs de u et de ses dérivées.

venons de donner pour les caractéristiques, dans le cas particulier de l'équation (5), on peut évidemment énoncer le théorème suivant :

Pour construire les familles de Lamé définies par l'équation (5), on se donnera une surface quelconque (Σ), et l'on construira les cercles normaux à la fois à cette surface et à un plan (le plan des xy). Tous ces cercles seront normaux à des surfaces qui formeront une famille de Lamé.

Au reste, on peut construire individuellement les surfaces qu'il faut associer à (Σ). En effet, en retranchant de l'équation (6) les équations (7) respectivement multipliées par α et β , on verra que, sur chaque caractéristique, on a, en désignant par γ une constante nouvelle,

$$(10) \quad u = \alpha x_0 + \beta y_0 + \int \frac{-d\left(\frac{1}{z}\right)}{\sqrt{\frac{1}{z^2} - \alpha^2 - \beta^2}} = \gamma + \text{Log} \left(\frac{1}{z} - \sqrt{\frac{1}{z^2} - \alpha^2 - \beta^2} \right).$$

Désignons par u_0 le paramètre de (Σ), par u' le paramètre d'une des surfaces associées à (Σ), par z_0 et z' les z des points d'intersection M_0 et M' de ces deux surfaces par le cercle qui est la caractéristique ; nous aurons, d'après la formule précédente,

$$(11) \quad e^{u' - u_0} = \frac{\frac{1}{z'} - \sqrt{\frac{1}{z'^2} - \alpha^2 - \beta^2}}{\frac{1}{z_0} - \sqrt{\frac{1}{z_0^2} - \alpha^2 - \beta^2}}.$$

Soient P et Q les points où le cercle coupe le plan des xy , en introduisant (*fig. 1*) les angles

$$M_0OP = \theta_0, \quad M'OP = \theta'$$

des rayons OM_0 , OM' avec le plan des xy et se rappelant que

$\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$ est le rayon du cercle, on aura

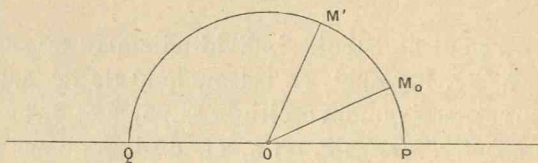
$$(12) \quad z_0 = \frac{\sin \theta_0}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad z' = \frac{\sin \theta'}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}},$$

et il viendra

$$(13) \quad e^{\frac{n'-n_0}{2}} = \frac{\operatorname{tang} \frac{\theta'}{2}}{\operatorname{tang} \frac{\theta_0}{2}}.$$

Le second membre représente sur le cercle le rapport anharmonique des quatre points M' , M_0 , P , Q et l'on voit qu'il est tout à

Fig. 1.



fait indépendant de la caractéristique considérée. On obtiendra donc toutes les surfaces (Σ') en construisant, sur chacun des cercles orthogonaux à (Σ) , le point M' qui, avec M_0 , P , Q , pris toujours dans le même ordre, donne un rapport anharmonique constant.

En transformant par inversion et en se souvenant que le rapport anharmonique de quatre points sur un cercle n'est pas changé par cette transformation, on est conduit à la proposition suivante, qui est due à Ribaucour :

Étant donnée une surface quelconque (Σ) et une sphère (S) , réelle ou imaginaire, on construit tous les cercles normaux à (S) et à (Σ) . Tous ces cercles sont orthogonaux à une famille de surfaces (Σ') , dont (Σ) fera évidemment partie, et qui sera une famille de Lamé. On peut construire par points chaque surface (Σ') en déterminant sur chaque cercle le point où il est normal à (Σ) , les deux points où il est normal à (S) et en construisant le quatrième point qui forme avec les trois précédents, pris toujours dans le même ordre, un rapport anharmonique constant.

Il résulte évidemment de cette construction que le rapport anharmonique des points où quatre surfaces déterminées de la famille sont normales à un même cercle est toujours constant.

33. La proposition précédente nous montre que, soit par des constructions géométriques, soit par des calculs purement algébriques, on pourra obtenir une infinité de familles de Lamé dont fera partie une surface donnée à l'avance. Nous venons de donner la construction des surfaces (Σ') ; pour engendrer les deux autres familles qui complètent le système triple orthogonal, il faudra évidemment associer tous les cercles normaux à (S) et à (Σ) qui rencontrent une même ligne de courbure de (Σ) . Aux deux familles de lignes de courbure correspondent évidemment deux familles de surfaces qui compléteront le système orthogonal. Ces surfaces, qui auront leurs lignes de courbure circulaires au moins dans un système, seront les enveloppes des sphères assujetties à la triple condition d'être tangentes à une même ligne de courbure de (Σ) et de couper à angle droit à la fois la surface (Σ) et la sphère (S) .

Lorsque le rayon de la sphère fixe (S) grandit indéfiniment, les surfaces (Σ') se réduisent à des surfaces parallèles les unes aux autres. Lorsque ce rayon est nul, les surfaces (Σ') deviennent les inverses, par rapport au centre de la sphère, d'une famille de surfaces parallèles.

34. La proposition de Ribaucour conduit évidemment à une méthode de transformation des surfaces avec conservation des lignes de courbure. Cette transformation appartient à la classe de celles que M. Lie a nommées *transformations de contact*. Reprenons en effet la relation définie plus haut entre les surfaces (Σ) , (Σ') . Si l'on se donne un point M de (Σ) et le plan tangent en ce point, on pourra construire le cercle (C) normal à (Σ) en M et orthogonal à la sphère fixe (S) , puis prendre sur ce cercle le point M' qui forme avec M et les deux points d'intersection de (C) et de (S) un rapport anharmonique donné. On pourra donc, connaissant le point et le plan tangent de (Σ) , construire le point correspondant M' de (Σ') ; mais on aura aussi en M' le plan tangent à (Σ') , puisque ce plan tangent est normal à (Σ') . Ainsi, les éléments qui déterminent le point et le plan tangent de l'une des surfaces dépendent des éléments analogues de la surface correspondante. C'est cette propriété qui caractérise les transformations de contact.

On voit d'ailleurs immédiatement que la transformation précé-

dente fait correspondre aux lignes de courbure de (Σ) les lignes de courbure de (Σ') . En d'autres termes, elle conserve les lignes de courbure.

Nous l'avons étudiée ailleurs avec les détails nécessaires ⁽¹⁾; nous nous contenterons ici de faire remarquer que, puisqu'elle conserve les lignes de courbure, elle doit nécessairement faire correspondre aux sphères et aux plans, surfaces dont les lignes de courbure sont indéterminées, des sphères ou des plans. C'est ce que l'on peut d'ailleurs vérifier par un calcul direct ⁽²⁾.

35. On sait que la cyclide de Dupin est la seule surface dont toutes les lignes de courbure soient circulaires, ou qui puisse être regardée de deux manières différentes comme une enveloppe de sphères dépendant d'un seul paramètre. La transformation de Ribaucour, étant une transformation de contact et conservant les sphères, fera nécessairement correspondre une cyclide à une cyclide.

D'après cela, si l'on suppose que la surface (Σ) soit une cyclide de Dupin, et si l'on emploie une sphère quelconque (S) , on en déduira, par la construction du n° 32, une famille de Lamé composée de cyclides de Dupin; mais nous voyons de plus que les deux autres familles de Lamé qui composent le système orthogonal auront toutes leurs lignes de courbure circulaires et seront, par suite, elles aussi, des cyclides de Dupin.

On obtiendra donc ainsi un système triple orthogonal exclusivement formé de cyclides de Dupin. Nous laisserons au lecteur le soin de rechercher s'il est le plus général qui possède cette propriété, et nous ferons connaître un cas spécial très intéressant signalé par M. William Roberts ⁽³⁾. Nos démonstrations seront entièrement géométriques.

⁽¹⁾ *Leçons sur la Théorie des surfaces* (Livre II, Ch. VIII, et Livre IV, Ch. XV).

⁽²⁾ On pourrait objecter au raisonnement qu'il y a, en dehors des sphères et des plans, des surfaces à lignes de courbure indéterminées : ce sont les développables circonscrites au cercle de l'infini. Le lecteur fera disparaître aisément cette difficulté en tenant compte du degré de généralité de chacune de ces surfaces.

⁽³⁾ W. ROBERTS, *Application des coordonnées elliptiques à la recherche des surfaces orthogonales* (*Journal de Crelle*, t. LXII, p. 57; 1863).

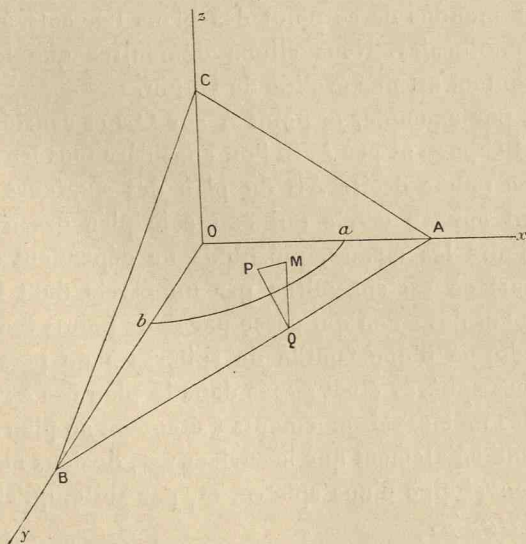
36. Considérons un système de quadriques homofocales défini par l'équation

$$(14) \quad \frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} + \frac{z^2}{c-\lambda} - 1 = 0.$$

On sait que le lieu des pôles d'un plan par rapport à toutes ces quadriques est une droite perpendiculaire au plan; cette droite coupe les plans principaux aux points qui sont les pôles du plan par rapport aux trois focales des surfaces. Une seule des quadriques homofocales est tangente au plan, et cela au point où il est rencontré par la droite précédente.

D'après cela, considérons un plan quelconque ABC (*fig. 2*), et

Fig. 2.



supposons qu'il tourne autour de son intersection par un des plans principaux, autour de AB, par exemple. Dans chacune de ses positions il touchera une des quadriques homofocales. Nous allons montrer que le lieu des points de contact sera un cercle situé dans un plan normal à AB.

Soit, en effet, P le pôle de AB par rapport à la focale ab située dans le plan des xy . Le point de contact M du plan ABC avec la quadrique qui lui est tangente sera au pied de la perpendiculaire abaissée de P sur le plan; et, si l'on abaisse du point P la perpen-

diculaire PQ sur AB, l'angle PMQ sera droit. Par suite, lorsque le plan tournera autour de AB, le point M décrira un cercle ayant PQ pour diamètre et situé dans un plan perpendiculaire à AB.

Il est aisé d'ailleurs de déterminer par une construction les deux points que ce cercle a dans le plan principal des xz par exemple. Si l'une des surfaces homofocales se réduit à la focale située dans le plan des xz , les points de contact des plans tangents menés par AB à la quadrique se réduisent évidemment aux deux points de contact des tangentes menées par A dans le plan des xz à la focale située dans ce plan. Ces deux points de contact *ne dépendent que de A et demeurent invariables quand la droite AB tourne autour de A dans le plan des xy .*

Cela posé, prenons un point fixe sur l'un des trois axes de symétrie et menons de ce point des plans tangents à toutes les surfaces homofocales. Nous allons démontrer que le lieu des points de contact est une cyclide de Dupin.

Prenons, par exemple, le point A sur Ox et considérons tous les plans ABC passant par A. Si l'on considère tous les plans passant par une même droite AB du plan des xy , leurs points de contact sont sur un cercle qui coupe le plan des xz en deux points toujours les mêmes, puisqu'ils ne dépendent que de A. Ainsi, la surface est engendrée par un cercle dont le plan est normal au plan des xy et qui passe par deux points fixes. Elle est donc l'enveloppe d'une famille de sphères à un paramètre, les centres de ces sphères étant situés dans le plan des xy .

Comme les mêmes raisonnements s'étendent au plan des xz , on reconnaît immédiatement que la surface est, de deux manières différentes, l'enveloppe d'une sphère, et, par suite, qu'elle est *une cyclide de Dupin.*

Au reste, il est très aisé de trouver son équation. Soit x' l' x du point A, et désignons par x, y, z les coordonnées d'un point d'une quadrique homofocale de paramètre ρ . Pour que le plan tangent à la quadrique homofocale en ce point vienne passer par le point A, il faut que l'on ait

$$(15) \quad xx' = a - \rho;$$

joignant cette équation à celle de la quadrique

$$(16) \quad \frac{x^2}{a - \rho} + \frac{y^2}{b - \rho} + \frac{z^2}{c - \rho} - 1 = 0,$$

et éliminant ρ , il vient

$$(17) \quad \frac{y^2}{b-a+xx'} + \frac{z^2}{c-a+xx'} + \frac{x}{x'} = 1.$$

C'est l'équation d'une cyclide du troisième degré.

Cela posé, on a évidemment trois familles de cyclides qui correspondent respectivement aux points situés sur les trois axes de symétrie. Il est aisé de démontrer que les trois familles de surfaces ainsi obtenues se coupent mutuellement à angle droit. Considérons en effet (*fig. 2*) les cyclides relatives aux trois points A, B, C. Elles ont en commun le point de contact du plan ABC avec la quadrique qui lui est tangente. Les cyclides dérivées de deux de ces points, par exemple de A et de B, se coupent suivant le cercle lieu des points de contact des plans passant par AB. Ainsi les trois cyclides se couperont mutuellement suivant des lignes de courbure communes; donc elles seront orthogonales les unes aux autres en tous les points de ces lignes communes.

Il résulte de la formule (15) que si ρ, ρ_1, ρ_2 sont les coordonnées elliptiques, et x, y, z les coordonnées rectangulaires d'un point de l'espace, les paramètres des trois familles de cyclides sont

$$\frac{a-\rho}{x}, \quad \frac{b-\rho}{y}, \quad \frac{c-\rho}{z}.$$

On vérifie ce résultat par un calcul direct. Si l'on ne veut introduire que les coordonnées elliptiques, on aura, pour les paramètres des trois familles, les expressions suivantes :

$$(18) \quad \frac{(\alpha-\rho_1)(\alpha-\rho_2)}{\alpha-\rho}, \quad \frac{(b-\rho_1)(b-\rho_2)}{b-\rho}, \quad \frac{(c-\rho_1)(c-\rho_2)}{c-\rho}.$$

On voit que l'on aura *trois systèmes orthogonaux différents* suivant que ρ désignera le paramètre des ellipsoïdes, des hyperboloïdes à une nappe, ou des hyperboloïdes à deux nappes du système homofocal.

37. Revenons à la transformation de Ribaucour. On connaissait déjà différentes transformations qui conservent les lignes de courbure, l'inversion, la *dilatation*, c'est-à-dire l'opération par laquelle on passe d'une surface à la surface parallèle, une trans-

formation due à O. Bonnet (1). M. Lie s'est proposé de déterminer toutes les transformations de contact qui conservent les lignes de courbure. Nous allons indiquer rapidement les résultats obtenus par l'éminent géomètre, parce qu'ils éclaireront la discussion dans la suite de ce Chapitre.

Remarquons d'abord que toute transformation de ce genre doit faire correspondre à une surface dont les lignes de courbure sont indéterminées une surface dont les lignes de courbure soient aussi indéterminées. Or on ne connaît que deux classes bien distinctes de telles surfaces : la première comprend les sphères et les plans qui dépendent au plus de quatre constantes ; la seconde comprend les développables isotropes, développables qui dépendent d'une fonction arbitraire. Donc la transformation cherchée doit nécessairement transformer une développable isotrope en une développable isotrope et faire correspondre une sphère à une sphère (en considérant le plan comme une sphère de rayon infini). Comme la transformation est une transformation de contact, elle doit faire correspondre à deux sphères qui se touchent deux autres sphères qui se touchent également. Par suite, si nous employons la transformation de M. Lie, qui fait correspondre à une sphère une ligne droite (2), et si nous soumettons la figure tout entière à cette transformation, on voit que, dans l'espace qui contiendra les droites, les transformations cherchées feront correspondre une droite à une droite, et deux droites qui se coupent à deux droites qui se coupent. Cette double propriété permet de les définir sans calcul ; car, si l'on considère toutes les droites qui passent en un point quelconque, ces droites doivent être transformées en droites se coupant mutuellement, c'est-à-dire en droites passant par un point ou situées dans un plan. Il y a donc deux cas à distinguer : dans le premier, aux droites passant par un point correspondront des droites passant par un autre point ; la transformation sera donc *ponctuelle*, elle fera nécessairement correspondre un plan à un plan, une droite à une droite, et sera, par suite, *la transformation homographique la plus générale*. Dans le second cas, un plan correspondra à un point, mais on

(1) Voir *Leçons sur la théorie des surfaces* (I^{re} Partie, Livre II, Ch. VIII).

(2) Voir *Leçons sur la théorie des surfaces* (n^{os} 157, 168, 978 et suiv.).

ramènera ce cas au premier, en effectuant une transformation quelconque par polaires réciproques. On n'obtient donc, en résumé, que deux transformations : l'homographie ou la corrélation la plus générale.

Dans l'une et dans l'autre, les coordonnées de la ligne droite (1) subissent la transformation linéaire la plus générale qui respecte la relation quadratique entre les coordonnées ; elles se distinguent seulement par le signe du déterminant de la substitution.

Si nous revenons maintenant à l'espace qui contient les sphères, nous savons que les coordonnées de chaque sphère sont égales à celles de la ligne droite correspondante (2). Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant, qui résume les recherches de M. Lie.

Les transformations de contact les plus générales qui conservent les lignes de courbure sont celles qui soumettent les six coordonnées homogènes d'une sphère à la transformation linéaire la plus générale qui conserve la relation quadratique entre les coordonnées.

Supposons, par exemple, que, x_1, \dots, x_5 désignant des coordonnées pentasphériques (3) d'un point, on prenne l'équation de la sphère sous la forme

$$(19) \quad m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4 + m_5 x_5 = 0.$$

La sixième coordonnée de cette sphère sera définie par la relation

$$(20) \quad m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 + m_5^2 + m_6^2 = 0;$$

et les transformations avec conservation des lignes de courbure se réduiront à des substitutions linéaires orthogonales effectuées sur

(1) *Leçons sur la théorie des surfaces* (I^{re} Partie, n^o 139).

(2) *Leçons sur la théorie des surfaces*, n^{os} 156, 157. Pour que la relation énoncée dans le texte soit tout à fait exacte, il faut prendre les coordonnées de la droite employées par M. F. Klein, c'est-à-dire celles pour lesquelles la relation quadratique entre les coordonnées est ramenée à la forme

$$\sum_{i=1}^{i=6} x_i^2 = 0.$$

(3) *Leçons sur la théorie des surfaces* (I^{re} Partie, n^{os} 150 et suiv.).

les six coordonnées. On voit que, dans l'étude de la Géométrie des sphères, elles doivent jouer le même rôle que les rotations et les transformations par symétrie dans l'espace à trois dimensions.

38. Ces résultats étant rappelés, revenons à l'équation (1) et mettons-la sous la forme

$$(21) \quad H = a_1 \frac{x^2 + y^2 + z^2 + R^2}{2Ri} + a_2 x + a_3 y + a_4 z + a_5 \frac{x^2 + y^2 + z^2 - R^2}{2R},$$

ce qui revient à employer un système de coordonnées pentasphériques spéciales. R désigne une constante, a_1, a_2, \dots, a_5 des fonctions de u . Pour intégrer cette équation aux dérivées partielles du premier ordre, nous allons en chercher une intégrale complète; et, pour cela, nous allons examiner si l'on pourrait la vérifier en prenant une famille de sphères dont nous écrivons l'équation sous la forme

$$(22) \quad \xi_1 \frac{x^2 + y^2 + z^2 + R^2}{2Ri} + \xi_2 x + \xi_3 y + \xi_4 z + \xi_5 \frac{x^2 + y^2 + z^2 - R^2}{2R} = 0,$$

ξ_1, \dots, ξ_5 désignant des fonctions de u .

Si l'on introduit la sixième coordonnée de la sphère précédente définie par la relation

$$(23) \quad \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_5^2 = 0,$$

un calcul facile montre que la famille de sphères satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$H = \frac{1}{i\xi_6} \left[\frac{d\xi_1}{du} \frac{x^2 + y^2 + z^2 + R^2}{2Ri} + \frac{d\xi_2}{du} x + \frac{d\xi_3}{du} y + \frac{d\xi_4}{du} z + \frac{d\xi_5}{du} \frac{x^2 + y^2 + z^2 - R^2}{2R} \right],$$

et cette équation se réduira à la proposée, si l'on a, pour $k = 1, 2, \dots, 5$,

$$(24) \quad \frac{d\xi_k}{du} = i\xi_6 a_k.$$

En différentiant la relation identique (23), on reconnaîtra que l'on peut joindre à ces équations la suivante

$$(25) \quad \frac{d\xi_6}{du} = -i(a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \dots + a_5 \xi_5),$$

de sorte que les équations (24), (25) constituent maintenant un système linéaire admettant l'intégrale quadratique

$$(26) \quad \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_6^2 = \text{const.}$$

La solution générale de ce système sera donnée, comme on sait, par des formules telles que les suivantes :

$$(27) \quad \xi_k = C_1 \xi_k^1 + C_2 \xi_k^2 + \dots + C_6 \xi_k^6 \quad (k = 1, 2, \dots, 6),$$

où C_1, C_2, \dots, C_6 désignent six constantes arbitraires. En portant ces expressions dans l'équation (26), nous aurons la relation

$$\sum_{i, i'} C_i C_{i'} \sum_k \xi_k^i \xi_k^{i'} = \text{const.}$$

qui devra avoir lieu pour toutes les valeurs des constantes C_i . Pour qu'il en soit ainsi, il faut évidemment que l'on ait

$$(28) \quad \sum_k \xi_k^i \xi_k^{i'} = \alpha_{i, i'},$$

$\alpha_{i, i'}$ désignant une constante. On aura donc, si l'on veut satisfaire à l'équation (23), la condition

$$(29) \quad \sum_{i, i'} \alpha_{i, i'} C_i C_{i'} = 0.$$

Cette relation entre les constantes peut toujours être ramenée, par une substitution linéaire à coefficients constants, qui ne change pas la forme de la solution générale, à une somme de carrés. Nous pourrions donc supposer que l'on ait

$$(30) \quad \sum_k \xi_k^i \xi_k^{i'} = 0, \quad i \neq i',$$

et

$$(31) \quad \sum_k (\xi_k^i)^2 = 1;$$

de sorte que la relation entre les constantes deviendra

$$(32) \quad C_1^2 + C_2^2 + \dots + C_6^2 = 0.$$

Ainsi, la solution générale du système des équations (23), (24)

et (25) sera définie par les formules (27), où C_1, C_2, \dots, C_6 seront des constantes liées par la relation précédente. Nous pouvons remarquer que les fonctions ξ_k^i sont, d'après les formules (30) et (31), les coefficients d'une substitution orthogonale, et, par suite, satisfont aussi aux relations

$$(33) \quad \sum_i \xi_k^i \xi_{k'}^i = 0, \quad \sum_i (\xi_k^i)^2 = 1.$$

Si nous portons maintenant les expressions générales de ξ_1, \dots, ξ_5 dans l'équation (22) de la famille de sphères considérée, cette équation prendra la forme

$$(34) \quad C_1 S_1 + C_2 S_2 + \dots + C_6 S_6 = 0,$$

où l'on aura

$$(35) \quad S_h = \xi_1^h \frac{x^2 + y^2 + z^2 + R^2}{2R} + \xi_2^h x + \xi_3^h y + \xi_4^h z + \xi_5^h \frac{x^2 + y^2 + z^2 - R^2}{2R},$$

et il résulte des relations (33) que l'on aura identiquement

$$(36) \quad \sum_1^6 S_h^2 = 0, \quad \sum_1^6 \xi_6^h S_h = 0.$$

39. L'équation générale (34) de la famille de sphères qui satisfait à l'équation aux dérivées partielles proposée contient six constantes qui y entrent d'une manière homogène et sont uniquement assujetties à la condition (32). Toute intégrale complète de cette équation doit contenir trois constantes. Nous avons donc ici une de ces intégrales à constantes surabondantes qui se présentent quelquefois dans les intégrations. On pourrait, pour rentrer dans la théorie ordinaire, réduire d'une unité le nombre de ces constantes, en établissant entre elles une nouvelle relation homogène, en annulant l'une d'elles, par exemple. Il nous paraît préférable de raisonner comme il suit :

Considérons les six constantes C_k , liées par la relation (32), comme les coordonnées homogènes d'une sphère (C). Pour chaque valeur du paramètre u , les formules (27), qui font connaître les coordonnées ξ_k de la sphère (S) définie par l'équation (34), peuvent être envisagées comme constituant une substitution

linéaire orthogonale par laquelle on passe des coordonnées C_k aux ξ_k . Elles définissent donc, d'après ce que nous avons établi plus haut, une transformation de contact avec conservation des lignes de courbure.

D'après cela, procédons comme nous ferions avec une intégrale complète ordinaire. Exprimons que toutes les sphères (S_0) correspondantes à une valeur u_0 de u sont tangentes à une surface donnée (Σ_0); nous obtiendrons une certaine relation

$$(36 \text{ bis}) \quad \varphi(C_1, \dots, C_6) = 0,$$

exprimant que la sphère (C) définie plus haut est tangente à une certaine surface (A). Donc, en répétant le raisonnement en sens inverse, on verra que toutes les sphères correspondantes à une valeur quelconque u' de u sont tangentes à une surface (Σ') qui correspondra, point par point, à (A) ou à (Σ_0) avec conservation des lignes de courbure. La famille des surfaces (Σ'), dont fera partie (Σ_0), donnera la solution la plus générale de l'équation aux dérivées partielles proposée (1).

La méthode, on le voit, ne diffère en rien de celle que l'on aurait à suivre avec une intégrale complète ordinaire. Ici seulement il y a une infinité de sphères tangentes en chaque point des trois surfaces (A), (Σ_0), (Σ'). Par exemple, il y a une infinité de sphères (C) tangentes en un point de (A). Cela résulte immédiatement de ce que la condition (36 bis) laisse encore subsister trois constantes arbitraires dans l'équation de la sphère (C).

En réunissant les résultats précédents, on peut énoncer la proposition suivante :

Étant donnée une surface (Σ), appliquons-lui les transformations de contact qui conservent les lignes de courbure et qui dépendent de quinze constantes. En intégrant des systèmes d'équations différentielles, tels que celui formé par les équations (24) et (25), on pourra former avec ces surfaces une infinité de familles de Lamé, qui dépendront de quatre fonctions arbitraires d'une variable et pourront comprendre la surface proposée.

39. On peut compléter cette proposition à l'aide des remarques suivantes.

Reprenons le système des équations

$$(37) \quad \begin{cases} \frac{d\xi_k}{du} = i\xi_6 a_k, & (k = 1, 2, \dots, 5), \\ \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 + \xi_5^2 + \xi_6^2 = 0, \end{cases}$$

qui déterminent les fonctions ξ_i . En effectuant un changement de notations, posons

$$(38) \quad a_k = \frac{1}{r} \frac{db_k}{du},$$

r et b_k désignant de nouvelles fonctions de u ; puis substituons aux fonctions ξ_k les inconnues y_k définies par les formules

$$(39) \quad r\xi_k = i\xi_6(b_k - y_k), \quad (k = 1, 2, \dots, 5).$$

En différenciant, on trouvera que les nouvelles variables satisfont aux équations différentielles

$$(40) \quad \frac{dy_1}{y_1 - b_1} = \frac{dy_2}{y_2 - b_2} = \dots = \frac{dy_5}{y_5 - b_5},$$

qui, jointes à l'équation en termes finis déduite de la seconde (37),

$$(41) \quad (y_1 - b_1)^2 + \dots + (y_5 - b_5)^2 = r^2,$$

suffront à la détermination des inconnues y_i .

Nous sommes ramené à un problème que nous avons étudié dans le Chapitre précédent, et qui revient à déterminer les trajectoires orthogonales d'une famille de sphères dans un espace à cinq dimensions. Nous savons que nous pouvons mettre les fonctions b_i et r sous une forme telle que l'intégrale générale puisse être obtenue sans aucun signe de quadrature. Nous pouvons donc, en rapprochant ce résultat de celui qui a été énoncé au numéro précédent, énoncer la conclusion suivante de ces recherches :

On peut toujours, sans aucun signe de quadrature et en introduisant quatre fonctions arbitraires d'une variable, déterminer une famille de Lamé dont fera partie une surface quelconque donnée à l'avance, et déterminer en même temps les trajectoires orthogonales des surfaces qui composent cette famille.

40. En terminant ce Chapitre, nous donnerons l'interprétation géométrique de l'équation aux dérivées partielles à laquelle satisfont toutes les familles précédentes. Cette interprétation repose sur la considération des cercles osculateurs aux trajectoires orthogonales.

Considérons, d'une manière générale, une famille quelconque de surfaces définie par l'équation

$$(42) \quad u = f(x, y, z),$$

et désignons encore par H l'invariant différentiel du premier ordre

$$(43) \quad H = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}},$$

dont la signification géométrique est évidente. Les cosinus directeurs de la normale à la surface de paramètre u , prise dans un sens convenable, sont

$$(45) \quad H \frac{\partial u}{\partial x}, \quad H \frac{\partial u}{\partial y}, \quad H \frac{\partial u}{\partial z};$$

et, si l'on se déplace suivant cette normale, on a

$$(46) \quad H = \frac{dn}{du},$$

dn étant le chemin infiniment petit parcouru sur la normale quand u prend l'accroissement du . $H du$ est donc, en chaque point, la distance de deux surfaces infiniment voisines, de paramètres u et $u + du$ respectivement.

Si l'on se donne une surface (Σ) de la famille et, en chaque point de cette surface, la valeur de H , c'est donc comme si l'on se donnait la surface infiniment voisine (Σ') . On conçoit dès lors que l'on pourra déterminer, en quelque sorte, deux éléments consécutifs des courbes trajectoires orthogonales de la famille sans introduire d'autres quantités que les valeurs de H et leurs dérivées relatives à des déplacements effectués sur (Σ) . Il sera donc inutile de connaître les dérivées de H suivant la normale à (Σ) . C'est ce que confirme le calcul suivant.

En chaque point de (Σ) , les cosinus directeurs $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ de la tangente à la trajectoire orthogonale seront définis par les équations suivantes :

$$(47) \quad \frac{dx}{ds} = H \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{dy}{ds} = H \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{dz}{ds} = H \frac{\partial u}{\partial z},$$

l'arc s étant compté dans un sens convenable. Différentions ces équations pour avoir $\frac{d^2x}{ds^2}$, $\frac{d^2y}{ds^2}$, $\frac{d^2z}{ds^2}$. Nous aurons, par exemple,

$$(48) \quad \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(H \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{dx}{ds} + \frac{\partial}{\partial y} \left(H \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{dy}{ds} + \frac{\partial}{\partial z} \left(H \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{dz}{ds},$$

ou, en remplaçant $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ par leurs valeurs,

$$(49) \quad \frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial x} + H \frac{\partial u}{\partial x} \delta_u H.$$

Cette formule met en évidence la propriété annoncée. Si b , b' , b'' sont les cosinus directeurs de la normale principale, et ρ le rayon de courbure de la trajectoire orthogonale, nous en déduisons les équations suivantes :

$$(50) \quad \begin{cases} \frac{b}{\rho} = -\frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial x} + H \frac{\partial u}{\partial x} \delta_u H, \\ \frac{b'}{\rho} = -\frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial y} + H \frac{\partial u}{\partial y} \delta_u H, \\ \frac{b''}{\rho} = -\frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial z} + H \frac{\partial u}{\partial z} \delta_u H, \end{cases}$$

qui nous conduisent à la relation

$$(51) \quad \frac{b \delta x + b' \delta y + b'' \delta z}{\rho} = -\frac{1}{H} \delta H,$$

δx , δy , δz se rapportant à un déplacement quelconque sur la surface (Σ) . Cette relation peut même revêtir une forme entièrement géométrique; et si δs désigne la grandeur du déplacement, θ l'angle qu'il fait avec la normale principale de la trajectoire orthogonale,

elle nous donne

$$(52) \quad \frac{\cos \theta}{\rho} = -\frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial s}.$$

On voit ainsi que la normale principale des trajectoires est orthogonale aux courbes de (Σ) pour lesquelles H demeure constante ; et que, si l'on se déplace normalement à une de ces courbes, on a

$$(53) \quad \frac{1}{\rho} = -\frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial s}.$$

Il est ainsi établi que les éléments du second ordre dépendent exclusivement des valeurs que prend H sur (Σ) , et nullement de la dérivée de H suivant la normale.

41. Inversement, si l'on connaît les cercles osculateurs des trajectoires, H sera défini à un facteur constant près. Car il résulte de la formule (51) que l'expression

$$(54) \quad \frac{b dx + b' dy + b'' dz}{\rho}$$

devra être une différentielle exacte lorsqu'on se déplacera sur (Σ) et que l'on aura

$$(55) \quad H = H_0 e^{-\int_{M_0}^M \frac{b dx + b' dy + b'' dz}{\rho}},$$

l'intégrale étant prise entre deux points M_0 , M de (Σ) , suivant une courbe quelconque reliant ces deux points, et H_0 étant la valeur de H pour le point M_0 .

On voit même que les cercles osculateurs ne sauraient être pris arbitrairement ; ils doivent satisfaire à la condition que l'expression (54) soit une différentielle exacte, relativement aux déplacements qui se font sur (Σ) . L'interprétation géométrique de cette condition ressort des formules précédentes.

42. Nous aurons à faire usage de ces résultats. Si nous les appliquons, dès à présent, à la question que nous avons étudiée dans ce Chapitre, nous voyons que l'équation aux dérivées partielles (1), qui définit une famille de surfaces (Σ) , fait connaître,

pour chacune d'elles, la plus courte distance $H du$ entre la surface et la surface infiniment voisine, et cette expression de $H du$ est la même que si les fonctions $\varphi_i(u)$ étaient remplacées par des constantes égales aux valeurs qu'elles prennent respectivement pour la surface (Σ) . Par suite, les cercles osculateurs des trajectoires orthogonales demeureront les mêmes en tous les points de (Σ) après cette substitution; et comme, après cette substitution, les trajectoires se réduisent à des cercles, qui sont orthogonaux à une sphère dont l'équation s'obtient en égalant le second membre de l'équation (1) à zéro, on voit que nous sommes conduit à la proposition générale suivante :

Les familles de Lamé étudiées et déterminées dans ce Chapitre sont caractérisées par la propriété suivante : les cercles osculateurs des trajectoires orthogonales aux points où elles rencontrent une des surfaces de la famille sont orthogonaux à une même sphère qui peut varier d'ailleurs quand on passe de la surface à toute autre de la famille, et qu'on obtient en égalant le second membre de l'équation (1) à zéro.

Nous verrons plus loin qu'il suffirait, pour obtenir les mêmes familles, d'exiger que les plans osculateurs des trajectoires aux points où elles rencontrent une des surfaces de la famille aillent passer par un même point, qui pourra varier d'ailleurs avec la surface considérée.

43. La notion des transformations infinitésimales permet de se représenter géométriquement les opérations par lesquelles nous avons obtenu tous les résultats établis dans ce Chapitre. Appelons, pour un instant, *transformation de Ribaucour* celle que nous avons étudiée plus haut aux n^{os} 32 et suiv.; elle se définit entièrement à l'aide d'une sphère (S) , que nous appellerons la *sphère principale* de la transformation, et d'un rapport anharmonique. Étant donnée une surface (Σ) , on construit le cercle normal en un point M à (Σ) et orthogonal à (S) ; puis on fait correspondre à M le point M_0 tel que le rapport anharmonique des points M_0, M , et des deux points où le cercle rencontre (S) , soit un nombre donné. Il est clair que cette transformation deviendra infinitésimale si le rapport anharmonique est infiniment

voisin de 1. Ce point étant admis, voici comment on construit toutes les familles de Lamé précédemment obtenues. On prend une surface quelconque (Σ) et une suite définie de sphères infiniment voisines (S_0) , (S_1) , (S_2) , Cela posé, on effectue, à l'aide de la sphère principale (S_0) , une transformation infinitésimale sur (Σ) , ce qui donne une surface (Σ_1) ; puis, à l'aide de la sphère (S_1) , une transformation infinitésimale sur (Σ_1) qui donne une surface (Σ_2) , et ainsi de suite. On engendre ainsi une série de surfaces (Σ) , (Σ_1) , (Σ_2) , . . . , qui forment précisément la famille de Lamé dont nous avons fait l'étude.

CHAPITRE IV.

FORMES DIVERSES DE L'ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU TROISIÈME ORDRE.

On peut obtenir l'équation aux dérivées partielles du troisième ordre en exprimant que la plus courte distance d'une surface de la famille à la surface infiniment voisine est une solution particulière de l'équation ponctuelle relative au système conjugué formé par les lignes de courbure. — Théorème de Ribaucour : les cercles osculateurs des trajectoires orthogonales aux points où elles rencontrent une surface déterminée de la famille forment un système cyclique. — Démonstration de la proposition réciproque. — Rappel des études antérieures sur les systèmes cycliques et étude de deux problèmes nouveaux : 1^o détermination des familles de Lamé pour lesquelles les plans osculateurs des trajectoires orthogonales aux points où elles rencontrent l'une des surfaces de la famille concourent en un même point ; 2^o détermination des systèmes cycliques formés de cercles dont les plans enveloppent une développable. — Forme remarquable de l'équation du troisième ordre donnée par M. Maurice Lévy ; on prend comme variables indépendantes le paramètre u de la famille et deux des coordonnées rectangulaires. — Application de cette équation à la détermination des surfaces invariables de forme qui peuvent, en se déplaçant, engendrer une famille de Lamé. — Quand le mouvement de la surface est unique et déterminé, il est nécessairement hélicoïdal. — Applications particulières. — Étude du cas où la surface peut, dans plusieurs mouvements différents, engendrer une famille de Lamé. — Indication de divers résultats. — M. J. Bertrand a montré, par la Géométrie, que, si ces mouvements comprennent toutes les translations, la surface est une sphère ou un cylindre. — M. Adam a établi, par l'analyse, que le résultat subsiste si les mouvements se réduisent à deux translations distinctes. — Interprétation géométrique élégante due à M. Petot. L'équation aux dérivées partielles qui caractérise la surface cherchée exprime la propriété suivante : la droite du plan tangent qui joint les centres de courbure géodésique des deux lignes de courbure appartient à un complexe linéaire. — Théorème de M. Cosserat. — Retour à l'équation générale du troisième ordre. — Formation de cette équation quand la famille est déterminée par une équation implicite $\varphi(x, y, z, u) = 0$. Développement de l'équation en vue des applications ultérieures.

44. Après les applications particulières développées dans les deux Chapitres précédents, nous allons revenir à l'équation du troisième ordre, à laquelle doit satisfaire le paramètre u de toutes les surfaces faisant partie d'une famille de Lamé. Nous avons vu,

au n° 45, qu'elle peut se mettre sous la forme

$$(1) \quad v_1 \omega_1 H_{11} + (v_1 \omega_2 + v_2 \omega_1) H_{12} + \dots = 0,$$

où H désigne la fonction

$$(2) \quad H = \frac{1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}.$$

Si donc nous nous rappelons la signification de $v_1, \dots, \omega_1, \dots$, et qu'au lieu de ces dérivées des fonctions v, ω , nous introduisons des différentielles par les formules

$$\frac{dx}{v_1} = \frac{dy}{v_2} = \frac{dz}{v_3}, \quad \frac{\delta x}{\omega_1} = \frac{\delta y}{\omega_2} = \frac{\delta z}{\omega_3},$$

dx, dy, dz et $\delta x, \delta y, \delta z$ définiront respectivement les deux déplacements infiniment petits qui peuvent se produire suivant les deux lignes de courbure de la surface de paramètre u ; et l'équation du problème pourra s'écrire

$$H_{11} dx \delta x + H_{12}(dx \delta y + dy \delta x) + \dots = 0,$$

ce qui équivaut, comme on sait, à la forme plus simple

$$(3) \quad d \delta H - \frac{\partial H}{\partial x} d \delta x - \frac{\partial H}{\partial y} d \delta y - \frac{\partial H}{\partial z} d \delta z = 0.$$

La signification géométrique de H est d'ailleurs évidente et a déjà été rappelée: $H du$ est, pour chaque point, la distance de deux surfaces infiniment voisines admettant pour paramètres u et $u + du$.

45. Le résultat que nous venons d'obtenir peut s'énoncer sous une forme différente. Prenons, sur les surfaces de paramètre u , un système de coordonnées curvilignes formé par les lignes de courbure, et soient ρ_1, ρ_2 les paramètres de ces deux familles de lignes. Nous savons que x, y, z , considérées comme fonctions de ρ_1, ρ_2 , seront des solutions particulières d'une équation linéaire de la forme

$$(4) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho_2 \partial \rho_1} = a \frac{\partial \theta}{\partial \rho_1} + b \frac{\partial \theta}{\partial \rho_2},$$

qui admettra d'ailleurs aussi la solution particulière

$$\theta = x^2 + y^2 + z^2.$$

Avec ces variables ρ_1, ρ_2 , l'équation (3) prendra évidemment la forme suivante :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} - \frac{\partial H}{\partial z} \frac{\partial^2 z}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} = 0.$$

Si l'on y remplace $\frac{\partial^2 x}{\partial \rho_1 \partial \rho_2}, \frac{\partial^2 y}{\partial \rho_1 \partial \rho_2}, \frac{\partial^2 z}{\partial \rho_1 \partial \rho_2}$ par les valeurs que fournit l'équation (4), elle devient

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} - a \left(\frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \rho_1} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \rho_1} + \frac{\partial H}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \rho_1} \right) \\ - b \left(\frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \rho_2} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \rho_2} + \frac{\partial H}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \rho_2} \right) = 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(5) \quad \frac{\partial^2 H}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} - a \frac{\partial H}{\partial \rho_1} - b \frac{\partial H}{\partial \rho_2} = 0.$$

Donc :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille de surfaces fasse partie d'un système triple orthogonal est que la plus courte distance de deux surfaces infiniment voisines soit une solution particulière de l'équation ponctuelle relative au système conjugué formé par les lignes de courbure.

Rappelons que cette équation peut être formée ⁽¹⁾ dès que l'on connaît l'élément linéaire de la surface de paramètre u ; si l'on a

$$(6) \quad ds^2 = H_1^2 d\rho_1^2 + H_2^2 d\rho_2^2,$$

elle est

$$(7) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \rho_1} \frac{\partial \theta}{\partial \rho_2} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \rho_2} \frac{\partial \theta}{\partial \rho_1} = 0.$$

46. La proposition précédente, rapprochée des résultats obtenus aux nos 40 et 41, doit nécessairement conduire à une propriété de l'ensemble des cercles osculateurs aux trajectoires orthogonales

(1) *Leçons sur la Théorie des surfaces* (I^{re} Partie, n° 149).

des surfaces de la famille, aux points où elles rencontrent une de ces surfaces. Cette propriété, qui est due à Ribaucour, s'énonce comme il suit :

Si l'on construit, pour chaque trajectoire orthogonale, le cercle osculateur au point où elle rencontre une surface déterminée (Σ) de la famille considérée, tous les cercles ainsi obtenus forment un système cyclique, c'est-à-dire sont orthogonaux à une nouvelle famille de surfaces comprenant (Σ) et faisant aussi partie d'un système triple orthogonal.

Nous laisserons au lecteur le soin de démontrer cette proposition par l'analyse, et nous allons reproduire ici les considérations géométriques très simples par lesquelles on l'établit ⁽¹⁾.

Soit M un point de (Σ); désignons par (Σ_1), (Σ_2) les deux surfaces orthogonales qui passent en M, se coupent suivant une ligne de courbure commune (C) et coupent (Σ) suivant deux lignes de courbure (C_1), (C_2). Soient P_1 et P_2 les centres de courbure principaux de (Σ_1) et de (Σ_2) relatifs à la ligne de courbure (C). La ligne $P_1 P_2$ est l'axe du cercle osculateur en M à (C), et ce cercle lui-même est, d'après le théorème de Meusnier, l'intersection des deux sphères (S_1), (S_2), qui passent en M et ont pour centre respectivement P_1 et P_2 . Déplaçons-nous à partir de M suivant la ligne (C_1); le centre de courbure P_1 décrira un élément de courbe tangent à l'axe $P_1 P_2$ ⁽²⁾; et, par suite, la sphère (S_1) aura une enveloppe qu'elle touchera suivant un cercle passant en M et situé dans un plan normal à $P_1 P_2$, c'est-à-dire suivant le cercle osculateur de (C). Déplaçons-nous, de même, suivant la ligne de courbure (C_2); la sphère (S_2) touchera aussi son enveloppe suivant le cercle osculateur de (C). Il suit de là que les cercles osculateurs des trajectoires (C) appartiennent à deux séries d'enveloppes de sphères qui se coupent mutuellement à angle droit, suivant ces cercles.

⁽¹⁾ *Leçons sur la Théorie des surfaces* (IV^e Partie, n^o 972, p. 165).

⁽²⁾ *Leçons sur la Théorie des surfaces* (III^e Partie, n^o 752, p. 334). La proposition établie dans ce numéro peut s'énoncer aussi comme il suit : *Construisons, en chaque point d'une surface, les cercles osculateurs aux deux lignes de courbure qui se croisent en ce point. Chacun d'eux engendre une enveloppe de sphères lorsqu'on se déplace sur la ligne de courbure à laquelle il n'est pas osculateur.*

Comme ces cercles sont des lignes de courbure communes, il résulte de la réciproque du théorème de Dupin (n° 6) qu'ils admettront une famille de surfaces trajectoires orthogonales. Cette troisième famille, jointe aux deux précédentes formées d'enveloppes de sphères, complètera le système triple orthogonal.

Telle est la démonstration géométrique du théorème de Ribaucour ; il convient maintenant d'établir la réciproque : *Si une famille de surfaces est telle que les cercles osculateurs des trajectoires orthogonales aux points où elles rencontrent une quelconque (Σ) des surfaces de la famille forment un système cyclique, cette famille de surfaces fera partie d'un système triple orthogonal, c'est-à-dire ce sera une famille de Lamé.*

Nous avons vu, en effet, que la connaissance des cercles osculateurs des trajectoires entraîne celle de la plus courte distance de deux surfaces infiniment voisines (n° 41). Cette plus courte distance sera la même pour la famille proposée que pour le système cyclique formé par les cercles osculateurs des trajectoires ; et, par suite, elle devra nécessairement satisfaire à l'équation aux dérivées partielles (7) ; ce qui montre bien que la famille de surfaces proposée sera une famille de Lamé.

47. Dans un Ouvrage antérieur (¹), nous avons longuement étudié les systèmes cycliques. Nous aurons l'occasion d'y revenir encore. Pour le moment, nous nous contenterons d'étudier les deux questions suivantes, relatives à ces systèmes.

Proposons-nous d'abord de rechercher les familles de Lamé pour lesquelles les plans osculateurs des trajectoires, aux points où elles rencontrent l'une des surfaces de la famille, sont tous concourants en un même point, qui peut varier d'ailleurs avec la surface que l'on considère. En d'autres termes, proposons-nous de trouver tous les systèmes cycliques composés de cercles dont les plans vont passer par un point fixe.

Pour résoudre cette question, remarquons que, si l'on exprime que le plan osculateur d'une trajectoire va passer par un point

(¹) *Leçons sur la Théorie des surfaces* (nos 477-482, 761-762, 806-807, 936-953, 961-970).

fixe (α, β, γ) , on sera conduit à l'équation

$$(8) \quad \begin{vmatrix} x - \alpha & y - \beta & z - \gamma \\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Remplaçons $\frac{dx}{ds}, \dots, \frac{d^2x}{ds^2}, \dots$ par les valeurs relatives aux trajectoires et obtenues au Chapitre précédent, n° 40. En conservant les notations employées, nous serons conduit à l'équation

$$(9) \quad \begin{vmatrix} x - \alpha & y - \beta & z - \gamma \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial H}{\partial x} & \frac{\partial H}{\partial y} & \frac{\partial H}{\partial z} \end{vmatrix} = 0,$$

dont l'intégration s'effectue immédiatement et nous donne

$$H = f(u, \omega),$$

où l'on a posé

$$(10) \quad \omega = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2.$$

Il importe de remarquer que, le point (α, β, γ) pouvant varier avec la surface considérée, il faut regarder α, β, γ comme des fonctions de u .

Si nous substituons la valeur de H dans l'équation (7) et si nous remarquons que ω est solution particulière de cette équation, nous trouverons

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \omega^2} \frac{\partial \omega}{\partial \rho_1} \frac{\partial \omega}{\partial \rho_2} = 0.$$

Si aucune des dérivées $\frac{\partial \omega}{\partial \rho_1}, \frac{\partial \omega}{\partial \rho_2}$ n'est nulle, il viendra

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \omega^2} = 0,$$

ce qui donnera

$$H = \delta [(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2] + \varepsilon,$$

δ et ε étant de nouvelles fonctions de u . Cette équation aux dé-

rivées partielles est précisément celle qui a été étudiée au Chapitre précédent.

Si l'une des dérivées $\frac{\partial \omega}{\partial \rho_1}$, $\frac{\partial \omega}{\partial \rho_2}$ est nulle, la surface considérée a ses lignes de courbure d'un système situées sur des sphères ayant pour centre commun le point (α, β, γ) . Les lignes de courbure de l'autre système seront donc situées dans des plans passant par le centre commun des sphères. Ces plans couperont la surface à angle droit : elle sera donc une sphère si les deux dérivées sont nulles, ou une surface-moulure conique si une seule dérivée est nulle. Si elle est une sphère, il est clair que les plans osculateurs des trajectoires orthogonales passeront tous par le centre de la sphère et satisferont à la condition posée ; si elle est une surface-moulure conique, c'est-à-dire une surface-moulure (Σ) pour laquelle le plan du profil de la moulure enveloppe un cône ayant pour sommet le centre de la sphère, les plans osculateurs des trajectoires orthogonales en tous les points du profil se confondront évidemment avec le plan de ce profil ; et, par suite, le plan de ce profil sera tangent en tous les points du profil à une surface (Θ) appartenant à l'une des deux familles qui doivent compléter le système triple orthogonal. Cette surface sera donc développable. Elle se réduira nécessairement au plan du profil, si ce profil est une ligne courbe ; car une surface développable ne peut être touchée que suivant une droite par son plan tangent. Le système triple orthogonal correspondant sera donc un cas particulier de celui que nous avons étudié aux n^{os} 17 et suiv. On l'obtiendra en traçant dans un plan (P) deux séries de courbes orthogonales (C) et (C_1) , puis en faisant rouler le plan (P) sur un cône. Dans ce cas, en effet, les plans osculateurs des trajectoires orthogonales des surfaces-moulures engendrées par les courbes (C) et (C_1) vont passer par le sommet du cône.

Si le profil considéré plus haut est une ligne droite, le lecteur arrivera aisément à la même conclusion. Les développables (Θ) seront alors engendrées par les normales à une certaine surface (U) , qui aura une famille de lignes de courbure sphériques et une autre famille de lignes de courbure à la fois planes et géodésiques ; de sorte que le système triple orthogonal comprendra encore une famille de plans.

En résumé :

Si une famille de Lamé est telle que les plans osculateurs des trajectoires aux points où elles rencontrent une des surfaces de la famille aillent passer par un même point, qui pourra varier quand on changera de surface, cette famille est une de celles que nous avons étudiées au Chapitre précédent et pour lesquelles les cercles osculateurs des trajectoires orthogonales aux points où elles rencontrent une des surfaces sont orthogonaux à une même sphère ; ou bien c'est une famille de surfaces-moulures pour lesquelles les plans des profils enveloppent un même cône.

De là il résulte encore que

Si un système cyclique est formé de cercles dont les plans passent par un point fixe, ces cercles sont orthogonaux à une sphère fixe, ou bien ils sont distribués dans les plans tangents d'un cône.

48. Ce dernier résultat nous amène à étudier maintenant le second problème que nous voulions traiter et à chercher tous les systèmes cycliques formés de cercles dont les plans, au lieu de former une suite doublement infinie, enveloppent une surface développable. Il faudra évidemment, dans ce cas, qu'il y ait une famille de cercles dans chaque plan de la développable. Soit (U) une des surfaces normales aux cercles ; il est clair que cette surface aura pour lignes de courbure ses sections par les plans tangents de la développable, sections qui la couperont à angle droit. Ce sera donc une surface-moulure. De là le résultat suivant, dû à Ribaucour (1) :

Pour obtenir le système cyclique le plus général formé de cercles dont les plans enveloppent une développable, on construira une famille quelconque de cercles dans un plan et l'on fera rouler ce plan sur une développable quelconque.

(1) RIBAUCCOUR (A.), *Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes* (*Journal de Liouville*, 4^e série, t. VII, p. 264 ; 1891).

Ce résultat complète ceux que nous avons donnés dans notre Ouvrage relativement aux systèmes cycliques.

49. Revenons à l'équation générale (7). On peut en faire d'autres applications et retrouver, en particulier, un résultat très simple et très élégant, donné par M. Maurice Lévy, au t. LXXVII des *Comptes rendus* (1).

Supposons que l'on choisisse comme variables indépendantes deux des coordonnées rectangulaires x , y et le paramètre u de la famille considérée. Voyons à quelle équation devra satisfaire z , considérée comme fonction de ces variables. On aura d'abord

$$(11) \quad H = \frac{\frac{\partial z}{\partial u}}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

p , q , r , s , t désignant, suivant l'usage, les dérivées de z par rapport à x et à y . Et il restera à exprimer que cette fonction H , une fois calculée, satisfait à l'équation aux dérivées partielles en θ .

Cette équation, il est vrai, est écrite avec les variables indépendantes ρ_1 , ρ_2 , qui sont les paramètres des lignes de courbure. Si l'on substitue x , y à ρ_1 , ρ_2 , elle prendra évidemment la forme

$$(12) \quad A \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + D \frac{\partial \theta}{\partial x} + E \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0.$$

Pour déterminer les rapports des coefficients A , B , C , D , E , nous nous appuierons sur sa propriété caractéristique, et nous écrivons qu'elle admet les solutions particulières

$$x, y, z, x^2 + y^2 + z^2.$$

Nous obtiendrons ainsi les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} D = E = 0, \quad Ar + Bs + Ct = 0, \\ A(1+p^2+zr) + B(pq+zs) + C(1+q^2+zt) = 0, \end{aligned}$$

(1) LÉVY (MAURICE), *Sur une réduction de l'équation à différences partielles du troisième ordre qui régit les familles de surfaces susceptibles de faire partie d'un système triple orthogonal* (*Comptes rendus*, t. LXXVII, p. 1435; 1873).

qui permettent d'écrire l'équation sous la forme (1)

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} [(1+q^2)s - pqt] \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \\ + [(1+p^2)t - (1+q^2)r] \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} + [pqr - (1+p^2)s] \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0. \end{array} \right.$$

Il suffira d'y remplacer θ par la valeur (11) de H , pour obtenir le résultat de M. Maurice Lévy.

En désignant, pour abrégé, par $\Delta\theta$ le premier membre de l'équation (13), Δ étant un symbole d'opération, l'équation du troisième ordre deviendra

$$(14) \quad \Delta H = 0.$$

50. Il importe de remarquer que l'équation précédente, où l'expression seule de H changera, s'applique au cas où x, y, z seraient des coordonnées relatives à des axes qui seraient les mêmes pour tous les points d'une même surface, mais varieraient avec u ; car ces coordonnées relatives sont des fonctions linéaires des coordonnées absolues, dont les coefficients dépendent simplement de u ; et, par suite, elles conservent toutes les propriétés des coordonnées absolues sur lesquelles nous nous sommes appuyés.

Nous allons appliquer cette remarque à la détermination des surfaces invariables de forme qui peuvent, en se déplaçant, engendrer une famille de Lamé. A cet effet, nous prendrons des axes mobiles invariablement liés à la surface et par rapport auxquels elle aura toujours la même équation, et nous choisirons comme variables indépendantes u et les coordonnées relatives x, y . L'équation du problème sera alors l'équation (14), l'expression seule de H changera, et nous devons la calculer de nouveau. Il nous suffira, pour cela, d'appliquer la formule (46) du Chapitre précédent (n° 40), d'après laquelle $H du$ est égal à la grandeur du déplacement, quand ce déplacement s'effectue suivant la normale à la surface considérée.

Dans le cas actuel, si $v_x du, v_y du, v_z du$ désignent les projections sur les axes mobiles du déplacement du point de coordon-

(1) *Leçons sur la théorie des surfaces*, n° 108 (I^{re} Partie, p. 137).

nées x, y, z , on a

$$(15) \quad \begin{cases} v_x du = dx + (\alpha_0 + \beta z - \gamma y) du, \\ v_y du = dy + (\beta_0 + \gamma x - \alpha z) du, \\ v_z du = dz + (\gamma_0 + \alpha y - \beta x) du, \end{cases}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ désignant les composantes des trois rotations et des trois translations par lesquelles on passe du système d'axes mobiles aux axes infiniment voisins. La surface de paramètre u ne variant pas de forme, on aura d'abord

$$dz = p dx + q dy,$$

et il faudra joindre à cette équation les deux suivantes :

$$v_x + p v_z = 0, \quad v_y + q v_z = 0,$$

par lesquelles on exprime que le déplacement a lieu suivant la normale. Si dn désigne la grandeur de ce déplacement, on aura

$$dn = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} du = v_z \sqrt{1 + p^2 + q^2} du = H du.$$

Cette équation, jointe aux précédentes, nous donne

$$(16) \quad H = \frac{\gamma_0 - \alpha_0 p - \beta_0 q + \alpha(y + qz) - \beta(x + pz) - \gamma(qx - py)}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}};$$

et l'équation (14) deviendra

$$(17) \quad \begin{cases} \alpha \Delta \frac{y + qz}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} - \beta \Delta \frac{x + pz}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} - \gamma \Delta \frac{qx - py}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \\ - \alpha_0 \Delta \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} - \beta_0 \Delta \frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} + \gamma_0 \Delta \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = 0. \end{cases}$$

On peut l'écrire sous une forme plus élégante en introduisant les cosinus directeurs de la normale, définis par les relations

$$(18) \quad \frac{c}{p} = \frac{c'}{q} = \frac{c''}{-1} = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

Elle devient ainsi

$$(19) \quad \begin{cases} \alpha \Delta (c'' y - c' z) + \beta \Delta (c z - c'' x) + \gamma \Delta (c' x - c y) \\ + \alpha_0 \Delta c \quad + \beta_0 \Delta c' \quad + \gamma_0 \Delta c'' \quad = 0. \end{cases}$$

Comme elle doit être satisfaite pour toutes les valeurs de u , elle se décomposera généralement en plusieurs autres.

Par exemple, si l'on veut une surface qui, dans un déplacement quelconque, engendre une famille de Lamé, il faudra satisfaire aux six équations obtenues en égalant à zéro les coefficients de α , β , γ , α_0 , β_0 , γ_0 . C'est ce qui a lieu pour les sphères et les plans. Si l'on ne veut considérer que des translations quelconques, il suffira que l'on ait

$$\Delta c = 0, \quad \Delta c' = 0, \quad \Delta c'' = 0.$$

Dans tous les cas, on voit que, si l'équation est vérifiée pour deux déplacements, elle le sera pour tous ceux qui résultent de leur composition. Cela résulte de sa forme, linéaire par rapport aux rotations et aux translations.

51. La surface la plus générale sera évidemment celle qui n'engendre que par un seul mouvement une famille de surfaces faisant partie d'un système triple. Pour une telle surface, les rapports de α_0 , β_0 , γ_0 , α , β , γ doivent être des constantes. Le mouvement de la surface sera donc hélicoïdal. Supposons que l'axe de ce mouvement ait été pris pour axe des z , on aura

$$\alpha_0 = \beta_0 = \alpha = \beta = 0, \quad \gamma_0 = -k\gamma,$$

k désignant une constante, et l'équation aux dérivées partielles de la surface deviendra

$$(20) \quad \Delta \frac{qx - py + k}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = 0.$$

D'ailleurs l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$\Delta \mu = 0$$

admettant toujours l'intégrale

$$\mu = a_0(x^2 + y^2 + z^2) + a_1x + a_2y + a_3z + a_4,$$

où a_0, \dots, a_4 sont des constantes, on voit qu'on aura des solutions particulières de l'équation aux dérivées partielles du troi-

sième ordre (20) en intégrant l'équation du premier ordre

$$(21) \quad \frac{qx - py + k}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = a_0(x^2 + y^2 + z^2) + a_1x + a_2y + a_3z + a_4.$$

Si l'on se borne, en particulier, à l'équation

$$(22) \quad qx - py + k = a\sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

on obtiendra des surfaces remarquables que l'on peut caractériser par la propriété suivante : elles sont superposables aux surfaces qui leur sont parallèles ; leur équation aux dérivées partielles s'intègre d'ailleurs sans difficulté. Prenons, en effet, comme variables indépendantes les coordonnées semi-polaires

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \omega = \text{arc tang } \frac{y}{x},$$

l'équation (22) deviendra

$$(23) \quad \left(\frac{\partial z}{\partial \omega} + k\right)^2 = a^2 + a^2 \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{a^2}{\rho^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \omega}\right)^2,$$

et sous cette forme on aperçoit immédiatement qu'elle admet une intégrale complète, somme d'une fonction de ρ et d'une fonction de ω . Elle a pour expression

$$(24) \quad z = h\omega + \frac{1}{a} \int \sqrt{(h+k)^2 - a^2 - \frac{a^2 h^2}{\rho^2}} d\rho + C,$$

h et C étant deux constantes. De cette intégrale complète, qui représente un hélicoïde développable, on pourra déduire, par les procédés connus, l'intégrale générale.

52. Il reste maintenant à déterminer toutes les surfaces qui peuvent, en prenant plusieurs mouvements différents, engendrer une famille de Lamé. Cette question, qui avait été posée dans notre Cours de 1890-91, a fait l'objet d'un assez grand nombre de travaux ; mais elle n'a pas encore été résolue d'une manière complète. M. Lucien Lévy a d'abord démontré, en 1891 (1), le résultat suivant :

(1) LÉVY (LUCIEN), *Note sur le déplacement d'une figure de forme invariable* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2^e série, t. XV, p. 76; mars 1891).

Les seules surfaces qui puissent, en prenant tous les déplacements parallèles à un plan donné (P), engendrer une famille de Lamé sont les sphères, les plans et les cylindres dont les génératrices rectilignes sont perpendiculaires au plan (P).

Et de là on peut évidemment déduire que :

Les sphères et les plans sont les seules surfaces qui puissent, dans tous les déplacements possibles, engendrer une famille de Lamé.

En 1895, M. P. Adam a étendu la première proposition de M. Lévy au cas où, parmi les déplacements parallèles au plan (P), on se borne à considérer les translations (1). A cette occasion, M. Goursat a publié une démonstration géométrique très simple par laquelle on peut établir que les sphères et les plans sont les seules surfaces qui puissent, dans tous les déplacements possibles, engendrer une famille de Lamé (2). Enfin, M. J. Bertrand a montré de la manière la plus simple, par la Géométrie, que la proposition précédente subsiste encore lorsque, au lieu de tous les déplacements possibles, on considère seulement des translations (3). Voici la démonstration de M. Bertrand.

Soit (S) la surface cherchée qui, en prenant un mouvement de translation quelconque, fait naître une famille de Lamé. Si l'on prend un point A sur cette surface, et si l'on imprime une translation arbitraire parallèle à la normale en A, cette normale sera une trajectoire orthogonale de la famille ainsi engendrée; elle devra être, par conséquent, l'intersection de deux surfaces appartenant aux deux autres familles qui composent le système triple. Ces deux surfaces seront évidemment des cylindres engendrés par la translation des deux lignes de courbure de (S) qui passent en A. Et de là, il résulte immédiatement qu'en tout point de chacune de ces lignes de courbure le plan principal de

(1) P. ADAM, *Sur les systèmes orthogonaux* (Comptes rendus, t. CXXI, p. 812).

(2) E. GOURSAT, *Sur les systèmes orthogonaux* (Comptes rendus, t. CXXI, p. 883).

(3) J. BERTRAND, *Note sur un théorème de Géométrie* (Comptes rendus, t. CXXI, p. 921).

la surface (S) est parallèle à la normale en A. Ainsi la surface (S) doit être telle que, si l'on prend deux quelconques de ses points sur une même ligne de courbure, la normale en l'un des points doit être parallèle au plan principal relatif à l'autre. Donc :

Les normales en tous les points d'une même ligne de courbure de (S) sont parallèles à un même plan.

Comme ces normales doivent former une surface développable, il faudra nécessairement que la ligne de courbure soit plane et située dans un plan normal à la surface.

La notion de la représentation sphérique montre immédiatement que cette condition ne peut être réalisée, pour toutes les lignes de courbure, par aucune surface à lignes de courbure déterminées. Car il n'existe sur la sphère aucun système formé de familles de grands cercles se coupant à angle droit. La surface, si elle n'est pas développable, est donc nécessairement une sphère.

Si elle est développable, on reconnaît immédiatement, en prenant une de ses lignes de courbure curvilignes, qu'elle se réduit à un cylindre; et, en effet, la translation d'un cylindre quelconque fait naître une famille de Lamé. Mais, dans ce cas, une rotation autour d'un axe perpendiculaire aux génératrices du cylindre ne donne plus naissance à une famille de Lamé, à moins que le cylindre ne se réduise à un plan.

On le voit, jusqu'ici le résultat le plus étendu est celui que l'on doit à M. Adam, et qui fait connaître toutes les surfaces qui, pour deux translations différentes, engendrent une famille de Lamé.

53. Pour compléter ces indications, je signalerai différentes recherches de MM. Lucien Lévy et Petot (¹) relatives aux surfaces

(¹) LUCIEN LÉVY, *Sur les systèmes triplement orthogonaux où les surfaces d'une même famille sont égales entre elles* (*Journal de Liouville*, 4^e série, t. VIII, p. 351; 1892). — *Sur les systèmes de surfaces triplement orthogonaux (Mémoires couronnés et Mémoires des savants étrangers de l'Académie royale de Belgique*, t. LIV; 1896). — PETOT (A.), *Sur certains systèmes de coordonnées sphériques et sur les systèmes triples orthogonaux correspondants* (*Comptes rendus*, t. CXII, p. 1426; juin 1891). — *Sur les surfaces susceptibles d'engendrer, par un déplacement hélicoïdal, une famille de Lamé* (*Comptes rendus*, t. CXVIII, p. 1409).

qui, par une simple translation ou par un seul mouvement hélicoïdal, engendrent une famille de Lamé. On doit en particulier à M. Petot une interprétation géométrique élégante de l'équation fondamentale (17). Voici l'énoncé du résultat obtenu par M. Petot :

La congruence engendrée par la droite qui, pour chaque point de la surface cherchée, joint les deux centres de courbure géodésique des lignes de courbure appartient à un complexe linéaire.

Pour établir cette proposition, nous raisonnerons comme il suit :

Considérons un point particulier M de la surface cherchée, et prenons pour axes des x , des y et des z , les tangentes principales et la normale en ce point. Le symbole $\Delta\theta$ prendra la forme simple

$$(t-r) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y},$$

et si l'on remarque que p , q , s sont nulles pour le point M, on verra facilement que l'équation (17) se réduit à la suivante

$$(25) \quad \gamma(t-r) + \alpha_0 \frac{\partial s}{\partial x} + \beta_0 \frac{\partial s}{\partial y} = 0.$$

Or, un calcul facile donne les coordonnées des centres de courbure géodésique des deux lignes de courbure et, par suite, les équations de la droite qui réunit ces deux points. Ces équations sont les suivantes :

$$Z = 0, \quad X \frac{\partial s}{\partial y} - Y \frac{\partial s}{\partial x} = t - r.$$

La condition (25) exprime que le point de coordonnées $\frac{-\beta_0}{\gamma}, \frac{+\alpha_0}{\gamma}, 0$ se trouve sur la droite précédente. Or ce point, on le reconnaîtra aisément, est le foyer du plan tangent dans le mouvement hélicoïdal qui engendre la famille de Lamé. Ainsi se trouve établi le résultat de M. Petot :

Le foyer du plan tangent à la surface dont le mouvement hélicoïdal engendre une famille de Lamé se trouve en ligne

droite avec les deux centres de courbure géodésique des deux lignes de courbure relatifs au point de contact du plan tangent.

En d'autres termes,

Si une surface (S) engendre, dans un mouvement hélicoïdal, une famille de Lamé, la droite qui, dans chacun de ses plans tangents, joint les deux centres de courbure géodésique des lignes de courbure pour le point de contact de ce plan appartient au complexe linéaire des droites qui, dans le mouvement hélicoïdal considéré, sont normales aux vitesses de tous leurs points.

Si l'on revient aux axes primitifs, on pourra énoncer la conclusion suivante : Les six quantités

$$\Delta c, \Delta c', \Delta c'', \Delta(c''y - c'z), \Delta(cz - c''x), \Delta(c'x - cy)$$

sont liées, dans tous les cas, par la relation identique

$$(26) \quad \Delta c \Delta(c''y - c'z) + \Delta c' \Delta(cz - c''x) + \Delta c'' \Delta(c'x - cy) = 0;$$

par suite, il existe une droite, déterminée par les trois équations, toujours compatibles,

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} Z \Delta c' - Y \Delta c'' = \Delta(c'z - c''y), \\ X \Delta c'' - Z \Delta c = \Delta(c''x - cz), \\ Y \Delta c - X \Delta c' = \Delta(cy - c'x), \end{array} \right.$$

où X, Y, Z désignent les coordonnées courantes.

Cette droite, située dans le plan tangent de la surface, y joint les centres de courbure géodésique des deux lignes de courbure qui se croisent au point de contact du plan tangent. L'équation aux dérivées partielles (19) exprime simplement qu'elle appartient à un complexe linéaire déterminé (1).

(1) Au moment où s'imprime cette partie de mes Leçons, M. E. Cosserat communique à l'Académie des Sciences (*Comptes rendus*, t. CXXIV, p. 1426; juin 1897) un élégant théorème qui peut s'énoncer comme il suit :

La cyclide de Dupin peut engendrer une famille de Lamé dans une infinité de mouvements différents; ces mouvements résultent de la composition de

54. Dans les développements qui précèdent, nous avons supposé que l'équation de la famille de surfaces était résolue, soit par rapport à u , soit par rapport à z . Nous considérerons maintenant le cas où cette équation est de la forme générale

$$(28) \quad \varphi(x, y, z, u) = 0$$

et ne peut être résolue par rapport à l'une des variables qu'elle contient. La quantité que nous avons désignée par H aura ici pour valeur

$$(29) \quad H = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2}},$$

deux rotations autour des droites D , Δ , par lesquelles passent les plans des deux séries de lignes de courbure de la surface.

On peut rattacher la démonstration de ce résultat aux remarques suivantes :

Considérons une famille de sphères (S) ayant leurs centres sur une ligne droite D . Leurs trajectoires orthogonales sont situées dans des plans passant par D . Si, sur une des sphères (S_0), on trace une courbe quelconque (C_0), toutes les trajectoires orthogonales qui rencontrent (C_0) engendreront une surface (J_0) dont elles seront des lignes de courbure planes. Les autres lignes de courbure de (J_0) seront situées sur les sphères (S). Cette surface appartiendra donc à la classe de celles qui ont été déterminées par Joachimsthal et dont il est question aux nos 92 et suiv. des *Leçons sur la théorie des surfaces* (1^{re} Partie, Livre II, Chap. I).

Faisons tourner autour de D la surface (J_0); ses positions successives (J), étant coupées à angle droit et suivant des lignes de courbure par les sphères (S), engendreront une famille de Lamé, en vertu de la réciproque du théorème de Dupin.

Pour obtenir la troisième famille qui, avec les sphères (S) et les surfaces (J), complète le système triple, il faudra construire sur la sphère (S_0) toutes les courbes (D_0) qui coupent à angle droit les diverses positions de la courbe (C_0) lorsqu'elle tourne autour de D . Les trajectoires orthogonales des sphères qui rencontrent une même courbe (D_0) engendrent des surfaces (K) qui formeront la troisième famille cherchée.

Parmi les courbes (D_0), quelques-unes se réduiront à des cercles; ce sont celles qui partent des points où la tangente à (C_0) est située dans un même plan avec D . Toutes les autres seront identiques de forme et se déduiront de l'une d'elles par une simple rotation autour de D . On les déterminera par une quadrature.

Il y aura des propriétés analogues pour les surfaces (K). Quelques-unes seront de révolution; les autres seront identiques et se déduiront de l'une d'elles par une rotation autour de D .

La cyclide de Dupin pouvant, de deux manières différentes, être regardée comme une surface de Joachimsthal, on retrouve ainsi la proposition de M. Cosserat.

ou, en posant $\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \varphi'$ et conservant les notations précédentes,

$$(30) \quad H = \frac{\varphi'}{\sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2}}.$$

Toutes les équations qui nous ont servi de point de départ

$$(31) \quad \delta_v u = 0, \quad \delta_w u = 0, \quad \left(\begin{matrix} v & w \\ u \end{matrix} \right) = 0,$$

subsistent sans modification quand on y remplace u par φ , en traitant, dans les dérivations, u comme une constante. En effet, comme ces équations sont celles qui déterminent les directions principales, et comme u demeure constante pour chaque surface, il importe peu que l'équation de la famille soit résolue, ou non, par rapport à u . Ainsi on aura

$$(32) \quad \delta_\varphi v = 0, \quad \delta_\varphi w = 0, \quad \sum \sum v_i w_k \varphi_{ik} = 0.$$

Quant à l'équation du troisième ordre, elle est toujours la même

$$(33) \quad \sum \sum v_i w_k H_{ik} = 0;$$

et comme on peut la mettre sous la forme

$$(34) \quad d\delta H - H_1 d\delta x - H_2 d\delta y - H_3 d\delta z = 0,$$

qui ne contient que des différentielles prises en laissant u constant, on pourra supposer que les dérivées de H y soient prises en supposant u constant. En éliminant v_i, w_k , on trouvera comme précédemment

$$(35) \quad \begin{vmatrix} H_{11} & H_{22} & H_{33} & H_{23} & H_{13} & H_{12} \\ \varphi_{11} & \varphi_{22} & \varphi_{33} & \varphi_{23} & \varphi_{13} & \varphi_{12} \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2\varphi_1 & 0 & 0 & 0 & \varphi_3 & \varphi_2 \\ 0 & 2\varphi_2 & 0 & \varphi_3 & 0 & \varphi_1 \\ 0 & 0 & 2\varphi_3 & \varphi_2 & \varphi_1 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

mais ici toutes les dérivées doivent être prises en laissant u con-

stant. On voit qu'en définitive l'équation exprime une relation entre les dérivées partielles par rapport à x, y, z des deux fonctions φ et $\varphi' = \frac{\partial \varphi}{\partial u}$. D'ailleurs, cette relation n'est pas nécessairement identique, et il suffit qu'elle soit une conséquence de la relation qui lie u à x, y, z .

L'équation précédente, étant mise sous forme irrationnelle, ne peut toujours être employée utilement. Aussi allons-nous la calculer dans sa forme rationnelle et entière. A cet effet, reprenons l'équation

$$(36) \quad \sum v_i \omega_k \varphi_{ik} = 0,$$

et appliquons-lui la méthode déjà suivie plus haut (nos 10 et suiv.). Prenons le δ_φ du premier membre; on aura évidemment

$$(37) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta_\varphi \sum \sum v_i \omega_k \varphi_{ik} &= \sum \sum \omega_k \varphi_{ik} \delta_\varphi v_i \\ &+ \sum \sum v_i \varphi_{ik} \delta_\varphi \omega_k + \sum \sum v_i \omega_k \delta_\varphi \varphi_{ik}. \end{aligned} \right.$$

D'autre part, la différentiation des deux équations

$$(38) \quad \delta_\varphi v = 0, \quad \delta_\varphi \omega = 0$$

nous donne les relations

$$(39) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta_\varphi v_i + \delta_v \varphi_i + u_i \delta_v \varphi' &= 0, \\ \delta_\varphi \omega_k + \delta_w \varphi_k + u_k \delta_w \varphi' &= 0. \end{aligned} \right.$$

Remplaçant u_i, u_k par leurs valeurs, on trouve

$$(40) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta_\varphi v_i + \delta_v \varphi_i - \frac{\varphi_i}{\varphi'} \delta_v \varphi' &= 0, \\ \delta_\varphi \omega_k + \delta_w \varphi_k - \frac{\varphi_k}{\varphi'} \delta_w \varphi' &= 0. \end{aligned} \right.$$

On a, d'autre part,

$$(41) \quad \delta_\varphi \varphi_{ik} = \sum_h \varphi_h \varphi_{ikh} + \varphi'_{ik} \delta_\varphi u = \sum_h \varphi_h \varphi_{ikh} - \frac{\varphi'_{ik}}{\varphi'} \sum \varphi_h^2.$$

Tenant compte de ces dernières relations, on ramènera l'équa-

tion du troisième ordre à la forme

$$(42) \quad \varphi' \delta \varphi \sum \sum \varphi_i \omega_k \varphi_{ik} = \sum \sum B_{ik} \varphi_i \omega_k = 0,$$

où l'on aura

$$(43) \quad \left\{ \begin{aligned} B_{ik} = & \varphi' \sum_h (\varphi_h \varphi_{ikh} - 2\varphi_{ih} \varphi_{kh}) \\ & + \varphi'_i \sum_h \varphi_h \varphi_{kh} + \varphi'_k \sum_h \varphi_h \varphi_{ih} - \varphi'_{ik} \sum \varphi_h^2. \end{aligned} \right.$$

On obtiendra ainsi l'équation finale

$$(44) \quad \begin{vmatrix} B_{11} & B_{22} & B_{33} & B_{23} & B_{13} & B_{12} \\ \varphi_{11} & \varphi_{22} & \varphi_{33} & \varphi_{23} & \varphi_{13} & \varphi_{12} \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2\varphi_1 & 0 & 0 & 0 & \varphi_3 & \varphi_2 \\ 0 & 2\varphi_2 & 0 & \varphi_3 & 0 & \varphi_1 \\ 0 & 0 & 2\varphi_3 & \varphi_2 & \varphi_1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

qui n'est pas beaucoup plus compliquée que celle où figure la fonction u . Ce résultat offrira quelque intérêt si l'on songe au nombre de termes qu'aurait pu introduire le calcul des dérivées secondes et troisièmes de u , considérée comme fonction implicite de x, y, z .

En développant le déterminant, on trouvera

$$(45) \quad \left\{ \begin{aligned} & \varphi_1^3 [B_{23}(\varphi_{22} - \varphi_{33}) + \varphi_{23}(B_{33} - B_{22})] + \dots \\ & + \varphi_1^2 \varphi_2 [2B_{12}\varphi_{23} - 2B_{23}\varphi_{21} + (B_{22} - B_{33})\varphi_{13} + B_{13}(\varphi_{33} - \varphi_{22})] + \dots \\ & - \varphi_1^2 \varphi_3 [2B_{13}\varphi_{23} - 2B_{23}\varphi_{31} + (B_{33} - B_{22})\varphi_{12} + B_{12}(\varphi_{22} - \varphi_{33})] + \dots \\ & + \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 [B_{11}(\varphi_{22} - \varphi_{33}) + B_{22}(\varphi_{33} - \varphi_{11}) + B_{33}(\varphi_{11} - \varphi_{22})] = 0, \end{aligned} \right.$$

les termes non écrits se déduisant de ceux des trois premières lignes par des permutations circulaires.

CHAPITRE V.

LES FAMILLES DE LAMÉ FORMÉES AVEC DES QUADRIQUES.

On cherche d'abord la condition pour que des quadriques à centre unique, ayant les mêmes plans principaux, forment une famille de Lamé, et l'on est conduit, en appliquant la méthode générale du Chapitre précédent, à une relation différentielle entre les axes, qui a été obtenue dès 1867 par M. Maurice Lévy. — On fait aussi connaître la méthode suivie par M. Maurice Lévy, ainsi que l'interprétation géométrique qu'il en a donnée : la relation différentielle exprime que l'une quelconque des lignes ombilicales, c'est-à-dire l'une quelconque des lignes décrites par les ombilics, est normale aux surfaces qui composent la famille. — Il résulte de là que les familles de quadriques cherchées sont déterminées dès que l'on se donne *a priori* une ligne plane quelconque qui servira de ligne ombilicale. — C'est ce que permettent d'ailleurs d'établir quelques considérations de Géométrie pure relatives aux ombilics des quadriques. — Le cas particulier où l'une des lignes ombilicales se réduit à une droite a été rencontré par M. G. Humbert. Alors les onze autres lignes ombilicales sont des droites, et les surfaces qui composent la famille, tangentes à huit plans isotropes, font aussi partie d'un réseau ponctuel; on peut déterminer les deux autres familles qui complètent le système triple. — Cas où l'une des lignes ombilicales est un cercle, une conique, etc. — Revenant au problème général, on remarque qu'on peut encore le résoudre sans employer la ligne ombilicale et par une méthode directe qui peut se rattacher à un principe général. — Applications particulières de cette nouvelle méthode. — La proposition relative aux lignes ombilicales ne s'applique pas seulement aux familles composées de surfaces du second degré; on peut établir qu'elle est vraie pour des surfaces quelconques formant une famille de Lamé; la démonstration repose sur la considération de la forme des lignes de courbure dans le voisinage d'un ombilic. — Cette proposition générale, une fois établie, conduit à la conséquence suivante : si des quadriques à axes inégaux forment une famille de Lamé, les plans principaux de ces surfaces coïncident nécessairement; par suite, les recherches précédentes n'ont pas un caractère aussi particulier qu'on aurait pu le supposer, et elles font connaître toutes les familles de Lamé composées de quadriques à axes inégaux. — D'une manière générale, on peut énoncer la proposition suivante : si une famille de Lamé est composée de surfaces ayant chacune des plans de symétrie, les plans de symétrie de ces surfaces doivent coïncider, excepté dans certains cas particuliers qui sont nettement indiqués. — Démonstration de cette proposition générale; son application aux surfaces du second degré; son interprétation géométrique. Simple énoncé d'une proposition analogue relative aux surfaces anallagmatiques. — Le Chapitre se termine par l'étude d'un problème qui doit conduire encore à des familles de Lamé formées de quadriques : on sait que les surfaces lieux des points tels que la somme ou la différence de leurs distances à deux surfaces fixes (A), (B) soit con-

stante forment un système double orthogonal, c'est-à-dire se distribuent en deux familles distinctes de surfaces orthogonales : on demande dans quel cas on peut compléter le système et adjoindre aux deux familles différentes une troisième famille composée de surfaces coupant les précédentes à angle droit. — Mise en équation du problème; on démontre par la Géométrie que, si l'on néglige des solutions déjà étudiées, cette troisième famille doit être composée de surfaces du second degré dont les génératrices rectilignes seront les normales aux surfaces (A) et (B). — Les axes de ces quadriques doivent satisfaire à des équations différentielles qui se rencontrent dans la théorie des fonctions elliptiques et qui ont été, pour la première fois, intégrées par Halphen. — Intégration nouvelle de ces équations. — Cas particulier des surfaces dépourvues de centre, traité par une méthode directe; les fonctions elliptiques sont remplacées par des logarithmes, sauf dans un cas spécial où la solution devient algébrique et a déjà été donnée par M. J.-A. Serret. — Démonstration géométrique simple relative à ce cas spécial. — Indication d'un sujet de recherche relatif aux lignes de courbure de la surface lieu des points pour lesquels la somme ou la différence des distances à deux droites fixes est constante.

55. Nous allons faire des applications de l'équation démontrée à la fin du Chapitre précédent, et nous chercherons d'abord tous les systèmes orthogonaux qui comprennent une famille formée de surfaces à centre du second degré, ayant toutes les mêmes plans principaux.

Soit

$$(1) \quad \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 1$$

l'équation de ces surfaces, où A, B, C sont des fonctions inconnues du paramètre u de la famille. En exprimant que l'équation (45) du Chapitre précédent est vérifiée, on trouvera

$$xyz \left(\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} \right) [(B-C)A dA + (C-A)B dB + (A-B)C dC] = 0.$$

On devra donc avoir, entre les trois fonctions A, B, C, la relation différentielle

$$(2) \quad (B-C)A dA + (C-A)B dB + (A-B)C dC = 0.$$

C'est l'équation obtenue par M. Maurice Lévy en 1867 (1). Nous

(1) LÉVY (MAURICE), *Mémoire sur les coordonnées curvilignes orthogonales et en particulier sur celles qui comprennent une famille quelconque de surfaces du second degré* (*Journal de l'École Polytechnique*, 43^e Cahier, p. 157).

allons reproduire d'ailleurs le raisonnement direct par lequel l'éminent géomètre a établi cette condition.

Les surfaces orthogonales à la famille définie par l'équation (1) peuvent évidemment être déterminées de la manière suivante : comme, d'après le théorème de Dupin, elles coupent les surfaces données suivant leurs lignes de courbure, elles sont individuellement engendrées par ces lignes de courbure, et l'équation de chacune d'elles (Σ) résultera de l'élimination de u entre l'équation (1) et la suivante

$$(3) \quad \frac{x^2}{A-t} + \frac{y^2}{B-t} + \frac{z^2}{C-t} = 1,$$

où t sera une fonction de u à déterminer. D'ailleurs, pour une valeur donnée de u , cette dernière équation représente une surface homofocale et orthogonale à celle qui est définie par l'équation (1); il faudra donc que, lorsqu'on considérera à part les surfaces représentées par l'équation précédente (3), leur enveloppe coïncide avec la surface (Σ). Donc l'équation

$$(4) \quad \frac{d(A-t)}{(A-t)^2} x^2 + \frac{d(B-t)}{(B-t)^2} y^2 + \frac{d(C-t)}{(C-t)^2} z^2 = 0,$$

obtenue en différentiant par rapport à u la précédente (3), devra être une simple conséquence des équations (1) et (3).

Or, en retranchant ces deux équations membre à membre, on obtient la suivante

$$(5) \quad \frac{x^2}{A(A-t)} + \frac{y^2}{B(B-t)} + \frac{z^2}{C(C-t)} = 0,$$

qui est homogène et doit, par suite, se réduire à l'équation (4). En écrivant donc que les deux équations ont leurs coefficients proportionnels, on trouvera

$$(6) \quad \frac{A(dA-dt)}{A-t} = \frac{B(dB-dt)}{B-t} = \frac{C(dC-dt)}{C-t}.$$

Ce sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que les quadriques définies par l'équation (1) forment une famille de Lamé.

Ces conditions résultent de l'élimination des fonctions arbi-

traires m et n entre les équations suivantes

$$(7) \quad \begin{cases} A dA = (mA + n) du, \\ B dB = (mB + n) du, \\ C dC = (mC + n) du; \end{cases} \quad t dt = (mt + n) du;$$

de sorte que A, B, C seront trois solutions particulières d'une équation différentielle de la forme suivante :

$$(8) \quad y dy = (my + n) du,$$

où m et n désignent deux fonctions arbitrairement choisies de u ; t en sera la solution générale, et la constante arbitraire qui entrera dans cette solution sera, suivant les limites entre lesquelles elle variera, le paramètre de l'une ou l'autre des deux familles qui complètent le système orthogonal.

En remplaçant u par une fonction convenablement choisie, on peut toujours réduire à l'unité l'une des fonctions m, n . Ainsi la solution précédente ne comporte qu'une fonction arbitraire d'une variable.

56. Si l'on élimine m et n entre les trois premières relations (7), on retrouve, comme il fallait s'y attendre, la condition (2). M. Maurice Lévy a donné une interprétation géométrique de cette relation différentielle. Désignons sous le nom de *ligne ombilicale* la ligne engendrée par l'un des ombilics des surfaces qui composent la famille donnée : *la condition (2) exprime que cette ligne ombilicale est normale à toutes les surfaces.*

On peut, comme il suit, confirmer cette interprétation. Considérons, par exemple, les ombilics définis par les équations

$$(9) \quad z = 0, \quad \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = 1, \quad \frac{x^2}{A-C} + \frac{y^2}{B-C} = 1.$$

Pour que la ligne ombilicale soit normale à la surface, il faudra que l'on ait

$$(10) \quad \frac{x dy}{A} = \frac{y dx}{B}.$$

L'élimination de x, y entre ces équations conduit précisément à la relation différentielle (2).

Les équations (9), (10) peuvent être résolues par rapport à A, B, C et nous donnent

$$(11) \quad \begin{cases} A = \frac{x(x dx + y dy)}{dx}, \\ B = \frac{y(x dx + y dy)}{dy}, \\ C = \frac{xy(dx^2 + dy^2)}{dx dy}. \end{cases}$$

Ces expressions de A, B, C donnent évidemment la solution de l'équation générale (2). On voit que la famille de quadriques est déterminée dès que l'on connaît une de ses lignes ombilicales. Quelques remarques de pure Géométrie vont nous permettre de rendre compte de ce fait intéressant.

57. Rappelons d'abord quelques résultats très simples, relatifs à la disposition des ombilics sur une quadrique.

Ces ombilics sont évidemment les points où se croisent deux génératrices rectilignes isotropes de la surface. Or, comme il y a quatre points d'intersection de la surface avec le cercle imaginaire de l'infini, il y a sur la surface huit génératrices isotropes, qui se coupent d'abord en ces quatre points, puis en douze autres points, à distance finie, qui sont les ombilics. Ces huit génératrices isotropes forment six quadrilatères gauches dont les sommets sont des ombilics, et chacun de ces quadrilatères est situé sur une sphère, qui est tangente à la quadrique aux quatre sommets du quadrilatère. On a ainsi trois couples de sphères qui ont leur centre sur les axes. Quatre au plus des ombilics sont réels.

D'après cela, soit (L) une ligne ombilicale et M un de ses points. Construisons les deux droites isotropes situées dans le plan normal à (L) en ce point. Ces deux droites (d), (d') seront évidemment symétriques par rapport au plan de (L), et elles devront appartenir à celle des quadriques qui est normale en M à (L). Cette quadrique, dont les plans de symétrie sont donnés, sera évidemment déterminée par la condition de contenir trois points de (d), et alors elle contiendra aussi (d') pour raison de symétrie. Donc, les axes A, B, C devaient s'exprimer, comme nous l'avons trouvé, en fonction de x , y , $\frac{dy}{dx}$.

Si une sphère de rayon nul décrit la ligne (L) , elle a pour enveloppe une développable isotrope (Δ) qu'elle touche à chaque instant suivant les droites (d) , (d') . Comme ces droites sont des génératrices isotropes des quadriques, on peut conclure :

- 1° Que la développable (Δ) est tangente à toutes les quadriques de la famille qui admet (L) pour ligne ombilicale ;
- 2° Que les sections de (Δ) par les autres plans principaux sont des lignes ombilicales situées dans ces plans.

Cette proposition nous conduit immédiatement à une intéressante conséquence, signalée par M. G. Humbert (1). Si l'une des lignes ombilicales est une droite, la développable (Δ) se réduit à deux plans isotropes ; les quadriques sont tangentes à ces deux plans ; et, par suite, elles sont aussi tangentes à six autres plans, symétriques des premiers, soit par rapport au centre, soit par rapport aux deux plans principaux qui ne contiennent pas la droite ombilicale. Les onze autres lignes ombilicales sont donc des droites.

De même, si l'une des lignes ombilicales est un cercle, la développable isotrope passant par ce cercle se réduit à deux sphères de rayon nul ; toutes les autres lignes ombilicales sont des cercles situés sur ces sphères de rayon nul, ou sur d'autres sphères symétriques des premières, soit par rapport au centre, soit par rapport à des plans principaux.

En particulier, si quatre ombilics situés dans un même plan principal sont fixes, les autres lignes ombilicales sont des cercles, et les quadriques forment une famille de Lamé.

Les surfaces homofocales ordinaires sont caractérisées par cette propriété que l'une des lignes ombilicales est une conique admettant les axes de symétrie des surfaces elles-mêmes.

58. Le cas signalé par M. Humbert donne lieu à des formules particulièrement intéressantes. Supposons que l'un des ombilics, celui, par exemple, qui est donné par les formules (9), décrive

(1) G. HUMBERT, *Sur les normales aux quadriques* (Comptes rendus, t. CXI, p. 963; décembre 1890).

la droite définie par les équations

$$(12) \quad \begin{cases} x = (u + \beta) \cos \varphi, \\ y = (u + \alpha) \sin \varphi, \end{cases}$$

où α , β , φ sont des constantes et u un paramètre variable.

L'application des formules (11) nous donnera, pour les axes, des expressions très élégantes

$$(13) \quad A = (u + \beta)(u + \gamma), \quad B = (u + \alpha)(u + \gamma), \quad C = (u + \alpha)(u + \beta),$$

la constante γ étant déterminée par la relation

$$(14) \quad \alpha \sin^2 \varphi + \beta \cos^2 \varphi = \gamma.$$

Les quadriques auront pour équation

$$(15) \quad (u + \alpha)x^2 + (u + \beta)y^2 + (u + \gamma)z^2 = (u + \alpha)(u + \beta)(u + \gamma).$$

Elles feront partie à la fois d'un réseau ponctuel et d'un réseau tangentiel. Leurs huit points communs se confondront, deux par deux, avec les quatre points fixes où elles rencontrent le cercle de l'infini, et elles seront toutes tangentes aux droites qui joignent ces quatre points au centre.

L'équation qui déterminerait les surfaces trajectoires orthogonales serait ici la suivante

$$(16) \quad t \frac{dt}{du} = t(3u + \alpha + \beta + \gamma) - (u + \alpha)(u + \beta)(u + \gamma).$$

On en connaît trois solutions particulières :

$$(17) \quad t = (u + \beta)(u + \gamma), \quad t = (u + \alpha)(u + \gamma), \quad t = (u + \alpha)(u + \beta).$$

M. Humbert a montré qu'on peut l'intégrer par l'application d'une méthode que j'ai fait connaître autrefois ⁽¹⁾, et qui permet d'obtenir l'intégrale générale, quand on connaît un nombre suffisant de solutions particulières.

(1) Voir différentes Communications dans les *Comptes rendus* (t. LXXXVI, 1^{er} semestre 1878) et le *Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré en $\frac{dy}{dx}$* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2^e série, t. II).

L'application de cette méthode donne ici l'intégrale générale suivante

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} [t - (u + \beta)(u + \gamma)]^{\beta - \gamma} [t - (u + \alpha)(u + \gamma)]^{\gamma - \alpha} \\ \times [t - (u + \alpha)(u + \beta)]^{\alpha - \beta} = \text{const.} \end{array} \right.$$

de l'équation (16).

59. Revenons au cas général ; la relation différentielle entre les carrés des axes appartient à la classe de celles qui ont été l'objet des recherches de Pfaff. Nous en avons donné une première solution générale en employant le théorème de M. Maurice Lévy, relatif à la ligne ombilicale. On peut encore la résoudre de la manière suivante :

Mettons-la sous la forme (1)

$$B(C - A)d(B - A) = C(B - A)d(C - A).$$

Si l'on pose, en excluant le système des surfaces homofocales,

$$(19) \quad C - A = u, \quad B - A = ut,$$

elle deviendra

$$B d(ut) = Ct du,$$

(1) Cette solution nouvelle peut se rattacher à un principe général :

Supposons qu'on veuille trouver les fonctions d'une variable les plus générales satisfaisant à une équation telle que la suivante

$$L dx + M dy + N dz = 0,$$

où L, M, N sont des fonctions connues de x, y, z . Si l'on connaît une solution particulière fournie par les équations

$$t = \varphi(x, y, z), \quad v = \psi(x, y, z),$$

où t et v désignent deux constantes arbitraires, il suffira de substituer à deux des variables, à x et à y par exemple, les fonctions t et v . L'équation à résoudre prendra la forme

$$L' dt + M' dv + N' dz = 0;$$

mais, comme elle doit être vérifiée par les hypothèses $dt = 0, dv = 0, N'$ sera nul et il viendra simplement

$$L' dt + M' dv = 0,$$

équation qui fournira z et permet de prendre pour v une fonction quelconque de t .

Ici on peut prendre pour t et v les différences $B - A, C - A$.

ou encore

$$B u dt = (C - B) t du = u(1 - t) t du.$$

Cette équation, jointe aux précédentes, permet d'obtenir les valeurs de A, B, C, et l'on trouve ainsi

$$(20) \quad \begin{cases} A = t \frac{d}{dt} [u(1-t)], \\ B = (1-t) t \frac{du}{dt}, \\ C = (1-t) \frac{d(ut)}{dt}. \end{cases}$$

Ces formules résolvent la question proposée ; il suffira d'y prendre pour u une fonction quelconque de t . De même que la précédente, cette nouvelle solution montre qu'il y aura une infinité de familles de Lamé algébriques, formées avec des quadriques à plans principaux communs.

Comme application, proposons-nous de rechercher si toutes les quadriques de la famille peuvent faire partie d'un réseau tangentiel, c'est-à-dire sont tangentes à huit plans définis par des équations telles que les suivantes :

$$\pm mx \pm ny \pm pz = q.$$

Il faudra que A, B, C satisfassent à la relation

$$(21) \quad m^2 A + n^2 B + p^2 C = q^2.$$

Si l'on substitue les valeurs (20) de A, B, C et si l'on pose

$$s^2 = m^2 + n^2 + p^2,$$

il viendra l'équation

$$(22) \quad s^2 t(1-t) \frac{du}{dt} + [p^2 - (m^2 + p^2)t] u = q^2.$$

Si s^2 est nul, on se trouve dans le cas spécial signalé par M. Humbert et auquel correspondent les expressions (13) de A, B, C. Sinon on obtient une équation linéaire dont l'intégrale générale sera

$$(23) \quad u = \frac{q^2}{s^2} (1-t)^{-\frac{m^2}{s^2}} t^{-\frac{p^2}{s^2}} \left[C_1 + \int (1-t)^{\frac{m^2}{s^2}-1} t^{\frac{p^2}{s^2}-1} dt \right],$$

C_1 désignant une constante arbitraire.

60. En terminant ce qui concerne les systèmes orthogonaux précédents, nous présenterons les deux remarques suivantes :

D'abord, la proposition relative à la ligne ombilicale qui nous a été utile dans l'étude de ces systèmes se rattache à la proposition plus générale suivante, que le lecteur trouvera dans le Mémoire déjà cité de M. Maurice Lévy.

Si l'on construit les lignes ombilicales pour toutes les surfaces qui forment une famille quelconque de Lamé, chacune de ces lignes est une trajectoire orthogonale pour toutes les surfaces dont elle contient un ombilic.

Pour établir cette proposition, il importe de rappeler une propriété caractéristique des lignes de courbure dans le voisinage d'un ombilic (¹). Si l'on prend d'abord un point ordinaire M sur une surface, il passe en général deux lignes de courbure par ce point ; et si l'on trace (*fig. 3a*) une petite courbe fermée convexe (C) autour de M, les arcs de ces deux lignes de courbure situés à l'intérieur de (C) ont, pour chacune d'elles, des tangentes faisant un angle infiniment petit avec la tangente en M ; ou, si l'on veut, les droites qui joignent chaque point d'une ligne de courbure à M font un angle infiniment petit avec la tangente en M, tant que le point considéré est à l'intérieur de (C). Les trajectoires orthogonales qui partent des différents points de (C) forment un tube, et ce tube est partagé en quatre cloisons par les trajectoires orthogonales qui rencontrent l'une ou l'autre des deux lignes de courbure qui se croisent en M.

Au contraire, pour un ombilic, il y aura, à l'intérieur de la courbe (C), des parties de lignes de courbure jouissant de propriétés toutes différentes : la tangente en chaque point de l'une de ces lignes tournera d'un angle fini quand le point se déplacera sur la ligne elle-même sans sortir de la région limitée par la courbe (C) (*fig. 3b*). Cette propriété se conservera évidemment sur toutes les autres surfaces de la famille, aux environs du point où elles sont coupées par la trajectoire orthogonale issue de M ; et, par conséquent, ce point sera aussi un ombilic.

(¹) *Leçons sur la Théorie des surfaces* (IV^e Partie, Note VII, p. 448).

Ainsi se trouve démontrée la proposition de M. Maurice Lévy. Dans le cas des surfaces du second degré, on en déduit immédiatement le corollaire suivant :

Si des surfaces du second degré à axes inégaux forment une famille de Lamé, les plans principaux de toutes ces surfaces coïncident nécessairement.

En effet, soit (Σ) l'une de ces surfaces et M un de ses ombilics, situé dans un des plans principaux (P). Puisque la ligne ombilicale décrite par M est normale à (Σ) , il faudra que sa tangente

Fig. 3a.

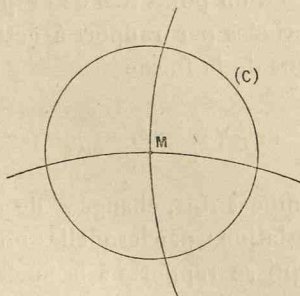
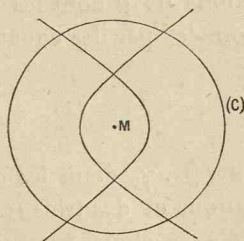


Fig. 3b.



en M soit située dans le plan (P). Donc, si l'on considère les positions successives du plan (P), il faudra, ou bien qu'elles coïncident, ou bien que la caractéristique de (P), c'est-à-dire son intersection avec le plan infiniment voisin, passe par M. Or, il est impossible que la caractéristique de (P) passe par les quatre ombilics situés dans le plan (P). Donc, *ce plan de symétrie devra être commun à toutes les surfaces.*

61. On voit ainsi que la recherche des familles de Lamé formées avec des quadriques à centre unique et à axes inégaux se ramène à l'étude du cas, en apparence si particulier, que nous venons d'examiner. Au reste, ce résultat peut se rattacher à une proposition plus générale et plus large que nous allons établir. Nous allons montrer que, si une famille de Lamé est composée de surfaces ayant chacune un plan de symétrie, les plans de symétrie de toutes ces surfaces doivent coïncider, excepté dans certains

cas particuliers qui sont nettement indiqués par la démonstration elle-même (1).

Pour établir cette proposition, nous ferons usage d'une propriété, déjà signalée au n° 54, de l'équation aux dérivées partielles du troisième ordre qui définit le paramètre d'une famille de Lamé. Cette équation peut être considérée comme établissant une relation entre les dérivées partielles de deux fonctions φ et $\varphi' = \frac{\partial \varphi}{\partial u}$, prises par rapport à x, y, z seulement. On pourra donc, dans l'étude du problème, rapporter les surfaces à des axes qui seront variables quand on passera d'une surface à une autre, à la seule condition de calculer exactement φ' .

Alors les coordonnées x, y, z d'un point fixe de l'espace seront des fonctions de u dont les dérivées par rapport à cette variable seront données par des équations de la forme

$$(24) \quad \frac{\partial x}{\partial u} = \alpha_0 + \beta z - \gamma y, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \beta_0 + \gamma x - \alpha z, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = \gamma_0 + \alpha y - \beta x,$$

$\alpha, \beta, \gamma, \alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ étant les composantes, changées de signe, des trois rotations et des trois translations par lesquelles on passe du système d'axes choisi à celui qui se rapporte à la surface infiniment voisine de paramètre $u + du$. Soit donc

$$(25) \quad \varphi(x, y, z, u) = 0$$

l'équation de la surface rapportée à des axes mobiles. La dérivée du premier membre par rapport à u sera

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u},$$

ou

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \varphi_1(\alpha_0 + \beta z - \gamma y) + \varphi_2(\beta_0 + \gamma x - \alpha z) + \varphi_3(\gamma_0 + \alpha y - \beta x).$$

Telle est l'expression qu'il faut mettre dans H à la place de φ' ,

(1) Le lecteur reconnaîtra aisément que la proposition subsiste encore lorsqu'il existe pour chaque surface, non plus un plan de symétrie, mais seulement un ou plusieurs plans qui coupent partout la surface à angle droit.

ce qui donne

$$(26) \quad H = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \varphi_1(\alpha_0 + \beta z - \gamma y) + \varphi_2(\beta_0 + \gamma x - \alpha z) + \varphi_3(\gamma_0 + \alpha y - \beta x)}{\sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2}},$$

formule que l'on pourrait encore obtenir en suivant la méthode développée au n° 50.

Cela posé, reprenons l'équation du troisième ordre, sous la forme donnée au n° 44,

$$(27) \quad \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} dx \delta x + \dots = 0;$$

et supposons que les axes mobiles aient été choisis de telle manière que le plan des xy soit le plan de symétrie de la surface. Si l'on affecte le symbole d à la ligne de courbure suivant laquelle ce plan de symétrie coupe la surface, on aura

$$dz = 0, \quad \delta x = 0, \quad \delta y = 0;$$

de sorte que l'équation précédente se réduira à la forme simple

$$\delta z \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial z} dx + \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial z} dy \right) = \delta z d \left(\frac{\partial H}{\partial z} \right) = 0.$$

On aura donc, en tous les points de la section (K) par le plan de symétrie,

$$(28) \quad \frac{\partial H}{\partial z} = \text{const.}$$

Il reste à calculer $\frac{\partial H}{\partial z}$.

Or on peut évidemment supposer que l'équation (25) de la surface ne contienne que les puissances paires de z . Il en sera donc de même de φ_1 , φ_2 , $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$, φ_3^2 ; et, par suite, les dérivées de ces fonctions par rapport à z s'annuleront avec z , c'est-à-dire pour tous les points du plan de symétrie.

Cette remarque bien simple nous montre que, pour tous les points de ce plan, l'expression de H donnée par la formule (26) aura pour dérivée, par rapport à z , l'expression

$$(29) \quad \frac{\partial H}{\partial z} = \frac{\beta \varphi_1 - \alpha \varphi_2 + \varphi_{33}(\gamma_0 + \alpha y - \beta x)}{\sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2}},$$

de sorte que l'équation suivante

$$(30) \quad [\beta \varphi_1 - \alpha \varphi_2 + \varphi_{33}(\gamma_0 + \alpha\gamma - \beta x)]^2 = C^2(\varphi_1^2 + \varphi_2^2),$$

où C désigne une constante, devra être vérifiée en tous les points de la section (K).

Si α , β , γ_0 et C ne sont pas nulles, cette équation ne se réduira pas à une identité. Supposons que la forme des surfaces choisies la rende impossible : il faudra que l'on ait

$$(31) \quad \alpha = \beta = \gamma_0 = 0, \quad C = 0.$$

Or les trois premières équations expriment que, lorsqu'on passe d'une surface à la surface infiniment voisine, le mouvement du système d'axes choisi est tel que le plan des xy glisse sur lui-même. *Donc ce plan de symétrie demeurera invariable et restera le même pour toutes les surfaces.*

62. Appliquons ces remarques aux surfaces du second degré. La section par le plan principal ayant pour équation

$$(32) \quad \varphi(x, y) = 0,$$

on devra avoir la relation (30) où φ_{33} sera nécessairement une constante. Si C n'est pas nulle, l'équation (30) représentera donc une conique qui devra être identique à la section de la surface par son plan de symétrie. On déduit de là, et de la comparaison des deux équations (30) et (32), que les droites représentées par les équations

$$\varphi_1 \pm \varphi_2 \sqrt{-1} = 0$$

sont tangentes à la section principale; ce qui ne peut arriver, on s'en assure aisément, que dans le cas où cette section se réduit à un cercle, ou bien à deux droites, c'est-à-dire lorsque la quadrique se réduit à un cône ou à une surface de révolution. On sait, en effet, que, dans l'un et l'autre cas, les quadriques peuvent faire partie d'une famille de Lamé sans que leurs plans de symétrie coïncident. Laissons donc cette hypothèse de côté, et faisons $C = 0$.

Supposons, en outre, pour embrasser tous les cas, la section principale rapportée à un de ses axes de symétrie et à la tangente

au sommet, de sorte que l'équation de la surface deviendra

$$hx^2 + 2\mu x + ky^2 + lz^2 = 0.$$

Alors on devra avoir, pour tous les points de la section principale,

$$\beta(hx + \mu) - \alpha ky + l(\gamma_0 + \alpha y - \beta x) = 0,$$

ce qui entraîne nécessairement les conditions

$$\beta(h - l) = 0, \quad \alpha(k - l) = 0, \quad l\gamma_0 + \beta\mu = 0.$$

Si l'une des quantités l , $h - l$, $k - l$ est nulle, la surface est, ou cylindrique, ou de révolution. Écartons ces deux hypothèses et nous retomberons sur les équations (31). Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Toutes les fois qu'une famille de Lamé est composée de surfaces du second degré qui ne sont ni coniques, ni cylindriques, ni de révolution, les plans principaux de toutes ces surfaces coïncident.

63. Revenons au cas général. On peut donner une interprétation élégante de l'équation (30). Considérons la surface représentée par l'équation

$$(33) \quad \varphi(x, y, z, u) = 0,$$

et admettant le plan des xy pour plan de symétrie ; menons-lui la normale en un point quelconque (x, y, z) . Cette droite aura pour équations

$$\frac{X - x}{\varphi_1} = \frac{Y - y}{\varphi_2} = \frac{Z - z}{\varphi_3},$$

et le point où elle coupera le plan de symétrie sera défini par les formules

$$(34) \quad Z = 0, \quad X = x - \frac{z\varphi_1}{\varphi_3}, \quad Y = y - \frac{z\varphi_2}{\varphi_3}.$$

Si le pied de la normale se rapproche d'un point M de la section (K) par le plan de symétrie, z tendra vers zéro, $\frac{\varphi_3}{z}$ aura pour limite φ_{33} et le point (X, Y) , défini par les équations précédentes,

deviendra le centre de courbure principal relatif à la section normale en M au plan de symétrie.

En appelant x' , y' les coordonnées de ce centre, ρ le rayon de courbure principal correspondant, on aura donc

$$(35) \quad x' = x - \frac{\varphi_1}{\varphi_{33}}, \quad y' = y - \frac{\varphi_2}{\varphi_{33}}, \quad \rho = \frac{\sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2}}{\varphi_{33}},$$

et la formule (30) prendra la forme suivante :

$$(36) \quad C\rho = \alpha y' - \beta x' + \gamma_0;$$

ce qui veut dire que le rayon de courbure doit, ou bien être constant si α et β sont nuls, ou bien être proportionnel à la distance du centre de courbure à une droite du plan. Cette droite, représentée par l'équation

$$\alpha y - \beta x + \gamma_0 = 0,$$

est d'ailleurs le lieu des points du plan de symétrie dont la vitesse est parallèle au plan; c'est-à-dire c'est la caractéristique du plan, ou l'intersection du plan avec sa position infiniment voisine. Si C devait être nul, le centre de courbure serait sur cette droite.

On peut encore, pour interpréter la condition précédente, remarquer que la sphère admettant pour centre le centre de courbure et pour rayon le rayon de courbure, c'est-à-dire la sphère osculatrice en M à la surface suivant la direction normale au plan de symétrie, doit couper sous un angle constant tout plan fixe passant par la caractéristique, ou bien avoir son rayon constant si cette caractéristique est rejetée à l'infini. Nous avons donc le théorème suivant :

Pour que des surfaces qui forment une famille de Lamé et ont toutes des plans de symétrie soient disposées de telle manière que ces plans de symétrie ne coïncident pas, il est nécessaire que toutes les sphères osculatrices à chacune de ces surfaces, en tous les points de la section par un plan de symétrie et suivant la direction normale à ce plan, coupent sous un angle constant l'un quelconque des plans qui passent par la caractéristique du plan de symétrie, ou qu'elles aient un rayon constant si cette caractéristique est rejetée à l'infini.

64. Appliquons cette proposition à la recherche des familles de Lamé composées de surfaces de révolution. Alors tout plan passant par l'axe de révolution sera un plan de symétrie. Si l'on a choisi cet axe pour axe des x , on aura ici

$$y' = 0,$$

et ρ sera la portion de la normale à la section méridienne comprise entre l'axe et le pied de la normale. L'équation (36) deviendra donc ici

$$(37) \quad C\rho = \gamma_0 - \beta x'.$$

En général, il n'y a pas une relation aussi simple entre la normale à la méridienne et l'abscisse du point où elle coupe l'axe. Il faut donc que l'on ait

$$(38) \quad C = 0, \quad \gamma_0 = 0, \quad \beta = 0,$$

et ces relations devront avoir lieu pour tous les méridiens. Les deux dernières expriment donc que ni la translation, ni la rotation infiniment petite du système d'axes choisis ne peuvent avoir de composante normale à l'axe de révolution. En d'autres termes, *l'axe doit demeurer fixe et rester le même pour toutes les surfaces*. Cette condition est d'ailleurs suffisante, nous l'avons vu (n° 17).

Mais supposons qu'il existe, entre ρ et x' , une relation de la forme (37). Alors, si $C = 0$, on a une sphère; si $\beta = 0$, on a, soit une sphère, soit un cylindre de révolution. Dans tous les autres cas, la méridienne se réduit, soit à une droite, soit à un cercle. Les surfaces correspondantes sont donc, soit des sphères, soit des cylindres ou des cônes de révolution. Ces cas d'exception étaient à prévoir : on sait, par exemple, que l'on peut former une famille de Lamé avec des cônes assujettis uniquement à avoir le même sommet, ou avec des cylindres assujettis seulement à avoir leurs génératrices rectilignes parallèles à une droite fixe.

Nous nous contenterons seulement d'énoncer une proposition analogue à la précédente, et pour la démonstration de laquelle nous renverrons le lecteur à un travail déjà cité (1).

(1) *Mémoire sur la théorie des coordonnées curvilignes et des systèmes or-*

Si une famille de Lamé est composée de surfaces anallagmatiques ⁽¹⁾, les sphères par rapport auxquelles les diverses surfaces sont anallagmatiques doivent coïncider, à moins que la condition suivante ne soit remplie.

Considérons la section (K) de chaque surface par la sphère (S) relativement à laquelle elle est anallagmatique, et construisons, en chaque point M de cette section, la sphère osculatrice à la surface suivant la direction normale à (K). Cette sphère osculatrice devra couper sous un angle constant, quel que soit le point M, le plan radical de (S) et de la sphère analogue relative à la surface infiniment voisine.

65. Nous terminerons ce Chapitre en développant ici une application, qui s'y rattache naturellement, de la méthode indiquée aux n^{os} 40 et 41. Proposons-nous la solution du problème suivant.

On sait qu'il existe une infinité de systèmes doubles orthogonaux définis de la manière suivante : la première famille est formée des surfaces (Σ), lieux des points pour lesquels la somme des distances à deux surfaces fixes (A) et (B) est constante; la deuxième est formée des surfaces (Σ'), lieux des points pour lesquels la différence des distances aux mêmes surfaces (A) et (B) est constante. On demande si l'on peut compléter le système et adjoindre aux deux familles de surfaces (Σ), (Σ') une troisième famille, formée de surfaces (S) qui les coupent à angle droit.

Comme les courbes d'intersection des surfaces (Σ), (Σ') sont les mêmes que celles des surfaces parallèles aux deux surfaces fixes (A) et (B), il est clair que le problème posé est identique au suivant :

Étant données les surfaces parallèles à deux surfaces fixes (A) et (B), y a-t-il une troisième famille de surfaces les coupant à angle droit?

thogonaux (Annales de l'École Normale, 2^e série, t. VII, p. 136-138; 1878). On déduit de cette proposition la détermination de toutes les familles de Lamé formées avec des cyclides générales.

⁽¹⁾ Voir, pour la définition des surfaces anallagmatiques, *Leçons sur la théorie des surfaces* (I^{re} Partie, p. 258, n^o 172).

Appelons v et w les paramètres des deux familles données de surfaces parallèles, et u le paramètre de la famille cherchée. Les conditions du problème s'expriment par les relations suivantes :

$$(39) \quad v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1, \quad w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = 1, \quad \delta_u v = 0, \quad \delta_u w = 0,$$

qui rentrent dans le type déjà examiné au n° 40. En appliquant la méthode que nous avons fait connaître, on en déduira les relations

$$(40) \quad v_1^2 u_{11} + 2v_1 v_2 u_{12} + \dots = 0$$

puis

$$(41) \quad \sum_i \sum_k v_i v_k (\delta_u u_{ik} - 2\delta_{u_i} u_k) = 0,$$

et des équations semblables pour w , ce qui conduira à deux équations du troisième ordre pour la fonction u .

66. Mais la question se simplifie beaucoup si l'on emploie des considérations géométriques. Les surfaces de paramètres v , w étant parallèles et orthogonales aux surfaces de paramètre u , leurs normales, qui sont, pour elles, des trajectoires orthogonales, doivent être nécessairement situées sur les surfaces de paramètre u . Ces surfaces doivent donc pouvoir être engendrées de deux manières différentes par une droite, ce qui exige qu'elles soient, ou des plans, ou des surfaces du second degré.

Le cas où elles sont des plans a été déjà traité (Chap. II) et fournit la solution la plus générale du problème.

Le cas véritablement intéressant est celui où l'on suppose que les surfaces de paramètre u sont du second degré; nous allons l'étudier en détail, en nous bornant au cas où leurs axes sont inégaux.

Comme les surfaces forment une famille de Lamé, elles devront avoir les mêmes plans principaux. Commençons par supposer qu'elles aient un centre et que leur équation soit

$$(42) \quad ax^2 + by^2 + cz^2 = 1,$$

a, b, c désignant des fonctions de u . On devra avoir ici

$$(43) \quad \begin{cases} v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1, \\ axv_1 + byv_2 + czv_3 = 0, \end{cases}$$

$$(44) \quad \begin{cases} w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = 1, \\ axw_1 + byw_2 + czw_3 = 0, \end{cases}$$

et, en appliquant l'équation (40),

$$(45) \quad \begin{cases} av_1^2 + bv_2^2 + cv_3^2 = 0, \\ aw_1^2 + bw_2^2 + cw_3^2 = 0. \end{cases}$$

Ces équations sont d'ailleurs géométriquement évidentes : elles expriment que les normales aux surfaces de paramètres v, w sont les génératrices rectilignes de la surface. En écrivant que la deuxième équation (43) et la première (45) sont compatibles, c'est-à-dire que leur crochet est nul, on trouvera après quelques réductions

$$(46) \quad \begin{cases} (a^2b' + b^2a')(xv_2 - yv_1)^2 + (b^2c' + c^2b')(yv_3 - zv_2)^2 \\ \quad + (c^2a' + a^2c')(zv_1 - xv_3)^2 = 0, \end{cases}$$

et une équation semblable pour w . Or en combinant les équations (42), (43), (45), on obtient la suivante :

$$(47) \quad ab(xv_2 - yv_1)^2 + bc(yv_3 - zv_2)^2 + ac(zv_1 - xv_3)^2 = 0.$$

Ces deux dernières équations (46), (47) devant être vérifiées aussi quand on y remplace v par w , il faut qu'elles soient identiques l'une à l'autre ; ce qui donne comme conditions

$$(48) \quad \frac{a^2b' + b^2a'}{ab} = \frac{b^2c' + c^2b'}{bc} = \frac{c^2a' + a^2c'}{ac}.$$

Si l'on revient aux notations primitives et si l'on écrit l'équation des quadriques cherchées sous la forme déjà employée

$$(49) \quad \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 1,$$

les équations précédentes deviennent

$$(50) \quad C(dA + dB) = B(dA + dC) = A(dB + dC),$$

et elles définissent complètement le système cherché. On verra sans peine qu'elles entraînent, comme cela devait être, la relation (2).

67. Les équations (50) ont été intégrées pour la première fois par Halphen (1).

Voici une méthode nouvelle et très simple pour effectuer cette intégration. Portons dans les équations (50) les valeurs de A, B, C définies par les formules (20). Nous obtiendrons l'unique équation

$$(51) \quad 2u \frac{d}{dt} \left[t(1-t) \frac{du}{dt} \right] - u^2 - t(1-t) \frac{du^2}{dt^2} = 0.$$

Cette équation n'est pas linéaire, mais elle se ramène à une équation linéaire si l'on effectue la substitution

$$(52) \quad u = \theta^2;$$

elle se réduit, en effet, à la suivante :

$$(53) \quad t(1-t) \frac{d^2 \theta}{dt^2} + (1-2t) \frac{d\theta}{dt} - \frac{\theta}{4} = 0,$$

qui est bien connue et qui est celle à laquelle satisfont les intégrales elliptiques complètes K et K' pour lesquelles le carré k^2 du module est égal à t .

En faisant donc

$$(54) \quad t = k^2,$$

on aura, a et b désignant deux constantes,

$$(55) \quad \theta = aK + bK', \quad u = (aK + bK')^2.$$

La solution est ainsi obtenue, mais elle ne se présente pas sous une forme qui permette de l'utiliser en Géométrie.

68. On aurait pu employer une autre méthode, que nous allons simplement appliquer au cas des surfaces dépourvues de centre.

(1) HALPHEN (G.), *Sur un système d'équations différentielles* (Comptes rendus, t. XCII, p. 1101, 1^{er} semestre 1881).

Considérons une famille de paraboloides, dont les plans principaux coïncideront nécessairement et qui sera représentée par l'équation

$$(56) \quad \frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2x + r,$$

où p, q, r sont des fonctions d'un même paramètre u . Les génératrices rectilignes d'un même système seront définies par les équations

$$(57) \quad \begin{cases} \frac{2y}{\sqrt{p}} = \lambda(2x + r) + \frac{1}{\lambda}, \\ \frac{2z}{\sqrt{-q}} = \lambda(2x + r) - \frac{1}{\lambda}, \end{cases}$$

où λ désigne un nouveau paramètre variable; et nous avons à exprimer que ces droites, dépendantes en réalité de deux paramètres u et λ , sont normales à une même surface.

Or on sait ⁽¹⁾ que la condition nécessaire et suffisante pour que la droite définie par les deux équations

$$y = ax + \alpha, \quad z = bx + \beta,$$

soit normale à une surface, est que l'on puisse intégrer la relation différentielle

$$a dy + b dz + dx = 0,$$

qui, lorsqu'on y substitue les valeurs de y, z , prend la forme

$$d(x\sqrt{a^2 + b^2 + 1}) + \frac{a dx + b d\beta}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}} = 0.$$

Si l'on remplace ici a, b, α, β par leurs valeurs, l'équation précédente deviendra

$$2d[x\sqrt{1 + \lambda^2(p - q)}] + \frac{\lambda\sqrt{p}d\left(\lambda r\sqrt{p} + \frac{\sqrt{p}}{\lambda}\right) + \lambda\sqrt{-q}d\left(\lambda r\sqrt{-q} - \frac{\sqrt{-q}}{\lambda}\right)}{\sqrt{1 + \lambda^2(p - q)}} = 0.$$

(1) *Leçons sur la théorie des surfaces*, n° 449 (II^e Partie, p. 277).

Posons

$$(58) \quad p + q = 2h, \quad p - q = 2u, \quad u\lambda^2 = \mu,$$

l'équation deviendra

$$(59) \quad d(x\sqrt{1+2\mu}) + \frac{\left(r - \frac{h}{\mu}\right) d\mu + dh + 2\mu dr + h \frac{du}{u}}{2\sqrt{1+2\mu}} = 0.$$

Pour que l'intégration puisse se faire, il faut que le second terme soit une différentielle exacte, ce qui donne la condition

$$dr + \frac{dh}{\mu} = \frac{dh + 2\mu dr + h \frac{du}{u}}{1 + 2\mu}.$$

Cette équation ne peut être vérifiée, quel que soit μ , que si l'on a

$$dh = 0, \quad dr = h \frac{du}{u};$$

et l'équation (59) admettra alors pour intégrale

$$(60) \quad (2x + r)\sqrt{1+2\mu} = h \int \frac{d\mu}{\mu\sqrt{1+2\mu}}.$$

On aura, h étant une constante,

$$(61) \quad p = h + u, \quad q = h - u, \quad r = h \operatorname{Log} u,$$

et l'équation des paraboloides deviendra

$$(62) \quad \frac{y^2}{h+u} + \frac{z^2}{h-u} = 2x + h \operatorname{Log} u.$$

Les surfaces parallèles qui sont normales aux génératrices seront définies par l'équation (60), jointe aux deux équations (57) de la génératrice rectiligne.

69. La famille des paraboloides n'est algébrique que si l'on a $h = 0$. Dans ce cas, en faisant tourner de 45° autour de Ox les plans des xy et des xz , on ramènera son équation à la forme simple

$$(63) \quad yz = ux.$$

Les deux familles qui complètent le système triple orthogonal

seront alors représentées par les équations

$$(64) \quad \begin{cases} \sqrt{y^2 + x^2} + \sqrt{z^2 + x^2} = v, \\ \sqrt{y^2 + x^2} - \sqrt{z^2 + x^2} = w, \end{cases}$$

dont l'interprétation géométrique est évidente ⁽¹⁾.

Le résultat précédent est le plus élégant de la théorie ; on peut d'ailleurs l'établir par la Géométrie.

Considérons, en effet, deux droites OA, OB qui se coupent et sont rectangulaires ; les surfaces (Σ) et (Σ'), lieux des points tels que la somme ou la différence de leurs distances à ces deux droites soit constante, se coupent mutuellement à angle droit. Pour chaque point M de l'espace, les normales à ces surfaces sont les bissectrices de l'angle PMQ formé par les normales MP, MQ abaissées respectivement de M sur OA, OB. D'autre part, si l'on considère la famille des paraboloides (S) qui contiennent OA, OB et ont leurs plans directeurs normaux respectivement à OA et à OB, celui de ces paraboloides qui passe en M contiendra nécessairement les droites MP, MQ et sera, par suite, normal à celle des surfaces (Σ) ou (Σ') qui passe en M. On a donc ainsi constitué un système triple orthogonal.

La proposition précédente fait connaître les lignes de courbure de la surface lieu des points pour lesquels la somme ou la différence des distances à deux droites qui sont rectangulaires et qui se coupent est constante. On a jusqu'ici essayé vainement de généraliser ce résultat et de déterminer les lignes de courbure de la surface lieu des points pour lesquels est constante la somme algébrique des distances à deux droites qui soient dans une relation moins particulière que celle de l'énoncé précédent.

⁽¹⁾ Voir, au sujet de ce système, *Leçons sur la théorie des surfaces* (n° 140, 1^{re} Partie, p. 198).

CHAPITRE VI.

SYSTÈMES ORTHOGONAUX A n VARIABLES. EXTENSION DES MÉTHODES PRÉCÉDENTES.

Système des coordonnées elliptiques générales. — On peut de même généraliser le système des cyclides orthogonales et homofocales et employer, pour le cas de n dimensions, des variables analogues aux coordonnées pentasphériques. — Définition des systèmes complètement orthogonaux à n variables : puisqu'il existe de tels systèmes, l'objet de ce Chapitre sera d'appliquer à leur recherche la méthode déjà employée pour le cas de trois variables. — Problème fondamental : étant données n fonctions formant un système complètement orthogonal, éliminer toutes les fonctions moins une et former les équations aux dérivées partielles, à la fois nécessaires et suffisantes, auxquelles doit satisfaire cette dernière fonction. — Exposé de la méthode : une des fonctions u étant supposée connue, un premier groupe de $(n-1)^2$ équations permet de déterminer les rapports mutuels des dérivées premières des $n-1$ autres fonctions v, w, \dots . — Ce premier groupe d'équations est identique à celui que l'on rencontre lorsqu'on veut réduire à des sommes composées des mêmes carrés deux formes quadratiques à n variables, ces variables étant d'ailleurs liées par une relation linéaire. — Les équations que l'on obtient ainsi pour chacune des fonctions v, w, \dots , étant au nombre de $n-1$, donnent naissance à des conditions d'intégrabilité qui contiendront évidemment les dérivées de u jusqu'au troisième ordre. — En essayant de former de la manière la plus simple ces conditions, on est conduit à deux groupes bien distincts d'équations du troisième ordre pour u . — Les premières, au nombre de $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, sont analogues à l'équation formée dans le cas de trois variables et jouissent, comme elle, de la propriété de s'écrire sous une forme simple à l'aide des dérivées secondes de la fonction

$$H = (u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Les secondes, au nombre de $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$, n'apparaissent que lorsque n est supérieur à 3. — Si l'on veut interpréter en langage géométrique les résultats précédents, on peut d'abord généraliser la notion de *normale à une surface*, ce qui conduit naturellement à l'extension de la définition des *directions principales* et des *lignes de courbure*. — Dans un espace à n dimensions, il y a $n-1$ directions principales, et par suite $n-1$ systèmes de lignes de courbure, pour chaque surface. — Deux directions principales différentes sont à la fois orthogonales et conjuguées. — Cette notion des lignes de courbure une fois introduite, le théorème de Dupin se généralise immédiatement : si une surface fait partie d'un système complètement orthogonal, les surfaces qui appartiennent aux autres familles admettent pour normales en chaque point de la

surface considérée les directions principales de cette surface; par conséquent, prises $n - 2$ à $n - 2$, elles coupent cette surface suivant une de ses lignes de courbure. — Mais il faut prendre garde ici à une propriété tout à fait nouvelle : une surface quelconque prise dans l'espace à n dimensions, n étant supérieur à 3, ne saurait faire partie d'un système complètement orthogonal; pour qu'il en soit ainsi, il faut que ses lignes de courbure soient *coordonnées*. — On dit que les lignes de courbure sont coordonnées lorsqu'on peut choisir $n - 1$ fonctions dont *une seule* varie sur chaque ligne de courbure de la surface. — Lorsque les lignes de courbure d'une surface sont coordonnées, la surface peut faire partie d'un système complètement orthogonal : on le reconnaît en généralisant la théorie des surfaces parallèles. — Application des résultats précédents aux surfaces définies par l'équation $X_1 + X_2 + \dots + X_n = 0$. — Condition pour que leurs lignes de courbure soient coordonnées. — Systèmes orthogonaux comprenant une famille définie par l'équation $u = X_1 + \dots + X_n$. — Généralisation des propositions de MM. Bouquet et J.-A. Serret. — Systèmes orthogonaux comprenant la famille $u = x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$. — Détermination simple des autres familles. — Étude de différents systèmes orthogonaux, détermination des lignes de courbure de différentes surfaces, parmi lesquelles on peut signaler les surfaces tétraédrales de Lamé. — Les résultats obtenus dans ce Chapitre donnent notamment les lignes de courbure d'un grand nombre de surfaces du troisième ordre, dans l'espace à trois dimensions.

70. On sait toute l'importance que présentent en Mécanique la méthode du changement de variables et l'emploi d'un système de coordonnées analogues aux coordonnées elliptiques dans le plan et dans l'espace. Dans ses *Vorlesungen*, Jacobi, étendant à un nombre quelconque de variables les méthodes employées par Lamé, a fait de belles et de nombreuses applications du changement de variables suivant.

Étant données n variables indépendantes x_1, x_2, \dots, x_n et n constantes quelconques a_1, a_2, \dots, a_n , désignons par $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ les n racines de l'équation en ρ

$$(1) \quad \frac{x_1^2}{a_1 - \rho} + \frac{x_2^2}{a_2 - \rho} + \dots + \frac{x_n^2}{a_n - \rho} = 1,$$

racines qui sont réelles et distinctes toutes les fois que les constantes a_k et les variables x_k sont réelles. Il est aisé de montrer que ces n fonctions ρ_1, \dots, ρ_n satisfont aux $\frac{n(n-1)}{2}$ équations suivantes :

$$(2) \quad \delta_{\rho_i} \rho_k = \sum_h \frac{\partial \rho_i}{\partial x_h} \frac{\partial \rho_k}{\partial x_h} = 0, \quad (i \neq k).$$

Toutes les fois que des fonctions satisferont à ces équations simultanées, nous dirons qu'elles forment un *système complètement orthogonal à n variables* ou un *système complètement orthogonal dans un espace à n dimensions*.

A l'exemple précédent, étudié par Jacobi, il est aisé d'en ajouter un autre, en généralisant la méthode qui a été suivie dans nos Leçons ⁽¹⁾ pour la définition et l'étude des coordonnées *pentasphériques*. Désignons par R une constante quelconque et substituons aux n variables x_1, x_2, \dots, x_n les $n + 2$ variables y_h définies par les relations

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} y_h = \lambda & \left[2\alpha_1^h x_1 + 2\alpha_2^h x_2 + \dots + 2\alpha_n^h x_n \right. \\ & \left. + \alpha_{h+1}^h \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2 - R^2}{R} + i\alpha_{h+2}^h \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2 + R^2}{R} \right], \end{aligned} \right.$$

où les constantes $\alpha_1^h, \dots, \alpha_{n+2}^h$ sont les coefficients d'une substitution orthogonale et satisfont par suite aux relations

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} (\alpha_1^h)^2 + (\alpha_2^h)^2 + \dots + (\alpha_{n+2}^h)^2 &= 1, \\ \alpha_1^h \alpha_1^{h'} + \dots + \alpha_{n+2}^h \alpha_{n+2}^{h'} &= 0. \end{aligned} \right.$$

Les variables y_h , au nombre de $n + 2$, constitueront, dans l'espace à n dimensions, un système de *coordonnées homogènes surabondantes* liées par la relation

$$(5) \quad \sum_1^{n+2} y_h^2 = 0,$$

et analogues aux coordonnées pentasphériques de l'espace à trois dimensions. Si

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi(y_1, y_2, \dots, y_{n+2}) &= 0, \\ \psi(y_1, y_2, \dots, y_{n+2}) &= 0 \end{aligned} \right.$$

représentent les équations de deux surfaces écrites, dans ce système de coordonnées *et homogènes*, il suffira de répéter les

(1) *Leçons sur la théorie générale des surfaces* (Livre II, Ch. VI, I^{re} Partie, p. 213).

raisonnements relatifs aux coordonnées pentasphériques pour reconnaître que la condition d'orthogonalité des deux surfaces précédentes prend, avec les nouvelles variables, la forme suivante

$$(7) \quad \sum_{h=1}^{h=n+2} \frac{\partial \varphi}{\partial y_h} \frac{\partial \psi}{\partial y_h} = 0,$$

tout à fait pareille à celle que l'on aurait à écrire avec les x_h , mais contenant deux variables de plus. Il suffira, bien entendu, que la relation précédente ait lieu en vertu des équations (6) des deux surfaces.

L'emploi des variables précédentes nous permet d'adjoindre au système des coordonnées elliptiques de Jacobi un système plus général formé avec des équations du quatrième ordre. Introduisons, à cet effet, $n + 2$ constantes a_h et considérons l'équation homogène

$$\sum_1^{n+2} \frac{y_h^2}{\lambda - a_h} = 0,$$

qui est, en général, du quatrième ordre en x_1, x_2, \dots, x_n .

Elle définit seulement n valeurs pour λ ; car, après que l'on a chassé les dénominateurs, le coefficient de λ^{n+1} est nul en vertu de la relation identique (5) entre les coordonnées. Soient $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ ces n valeurs de λ . Elles satisfont, pour les mêmes raisons que dans le cas précédent, aux équations

$$\delta_{\rho_i} \rho_k = 0, \quad (i \neq k)$$

et forment, par conséquent, un système orthogonal.

De ces systèmes orthogonaux, on peut en faire dériver une infinité d'autres par des méthodes sur lesquelles nous aurons à revenir (1); on peut donc affirmer que, si l'on considère les $\frac{n(n-1)}{2}$ équations

$$(8) \quad \delta_{\alpha^i} \alpha^k = \sum_{h=1}^{h=n} \frac{\partial \alpha^i}{\partial x_h} \frac{\partial \alpha^k}{\partial x_h} = 0,$$

(1) Voir, en particulier, la Note : *Sur une nouvelle série de systèmes orthogonaux algébriques*, insérée, en 1869, aux *Comptes rendus* (t. LXIX, p. 392).

auxquelles devront satisfaire n fonctions $\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n$, ces équations, bien qu'elles soient, à partir de $n=4$, en nombre supérieur à celui des fonctions inconnues, admettent néanmoins, *quel que soit* n , un nombre illimité de solutions particulières. Il y a donc, d'après toutes ces remarques, intérêt à les étudier et à leur appliquer les méthodes que nous avons employées dans le cas particulier de trois variables. Nous rencontrerons ainsi des problèmes d'Analyse qui méritent en eux-mêmes d'être examinés; et d'ailleurs les applications au cas de trois variables se présenteront à chaque pas. C'est par cette étude que nous terminerons le premier Livre.

71. Je considère donc n fonctions

$$\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n$$

satisfaisant aux équations (8) et je conserve les notations déjà employées au Chapitre I. Ainsi, α_k^i désignera la dérivée de α^i par rapport à x_k . Du reste, pour éviter autant que possible des notations compliquées, chaque fois que nous aurons à considérer un nombre limité de fonctions α^i , nous les désignerons par les lettres u, v, w, t, α sans indice. Rappelons aussi que nous avons posé comme définition

$$(9) \quad \begin{pmatrix} v, w \\ u \end{pmatrix} = \sum \sum v_i w_k u_{ik},$$

et il résulte de la formule (27) (n° 9) que ce symbole est nul toutes les fois que u, v, w désignent trois fonctions α^i différentes.

Le premier point que nous avons à traiter, et le plus important, est le suivant :

Éliminer des équations (8) par des dérivations toutes les fonctions, moins une que nous désignerons par la lettre u , et rechercher toutes les équations nécessaires et suffisantes auxquelles doit satisfaire cette fonction u pour que le problème ait une solution.

Aux équations (8), qui peuvent s'écrire

$$(10) \quad \delta_v u = 0, \quad \delta_v w = 0, \quad \dots$$

quadratiques (12) ne contiennent pas les rectangles des variables, on obtiendra les deux systèmes suivants :

$$(16) \quad \begin{cases} \alpha_1 \beta_1 + \dots + \alpha_n \beta_n = 0, \\ \alpha_1 \gamma_1 + \dots + \alpha_n \gamma_n = 0, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

$$(17) \quad \begin{cases} \sum \sum u_{ik} \alpha_i \beta_k = 0, \\ \sum \sum u_{ik} \alpha_i \gamma_k = 0, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

Ce sont, aux notations près, les équations (8), (9) que nous avons à résoudre; c'est ce que nous voulions prouver.

On sait que la solution du problème précédent est donnée par les formules suivantes :

Les dérivées de l'une quelconque des fonctions φ, ω, \dots , de φ par exemple, satisfont à des équations telles que les suivantes :

$$(18) \quad \sum_{k=1}^{k=n} u_{ik} \varphi_k = \lambda \varphi_i + \mu u_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$(19) \quad u_1 \varphi_1 + \dots + u_n \varphi_n = 0.$$

En éliminant les dérivées φ_i ainsi que μ , on obtiendra pour λ l'équation suivante :

$$(20) \quad \begin{vmatrix} u_{11} - \lambda & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} & u_1 \\ u_{21} & u_{22} - \lambda & u_{23} & \dots & u_{2n} & u_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & \dots & u_{nn} - \lambda & u_n \\ u_1 & u_2 & \dots & \dots & u_n & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

de degré $n - 1$ en λ , et qu'il faudra résoudre si, supposant la fonction u connue, on veut trouver les rapports des dérivées des $n - 1$ autres fonctions. Comme μ demeure arbitraire, ces rapports seuls sont, en effet, connus.

Pour déterminer les fonctions φ, ω, \dots , elles-mêmes, on aura donc à intégrer des équations aux différentielles totales de la forme

$$A_1 dx_1 + \dots + A_n dx_n = 0.$$

Pour que des équations de cette forme soient intégrables avec une constante arbitraire, qui sera ici égalée à la fonction ν correspondante, il faut que certaines relations entre les coefficients A_i et leurs dérivées premières soient vérifiées identiquement. Comme ces coefficients A_i dépendent des dérivées premières et secondes de u , on voit que cette fonction u devra satisfaire à certaines équations aux dérivées partielles du troisième ordre. Ce sont ces équations, à la fois nécessaires et suffisantes, que nous allons d'abord rechercher.

72. Mais, auparavant, nous avons à établir quelques identités qui nous seront indispensables. Désignons, en général, par G_{α^i} l'expression

$$(21) \quad G_{\alpha^i} = \sqrt{\delta_{\alpha^i} \alpha^i} = \sqrt{(\alpha_1^i)^2 + (\alpha_2^i)^2 + \dots + (\alpha_n^i)^2};$$

il est clair que les quotients

$$(22) \quad b_{ik} = \frac{\alpha_k^i}{G_{\alpha^i}}$$

sont les coefficients d'une substitution orthogonale; car on a, par la définition de G_{α^i} ,

$$(23) \quad b_{i1}^2 + b_{i2}^2 + \dots + b_{in}^2 = 1,$$

et les équations (8) donnent

$$(24) \quad b_{i1} b_{k1} + b_{i2} b_{k2} + \dots + b_{in} b_{kn} = 0.$$

On aura donc aussi, d'après les propriétés des substitutions orthogonales,

$$(25) \quad b_{1i}^2 + b_{2i}^2 + \dots + b_{ni}^2 = 1,$$

$$(26) \quad b_{1i} b_{1k} + \dots + b_{ni} b_{nk} = 0 \quad (i \neq k).$$

Cela posé, si l'on désigne par α , ν , ω , u , t cinq fonctions du groupe considéré, on aura, par définition,

$$\left(\begin{matrix} \alpha, \omega \\ u \end{matrix} \right) = \sum \sum \alpha_i \omega_k u_{ik}, \quad \left(\begin{matrix} \alpha, \nu \\ t \end{matrix} \right) = \sum \sum \alpha_i \nu_k t_{ik}$$

et, en multipliant membre à membre et divisant ensuite par

$\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2$ que nous désignerons par G_α^2 ,

$$\frac{1}{G_\alpha^2} \binom{\alpha, \varpi}{u} \binom{\alpha, \nu}{t} = \sum \sum \sum \sum \frac{\alpha_i \alpha_j}{G_\alpha^2} \varpi_k \nu_l u_{ik} t_{jl},$$

la somme devant être étendue à toutes les valeurs de i, j, k, l . Si nous remplaçons la fonction α successivement par toutes les fonctions $\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n$ et que nous faisons la somme de tous les résultats obtenus, alors, en vertu des formules (25) et (26), tous les termes du second membre, dans lesquels i, j sont différents, donneront une somme nulle et, pour les autres, le coefficient de $\varpi_k \nu_l u_{ik} t_{il}$ sera l'unité. On aura donc

$$(27) \quad \sum \frac{1}{G_\alpha^2} \binom{\alpha, \nu}{t} \binom{\alpha, \varpi}{u} = \sum \sum \sum \varpi_k \nu_l t_{il} u_{ik},$$

la somme du premier membre se composant de n termes obtenus en remplaçant α par $\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n$.

Le second membre peut s'écrire

$$\sum_i \delta_\varpi u_i \delta_\nu t_i.$$

Nous adopterons, pour le désigner, la notation

$$(28) \quad \sum \delta_\varpi u_i \delta_\nu t_i = \binom{\varpi, \nu}{u, t}.$$

Supposons d'abord les quatre fonctions u, ν, ϖ, t différentes les unes des autres. Comme on sait que $\binom{u, \nu}{\varpi}$ est nul toutes les fois que les fonctions sont différentes, on verra facilement que tous les termes du premier membre de l'équation (27) sont nuls; car le premier facteur est nul si α est différent de ν et de t ; et, si α est ν ou t , le second facteur est nul. On a donc

$$(29) \quad \binom{\varpi, \nu}{u, t} = 0,$$

si u, ν, ϖ, t sont différents.

On pourrait faire beaucoup d'autres hypothèses. En voici une qui nous conduira à une formule que nous aurons à employer.

Supposons que l'on fasse $t = u$, v demeurant distinct de w et de u ; le premier membre de l'équation (27) se réduira au seul terme pour lequel on a $\alpha = u$; et l'on aura, par suite,

$$\begin{pmatrix} u, v \\ u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u, w \\ u \end{pmatrix} = G_u^2 \begin{pmatrix} w, v \\ u, u \end{pmatrix},$$

ou, en ordonnant par rapport aux dérivées de v, w ,

$$(30) \quad \sum \sum v_i w_k (G_u^2 \delta_{u_i} u_k - \delta_{u_i} u_i \delta_u u_k) = 0.$$

Ces deux identités (29) et (30) suffisent pour les résultats que nous voulons obtenir, et nous allons chercher maintenant les équations du troisième ordre auxquelles satisfait la fonction u .

73. Remarquons d'abord que l'équation

$$\begin{pmatrix} v, w \\ u \end{pmatrix} = \sum \sum v_i w_k u_{ik} = 0$$

est de la forme de l'équation (32) du n° 10. En lui appliquant la formule (33) du même numéro, nous aurons

$$(31) \quad \sum \sum v_i w_k (\delta_u u_{ik} - 2 \delta_{u_i} u_k) = 0.$$

Si, dans cette équation, on remplace les dérivées de v, w par toutes leurs valeurs possibles, on aura un premier groupe de $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ équations auxquelles devra satisfaire la fonction u .

Ce sont les équations analogues à celle que nous avons formée dans le cas de trois variables.

Je dis d'abord que, si l'on pose

$$H = \frac{1}{G_u} = (u_1^2 + \dots + u_n^2)^{-\frac{1}{2}},$$

ces équations peuvent être mises sous la forme irrationnelle

$$(32) \quad \sum \sum v_i w_k \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_k} = 0.$$

On a, en effet,

$$H_{ik} = \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_k} = -H^3 (G_u^2 \delta_u u_{ik} + G_u^2 \delta_{u_i} u_k - 3 \delta_u u_i \delta_u u_k),$$

et par suite

$$\begin{aligned} \sum \sum v_i \omega_k H_{ik} = & -H^3 \sum \sum v_i \omega_k (\delta_u u_{ik} - 2 \delta_{u_i} u_k) \\ & - 3 H^3 \sum \sum v_i \omega_k (G_u^2 \delta_{u_i} u_k - \delta_u u_i \delta_u u_k), \end{aligned}$$

ou, en tenant compte de l'identité (30),

$$(33) \quad -\frac{1}{H^3} \sum \sum v_i \omega_k H_{ik} = \sum \sum v_i \omega_k (\delta_u u_{ik} - 2 \delta_{u_i} u_k),$$

ce qui justifie le résultat annoncé.

Mais les $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ équations (31) ne sont pas les seules auxquelles doit satisfaire la fonction u . Appliquons l'opération δ_t , t désignant une des fonctions du système, différente toutefois de u , v , ω , au symbole

$$\binom{v, \omega}{u} = \sum \sum v_i \omega_k u_{ik}.$$

Cette opération, appliquée sur les lettres v, ω , donne les termes

$$\sum \delta_t v_i \delta_w u_i + \sum \delta_t \omega_i \delta_v u_i;$$

appliquée à la lettre u , elle donne

$$\sum \sum \sum t_i \omega_k v_l u_{ikl},$$

somme qui est symétrique par rapport à t, v, ω . On a donc, en se rappelant la notation (28),

$$(34) \quad \delta_t \binom{v, \omega}{u} = \binom{t, \omega}{v, u} + \binom{t, v}{\omega, u} + \sum \sum \sum t_i v_k \omega_l u_{ikl}.$$

Donc, toutes les fois que t, v, ω seront différents, on aura, en

se rappelant les formules (11) et (29),

$$(35) \quad \sum \sum \sum t_i v_k w_l u_{ikl} = 0;$$

ce qui constitue un nouveau type d'équations du troisième ordre auxquelles doit satisfaire la fonction u . Remarquons que l'équation précédente peut être *obtenue de trois manières différentes*, par la différentiation des trois équations distinctes

$$\left(\begin{matrix} v \\ u \end{matrix} \right) = 0, \quad \left(\begin{matrix} t \\ u \end{matrix} \right) = 0, \quad \left(\begin{matrix} v \\ u \end{matrix}, t \right) = 0.$$

Elle est le type de $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$ équations nouvelles du troisième ordre qui ne se présentaient pas dans le cas de trois variables et auxquelles devra satisfaire la fonction u . Nous obtenons ainsi deux groupes tout à fait différents d'équations du troisième ordre pour cette fonction u .

74. Avant de continuer l'exposition, je vais montrer que ces équations, qui sont nécessaires, sont aussi suffisantes, et que, lorsqu'elles sont satisfaites, on peut trouver les $n-1$ autres fonctions complétant le système orthogonal. En effet, ces fonctions sont définies, nous l'avons vu, par des équations de la forme

$$(36) \quad \frac{v_1}{A_1} = \frac{v_2}{A_2} = \dots = \frac{v_n}{A_n}.$$

Pour que ces équations soient compatibles, il faut et il suffit, on le sait, que toutes celles qu'on en déduit en les différentiant soient des conséquences des précédentes et se réduisent à

$$\frac{n(n+1)}{2} - 1,$$

qui ne pourront même pas complètement déterminer les dérivées secondes; car, si les équations (36) sont vérifiées, elles le seront encore lorsqu'on y remplacera v par $\varphi(v)$, ce qui permet, pour chaque système de valeurs des variables indépendantes, de donner une valeur arbitraire à l'une des dérivées secondes de v .

Au lieu de résoudre les équations

$$\left(\begin{array}{c} \varphi, \omega \\ u \end{array} \right) = 0, \quad \partial_\nu u = 0, \quad \partial_\omega u = 0, \quad \dots,$$

pour obtenir les systèmes tels que (36), nous allons les différentier par rapport à toutes les variables et voir si les équations qu'on obtient en éliminant toutes les dérivées secondes sont vérifiées. Or les équations précédentes sont au nombre de $(n-1)^2$; en les différentiant, on en déduira $n(n-1)^2$ équations. Si l'on retranche de ce nombre celui

$$\left[\frac{n(n+1)}{2} - 1 \right] (n-1) = \frac{(n-1)^2(n+2)}{2}$$

des équations qui doivent conserver les dérivées secondes, on trouve un nombre total

$$\frac{(n-1)^2(n-2)}{2}$$

d'équations qui ne contiendront plus que les dérivées premières et qui devront être vérifiées en vertu même des équations qui déterminent ces dérivées. Or nous avons déjà :

1° Les $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ équations

$$\left(\begin{array}{c} \varphi, \omega \\ u \end{array} \right) = 0,$$

qu'on obtient en différentiant les équations

$$\partial_\nu u = 0, \quad \partial_\omega u = 0$$

et en effectuant des combinaisons qui font disparaître les dérivées secondes des fonctions φ, ω . Ces équations sont vérifiées puisqu'elles servent à définir les fonctions φ_i, ω_k ;

2° Les $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ équations (31) qui devront être vérifiées par la fonction u ;

3° Les $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$ équations (35) qui doivent chacune être comptées pour trois, puisqu'on les obtient de trois manières différentes, chacune par la différentiation de trois équations

tions distinctes. On a donc en tout

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2} + \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{(n-1)^2(n-2)}{2}$$

équations ne contenant pas les dérivées secondes des fonctions v , w , ce qui est bien le nombre que nous devons trouver. Ainsi nos équations du troisième ordre sont à la fois nécessaires et suffisantes.

75. Avant de passer aux applications, il ne sera pas inutile de présenter quelques remarques sur les résultats précédents, de montrer comment ils donnent la généralisation du théorème de Dupin relatif aux lignes de courbure, et aussi de mettre en lumière les différences essentielles qu'ils présentent avec ceux que nous avons obtenus dans le cas de trois variables.

Étant donnée une surface représentée par l'équation

$$(37) \quad \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = u,$$

appelons *normale* à cette surface en un de ses points (x_1, \dots, x_n) le lieu des points (X_1, \dots, X_n) définis par les équations linéaires

$$(38) \quad \frac{X_1 - x_1}{u_1} = \frac{X_2 - x_2}{u_2} = \dots = \frac{X_n - x_n}{u_n};$$

et cherchons dans quelles directions il faut se déplacer sur la surface pour que cette normale soit rencontrée par la normale infiniment voisine. Pour cela, nous désignerons par θ la valeur commune des rapports précédents, et nous aurons à joindre aux équations

$$X_i - x_i = u_i \theta$$

les suivantes, obtenues par différentiation

$$- dx_i = u_i d\theta + \theta du_i.$$

Si, changeant un peu de notations, on remplace $-\frac{1}{\theta}$ par λ et $\frac{d\theta}{\theta}$ par $-d\mu$, les directions cherchées seront déterminées par le système d'équations

$$(39) \quad du_i = \lambda dx_i + u_i d\mu \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

qu'on peut aussi écrire

$$(40) \quad \sum_k u_{ik} dx_k = \lambda dx_i + u_i d\mu.$$

Il suffit de comparer ces équations à celles que nous avons données plus haut (n° 70) pour reconnaître qu'on passe des unes aux autres en changeant dx_k en v_k . On a donc la proposition suivante :

Étant donnée une surface quelconque dans l'espace à n dimensions, elle admet $n - 1$ directions principales en chacun de ses points et elle a, par conséquent, $n - 1$ systèmes distincts de lignes de courbure. Chacune de ces directions, chacun de ces systèmes, correspond à une racine déterminée λ de l'équation (20).

Si l'on désigne par $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}$ les différentielles relatives aux différentes lignes de courbure, il suffit de répéter les remarques présentées au n° 70 pour reconnaître que les formules

$$(41) \quad y_i = z_1 \delta_1 x_i + z_2 \delta_2 x_i + \dots + z_{n-1} \delta_{n-1} x_i$$

réduisent les deux formes quadratiques

$$y_1^2 + \dots + y_n^2,$$

$$\sum_i \sum_k u_{ik} y_i y_k$$

à des sommes composées uniquement avec les carrés de z_1, z_2, \dots, z_{n-1} . On a donc

$$(42) \quad \sum_i \delta_h x_i \delta_{h'} x_i = 0 \quad (h \neq h').$$

En langage géométrique, cette équation exprime la propriété suivante : *les lignes de courbure qui se croisent en un point de la surface s'y coupent mutuellement à angle droit.*

Admettons cette définition et ces propriétés des lignes de courbure ; il suffit de comparer les équations (18) et (40) pour reconnaître immédiatement la propriété suivante :

Si la surface considérée appartient à l'une des familles d'un système complètement orthogonal, les surfaces appartenant aux autres familles admettent pour normales, en chaque point de la surface considérée, les directions principales de cette surface; par conséquent, prises $n-2$ à $n-2$, elles coupent cette surface suivant une de ses lignes de courbure.

C'est bien là une généralisation du théorème de Dupin; mais il faut prendre garde que cette généralisation apporte ici des propriétés et des conséquences nouvelles. Considérons dans l'espace à n dimensions une surface quelconque; elle a bien, nous l'avons démontré, $n-1$ familles de lignes de courbure déterminées par $n-1$ systèmes distincts d'équations différentielles. Mais deux quelconques de ces systèmes n'ont pas, en général, d'intégrale commune, en dehors de u ; c'est-à-dire il n'existe pas, en général, de fonction bien déterminée, différente de u , qui demeure constante à la fois sur les lignes de courbure appartenant à ces deux systèmes. Pour qu'il en fût ainsi il faudrait que, si les équations différentielles relatives à ces deux systèmes sont

$$\frac{dx_1}{A_1} = \dots = \frac{dx_n}{A_n}, \quad \frac{dx_1}{B_1} = \dots = \frac{dx_n}{B_n},$$

il y eût une fonction v différente de u et satisfaisant à la fois aux deux équations

$$\sum_i A_i \frac{\partial v}{\partial x_i} = 0, \quad \sum_i B_i \frac{\partial v}{\partial x_i} = 0;$$

c'est ce qui n'a pas toujours lieu, nous le montrerons sur un exemple particulier.

Ici, au contraire, pour toute surface faisant partie d'un système complètement orthogonal, *il existera une intégrale commune non seulement à deux systèmes, mais à $n-2$ systèmes quelconques de lignes de courbure; ce sera le paramètre de la famille de surfaces normales au système de lignes de courbure qui a été laissé de côté.* Nous pouvons donc conclure :

Une surface quelconque, prise dans l'espace à n dimensions, n étant supérieur à 3, ne saurait faire partie d'un système complètement orthogonal.

Pour qu'elle puisse faire partie d'un tel système, il faut qu'il existe une intégrale commune à $n - 2$ quelconques des $n - 1$ systèmes d'équations différentielles qui déterminent les lignes de courbure.

Quand une surface remplira la condition précédente, nous dirons que ses lignes de courbure sont *coordonnées*.

76. Cette condition est nécessaire; mais il est aisé de voir qu'elle est aussi suffisante. Pour établir cette importante proposition, nous allons, en quelques mots, généraliser la théorie des surfaces parallèles.

Étant donnée une surface quelconque (Σ) , conservons toutes les notations précédentes, et faisons correspondre à celui de ses points qui a pour coordonnées x_1, \dots, x_n le point nouveau (X_1, \dots, X_n) défini par les formules

$$(43) \quad X_i = x_i + R \frac{u_i}{G} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

où R désigne une constante et où l'on a

$$(44) \quad G^2 = u_1^2 + \dots + u_n^2.$$

Pour chaque valeur de R , on aura une surface (Σ_R) décrite par le point de coordonnées X_i . Nous dirons que cette surface (Σ_R) est *parallèle* à (Σ) , et l'on reconnaîtra facilement que *toutes les surfaces (Σ_R) ont les mêmes normales que (Σ)* . Donc, d'après la définition des lignes de courbure donnée plus haut, *leurs lignes de courbure correspondent, point par point, aux lignes de courbure de (Σ)* .

Supposons maintenant que les lignes de courbure de (Σ) soient *coordonnées*: il en sera évidemment de même des lignes de courbure des surfaces (Σ_R) , qui sont définies par les mêmes équations différentielles. Soit M un point de l'espace par lequel il passera une surface (Σ_R) parallèle à (Σ) . Les $n - 1$ directions principales de (Σ_R) et la normale en M à (Σ_R) , qui est aussi normale à (Σ) , formeront évidemment n directions deux à deux orthogonales. Cela posé, désignons par ρ , par exemple, la fonction qui demeure constante sur $n - 2$ des lignes de courbure de la surface (Σ_R) , choisies comme on voudra; les points de l'espace pour lesquels cette fonc-

tion demeurera constante lorsque R variera formeront ce que nous appelons une *surface*, c'est-à-dire un lieu (Θ) défini par une seule équation, et d'ailleurs engendré par les normales à (Σ) en tous les points de cette surface pour lesquels ρ demeurera constante. D'après la remarque faite plus haut, la normale en M à ce lieu sera précisément la tangente à la ligne de courbure de (Σ_R) sur laquelle ρ varie; car cette tangente est perpendiculaire : 1° aux $n - 2$ autres directions principales de (Σ_R) ; 2° à la normale de (Σ_R) ; et, par suite, étant orthogonale à $n - 1$ tangentes distinctes et linéairement indépendantes de (Θ) en M, elle sera orthogonale à toutes les courbes tracées à partir de M sur (Θ) . On voit donc que, si l'on adjoint à la famille des surfaces (Σ_R) les $n - 1$ familles formées des surfaces lieux des points pour lesquels les variables telles que ρ demeurent constantes, on aura constitué ainsi un système *complètement orthogonal* dont fera partie la surface (Σ) .

Au reste, nous reviendrons au Livre suivant, Chap. I, sur cette théorie.

77. On verra facilement que les $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$ équations aux dérivées partielles du second groupe (35), obtenues pour le paramètre u , expriment simplement que les surfaces de paramètre u ont chacune leurs lignes de courbure *coordonnées*. Ces équations peuvent, en effet, s'écrire sous la forme

$$(45) \quad \sum_i \sum_k \sum_l u_{ikl} \delta x_i \delta' x_k \delta'' x_l = 0,$$

δ , δ' , δ'' désignant les différentielles relatives à trois directions principales quelconques. Or on a les relations

$$(46) \quad \sum_i u_i \delta x_i = 0, \quad \sum_i \sum_k u_{ik} \delta x_i \delta' x_k = 0,$$

d'où l'on déduira, par la différentiation, les suivantes :

$$(47) \quad \delta' \sum_i u_i \delta x_i = \sum_i u_i \delta' \delta x_i = 0,$$

$$(48) \quad \delta'' \sum_i u_i \delta' \delta x_i = \sum_i \delta'' u_i \delta' \delta x_i + \sum_i u_i \delta'' \delta' \delta x_i = 0.$$

Si l'on remarque maintenant que l'on peut écrire

$$\begin{aligned} & \sum \sum \sum u_{ikl} \delta x_i \delta' x_k \delta'' x_l \\ &= \delta'' \sum \sum u_{ik} \delta x_i \delta' x_k - \sum \sum u_{ik} \delta'' \delta x_i \delta' x_k - \sum \sum u_{ik} \delta x_i \delta'' \delta' x_k, \end{aligned}$$

on voit qu'en tenant compte des équations (47) et (48), on sera conduit à la relation

$$\sum \sum \sum u_{ikl} \delta x_i \delta' x_k \delta'' x_l = \sum u_i (\delta' \delta'' \delta x_i + \delta \delta'' \delta' x_i),$$

ce qui permet d'écrire l'équation (45) sous la forme nouvelle

$$(49) \quad \sum u_i (\delta' \delta'' \delta x_i + \delta \delta'' \delta' x_i) = 0.$$

Les δ se rapportant à des déplacements qui s'effectuent sur la surface, et les rapports mutuels des dérivées u_i ne dépendant que de la direction de la normale, on voit immédiatement que les équations (45) expriment une propriété, *non de famille, mais de surface individuelle*. Comme les équations du premier groupe (31), mises sous la forme (32), sont toutes vérifiées quand on suppose que les surfaces de paramètre u soient parallèles (auquel cas on peut supposer $H = 1$), on voit que *les équations du second groupe (35) donnent la condition nécessaire et suffisante pour que les lignes de courbure de la surface de paramètre u soient coordonnées* (1).

78. Pour donner au moins une application des résultats précédents, nous considérerons les surfaces définies par l'équation

$$(50) \quad X_1 + X_2 + \dots + X_n = u,$$

u désignant une constante arbitraire et X_i une fonction de la seule variable x_i .

(1) Si la surface ne fait pas partie d'une famille appartenant à un système complètement orthogonal, il ne sera pas nécessaire que ces équations aient lieu identiquement; il suffira évidemment qu'elles soient vérifiées en vertu de l'équation de la surface.

Si nous appliquons les méthodes développées dans les numéros précédents, nous verrons que les différentes lignes de courbure d'une telle surface sont déterminées par les formules

$$(51) \quad dx_i = \frac{X'_i d\mu}{\lambda - X''_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

où λ sera une racine de l'équation

$$(52) \quad \sum \frac{X_i'^2}{\lambda - X_i''} = 0.$$

Appliquons la condition donnée plus haut pour que les lignes de courbure soient coordonnées; nous verrons qu'elle se réduit ici à la forme suivante

$$\sum X_i''' \delta x_i \delta' x_i \delta'' x_i = 0,$$

$\delta, \delta', \delta''$ désignant les différentielles relatives à trois directions principales quelconques; de sorte que la relation

$$(53) \quad \sum \frac{X_i''' X_i'^3}{(\lambda_0 - X_i'')(\lambda_1 - X_i'')(\lambda_2 - X_i'')} = 0$$

devra être vérifiée par trois racines quelconques, mais distinctes, $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ de l'équation (52).

Si l'on multiplie le premier membre de la relation

$$\sum \frac{X_i'^2}{\lambda_0 - X_i''} = 0,$$

par l'expression

$$\frac{a\lambda_0^2 + b\lambda_0 + c}{(\lambda_0 - \lambda_1)(\lambda_0 - \lambda_2)},$$

et si l'on ajoute les résultats obtenus en effectuant des permutations circulaires sur les trois indices 0, 1, 2, on obtiendra la relation suivante

$$(54) \quad \sum \frac{X_i'^2 (aX_i''^2 + bX_i'' + c)}{(\lambda_0 - X_i'')(\lambda_1 - X_i'')(\lambda_2 - X_i'')} = 0,$$

et l'on démontrera aisément que cette relation entre les trois ra-

cines est la plus générale parmi celles qui sont de la forme

$$(55) \quad \sum \frac{\Theta_i}{(\lambda_0 - X_i)(\lambda_1 - X_i)(\lambda_2 - X_i)} = 0,$$

Θ_i étant indépendante de $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ (¹).

On devra donc pouvoir identifier terme à terme les deux relations (53) et (54), ce qui donnera, pour toutes les valeurs de i ,

$$(56) \quad X_i X_i''' = a X_i''^2 + b X_i'' + c.$$

Les fonctions a, b, c seront déterminées par trois quelconques de ces équations; elles ne pourraient donc dépendre que de trois quelconques des variables x_1, \dots, x_n prises au hasard; et, par suite, dès que n sera supérieur à 3, elles se réduiront nécessairement à des constantes. Ainsi les différentes fonctions X_i , où l'on remplacera x_i par x , devront être des solutions particulières d'une même équation différentielle

$$(57) \quad X' X''' = a X''^2 + b X'' + c,$$

dont l'intégration ne présente d'ailleurs aucune difficulté et s'effectue par l'application des méthodes régulières de l'Analyse. Cette équation, sous sa forme la plus générale ou sous des formes particulières, se rencontrera dans les différents problèmes que nous allons maintenant étudier.

79. Proposons-nous, tout d'abord, de généraliser le problème que se sont proposé MM. Bouquet et J.-A. Serret, et de chercher tous les systèmes orthogonaux à n variables pour lesquelles une des familles sera déterminée par une équation de la forme

$$(58) \quad u = X_1 + X_2 + \dots + X_n,$$

X_i dépendant toujours de la seule variable x_i .

(¹) En retranchant, en effet, de l'équation (54) l'équation (55), on obtient une relation de même forme et l'on peut disposer de a, b, c , de manière à annuler trois des nouvelles fonctions Θ_i . Mais alors toutes les autres doivent s'annuler; car sans cela il resterait une équation de degré $n - 4$ en λ_2 , qui devrait admettre toutes celles des racines de l'équation (52) qui sont différentes de λ_0 et de λ_1 , ce qui est évidemment impossible.

Les équations qui déterminent toute autre fonction du système seront les suivantes

$$v_i = \frac{-\mu X'_i}{\lambda - X''_i},$$

où λ sera racine de l'équation

$$(59) \quad \sum \frac{X'_i{}^2}{\lambda - X''_i} = 0.$$

Il faudra donc que les équations aux différentielles totales

$$\sum \frac{X'_i dx_i}{\lambda - X''_i} = 0,$$

où λ sera l'une quelconque des racines de l'équation (59), soient complètement intégrables. On sait exprimer les conditions d'intégrabilité qui, pour une équation

$$\sum A_i dx_i = 0,$$

sont de la forme

$$A_i \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_l}{\partial x_k} \right) + A_k \left(\frac{\partial A_l}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_l} \right) + A_l \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_l} \right) = 0.$$

En les écrivant ici et remplaçant les dérivées de λ par leurs valeurs déduites de l'équation (59) différenciée, on trouve sans difficulté des équations de la forme suivante

$$(60) \quad X' X'_k X'_l \begin{vmatrix} X'_i X''_l - 2X''_i{}^2 & X''_i & 1 \\ X'_k X''_l - 2X''_k{}^2 & X''_k & 1 \\ X'_l X''_l - 2X''_l{}^2 & X''_l & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ces équations peuvent donc être remplacées par d'autres de la forme suivante

$$(61) \quad X'_i X''_l - 2X''_i{}^2 = AX''_i + B,$$

où A et B devront nécessairement être des constantes ; car, d'après ces équations mêmes, elles ne pourraient dépendre que de deux quelconques des variables x_i . C'est le résultat obtenu en 1847 par

J.-A. Serret, mais seulement pour le cas particulier de trois variables (1).

80. Comme il fallait s'y attendre, l'équation différentielle (61) appartient au type défini par la formule (57).

Le cas particulier le plus intéressant, celui qui a été examiné avec le plus de détail dans l'hypothèse où le nombre des variables se réduit à trois, est celui où l'on suppose $A = B = 0$ et où l'on prend

$$u = m_1 \log x_1 + m_2 \log x_2 + \dots + m_n \log x_n,$$

m_1, \dots, m_n désignant des constantes quelconques.

Alors si, pour plus d'élégance, on change u en $\log u$ et λ en $\frac{1}{\lambda}$, on a

$$(62) \quad u = x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n};$$

l'équation (59) devient

$$(63) \quad \frac{m_1}{\lambda + \frac{x_1^2}{m_1}} + \frac{m_2}{\lambda + \frac{x_2^2}{m_2}} + \dots + \frac{m_n}{\lambda + \frac{x_n^2}{m_n}} = 0,$$

et les équations aux différentielles totales qu'il s'agit d'intégrer sont les suivantes

$$\frac{x_1 dx_1}{\lambda + \frac{x_1^2}{m_1}} + \dots + \frac{x_n dx_n}{\lambda + \frac{x_n^2}{m_n}} = 0,$$

où il faut remplacer λ par chacune des racines de l'équation (63).

Cette équation ne pouvant être résolue en général, il semblerait que l'intégration des équations aux différentielles totales ne pourra être effectuée. Il y a donc quelque intérêt à effectuer cette intégration; on y parvient comme il suit.

Intégrons comme si λ était une constante et posons

$$(64) \quad v = \left(\lambda + \frac{x_1^2}{m_1} \right)^{m_1} \left(\lambda + \frac{x_2^2}{m_2} \right)^{m_2} \dots \left(\lambda + \frac{x_n^2}{m_n} \right)^{m_n};$$

(1) J.-A. SERRET, *Mémoire sur les surfaces orthogonales* (*Journal de Liouville*, 1^{re} série, t. XII, p. 241; 1847).

nous trouverons

$$\frac{dv}{2v} = \frac{x_1 dx_1}{\lambda + \frac{x_1^2}{m_1}} + \dots + \frac{x_n dx_n}{\lambda + \frac{x_n^2}{m_n}},$$

et le coefficient de $d\lambda$ sera nul en vertu de l'équation même qui sert à déterminer λ . Nous obtenons donc le curieux théorème suivant :

Les $n - 1$ familles qui complètent, avec la fonction u , le système orthogonal, s'obtiennent en éliminant λ entre l'équation (64) et sa dérivée par rapport à λ .

Par exemple, dans le cas de trois variables, si l'on prend la famille

$$(65) \quad u = x^m y^n z^p,$$

les deux autres familles de surfaces qu'on doit lui associer s'obtiennent en éliminant λ entre l'équation

$$(66) \quad v = \left(\lambda + \frac{x^2}{m} \right)^m \left(\lambda + \frac{y^2}{n} \right)^n \left(\lambda + \frac{z^2}{p} \right)^p$$

et sa dérivée par rapport à λ , c'est-à-dire en cherchant l'enveloppe des surfaces représentées par l'équation précédente quand λ varie (1).

81. Mais on peut faire beaucoup d'autres applications du résultat général que nous avons trouvé. Rappelons-nous les remarques relatives aux coordonnées pentasphériques (n° 69) (2). Nous avons vu que les conditions d'orthogonalité dans ce système s'expriment comme dans le système ordinaire; x_1, x_2, \dots, x_5 désignant les coordonnées pentasphériques d'un point, nous considérerons encore la famille

$$(67) \quad u = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_5^{\alpha_5},$$

mais, pour que l'équation précédente soit homogène quel que

(1) *Leçons sur la Théorie des surfaces* (1^{re} Partie, n° 140).

(2) Voir aussi *Leçons sur la Théorie des surfaces* (1^{re} Partie, Livre II, Chap. VI).

soit u , nous poserons

$$(68) \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_5 = 0.$$

Avec cette hypothèse, nous allons obtenir de nouveaux systèmes orthogonaux.

Les deux familles complétant le système seront les enveloppes des surfaces représentées par les équations

$$(69) \quad v = \left(\lambda + \frac{x_1^2}{\alpha_1} \right)^{\alpha_1} \left(\lambda + \frac{x_2^2}{\alpha_2} \right)^{\alpha_2} \dots \left(\lambda + \frac{x_5^2}{\alpha_5} \right)^{\alpha_5},$$

et il est facile de vérifier : 1° que l'équation déterminant λ

$$\frac{\alpha_1}{\lambda + \frac{x_1^2}{\alpha_1}} + \dots + \frac{\alpha_5}{\lambda + \frac{x_5^2}{\alpha_5}} = 0$$

se réduit, comme cela doit être, au second degré en vertu de la condition (68) et de la relation homogène

$$x_1^2 + \dots + x_5^2 = 0$$

entre les coordonnées; 2° que l'équation (69), après qu'on y a substitué à la place de λ une de ses deux valeurs, devient homogène par rapport aux cinq quantités x_i .

Le nouveau système ainsi obtenu est assez général, puisqu'il contient, en dehors des exposants, les dix constantes qui figurent dans les équations de cinq sphères orthogonales. Le système le plus simple de ce genre est celui pour lequel l'équation (67) prend la forme

$$(70) \quad u = \frac{x_1 x_2}{x_3 x_4}.$$

On verra facilement que les équations des deux familles de surfaces algébriques qui complètent ce système peuvent se mettre sous la forme

$$(71) \quad \arcsin \frac{\sqrt{x_1^2 + x_3^2}}{i x_5} \pm \arcsin \frac{\sqrt{x_2^2 + x_4^2}}{i x_5} = \text{const.}$$

Si, par exemple, on prend pour les cinq fonctions x_i les

expressions suivantes

$$x, y, z, \frac{x^2 + y^2 + z^2 - R^2}{2R}, \frac{x^2 + y^2 + z^2 + R^2}{2Ri},$$

on aura le système triple défini par les équations

$$(72) \left\{ \begin{array}{l} \frac{xy}{z(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)} = u, \\ \arcsin \frac{2R\sqrt{x^2 + z^2}}{x^2 + y^2 + z^2 + R^2} + \arcsin \frac{2R\sqrt{y^2 + z^2}}{x^2 + y^2 + z^2 + R^2} = v, \\ \arcsin \frac{2R\sqrt{x^2 + z^2}}{x^2 + y^2 + z^2 + R^2} - \arcsin \frac{2R\sqrt{y^2 + z^2}}{x^2 + y^2 + z^2 + R^2} = w. \end{array} \right.$$

Pour $R = \infty$, on retrouve le système, comprenant une famille de paraboloides, qui a été étudié au n° 69.

82. La forme très symétrique des résultats que nous venons d'obtenir conduit à différentes généralisations que nous allons signaler.

Considérons d'abord les n fonctions des n variables x_1, \dots, x_n obtenues en éliminant λ entre l'équation

$$(73) \quad u = \left(\lambda + \frac{x_1^2}{m_1} \right)^{m_1} \left(\lambda + \frac{x_2^2}{m_2} \right)^{m_2} \dots \left(\lambda + \frac{x_n^2}{m_n} \right)^{m_n} \lambda^\alpha$$

et sa dérivée par rapport à λ

$$(74) \quad \frac{m_1}{\lambda + \frac{x_1^2}{m_1}} + \dots + \frac{m_n}{\lambda + \frac{x_n^2}{m_n}} + \frac{\alpha}{\lambda} = 0.$$

On aura n fonctions u_1, u_2, \dots, u_n qui correspondront aux n racines de l'équation précédente. Nous allons montrer qu'elles forment un système orthogonal.

En effet, pour deux fonctions u_1, u_2 relatives à deux racines différentes λ_1, λ_2 , la condition d'orthogonalité sera

$$\sum \frac{x_i^2}{\left(\lambda_1 + \frac{x_i^2}{m_i} \right) \left(\lambda_2 + \frac{x_i^2}{m_i} \right)} = 0.$$

Or cette relation est vérifiée; on l'obtient en exprimant que λ_1, λ_2 sont des racines de l'équation (74) et en éliminant α entre les deux équations ainsi obtenues.

Dans le cas de trois variables, on a le théorème suivant :

Les enveloppes des surfaces représentées par l'équation

$$(75) \quad u = \left(\lambda + \frac{x^2}{m} \right)^m \left(\lambda + \frac{y^2}{n} \right)^n \left(\lambda + \frac{z^2}{p} \right)^p \lambda^q,$$

où l'on fait varier λ , forment un système triple orthogonal.

On voit que ce système triple jouit toujours de la propriété si remarquable de celui qui est formé avec les surfaces homofocales du second degré : les trois familles qui le composent *sont représentées par la même équation*, et elles sont d'ailleurs formées de surfaces algébriques, lorsque les rapports mutuels de m, n, p, q sont commensurables.

Toutefois, il y a un cas singulier qui se présente quand la somme

$$m + n + p + q$$

est nulle. Alors on a seulement deux familles orthogonales composées de cônes ayant pour sommet commun l'origine des coordonnées. La troisième famille est évidemment formée de sphères ayant pour centre le sommet commun des cônes.

83. On peut aussi appliquer la proposition générale au cas de cinq variables et en déduire, en employant les coordonnées pentasphériques, des théorèmes qui conviennent à l'espace à trois dimensions. Il suffira de disposer des constantes de telle manière que les équations obtenues soient homogènes.

Appelons encore x_1, x_2, \dots, x_5 les coordonnées pentasphériques d'un point et considérons l'équation

$$(76) \quad u = \left(\lambda + \frac{x_1^2}{m_1} \right)^{m_1} \dots \left(\lambda + \frac{x_5^2}{m_5} \right)^{m_5} \lambda^{m_0},$$

où les quantités m_i sont cinq constantes quelconques.

Si l'on élimine λ entre cette équation et sa dérivée par rapport

à λ .

$$(77) \quad \frac{m_1}{\lambda + \frac{x^2}{m_1}} + \dots + \frac{m_5}{\lambda + \frac{x^2}{m_5}} + \frac{m_6}{\lambda} = 0,$$

on obtiendra une fonction u qui sera homogène et de degré zéro toutes les fois que l'on aura

$$m_1 + m_2 + \dots + m_6 = 0.$$

D'ailleurs, avec cette hypothèse, l'équation (77) sera du troisième degré par rapport à λ . En substituant les trois racines dans l'équation (76), on aura les paramètres de trois familles qui composeront un système triple orthogonal. Ces systèmes orthogonaux jouiront, comme les précédents, de la propriété remarquable que les trois familles seront représentées par une même équation.

84. Les propositions que nous venons d'établir s'étendent, avec les modifications convenables, aux fonctions les plus générales qui satisfont à l'équation différentielle (57). Pour ne pas développer outre mesure ces applications, nous établirons tout de suite le théorème le plus général.

Considérons l'équation

$$(78) \quad \sum_1^n \frac{X_i'^2}{\lambda - X_i''} - 2(k-1)(X_1 + X_2 + \dots + X_n) + A = 0,$$

où la fonction X_i dépend de la seule variable x_i et satisfait à l'équation différentielle

$$(79) \quad X_i' X_i''' = 2k(X_i'' - a)(X_i'' - b);$$

A désigne une constante qui peut être réunie à l'une des fonctions X_i et, par conséquent, supprimée toutes les fois que k est différent de l'unité. Multiplions le premier membre de l'équation (78) par $\varpi(\lambda) d\lambda$, $\varpi(\lambda)$ étant une fonction à déterminer, et intégrons en considérant λ comme seule variable. En prenant pour λ_h chacune des n racines de l'équation (78), nous aurons n fonctions u_h définies par les quadratures

$$(80) \quad u_h = \int^{\lambda_h} \varpi(\lambda) \left[\sum_1^n \frac{X_i'^2}{\lambda - X_i''} - 2(k-1)(X_1 + \dots + X_n) + A \right] d\lambda,$$

la limite inférieure α étant une constante dont il y aura lieu de disposer. La dérivée partielle de la fonction u_h ainsi obtenue par rapport à λ_h est nulle, et, par conséquent, sa dérivée relative à x_i se réduit au seul terme

$$\frac{\partial u_h}{\partial x_i} = X_i' \int_{\alpha}^{\lambda_h} \left[\frac{X_i' X_i'''}{(\lambda - X_i'')^2} + \frac{2 X_i''}{\lambda - X_i''} - 2(k-1) \right] \varpi(\lambda) d\lambda.$$

En remplaçant X_i''' par sa valeur tirée de l'équation (79), on trouve

$$\frac{\partial u_h}{\partial x_i} = 2 X_i' \int_{\alpha}^{\lambda_h} \left[\frac{k(\lambda - a)(\lambda - b)}{(\lambda - X_i'')^2} - \frac{(2k-1)\lambda - k(a+b)}{\lambda - X_i''} \right] \varpi(\lambda) d\lambda.$$

Cela posé, définissons la fonction $\varpi(\lambda)$ par l'équation

$$(81) \quad k \frac{d}{d\lambda} (\lambda - a)(\lambda - b) \varpi(\lambda) = [(2k-1)\lambda - k(a+b)] \varpi(\lambda),$$

et la constante α par la condition

$$(82) \quad \frac{\varpi(\alpha)(\alpha - a)(\alpha - b)}{\alpha - X_i''} = 0;$$

l'intégrale qui exprime $\frac{\partial u_h}{\partial x_i}$ pourra être déterminée, et l'on aura

$$(83) \quad \frac{\partial u_h}{\partial x_i} = -2k X_i' \frac{\varpi(\lambda_h)(\lambda_h - a)(\lambda_h - b)}{\lambda_h - X_i''}.$$

Il suit de là que les n fonctions u_1, u_2, \dots, u_n correspondantes aux n racines $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de l'équation (78) forment un système orthogonal; car, pour les deux fonctions u_1, u_2 , par exemple, la condition d'orthogonalité

$$\sum \frac{X_i'^2}{(\lambda_1 - X_i'')(\lambda_2 - X_i'')} = 0$$

est identique à celle qu'on obtient en substituant λ_1, λ_2 à la place de λ dans l'équation (78), et retranchant les deux relations ainsi obtenues.

La fonction $\varpi(\lambda)$ se détermine sans difficulté au moyen de l'équation différentielle (81). On peut prendre, en général,

$$(84) \quad \varpi(\lambda) = (\lambda - a)^{\frac{1}{k}} b^{-\frac{a}{k}} (\lambda - b)^{\frac{1}{k}} a^{-\frac{b}{k}}.$$

La constante α est ensuite déterminée par la condition

$$\frac{(\alpha - a)^{\frac{1}{k} \frac{a}{b-a} + 1} (\alpha - b)^{\frac{1}{k} \frac{b}{a-b} + 1}}{\alpha - X_i''} = 0.$$

Si l'un des exposants du numérateur est positif, on prendra $\alpha = a$ ou $\alpha = b$; s'ils sont négatifs tous les deux, on prendra $\alpha = \pm \infty$.

En résumant tout ce qui précède, nous obtenons le théorème suivant :

Considérons n fonctions X_1, X_2, \dots, X_n , qui dépendent chacune de la variable de même indice et satisfont aux équations différentielles

$$X_i' X_i''' = 2k(X_i'' - a)(X_i'' - b).$$

Si nous appelons $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les n fonctions de x_1, x_2, \dots, x_n racines de l'équation

$$\sum \frac{X_i'^2}{\lambda - X_i''} - 2(k-1)(X_1 + X_2 + \dots + X_n) + A = 0,$$

et si nous définissons n fonctions par les quadratures

$$u_n = \int_{\alpha}^{\lambda_n} (\lambda - a)^{\frac{1}{k} \frac{a}{b-a}} (\lambda - b)^{\frac{1}{k} \frac{b}{a-b}} \\ \times \left[\sum \frac{X_i'^2}{\lambda - X_i''} - 2(k-1)(X_1 + \dots + X_n) + A \right] d\lambda,$$

où α est un des trois nombres a, b, ∞ , choisi par la condition indiquée plus haut, ces n fonctions forment un système orthogonal.

Si l'on a $a = b$, les formules précédentes sont illusoires; mais on se reportera à l'équation différentielle qui détermine $\varpi(\lambda)$.

85. La proposition précédente admet différents cas particuliers; nous examinerons seulement l'hypothèse suivante, dans laquelle elle tombe en défaut et devient incomplète.

Supposons que l'on ait

$$k = 1, \quad A = 0.$$

Alors l'équation en λ (78) se réduisant au degré $n - 1$, on n'a plus que $n - 1$ fonctions u_h orthogonales. Mais on reconnaît aisément, d'après l'expression (83) donnée plus haut de la dérivée $\frac{\partial u_h}{\partial x_i}$ que le système de ces $n - 1$ fonctions peut être complété par l'adjonction de la fonction

$$(85) \quad u = X_1 + X_2 + \dots + X_n,$$

ce qui permet d'énoncer le théorème suivant :

On a vu que la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction

$$u = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

fasse partie d'un système complètement orthogonal est que les fonctions X_i vérifient une équation de la forme

$$(86) \quad X'_i X_i'' = 2(X'' - a)(X'' - b),$$

où a et b désignent deux constantes quelconques. Pour déterminer les $n - 1$ fonctions qui complètent le système orthogonal, on formera l'équation suivante en λ :

$$\sum \frac{X_i'^2}{\lambda - X_i''} = 0;$$

les $n - 1$ fonctions cherchées seront déterminées par les formules

$$u_h = \int_{\alpha}^{\lambda_h} (\lambda - a)^{\frac{a}{b-a}} (\lambda - b)^{\frac{b}{a-b}} \left(\sum \frac{X_i'^2}{\lambda - X_i''} \right) d\lambda,$$

où λ_h désigne une des $n - 1$ racines de l'équation précédente et où α désigne l'un des nombres a , b , choisi par la condition que l'intégrale précédente ait un sens.

Dans le cas de $n = 3$, on obtient ainsi les systèmes dont J.-A. Serret avait seulement établi l'existence dans le Mémoire cité plus haut (p. 141), et l'on démontre de plus que les lignes de courbure des surfaces dont il se compose s'obtiennent par de simples quadratures.

86. Revenons au théorème général, et supposons k quelconque

et différent de l'unité. On reconnaîtra aisément que, en employant le langage de la Géométrie, une des familles dont il se compose comprend la surface

$$2(k-1)(X_1+\dots+X_n)-A=0,$$

dont il est possible, par conséquent, de déterminer les lignes de courbure. On est ainsi conduit, en supposant $A=0$, au théorème suivant, qu'il sera facile d'ailleurs de vérifier directement (1).

Les lignes de courbure de la surface définie par l'équation

$$(87) \quad X_1 + X_2 + \dots + X_n = 0,$$

où X_1, X_2, \dots, X_n satisfont aux équations différentielles

$$(88) \quad X'_i X_i''' = 2k(X_i'' - a)(X_i'' - b),$$

se déterminent de la manière suivante. On recherchera les $n-1$ fonctions λ_h racines de l'équation

$$(89) \quad \sum \frac{X_i'^2}{\lambda - X_i''} = 0,$$

puis, déterminant une fonction $\varpi(\lambda)$ par l'équation

$$(90) \quad k\varpi'(\lambda)(\lambda-a)(\lambda-b) = -\lambda\varpi(\lambda),$$

et une constante α par la condition

$$(91) \quad \frac{\varpi(\alpha)(\alpha-a)(\alpha-b)}{\alpha} = 0,$$

on calculera les $n-1$ fonctions

$$(92) \quad u_h = \int_{\alpha}^{\lambda_h} \frac{X_i'^2}{\varpi(\lambda)} \sum \frac{X_i'^2}{\lambda - X_i''} d\lambda;$$

une seule d'entre elles demeurera variable sur chacune des lignes de courbure cherchées; et, par suite, on obtiendra toutes ces lignes en égalant à des constantes arbitraires $n-2$ quelconques des fonctions précédentes.

(1) Voir, pour plus de détails, le *Mémoire sur la théorie des coordonnées curvilignes*, cité plus haut, p. 111.

Ce cas est le seul, nous l'avons vu (n° 77), dans lequel les lignes de courbure des surfaces représentées par l'équation (50) soient *coordonnées*.

87. Indiquons quelques applications du théorème précédent, relatives à trois variables x, y, z . Nous supposons d'abord que les constantes a et b soient nulles, c'est-à-dire que l'équation (88) se réduise à la forme simple

$$X'X'' = 2kX'^2.$$

L'hypothèse $k = 1$ a été examinée. Si on l'écarte et si l'on suppose $2k - 1 \neq 0$, l'intégrale de l'équation précédente sera

$$(93) \quad X = \alpha + \beta(x - x_0)^m,$$

α, β, x_0 étant trois constantes, et m étant déterminé par l'équation

$$m = \frac{2 - 2k}{1 - 2k}, \quad \frac{m - 2}{m - 1} = 2k.$$

L'hypothèse $2k = 1$ nous donnerait (1)

$$X = \alpha + \beta e^{\gamma x}.$$

En la laissant de côté, on pourra revenir à la formule (93) et supposer $x_0 = 0$. La surface correspondante sera représentée par une équation de la forme

$$(94) \quad \left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m + \left(\frac{z}{c}\right)^m = 1,$$

a, b, c étant trois constantes et m étant quelconque positif ou négatif, entier ou fractionnaire. On sait que Lamé (2), dans son opuscule sur les méthodes en Géométrie, a, le premier, étudié ces surfaces auxquelles M. de la Gournerie, qui en a fait connaître diverses propriétés, a donné le nom de *tétraédrales symétriques*.

On peut prendre ici

$$\varpi(\lambda) = \lambda^{\frac{2-2m}{m-2}},$$

(1) Dans l'un et l'autre cas, nous négligeons l'intégrale linéaire $X = \alpha + \beta x$ qui correspond à l'hypothèse $X'' = 0$.

(2) LAMÉ, *Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de Géométrie*. Paris, Bachelier; 1818.

et si, pour plus d'élégance, on change λ en $\frac{m(m-1)}{\mu}$, on aura, en faisant entrer dans u un facteur constant,

$$(95) \quad \left\{ u = \int_{\alpha}^{\mu} \mu^{\frac{m}{m-2}} d\mu \left[\frac{x^m}{a^m(\mu - a^m x^{2-m})} + \frac{y^m}{b^m(\mu - b^m y^{2-m})} + \frac{z^m}{c^m(\mu - c^m z^{2-m})} \right] \right.$$

Chaque ligne de courbure s'obtiendra en donnant à u une valeur constante et éliminant μ entre l'équation précédente et sa dérivée

$$(96) \quad \frac{x^m}{a^m(\mu - a^m x^{2-m})} + \frac{y^m}{b^m(\mu - b^m y^{2-m})} + \frac{z^m}{c^m(\mu - c^m z^{2-m})} = 0.$$

La constante α pourra être prise égale à zéro si m n'est pas compris entre 1 et 2; elle pourra être prise égale à ∞ si m est compris entre 0 et 2.

Les équations des lignes de courbure contiendront toujours des logarithmes et une partie algébrique.

Par exemple, pour la surface

$$(97) \quad \left(\frac{x}{a} \right)^3 + \left(\frac{y}{b} \right)^3 + \left(\frac{z}{c} \right)^3 = 1,$$

on aura, en effectuant les intégrations,

$$(98) \quad \left\{ u = \frac{\mu^3}{3} + \frac{\mu^2}{2} (x^2 + y^2 + z^2) + \mu (a^3 x + b^3 y + c^3 z) \right. \\ \left. + \log \left(1 - \frac{\mu x}{a^3} \right)^{a^6} \left(1 - \frac{\mu y}{b^3} \right)^{b^6} \left(1 - \frac{\mu z}{c^3} \right)^{c^6}, \right.$$

et il y aura à éliminer μ entre cette équation et sa dérivée par rapport à μ . Cette dérivée est algébrique.

Quoi qu'il en soit, on voit que nous saurons déterminer les lignes de courbure de deux surfaces du troisième ordre, l'une représentée par l'équation (97), l'autre par la suivante

$$(99) \quad \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1.$$

Cette dernière surface est la transformée homographique de la surface la plus générale à quatre points doubles.

On saura de même déterminer les lignes de courbure de deux surfaces du quatrième ordre dont les équations seront

$$(100) \quad \begin{cases} \left(\frac{x}{a}\right)^4 + \left(\frac{y}{b}\right)^4 + \left(\frac{z}{c}\right)^4 = 1, \\ \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} + \sqrt{\frac{z}{c}} = 1. \end{cases}$$

La seconde est la transformée homographique de la surface de Steiner la plus générale.

88. Pour étendre un peu ces applications, on peut remarquer qu'il est permis d'ajouter des termes aux équations déjà données et de traiter les surfaces représentées par l'équation plus générale

$$(101) \quad ax^m + by^m + cz^m + \alpha(x^2 + y^2 + z^2) = C,$$

où a, b, c, α, C désignent des constantes quelconques. Cette remarque, que le lecteur vérifiera aisément, nous permet d'ajouter aux surfaces du troisième et du quatrième ordre déjà données, celles qui sont représentées par les équations suivantes

$$ax^3 + by^3 + cz^3 + \alpha(x^2 + y^2 + z^2) = C,$$

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \alpha(x^2 + y^2 + z^2) = C,$$

$$ax^4 + by^4 + cz^4 + \alpha(x^2 + y^2 + z^2) = C.$$

Au reste, on peut trouver toutes les surfaces auxquelles s'applique le théorème du n° 85 et déterminer l'intégrale générale de l'équation

$$(102) \quad X'X'' = 2k(X'' - a)(X'' - b).$$

Cette intégrale sera donnée par les formules

$$(103) \quad \begin{cases} X' = C(X'' - a)^{\frac{a}{2k(a-b)}}(X'' - b)^{\frac{b}{2k(b-a)}}, \\ x = \frac{C}{2k} \int (X'' - a)^{\frac{a}{2k(a-b)} - 1} (X'' - b)^{\frac{b}{2k(b-a)} - 1} dX'', \\ X = \frac{C^2}{2k} \int (X'' - a)^{\frac{a}{k(a-b)} - 1} (X'' - b)^{\frac{b}{k(b-a)} - 1} dX'', \end{cases}$$

où figurent des quadratures que l'on peut effectuer dans un grand nombre de cas.

89. On peut se demander si les surfaces du troisième ordre dont nous avons appris à déterminer les lignes de courbure sont les transformées homographiques de la surface la plus générale de cet ordre. Il est aisé de répondre à cette question.

L'équation

$$(104) \quad ax^3 + by^3 + cz^3 + \alpha(x^2 + y^2 + z^2) + \beta = 0$$

peut toujours, par une simple translation des axes, être ramenée à la forme

$$(105) \quad ax^3 + by^3 + cz^3 + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0,$$

ou, si l'on rend l'équation homogène,

$$ax^3 + by^3 + cz^3 + t^2(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t) = 0.$$

Cette équation montre que les plans tangents menés de l'origine à la surface sont tangents à deux cônes cubiques, dont l'un a pour équation

$$ax^3 + by^3 + cz^3 = 0.$$

L'origine est donc un des dix points doubles de la hessienne, et la seule particularité que présente la surface est la suivante : l'un des cônes, celui qui est représenté par l'équation précédente, est un cône *triangulaire*. Dans la surface générale, l'équation de ce cône ne pourrait être ramenée par un choix convenable des axes qu'à la forme suivante

$$ax^3 + by^3 + cz^3 + 3hxyz = 0.$$

Ici $h = 0$; nous avons donc le théorème suivant :

Toute surface du troisième ordre pour laquelle l'un des vingt cônes qui sont circonscrits à la surface suivant une section plane est un cône triangulaire peut être transformée homographiquement en une autre dont on détermine les lignes de courbure.

90. Je terminerai ce Chapitre en remarquant que, tout ce qui précède s'appliquant à un nombre quelconque de variables, on pourra employer les coordonnées pentasphériques, pourvu que les équations soient homogènes. On saura donc déterminer les lignes

de courbure des surfaces représentées dans ce système de coordonnées par l'équation

$$(106) \quad ax_1^m + bx_2^m + cx_3^m + dx_4^m + ex_5^m = 0,$$

où m est quelconque, ainsi que les constantes a, b, c, d, e . Si l'on ramène par une inversion trois des sphères coordonnées à des plans, l'équation précédente deviendra

$$(107) \quad \left\{ \begin{array}{l} ax^m + by^m + cz^m + \alpha \left(1 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{R^2} \right)^m \\ + \beta \left(1 + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{R^2} \right)^m = 0. \end{array} \right.$$

Pour $R = \infty$ on peut obtenir comme cas limite les surfaces représentées par l'équation (101).

LIVRE II.

LES COORDONNÉES CURVILIGNES.

CHAPITRE I.

SYSTÈMES ORTHOGONAUX A n VARIABLES.

On se propose de faire connaître les formules que Lamé a données dans ses *Leçons sur les coordonnées curvilignes* en appliquant et étendant sa méthode aux systèmes complètement orthogonaux à n variables. — Définition des éléments d'une substitution linéaire orthogonale par les formules $X_l^k = H_l \frac{\partial \rho_l}{\partial x_k}$. —

Relations différentielles auxquelles ils donnent lieu. — Introduction de grandeurs nouvelles β_{ik} qui doivent vérifier deux systèmes différents d'équations aux dérivées partielles du premier ordre. — Indication sur la méthode de recherche d'un système orthogonal. — Généralisation d'un théorème de M. Combescuré : « A tout système orthogonal on peut en rattacher une infinité d'autres qui dépendent de n fonctions arbitraires d'une variable ». — Application de la méthode générale de recherche à la solution d'un problème fondamental : résolution la plus générale de l'équation

$$dx_1^2 + \dots + dx_n^2 = \frac{1}{h^2} (d\rho_1^2 + \dots + d\rho_n^2).$$

Cette solution est toute semblable à celle qui est connue depuis longtemps pour le cas de trois variables, et elle est fournie par une inversion généralisée, suivie ou précédée d'un déplacement. — Cas spécial signalé par M. Cremona. — Indication de différentes méthodes qui permettent de faire dériver de tout système orthogonal à n variables d'autres systèmes orthogonaux contenant le même nombre ou un moindre nombre de variables. — C'est ainsi qu'au système des coordonnées elliptiques on peut faire correspondre une suite illimitée de systèmes orthogonaux algébriques. — Théorème de Géométrie qui donne une généralisation de la notion, due à Gauss, de représentation sphérique. — Application des résultats précédents à la recherche des surfaces de l'espace à n dimensions dont les lignes de courbure sont *coordonnées*. — Cette recherche exige en premier lieu la détermination de tous les systèmes complètement orthogonaux dans un espace à $n - 1$ dimensions. — Cette détermination une fois effectuée, des méthodes analogues à celles que l'on suit dans la recherche des surfaces ayant une représentation sphérique donnée permettent d'achever la solution du problème. — Quelques propriétés des lignes de courbure des surfaces. — Équations d'Olinde Rodrigues. — Généralisation de la théorie des systèmes cycliques et son extension à l'espace à n dimensions.

91. Après avoir exposé dans le Livre précédent les principaux travaux relatifs à l'équation aux dérivées partielles du troisième ordre dont dépend le problème des systèmes triples orthogonaux, nous allons étudier la méthode que Lamé a fait connaître, dans les *Leçons sur les coordonnées curvilignes*, pour la recherche et l'étude des systèmes orthogonaux, ainsi que pour l'emploi des coordonnées curvilignes qui se rattachent à chacun de ces systèmes. Nous nous proposons de reprendre d'abord toute cette recherche en l'étendant au cas de n variables et en étudiant d'une manière plus complète les propriétés et la signification géométrique de chaque groupe d'équations. Les résultats que nous allons donner ont été déjà exposés en partie dans deux Mémoires publiés en 1866 et 1878 (1).

Considérons n fonctions $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ de n variables x_1, x_2, \dots, x_n , formant un système complètement orthogonal, c'est-à-dire telles que l'on ait les $\frac{n(n-1)}{2}$ équations

$$(1) \quad \delta_{\rho_i \rho_k} = 0 \quad (i \neq k).$$

Introduisons les quantités H_i définies par la formule générale

$$(2) \quad \frac{1}{H_i^2} = \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial x_1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial x_n} \right)^2 \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

les n^2 quantités $H_i \frac{\partial \rho_i}{\partial x_k}$ formeront les coefficients d'une substitution linéaire orthogonale.

Si l'on pose en effet

$$(3) \quad H_i \frac{\partial \rho_i}{\partial x_k} = X_i^k,$$

les relations précédentes pourront se mettre respectivement sous la forme suivante

$$(4) \quad (X_i^1)^2 + (X_i^2)^2 + \dots + (X_i^n)^2 = 1,$$

$$(5) \quad X_i^1 X_k^1 + X_i^2 X_k^2 + \dots + X_i^n X_k^n = 0,$$

qui met en évidence la propriété annoncée.

(1) *Sur les surfaces orthogonales* (*Annales de l'École Normale*, 1^{re} série, t. III, p. 97; 1866). *Mémoire sur la théorie des coordonnées curvilignes et des systèmes orthogonaux* (*Annales de l'École Normale*, 2^e série, t. VII, p. 101-150, 227-260, 275-348; 1878).

Il suit de là que si l'on considère les équations qui donnent les différentielles totales des fonctions ρ_k ,

$$d\rho_k = \frac{\partial \rho_k}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \rho_k}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \rho_k}{\partial x_n} dx_n \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

ces équations pourront être résolues d'une manière élégante par rapport à dx_1, \dots, dx_n . Car si l'on exprime les dérivées des fonctions ρ_k à l'aide des variables X_i^k , elles prennent la forme suivante

$$(6) \quad H_k d\rho_k = X_1^k dx_1 + X_2^k dx_2 + \dots + X_n^k dx_n;$$

d'où l'on déduit immédiatement, par les propriétés des substitutions orthogonales,

$$(7) \quad dx_k = X_1^k H_1 d\rho_1 + X_2^k H_2 d\rho_2 + \dots + X_n^k H_n d\rho_n.$$

D'ailleurs, si l'on suppose la variable x_k exprimée en fonction de $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$, on a évidemment

$$(8) \quad dx_k = \frac{\partial x_k}{\partial \rho_1} d\rho_1 + \frac{\partial x_k}{\partial \rho_2} d\rho_2 + \dots + \frac{\partial x_k}{\partial \rho_n} d\rho_n.$$

En comparant ces deux expressions différentes de dx_k , on est immédiatement conduit aux équations bien connues de Lamé

$$(9) \quad X_i^k = \frac{1}{H_i} \frac{\partial x_k}{\partial \rho_i},$$

qui, comparées à l'équation de définition (3), donnent

$$(10) \quad \frac{1}{H_i} \frac{\partial x_k}{\partial \rho_i} = H_i \frac{\partial \rho_i}{\partial x_k}.$$

A ces relations on peut ajouter les suivantes, qui sont une simple conséquence des propriétés connues des substitutions orthogonales,

$$(11) \quad (X_1^i)^2 + \dots + (X_n^i)^2 = 1,$$

$$(12) \quad X_1^i X_1^k + \dots + X_n^i X_n^k = 0,$$

$$(13) \quad dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2 = H_1^2 d\rho_1^2 + H_2^2 d\rho_2^2 + \dots + H_n^2 d\rho_n^2.$$

Adoptant toutes les notations de Lamé, nous conviendrons de

désigner par u l'une quelconque des variables x_1, \dots, x_n , et de poser, quand on la considérera seule,

$$(14) \quad U_k = \frac{1}{H_k} \frac{\partial u}{\partial \rho_k} = H_k \frac{\partial \rho_k}{\partial u}.$$

Les sommes désignées par la lettre S seront obtenues en remplaçant u successivement par x_1, x_2, \dots, x_n . Dans le cas de trois variables, U_1, U_2, U_3 sont les cosinus des angles que font les normales aux trois surfaces coordonnées avec l'axe des u . On a, dans tous les cas,

$$(15) \quad U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_n^2 = 1.$$

92. De la formule (10) il résulte que l'opération désignée par le symbole δ_{ρ_i} et définie par la formule

$$(16) \quad \delta_{\rho_i} \nu = \frac{\partial \nu}{\partial x_1} \frac{\partial \rho_i}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial \nu}{\partial x_n} \frac{\partial \rho_i}{\partial x_n}$$

peut aussi s'écrire

$$\delta_{\rho_i} \nu = \frac{1}{H_i^2} \left(\frac{\partial \nu}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \rho_i} + \dots + \frac{\partial \nu}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial \rho_i} \right),$$

c'est-à-dire, en supposant ν exprimée en fonction des coordonnées ρ_i ,

$$(17) \quad \delta_{\rho_i} \nu = \frac{1}{H_i^2} \frac{\partial \nu}{\partial \rho_i}.$$

Par exemple, si l'on différentie, par rapport à u , la relation

$$\delta_{\rho_k} \rho_{k'} = 0,$$

on aura, nous l'avons vu (n° 9),

$$\delta_{\rho_k} \left(\frac{\partial \rho_{k'}}{\partial u} \right) + \delta_{\rho_{k'}} \left(\frac{\partial \rho_k}{\partial u} \right) = 0.$$

En tenant compte de la formule (17), cette dernière relation deviendra

$$\frac{1}{H_k^2} \frac{\partial}{\partial \rho_k} \left(\frac{\partial \rho_{k'}}{\partial u} \right) + \frac{1}{H_{k'}^2} \frac{\partial}{\partial \rho_{k'}} \left(\frac{\partial \rho_k}{\partial u} \right) = 0,$$

ou, en remplaçant $\frac{\partial \rho_k}{\partial u}, \frac{\partial \rho_{k'}}{\partial u}$ par leurs expressions tirées de la for-

mule (14),

$$\frac{1}{H_k^2} \frac{\partial}{\partial \rho_k} \left(\frac{U_{k'}}{H_{k'}} \right) + \frac{1}{H_k^2} \frac{\partial}{\partial \rho_{k'}} \left(\frac{U_k}{H_k} \right) = 0,$$

c'est-à-dire

$$(18) \quad H_k \frac{\partial U_k}{\partial \rho_{k'}} + H_{k'} \frac{\partial U_{k'}}{\partial \rho_k} - U_k \frac{\partial H_k}{\partial \rho_{k'}} - U_{k'} \frac{\partial H_{k'}}{\partial \rho_k} = 0.$$

Cela posé, reprenons la formule (7), qui peut servir de définition aux U_i ,

$$(19) \quad du = H_1 U_1 d\rho_1 + H_2 U_2 d\rho_2 + \dots + H_n U_n d\rho_n,$$

et écrivons les conditions d'intégrabilité. On devra avoir

$$(20) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \rho_k \partial \rho_{k'}} = \frac{\partial}{\partial \rho_k} (H_{k'} U_{k'}) = \frac{\partial}{\partial \rho_{k'}} (H_k U_k);$$

ce qui donnera

$$(21) \quad H_k \frac{\partial U_k}{\partial \rho_{k'}} - H_{k'} \frac{\partial U_{k'}}{\partial \rho_k} + U_k \frac{\partial H_k}{\partial \rho_{k'}} - U_{k'} \frac{\partial H_{k'}}{\partial \rho_k} = 0.$$

Il suffit de comparer cette formule à la précédente (18) pour en déduire les relations bien plus simples, qui sont contenues dans le type suivant

$$(22) \quad \frac{1}{H_k} \frac{\partial H_{k'}}{\partial \rho_k} = \frac{1}{U_{k'}} \frac{\partial U_k}{\partial \rho_{k'}}, \quad (k \neq k'),$$

et tiennent lieu à la fois des relations (18) et (21).

Si, au lieu de garder comme Lamé les fonctions H_k , nous introduisons les variables auxiliaires β_{ik} définies par la double relation

$$(23) \quad \beta_{ii} = 0, \quad \beta_{ik} = \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_k}{\partial \rho_i}, \quad (i \neq k),$$

on voit que l'on aura

$$(24) \quad \frac{\partial U_k}{\partial \rho_{k'}} = U_{k'} \beta_{kk'}, \quad (k \neq k').$$

La formule précédente ne nous donne pas toutes les dérivées des fonctions U_i . Nous aurons celles qui nous manquent en différentiant, par rapport à ρ_k , la relation

$$(25) \quad U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_n^2 = 1,$$

ce qui nous donnera

$$(26) \quad \frac{\partial U_k}{\partial \rho_k} = -\beta_{1k} U_1 - \beta_{2k} U_2 - \dots - \beta_{nk} U_n.$$

Ainsi, les formules (24) et (26) font connaître toutes les dérivées des fonctions U_k .

93. Ce point étant obtenu, nous aurons des relations entre les fonctions β_{ik} en exprimant que les différentes valeurs obtenues pour une même dérivée seconde de U_k sont égales. On aura, par exemple, en supposant k' et k'' différents de k ,

$$\frac{\partial^2 U_k}{\partial \rho_{k'} \partial \rho_{k''}} = \frac{\partial \beta_{k'k'}}{\partial \rho_{k''}} U_{k'} + \beta_{kk'} \beta_{k'k''} U_{k''} = \frac{\partial \beta_{k'k''}}{\partial \rho_{k'}} U_{k''} + \beta_{k'k''} \beta_{k''k'} U_{k'}.$$

Cette équation doit avoir lieu pour n systèmes différents de valeurs des U_i ; il faut donc qu'elle soit vérifiée identiquement, ce qui donne deux relations comprises dans le type suivant

$$(27) \quad \frac{\partial \beta_{k'k'}}{\partial \rho_{k''}} = \beta_{kk''} \beta_{k''k'}, \quad (k \neq k' \neq k'').$$

Cherchons de même les deux valeurs que l'on peut obtenir pour $\frac{\partial^2 U_k}{\partial \rho_k \partial \rho_{k'}}$ et égalons-les; on trouvera, en tenant compte des relations précédentes,

$$U_{k'} \left(\frac{\partial \beta_{kk'}}{\partial \rho_k} + \frac{\partial \beta_{k'k}}{\partial \rho_{k'}} + \beta_{1k} \beta_{1k'} + \dots + \beta_{nk} \beta_{nk'} \right) = 0,$$

ce qui donne le nouveau système de relations aux dérivées partielles entre les β_{ik}

$$(28) \quad \frac{\partial \beta_{kk'}}{\partial \rho_k} + \frac{\partial \beta_{k'k}}{\partial \rho_{k'}} + \beta_{1k} \beta_{1k'} + \beta_{2k} \beta_{2k'} + \dots + \beta_{nk} \beta_{nk'} = 0, \quad (k \neq k').$$

Les quantités β_{ik} doivent donc satisfaire aux deux groupes bien distincts de relations (27) et (28). Puis les U_i seront déterminés par les équations

$$(29) \quad \begin{cases} \frac{\partial U_k}{\partial \rho_{k'}} = \beta_{kk'} U_{k'}, \\ \frac{\partial U_k}{\partial \rho_k} = -\beta_{1k} U_1 - \dots - \beta_{nk} U_n, \end{cases} \quad (k = 1, 2, 3, \dots, n),$$

qui seront évidemment compatibles et formeront un système complet si les relations (27), (28) sont toutes vérifiées.

94. D'après cela, supposons que l'on ait trouvé des fonctions $\beta_{kk'}$ satisfaisant au système des équations aux dérivées partielles (27), (28). Nous allons voir qu'on pourra toujours en déduire une infinité de systèmes orthogonaux. En effet, les conditions d'intégrabilité étant vérifiées, le système (29) déterminera les fonctions U_i et il est facile de voir avec quel degré de généralité. Les valeurs initiales seules de ces fonctions pourront être choisies arbitrairement, puisque les équations (29) déterminent toutes leurs dérivées premières.

D'autre part, il résulte de ces équations mêmes que si l'on a trouvé deux systèmes différents U_i et V_i de solutions de ces équations, la somme

$$U_1V_1 + \dots + U_nV_n$$

demeure constante. On vérifie ce point essentiel en prenant la dérivée de la somme précédente par rapport à ρ_k par exemple, et en substituant les valeurs de $\frac{\partial U_i}{\partial \rho_k}$, $\frac{\partial V_i}{\partial \rho_k}$, ..., déduites des équations (29); on obtiendra ainsi un résultat qui sera toujours nul. Cette remarque s'appliquant évidemment au cas où les deux systèmes coïncident, on aura

$$U_1V_1 + \dots + U_nV_n = \text{const.},$$

$$U_1^2 + \dots + U_n^2 = \text{const.},$$

$$V_1^2 + \dots + V_n^2 = \text{const.}$$

Admettons cette propriété : nous avons à obtenir n systèmes différents de valeurs pour les U_i , et ces n systèmes différents doivent nous fournir les n coefficients d'une substitution linéaire orthogonale. D'après la propriété précédente, il suffira que les valeurs initiales de ces fonctions, c'est-à-dire les valeurs qu'elles prennent lorsqu'on donne à $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ des valeurs constantes choisies comme on voudra, vérifient des relations telles que les suivantes :

$$U_1^2 + \dots + U_n^2 = 1,$$

$$U_1V_1 + \dots + U_nV_n = 0;$$

c'est-à-dire soient elles-mêmes les coefficients d'une substitution linéaire orthogonale.

Il n'y a donc au fond qu'un système de solutions pour les n^2 fonctions U_i ; tous les autres s'en déduiront par des transformations linéaires orthogonales à coefficients constants qui transformeront en elle-même la forme quadratique

$$dx_1^2 + \dots + dx_n^2,$$

et qui équivaldront à des changements d'axes coordonnés dans le cas où n sera égal à 3.

Il n'en est pas de même pour les équations (23)

$$\frac{\partial H_{k'}}{\partial \rho_k} = \beta_{kk'} H_k,$$

qui déterminent les H_i quand les β_{ik} sont connus. A la vérité, ces équations sont compatibles; elles forment aussi un système complet en vertu des relations (27). Mais elles ne déterminent pas les dérivées $\frac{\partial H_k}{\partial \rho_k}$; et différenciées, elles ne donneront pas non plus les dérivées d'ordre supérieur $\frac{\partial^n H_k}{\partial \rho_k^n}$. Elles admettront donc une solution qui contiendra n fonctions arbitraires d'une variable indépendante. Il sera possible de choisir arbitrairement la fonction de ρ_k à laquelle se réduit H_k , quand toutes les variables ρ_i , autres que ρ_k , prennent des valeurs constantes.

Il suit de là que, si l'on connaît un système orthogonal, on pourra d'abord former les valeurs des fonctions β_{ik} , qui satisferont nécessairement aux équations (27), (28). Si, prenant ensuite ces quantités β_{ik} comme connues et données, on veut en déduire tous les systèmes qui y correspondent, les U_i , à la vérité, seront complètement déterminés, ils seront les mêmes que pour le système proposé (en négligeant une substitution linéaire orthogonale à coefficients constants); mais les fonctions H_i pourront recevoir de nouvelles valeurs qui dépendront de n fonctions arbitraires d'une variable. Cette remarque a déjà été faite, pour le cas de $n = 3$, par M. Combescure (1).

(1) E. COMBESCURE, *Sur les déterminants fonctionnels et les coordonnées curvilignes* (Annales de l'École Normale, 1^{re} série, t. IV, p. 93; 1867).

Dans le cas de trois variables, l'interprétation géométrique est bien simple : si l'on considère l'un quelconque des systèmes orthogonaux ainsi déduits du proposé, les surfaces qui le composent correspondent une à une à celles du système proposé, les normales aux trois surfaces de chaque système aux points correspondants sont parallèles; par suite, les surfaces correspondantes auront une même représentation sphérique de leurs lignes de courbure. Nous reviendrons plus loin sur ces propriétés.

95. On le voit, dans notre méthode, on peut faire reposer la recherche d'un système orthogonal sur trois opérations distinctes : d'abord l'intégration des équations aux fonctions β_{ik} , puis celle du système aux fonctions H_i , enfin celle du système qui détermine les U_i . Cela fait, l'intégration des expressions

$$du = H_1 U_1 d\rho_1 + \dots + H_n U_n d\rho_n$$

donnera les fonctions x_1, x_2, \dots, x_n , et la solution du problème sera achevée.

Nous avons dit que Lamé n'employait pas les fonctions β_{ik} ; on peut, en effet, remplacer ces fonctions par leurs expressions à l'aide des H_k , expressions qui leur servent de définition. Il est facile de voir qu'alors les deux équations

$$\frac{\partial \beta_{kk''}}{\partial \rho_{k'}} = \beta_{kk'} \beta_{k'k''}, \quad \frac{\partial \beta_{k'k''}}{\partial \rho_k} = \beta_{k'k} \beta_{kk''}$$

se réduisent à une seule, qui est de la forme suivante

$$(30) \quad \frac{\partial^2 H_{k''}}{\partial \rho_k \partial \rho_{k'}} - \frac{1}{H_k} \frac{\partial H_k}{\partial \rho_{k'}} \frac{\partial H_{k''}}{\partial \rho_k} - \frac{1}{H_{k'}} \frac{\partial H_{k'}}{\partial \rho_k} \frac{\partial H_{k''}}{\partial \rho_{k'}} = 0.$$

On a ainsi $\frac{n(n-1)(n-2)}{2}$ équations du second ordre que doivent vérifier les n fonctions H_k . Il faudra leur ajouter les $\frac{n(n-1)}{2}$ équations qu'on obtient en remplaçant les β_{ik} par leurs valeurs dans le système (28), c'est-à-dire les suivantes

$$(31) \quad \frac{\partial}{\partial \rho_k} \left(\frac{1}{H_k} \frac{\partial H_{k'}}{\partial \rho_k} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho_{k'}} \left(\frac{1}{H_{k'}} \frac{\partial H_k}{\partial \rho_{k'}} \right) + \sum_i \frac{1}{H_i^2} \frac{\partial H_k}{\partial \rho_i} \frac{\partial H_{k'}}{\partial \rho_i} = 0, \quad (k \neq k').$$

la sommation relative à i s'étendant à tous les indices, sauf k et k' .

Il y a aussi quelquefois avantage à former les équations aux dérivées partielles auxquelles satisfont les fonctions x_1, x_2, \dots, x_n , lorsque les H_i sont donnés. Il suffit, pour les obtenir, de substituer dans les équations (29) aux β_{ik} et aux U_i leurs expressions (23) et (14). On obtient ainsi les relations

$$(32) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \rho_k \partial \rho_{k'}} - \frac{1}{H_k} \frac{\partial H_k}{\partial \rho_{k'}} \frac{\partial u}{\partial \rho_k} - \frac{1}{H_{k'}} \frac{\partial H_{k'}}{\partial \rho_k} \frac{\partial u}{\partial \rho_{k'}} = 0,$$

$$(33) \quad \frac{\partial}{\partial \rho_k} \left(\frac{1}{H_k} \frac{\partial u}{\partial \rho_k} \right) + \sum_i \frac{1}{H_i^2} \frac{\partial H_i}{\partial \rho_i} \frac{\partial u}{\partial \rho_i} = 0,$$

la sommation relative à i s'étendant à tous les indices sauf k .

Mentionnons encore l'équation

$$(34) \quad \frac{1}{H_1^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho_1} \right)^2 + \frac{1}{H_2^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho_2} \right)^2 + \dots + \frac{1}{H_n^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho_n} \right)^2 = 1,$$

simple conséquence des équations (14) et (15).

96. Pour montrer, au moins par un exemple, la marche des calculs, traitons le cas où l'on veut que toutes les quantités H_i soient égales et posons

$$(35) \quad H_i = \frac{1}{h};$$

on aura

$$(36) \quad dx_1^2 + \dots + dx_n^2 = \frac{1}{h^2} (d\rho_1^2 + \dots + d\rho_n^2).$$

La solution complète de cette équation nous donnera évidemment toutes les transformations de l'espace à n dimensions qui s'effectuent avec conservation des angles ou similitude des éléments infiniment petits. On connaît déjà une solution particulière de ce problème, celle qui est fondée sur les formules généralisées de la transformation par rayons vecteurs réciproques. Nous allons montrer qu'il n'y en aura pas d'autre.

On aura ici

$$(37) \quad \beta_{kk'} = -\frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial \rho_k}$$

et les équations (27) nous donneront d'abord

$$\frac{\partial^2 h}{\partial \rho_k \partial \rho_{k'}} = 0, \quad (k \neq k'),$$

ce qui exige que h soit de la forme

$$h = r_1 + r_2 + \dots + r_n,$$

r_i dépendant de la seule variable ρ_i . En substituant les valeurs des β_{ik} dans le groupe (28), on trouve

$$(38) \quad h \left(\frac{\partial^2 h}{\partial \rho_k^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial \rho_{k'}^2} \right) = \left(\frac{\partial h}{\partial \rho_1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial h}{\partial \rho_n} \right)^2.$$

Le second membre étant toujours le même, il faut donc que toutes les dérivées $\frac{\partial^2 h}{\partial \rho_k^2}$ soient égales, ce qui donne

$$r_1'' = r_2'' = \dots = r_n'' = 2a,$$

a ne pouvant être qu'une constante. On aura, par suite,

$$(39) \quad h = a(\rho_1^2 + \dots + \rho_n^2) + 2a_1\rho_1 + \dots + 2a_n\rho_n + b,$$

b et les a_i étant de nouvelles constantes. En exprimant que la relation (38) est vérifiée, on obtient

$$(40) \quad a_1^2 + \dots + a_n^2 = ab,$$

unique relation à laquelle doivent satisfaire a , b et les a_i .

Examinons d'abord le cas où toutes les constantes sont nulles, sauf b que l'on prendra égal à l'unité. Alors toutes les fonctions β_{ik} sont nulles, les quantités H_i et U_i sont constantes. Ainsi la solution la plus générale de l'équation

$$dx_1^2 + \dots + dx_n^2 = d\rho_1^2 + \dots + d\rho_n^2$$

s'obtient en prenant pour les x_i des fonctions linéaires des ρ_i .

Il suit de là, comme nous l'avons déjà établi, que si deux systèmes orthogonaux donnent la même expression pour l'élément linéaire

$$dx_1^2 + \dots + dx_n^2,$$

ils ne diffèrent pas essentiellement; on passe de l'un à l'autre par

une substitution orthogonale à coefficients constants ou, pour le cas de $n=3$, par un changement d'axes coordonnés.

Cette remarque peut, dès à présent, recevoir son application et nous dispense des calculs relatifs à l'expression la plus générale de h . Nous savons en effet que l'on a une solution de l'équation (36) où l'on a substitué la valeur (39) de h en prenant

$$(40) \quad x_1 = \frac{\rho_1 + \frac{a_1}{a}}{h}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\rho_n + \frac{a_n}{a}}{h}.$$

On obtiendra donc la solution la plus générale en employant ces formules après avoir effectué, sur les variables x_i ou sur les variables ρ_i , une substitution linéaire orthogonale à coefficients constants. En particulier, dans le cas de $n=3$, on obtient la solution la plus générale de l'équation (36), en effectuant une inversion ou une transformation homothétique et en la faisant suivre, s'il y a lieu, d'un déplacement.

97. Il y a un cas particulier de la transformation précédente que l'on néglige d'habitude, parce qu'il ne peut se rapporter qu'à des points imaginaires, mais dont il nous paraît bon de dire quelques mots; c'est celui où a est nul sans qu'il en soit de même de toutes les constantes a_1, \dots, a_n .

Alors h a pour expression

$$(41) \quad h = a_1 \rho_1 + a_2 \rho_2 + \dots + a_n \rho_n + b,$$

avec la condition

$$(42) \quad a_1^2 + \dots + a_n^2 = 0.$$

Cette dernière relation exige que l'une au moins des constantes soit imaginaire. M. Cremona a, le premier, attiré l'attention sur ce cas spécial de l'inversion, qui se présente lorsque le pôle de l'inversion va se placer sur le cercle de l'infini. Les formules qui s'y rapportent ne se déduisent pas immédiatement de celles qui sont relatives au cas général, mais on les trouve sans difficulté.

D'abord on peut, à l'aide d'une substitution linéaire orthogonale effectuée sur les ρ_i , réduire h à la forme

$$(43) \quad h = \rho_1 + i \rho_2;$$

on pourra prendre alors

$$(44) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{\rho_1^2 + \dots + \rho_n^2 - 1}{2h}, & x_2 = i \frac{\rho_1^2 + \dots + \rho_n^2 + 1}{2h}, \\ x_k = \frac{\rho_k}{h}, & (k > 2). \end{cases}$$

98. Les résultats précédents donnent lieu à une remarque dont nous aurons à faire l'application. Supposons que, considérant le cas de $n=3$, on ait trouvé un système orthogonal pour lequel on ait

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = H^2 d\rho^2 + H_1^2 d\rho_1^2 + H_2^2 d\rho_2^2,$$

et que l'on cherche s'il en existe un autre, pour lequel l'élément linéaire sera donné par la formule

$$dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = ds'^2 = \frac{1}{M^2} ds^2 = \frac{1}{M^2} (H^2 d\rho^2 + H_1^2 d\rho_1^2 + H_2^2 d\rho_2^2).$$

La valeur la plus générale de M sera, d'après ce qui précède,

$$M = m[(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2],$$

a, b, c, m désignant des constantes, ou encore

$$M = m(x^2 + y^2 + z^2) + 2ax + 2by + 2cz + m',$$

avec la condition

$$a^2 + b^2 + c^2 - mm' = 0.$$

99. En dehors de leurs applications à la Physique mathématique et à la Mécanique, les systèmes orthogonaux à n variables peuvent servir à la recherche des systèmes orthogonaux à trois variables. Nous développerons d'abord une première méthode fondée sur la généralisation de la représentation sphérique (1).

Reprenons les formules qui donnent les dérivées des fonctions U . On en déduit que l'on a

$$(45) \quad dU_k = -(\beta_{1k} U_1 + \beta_{2k} U_2 + \dots + \beta_{nk} U_n) d\rho_k + \sum_{k'} \beta_{kk'} U_{k'} d\rho_{k'},$$

(1) *Sur une nouvelle série de systèmes orthogonaux algébriques (Comptes rendus, t. LXIX, p. 392; 1869).*

ou, en supposant ρ_k constant,

$$(46) \quad dU_k = \sum_{k'} \beta_{kk'} U_{k'} d\rho_{k'}.$$

Remplaçons dans cette formule U_k par $X_k^1, X_k^2, \dots, X_k^n$ et faisons la somme des carrés; nous aurons, en tenant compte des relations d'orthogonalité,

$$(47) \quad (dX_k^1)^2 + (dX_k^2)^2 + \dots + (dX_k^n)^2 = \sum_{k'} \beta_{kk'}^2 d\rho_{k'}^2.$$

Cette équation exprime que les n fonctions X_k^1, \dots, X_k^n , considérées comme dépendantes des $n - 1$ variables $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{k-1}, \rho_{k+1}, \dots, \rho_n$, forment un système orthogonal. Il est vrai que ces fonctions sont en nombre trop grand d'une unité et qu'elles sont liées par la relation

$$(48) \quad (X_k^1)^2 + \dots + (X_k^n)^2 = 1.$$

Mais il est facile de ramener ce système au type ordinaire. Pour nous rendre compte de l'opération analytique que nous allons exécuter, voyons quelle est la signification des résultats précédents pour le cas de $n = 3$.

Alors, les quantités X_k^1, X_k^2, X_k^3 ou, avec les notations habituelles, X_k, Y_k, Z_k sont les cosinus-directeurs de la normale à la surface de paramètre ρ_k , c'est-à-dire les coordonnées du point de la sphère qui sert de représentation sphérique au point correspondant de la surface. Notre résultat équivaut alors à cette proposition bien connue que les représentations sphériques des lignes de courbure de chaque surface forment un système orthogonal. De ce système sphérique on peut déduire, par inversion, un système plan orthogonal, et l'on a ainsi, d'un système orthogonal à trois variables, déduit un système orthogonal à deux variables seulement. C'est une opération analogue que nous allons exécuter avec un nombre quelconque de variables.

A cet effet, effectuons la substitution définie par les formules suivantes :

$$(49) \quad y_1 = \frac{X_k^1}{1 - X_k^n}, \quad y_2 = \frac{X_k^2}{1 - X_k^n}, \quad \dots, \quad y_{n-1} = \frac{X_k^{n-1}}{1 - X_k^n}.$$

En tenant compte de la relation (48), nous trouverons d'une manière générale

$$(50) \quad dy_1^2 + dy_2^2 + \dots + dy_{n-1}^2 = \frac{1}{(1 - X_k^n)^2} [(dX_k^1)^2 + (dX_k^2)^2 + \dots + (dX_k^n)^2].$$

L'emploi de l'équation (47) nous permet ici d'écrire la formule particulière

$$(51) \quad dy_1^2 + \dots + dy_{n-1}^2 = \frac{1}{(1 - X_k^n)^2} (\beta_{k1}^2 d\rho_1^2 + \beta_{k2}^2 d\rho_2^2 + \dots + \beta_{kn}^2 d\rho_n^2),$$

où le second membre est privé du terme en $d\rho_k^2$. Nous obtenons ainsi un système orthogonal ordinaire; car les fonctions y_1, \dots, y_{n-1} , au nombre de $n - 1$, dépendent du même nombre de variables $\rho_1, \dots, \rho_{k-1}, \rho_{k+1}, \dots, \rho_n$ et ne sont liées par aucune relation; les formules (9) et (49) le définissent complètement. Ainsi, d'un système complètement orthogonal à n variables, nous avons déduit un autre système à $n - 1$ variables, contenant d'ailleurs une constante arbitraire, le paramètre ρ_k .

On peut résoudre les équations (48) et (49) par rapport à X_k^1, \dots, X_k^n et l'on aura

$$(52) \quad \begin{cases} X_k^i = \frac{2y_i}{y_1^2 + \dots + y_{n-1}^2 + 1}, & (i = 1, 2, \dots, n-1), \\ X_k^n = \frac{y_1^2 + \dots + y_{n-1}^2 - 1}{y_1^2 + \dots + y_{n-1}^2 + 1}. \end{cases}$$

Ces formules permettent de reconnaître très simplement que si l'on prend comme point de départ le système de coordonnées elliptiques à n variables, on obtiendra ainsi celui des cyclides homofocales dans l'espace à $n - 1$ dimensions.

Écrivons, en effet, les équations qui définissent le système des coordonnées elliptiques

$$(53) \quad \sum_i \frac{x_i^2}{a_i - \rho_k} = 1.$$

L'une des surfaces qui le composent sera déterminée par l'équation

$$(54) \quad \sum_i \frac{x_i^2}{a_i - \rho_k} = 1.$$

et l'on aura ici

$$(55) \quad X_k^i = \lambda_k \frac{x_i}{a_i - \rho_k},$$

λ_k étant un facteur de proportionnalité qui se déterminerait, s'il était nécessaire, à l'aide de la relation (48).

En retranchant les deux équations (53), (54) l'une de l'autre, on aura

$$\sum_i \frac{x_i^2}{(a_i - \rho_h)(a_i - \rho_k)} = 0,$$

ou, en remplaçant x_i par son expression tirée de (55) en X_k^i ,

$$\sum_i (X_k^i)^2 \frac{a_i - \rho_k}{a_i - \rho_h} = 0.$$

Cette dernière relation peut aussi s'écrire

$$(56) \quad \sum_i \frac{(X_k^i)^2}{a_i - \rho_h} = \frac{1}{\rho_k - \rho_h},$$

et si l'on y remplace les X_k^i par leurs valeurs déduites des formules (52), il viendra l'équation

$$(57) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{4y_1^2}{a_1 - \rho_h} + \dots + \frac{4y_{n-1}^2}{a_{n-1} - \rho_h} \\ + \frac{(1 - y_1^2 - \dots - y_{n-1}^2)^2}{a_n - \rho_h} - \frac{(1 + y_1^2 + \dots + y_{n-1}^2)^2}{\rho_k - \rho_h} = 0, \end{array} \right.$$

où l'on pourra donner à h toutes les valeurs différentes de k .

On obtient ainsi les formules qui conviennent au système formé des cyclides homofocales dans un espace à $n - 1$ dimensions. Dans cet espace, les variables proportionnelles aux quantités

$$2y_1, \dots, 2y_{n-1}, 1 - y_1^2 - \dots - y_{n-1}^2, i(1 + y_1^2 + \dots + y_{n-1}^2)$$

forment un système de coordonnées tout semblable à celui des coordonnées pentasphériques dans l'espace à trois dimensions.

On pourra transformer par inversion le nouveau système orthogonal, puis lui appliquer la même méthode qu'au précédent, et l'on obtiendra encore un nouveau système algébrique, qui sera,

lui aussi, à un nombre quelconque de variables. En répétant indéfiniment ces opérations, on déduira du système primitif une suite illimitée de systèmes orthogonaux algébriques, à un nombre quelconque de variables.

100. Mais on peut indiquer d'autres procédés bien plus généraux par lesquels on déduit, d'un système orthogonal donné, d'autres systèmes orthogonaux.

Considérons, dans le système proposé, $\rho_h, \rho_{h+1}, \dots, \rho_n$ comme des constantes, et définissons n fonctions y_i par les formules

$$(58) \quad y_i = x_i + A_h X_h^i + A_{h+1} X_{h+1}^i + \dots + A_n X_n^i,$$

dont le type général est

$$(59) \quad y = u + A_h U_h + \dots + A_n U_n,$$

et qui dépendent, par conséquent, des n variables

$$\rho_1, \dots, \rho_{h-1}, A_h, \dots, A_n.$$

Si nous différencions l'équation (59), nous aurons

$$dy = du + A_h dU_h + \dots + A_n dU_n + U_h dA_h + \dots + U_n dA_n,$$

et, en substituant à du, dU_h leurs valeurs

$$dy = \sum_{i=1}^{i=h-1} U_i (H_i + A_h \beta_{hi} + A_{h+1} \beta_{h+1,i} + \dots + A_n \beta_{ni}) d\rho_i \\ + U_h dA_h + U_{h+1} dA_{h+1} + \dots + U_n dA_n.$$

Remplaçons u et les U_i par les n systèmes de valeurs x_h, X_h^k , et faisons la somme des carrés des équations ainsi obtenues. Nous trouverons

$$(60) \quad \begin{cases} dy_1^2 + \dots + dy_n^2 \\ = \sum_{i=1}^{i=h-1} (H_i + A_h \beta_{hi} + \dots + A_n \beta_{ni})^2 d\rho_i^2 + dA_h^2 + \dots + dA_n^2; \end{cases}$$

et, comme cette formule ne contient que les carrés des différentielles, elle montre par cela même que y_1, y_2, \dots, y_n , con-

sidérées comme fonctions des variables $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{h-1}, A_h, A_{h+1}, \dots, A_n$, forment un système orthogonal.

Remarquons, d'ailleurs, que la proposition subsiste si l'on remplace les $n - h + 1$ variables A_i par d'autres variables $\rho'_h, \rho'_{h+1}, \dots, \rho'_n$ donnant naissance à la relation

$$(61) \quad dA_h^2 + \dots + dA_n^2 = H_h'^2 d\rho_h'^2 + \dots + H_n'^2 d\rho_n'^2,$$

qui caractérise un système orthogonal dans un espace à $n - h + 1$ dimensions.

Dans le cas de $n = 3$, la signification géométrique des systèmes ainsi obtenus est des plus simples. Le premier, celui où l'on ne prend qu'une fonction A , est formé des surfaces parallèles à l'une des surfaces du système proposé et des développables formées par leurs normales; le second, celui où l'on prend deux fonctions A , est formé des plans normaux à la courbe d'intersection de deux surfaces du système et de deux familles de développables, orthogonales à ces plans. Ces développables sont engendrées par des droites parallèles aux normales des deux surfaces du système qui se coupent suivant la courbe considérée.

101. Revenons au cas général. Les formules (58), (59), (60) conviennent à un système orthogonal à n variables. Mais on peut, de bien des manières, diminuer le nombre de ces variables. Supposons, pour prendre le cas le plus simple, qu'on établisse les relations

$$A_h = \gamma_h, \quad \dots, \quad A_n = \gamma_n,$$

qui déterminent A_h, \dots, A_n en fonction de $\rho_1, \dots, \rho_{h-1}$. La formule (60) deviendra

$$(62) \quad dy_1^2 + \dots + dy_{h-1}^2 = \sum_{k=1}^{k=h-1} (H_k + A_h \beta_{hk} + \dots + A_n \beta_{nk})^2 d\rho_k^2,$$

et elle montrera que les fonctions $\gamma_1, \dots, \gamma_{h-1}$, considérées comme dépendantes de $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{h-1}$, forment un système orthogonal à $h - 1$ variables seulement.

Nous allons faire une application des plus simples. Supposons que, pour $n = 3$, on ait constitué un système triple comprenant

une famille de surfaces parallèles, on aura

$$(63) \quad dx^2 + dy^2 + dz^2 = dA^2 + (H + A\beta_{20})^2 d\rho^2 + (H_1 + A\beta_{21})^2 d\rho_1^2,$$

A désignant dans cette formule la distance à la surface (Σ) de paramètre ρ_2 . Si nous faisons $z = A$, ce sera prendre sur la normale à la surface (Σ) un point à égale distance de la surface (Σ) et du plan des xy . Ce point sera donc le centre d'une sphère (S) tangente à la fois à (Σ) et au plan des xy . D'ailleurs les coordonnées du point de contact de cette sphère (S) et du plan des xy sont évidemment x, y , et l'on aura, d'après la formule (63),

$$(64) \quad dx^2 + dy^2 = (H + A\beta_{20})^2 d\rho^2 + (H_1 + A\beta_{21})^2 d\rho_1^2,$$

d'où résulte ce théorème :

Si l'on mène des sphères tangentes à une surface fixe (Σ) et à un plan, on établira ainsi une correspondance entre les points du plan et ceux de la surface qui sont les points de contact de la même sphère. Aux lignes de courbure de la surface correspondront sur le plan deux systèmes de lignes orthogonales.

En transformant par l'inversion, on obtient la proposition suivante :

Si l'on mène des sphères (U) tangentes à une surface fixe (Σ) et à une sphère fixe (S), on établit une correspondance entre les points de la surface (Σ) et ceux de la sphère (S) qui sont les points de contact de la même sphère (U). Aux lignes de courbure de la surface (Σ) correspondent sur la sphère (S) deux systèmes de lignes orthogonales.

Si l'on suppose que le rayon de la sphère (S) augmente indéfiniment, on retrouve le mode ordinaire de représentation sphérique des surfaces.

La proposition que nous venons d'établir se rattache très aisément à celles par lesquelles on justifie la transformation de Ribaucour (n° 32). Nous avons vu que, si l'on mène des cercles (C) normaux à la fois à (S) et à (Σ), ces cercles sont orthogonaux à toute une famille de surfaces faisant partie d'un

système triple orthogonal, famille qui comprend évidemment la sphère (S). Si M est le point où le cercle (C) est normal à (Σ), si M_1, M_2 désignent les points où il est normal à (S), il est clair que les sphères tangentes en M à (Σ) et passant, soit par M_1 , soit par M_2 , seront aussi normales à (C) en ces points, et, par suite, seront tangentes à (S). Or la correspondance établie entre M et M_1 , par exemple, est bien telle que des courbes orthogonales de la sphère (S) correspondent aux lignes de courbure de (Σ).

Au reste, on pourrait très aisément étendre les résultats précédents. Revenons, en effet, à l'équation générale (60). Toutes les substitutions linéaires à coefficients constants qui transformeront en elle-même la forme quadratique

$$dx_1^2 + \dots + dx_n^2 - dA_h^2 - \dots - dA_n^2,$$

plus généralement toutes celles qui la transformeront en une autre de la forme

$$dy_1^2 + \dots + dy_n^2 - K_h^2 d\phi'_h{}^2 - \dots - K_n^2 d\phi'_n{}^2$$

nous donneront de nouveaux systèmes orthogonaux à n variables auxquels on pourra appliquer les méthodes que nous venons d'exposer.

102. C'est ici le lieu d'aborder une question qui présente un vif intérêt et de montrer que la détermination des surfaces tracées dans un espace à n dimensions et pour lesquelles les lignes de courbure sont *coordonnées* se ramène, en première analyse, à la détermination de tous les systèmes orthogonaux dans un espace à $n - 1$ dimensions.

Soit, en effet, (Σ) une telle surface et désignons par c_1, c_2, \dots, c_n les cosinus directeurs de la normale en un de ses points, c'est-à-dire des fonctions définies par les deux relations

$$(65) \quad c_1 dx_1 + \dots + c_n dx_n = 0,$$

$$(66) \quad c_1^2 + \dots + c_n^2 = 1.$$

En répétant le raisonnement du n° 75, on verra que les lignes de courbure seront déterminées par des équations telles que les suivantes :

$$(67) \quad dc_k + \lambda dx_k = c_k d\mu, \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Multiplions l'équation précédente par c_k et ajoutons toutes les relations ainsi obtenues.

En tenant compte des relations (65), (66), il viendra

$$d\mu = 0,$$

de sorte que les équations différentielles (67) se réduiront à la forme

$$(68) \quad dc_k + \lambda dx_k = 0,$$

qui est une généralisation des formules d'Olinde Rodrigues (1).

On déduit de là, en particulier, la conclusion suivante :

Soient d et δ les différentielles relatives à deux lignes de courbure différentes ; on aura les équations différentielles

$$(69) \quad dc_k + \lambda dx_k = 0, \quad \delta c_k + \lambda' \delta x_k = 0.$$

D'autre part, pour deux déplacements quelconques s'effectuant sur la surface (Σ), la relation

$$\mathfrak{S} (dc_k \delta x_k - \delta c_k dx_k) = 0$$

est toujours vérifiée. Si l'on remplace dans cette identité les différentielles dc_k , δc_k par leurs valeurs déduites des équations (69), il viendra

$$(70) \quad (\lambda - \lambda') \mathfrak{S} dx_k \delta x_k = 0.$$

Ainsi, sur une surface quelconque, deux directions principales qui correspondent à des valeurs différentes de λ sont toujours rectangulaires. C'est un point que nous avons déjà établi (n° 75) ; mais si l'on remplace dx_k , δx_k en fonction de dc_k , δc_k , on aura aussi

$$(71) \quad \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right) \mathfrak{S} dc_k \delta c_k = 0.$$

En langage géométrique, cette nouvelle relation peut s'énoncer comme il suit : *Les représentations sphériques des lignes de courbure sont rectangulaires.*

(1) *Leçons sur la théorie des surfaces* (I^{re} Partie, n° 141).

103. Cela posé, supposons que les lignes de courbure de la surface (Σ) soient *coordonnées*. On pourra choisir $n - 1$ fonctions $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n-1}$ telles qu'une seule d'entre elles varie sur chaque ligne de courbure. Par suite, en remplaçant λ par $\frac{1}{R_i}$, on pourra donner aux équations (68) la forme suivante :

$$(72) \quad \frac{\partial x_k}{\partial \rho_i} + R_i \frac{\partial c_k}{\partial \rho_i} = 0, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n-1),$$

et comme les lignes de courbure ont des représentations sphériques perpendiculaires les unes aux autres, les n fonctions c_1, c_2, \dots, c_n de $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n-1}$ définiront un système orthogonal appartenant à la sphère de rayon 1. Donc, en premier lieu, pour définir (Σ) , il faudra trouver dans l'espace à n dimensions un système sphérique orthogonal.

Un tel système peut être obtenu (n° 99) comme l'inverse d'un système complètement orthogonal, défini dans l'espace à $n - 1$ dimensions; de sorte que nous aurons d'abord à déterminer le système le plus général de ce genre, dans l'espace à $n - 1$ dimensions.

Supposons ce premier problème résolu; nous pourrons, par inversion, constituer, dans l'espace à n dimensions un système orthogonal tracé sur la sphère de rayon 1, c'est-à-dire trouver n fonctions c_k satisfaisant à la condition

$$(73) \quad c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2 = 1,$$

et donnant lieu à la relation

$$(74) \quad dc_1^2 + \dots + dc_n^2 = h_1^2 d\rho_1^2 + \dots + h_{n-1}^2 d\rho_{n-1}^2.$$

Plus généralement, si l'on pose

$$(75) \quad \gamma_i = c_i \rho_n,$$

on aura

$$(76) \quad d\gamma_1^2 + \dots + d\gamma_n^2 = \rho_n^2 h_1^2 d\rho_1^2 + \dots + \rho_n^2 h_{n-1}^2 d\rho_{n-1}^2 + d\rho_n^2,$$

et les fonctions γ_i forment cette fois un système orthogonal *complet* à n dimensions. Nous pourrons donc appliquer à ce système toutes les propositions établies plus haut. Si nous écrivons en particulier que les fonctions γ_i vérifient le système (32) obtenu au

n° 95, nous reconnâtrons que les fonctions c_k doivent être des solutions particulières du système de $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ équations aux dérivées partielles comprises dans la formule générale

$$(77) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho_k \partial \rho_{k'}} - \frac{1}{h_k} \frac{\partial h_k}{\partial \rho_{k'}} \frac{\partial \theta}{\partial \rho_k} - \frac{1}{h_{k'}} \frac{\partial h_{k'}}{\partial \rho_k} \frac{\partial \theta}{\partial \rho_{k'}} = 0,$$

où k et k' doivent recevoir deux valeurs différentes comprises dans la suite $1, 2, \dots, n-1$.

Supposons donc connues les fonctions c_k . Il est aisé de généraliser les principes de la théorie des enveloppes et de montrer que, lorsqu'on connaît les cosinus directeurs de la normale à une surface, cette surface peut toujours s'obtenir en adjoignant à l'équation

$$(78) \quad c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n + \theta = 0,$$

où θ est une fonction convenablement choisie, ses dérivées

$$(79) \quad \frac{\partial c_1}{\partial \rho_k} x_1 + \dots + \frac{\partial c_n}{\partial \rho_k} x_n + \frac{\partial \theta}{\partial \rho_k} = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n-1),$$

par rapport à chacune des variables ρ_k . En effet, quelle que soit la surface considérée, on peut toujours déterminer une fonction θ par l'équation (78). Si l'on tient compte de la relation

$$(80) \quad c_1 dx_1 + \dots + c_n dx_n = 0,$$

relative à tout déplacement effectué sur la surface, la différentiation de cette équation (78) entraîne évidemment toutes les relations (79); et toutes ces relations, jointes à la précédente, permettent d'obtenir x_1, x_2, \dots, x_n en fonction de $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n-1}$.

Ce point étant admis, nous allons montrer que, pour obtenir la surface cherchée (Σ), il sera nécessaire et suffisant de prendre pour θ une solution quelconque des équations (77).

Différentions en effet l'équation (79) par rapport à $\rho_{k'}$, k' étant différent de k ; nous aurons

$$\sum_i \frac{\partial^2 c_i}{\partial \rho_k \partial \rho_{k'}} x_i + \sum_i \frac{\partial c_i}{\partial \rho_k} \frac{\partial x_i}{\partial \rho_{k'}} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho_k \partial \rho_{k'}} = 0.$$

Remplaçons les dérivées $\frac{\partial c_i}{\partial \rho_k \partial \rho_{k'}}$ par leurs valeurs, qu'on déduira

de l'équation (77) dont les c_i sont des solutions particulières. En ayant égard aux équations (79), on trouvera

$$(81) \quad -\sum_i \frac{\partial c_i}{\partial \rho_k} \frac{\partial x_i}{\partial \rho_{k'}} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \rho_k \partial \rho_{k'}} - \frac{1}{h_k} \frac{\partial h_k}{\partial \rho_{k'}} \frac{\partial \Theta}{\partial \rho_k} - \frac{1}{h_{k'}} \frac{\partial h_{k'}}{\partial \rho_k} \frac{\partial \Theta}{\partial \rho_{k'}}.$$

Rapprochons les conditions d'orthogonalité

$$(82) \quad \sum_i \frac{\partial c_i}{\partial \rho_k} \frac{\partial c_i}{\partial \rho_{k'}} = 0$$

des équations (72); nous verrons immédiatement que, dans la relation (81), le premier membre est toujours nul; il en sera donc de même du second, et, par conséquent, Θ sera bien une solution particulière du système des équations (77).

Réciproquement, supposons que Θ soit une solution particulière de ce système. La relation (81) nous donnera maintenant

$$\sum \frac{\partial c_i}{\partial \rho_k} \frac{\partial x_i}{\partial \rho_{k'}} = 0, \quad (k \neq k').$$

En rapprochant toutes les équations de ce genre pour lesquelles k a une même valeur des relations d'orthogonalité

$$\sum \frac{\partial c_i}{\partial \rho_k} \frac{\partial c_i}{\partial \rho_{k'}} = 0,$$

on verra que l'on a trois systèmes distincts de solutions des équations linéaires et homogènes par rapport aux inconnues z_i

$$\sum z_i \frac{\partial c_i}{\partial \rho_{k'}} = 0,$$

si l'on prend

$$z_i = c_i \quad \text{ou} \quad z_i = \frac{\partial c_i}{\partial \rho_k} \quad \text{ou} \quad z_i = \frac{\partial x_i}{\partial \rho_k}.$$

Ces trois systèmes ne pouvant être linéairement indépendants, il faudra que l'on ait, pour toutes les valeurs de i ,

$$\frac{\partial x_i}{\partial \rho_k} + \lambda_k \frac{\partial c_i}{\partial \rho_k} + \mu_k c_i = 0,$$

λ_k et μ_k étant des arbitraires. On verra, comme plus haut, que μ_k doit être nulle et l'on retrouvera ainsi la généralisation des équations

tions d'Olinde Rodrigues. Donc la surface correspondante aura ses lignes de courbure coordonnées; et, sur chacune d'elles, une seule des quantités ρ_i demeurera variable, ce qui achève d'établir notre proposition.

104. Le système des équations aux dérivées partielles

$$(83) \quad \frac{\partial \lambda}{\partial \rho_k} + R_k \frac{\partial \mu}{\partial \rho_k} = 0,$$

qui admet, d'après ce que nous avons vu, les solutions particulières

$$\lambda = x_i, \quad \mu = c_i,$$

et aussi, comme il est aisé de le vérifier,

$$\lambda = Sx_i^2, \quad \mu = 2Sc_i x_i,$$

est analogue à celui que l'on rencontre dans la théorie des surfaces ⁽¹⁾ lorsqu'on veut approfondir les propriétés des lignes de courbure et des systèmes cycliques de Ribaucour. Cette remarque conduit presque sans effort à la proposition suivante, qui fait connaître l'extension à un nombre quelconque de dimensions des propriétés des systèmes cycliques.

Donnons-nous, dans l'espace à n dimensions, une surface (Σ) dont les lignes de courbure soient coordonnées. Si l'on désigne par $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n-1}$ les paramètres des lignes de courbure, les coordonnées x_i d'un de ses points et les cosinus-directeurs c_i de la normale en ce point satisfont à des équations de la forme

$$(84) \quad \frac{\partial x_i}{\partial \rho_k} + R_k \frac{\partial c_i}{\partial \rho_k} = 0, \quad \left(\begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, n \\ k = 1, 2, \dots, n-1 \end{array} \right).$$

Si l'on a intégré d'une manière générale les équations aux dérivées partielles

$$(85) \quad \frac{\partial \lambda}{\partial \rho_k} + R_k \frac{\partial \mu}{\partial \rho_k} = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n-1),$$

(1) *Leçons sur la théorie des surfaces* (II^e Partie, n^{os} 481 et suiv.).

et que l'on résolve par rapport à $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ les n équations

$$(86) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\mu + \rho_n}{2\lambda} \sum (X_i - x_i)^2 + \sum c_i (X_i - x_i) = 0, \\ \frac{\partial \mu}{\partial \rho_k} \sum (X_i - x_i)^2 + \sum \frac{\partial c_i}{\partial \rho_k} (X_i - x_i) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n-1), \end{array} \right.$$

où λ et μ désignent un système quelconque de solutions des équations (85), les expressions de $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ en fonction de X_1, X_2, \dots, X_n définiront un système complètement orthogonal pour lequel on aura

$$(87) \quad dX_1^2 + \dots + dX_n^2 = \theta^2 d\rho_n^2 + \sum_{k=1}^{k=n-1} \left(\frac{\lambda \frac{\partial \theta}{\partial \rho_k}}{\theta \frac{\partial \mu}{\partial \rho_k}} \right)^2 e_k d\rho_k^2,$$

les fonctions e_k étant celles qui sont définies par la relation

$$(88) \quad dc_1^2 + dc_2^2 + \dots + dc_n^2 = \sum_{k=1}^{k=n-1} e_k d\rho_k^2,$$

et la fonction θ étant donnée par la formule

$$(89) \quad \frac{2\lambda}{\theta} + (\mu + \rho_n)^2 + \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{1}{e_k} \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho_k} \right)^2 = 0.$$

Si l'on convient, pour un instant, d'appeler *cercles*, dans l'espace à n dimensions, les intersections d'une sphère par $n - 2$ plans, le système obtenu est le plus général parmi ceux pour lesquels les trajectoires orthogonales de l'une des familles sont des cercles.

CHAPITRE II.

LE TRIÈDRE MOBILE.

Dans ce Chapitre, on étudie les propriétés des systèmes triples orthogonaux en les rattachant à la considération du déplacement du trièdre trirectangle (T) formé par les normales aux trois surfaces coordonnées qui se croisent en chaque point de l'espace. — Rappel des résultats déjà obtenus dans nos Leçons relativement aux divers mouvements d'un trièdre qui dépend de plusieurs paramètres. — Équations aux dérivées partielles qui relient les rotations et les translations. — Détermination d'un trièdre dont les rotations et les translations sont données *a priori*. — Système linéaire dont l'intégration fait connaître les cosinus-directeurs des axes de ce trièdre. — Formules générales qui déterminent le déplacement d'un point défini par ses coordonnées relatives au trièdre mobile. — Application de cette théorie générale aux coordonnées curvilignes orthogonales; on prend pour le trièdre mobile (T) celui dont les arêtes sont les normales aux trois surfaces coordonnées. — Trois des rotations sont nulles, les autres s'expriment en fonction des coefficients H, H_1, H_2 de l'élément linéaire et de leurs dérivées. — Introduction des quantités β_{ik} . — Double système de relations différentielles auxquelles doivent satisfaire ces six fonctions. — Démonstration nouvelle du théorème de Dupin. — Expression des rayons de courbure des surfaces coordonnées. — Système linéaire déterminant les cosinus-directeurs des normales aux surfaces coordonnées lorsqu'on connaît les β_{ik} . — Représentation sphérique, lignes asymptotiques de chacune de ces surfaces. — Lois de variation des six courbures principales découvertes par Lamé. — Définition du paramètre différentiel du premier ordre ΔU d'une fonction quelconque U ; son expression en coordonnées curvilignes; définition et expression de $\Delta(U, V)$. — Formule de Stokes et de C. Neumann; définition du paramètre différentiel ou invariant linéaire du second ordre; son expression en coordonnées curvilignes. — On peut rattacher l'introduction de cet invariant à l'étude de certaines propriétés des transformations ponctuelles les plus générales. — Pour toutes les transformations de ce genre, il y a en général trois éléments linéaires partant d'un point auxquels correspondent des éléments parallèles. Si l'on veut que ces trois éléments linéaires forment toujours un trièdre trirectangle, il sera nécessaire et suffisant que la transformation soit définie par les formules

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z},$$

où U désigne une fonction quelconque de x, y, z . Il existe alors une équation du troisième degré faisant connaître les dilatations des éléments dont la direction n'est pas altérée, et les racines de cette équation sont des invariants. Le paramètre du second ordre de Lamé n'est autre que la somme des racines de cette équation. — Détermination des transformations de la nature précédente pour

lesquelles les éléments dont la direction n'est pas changée en chaque point de l'espace sont normaux à trois familles, qui détermineront nécessairement un système de coordonnées curvilignes triplement orthogonales. — Il y a une infinité de transformations de ce genre qui correspondent à un système triple orthogonal, donné *a priori*. — Leur détermination se ramène à l'intégration de trois équations linéaires aux dérivées partielles auxquelles doit satisfaire une même fonction. — On termine le Chapitre en donnant un complément à la théorie du déplacement d'un trièdre mobile. Si l'on considère le système le plus général de coordonnées curvilignes obliques, l'élément linéaire de l'espace prendra la forme

$$ds^2 = \sum \sum A_{ik} d\rho_i d\rho_k,$$

et l'on peut se proposer de trouver toutes les relations différentielles qui existent entre les quantités A_{ik} , relations différentielles analogues à celles que l'on doit à Lamé, pour le cas où les coordonnées sont orthogonales. — On pourrait résoudre cette question en prenant un trièdre (T) occupant une position particulière relativement aux plans tangents des surfaces coordonnées. — Il paraît plus élégant d'employer une méthode toute différente, qui repose sur la considération des différentes décompositions en carrés de la forme quadratique précédente $\sum \sum A_{ik} d\rho_i d\rho_k$ et qui conduit à six équations à la fois nécessaires et suffisantes. — Retour au trièdre mobile pour établir les équations aux dérivées partielles entre les rotations et les translations.

105. Dans le Chapitre précédent, nous avons établi les principales relations qui se rapportent aux systèmes orthogonaux dans un espace à n dimensions. Dans le cas de l'espace ordinaire, on peut employer une autre méthode, fondée sur la considération d'un trièdre trirectangle mobile (T) dont la position dépend de trois paramètres que nous désignerons ici, pour conserver la notation de Lamé, par les lettres ρ, ρ_1, ρ_2 , l'indice 0 étant supprimé toutes les fois qu'il sera seul.

Si l'on adopte les notations que nous avons déjà employées dans nos Leçons (1) pour le cas de deux variables, et si l'on désigne par $\xi_i, \eta_i, \zeta_i, \rho_i, q_i, r_i$ les trois translations et les trois rotations relatives au cas où ρ_i varie seule et joue le rôle du temps, on aura trois groupes différents de rotations et de translations. Les formules que nous avons déjà établies nous donneront ici les

(1) Leçons sur la théorie des surfaces (I^e Partie, Livre I).

suivantes :

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial \xi_i}{\partial \rho_k} - \frac{\partial \xi_k}{\partial \rho_i} = q_i \zeta_k - q_k \zeta_i - r_i \eta_k + r_k \eta_i, \\ \frac{\partial \eta_i}{\partial \rho_k} - \frac{\partial \eta_k}{\partial \rho_i} = r_i \xi_k - r_k \xi_i - p_i \zeta_k + p_k \zeta_i, \\ \frac{\partial \zeta_i}{\partial \rho_k} - \frac{\partial \zeta_k}{\partial \rho_i} = p_i \eta_k - p_k \eta_i - q_i \xi_k + q_k \xi_i. \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial p_i}{\partial \rho_k} - \frac{\partial p_k}{\partial \rho_i} = q_i r_k - q_k r_i, \\ \frac{\partial q_i}{\partial \rho_k} - \frac{\partial q_k}{\partial \rho_i} = r_i p_k - r_k p_i, \\ \frac{\partial r_i}{\partial \rho_k} - \frac{\partial r_k}{\partial \rho_i} = p_i q_k - p_k q_i; \end{cases}$$



applicables toutes les fois que i et k prendront deux valeurs différentes dans la suite 0, 1, 2. Réciproquement, toutes les fois que les relations précédentes seront vérifiées, le raisonnement donné au Livre I, Chap. V, de nos *Leçons* montrera qu'il existe un trièdre mobile (T), et un seul, admettant les rotations et les translations données *a priori*. Si l'on désigne par U, U_1, U_2 les cosinus des angles que font les axes de ce trièdre avec une droite fixe de l'espace, ces cosinus seront déterminés par les équations

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial \rho_i} = U_1 r_i - U_2 q_i, \\ \frac{\partial U_1}{\partial \rho_i} = U_2 p_i - U r_i, \quad (i = 0, 1, 2), \\ \frac{\partial U_2}{\partial \rho_i} = U q_i - U_1 p_i; \end{cases}$$

de sorte que, pour avoir les cosinus des angles que font les axes du trièdre (T) avec ceux d'un trièdre fixe, il suffira de déterminer trois systèmes de solutions des équations précédentes

$$\begin{aligned} X, & X_1, X_2; \\ Y, & Y_1, Y_2; \\ Z, & Z_1, Z_2; \end{aligned}$$

dont les valeurs initiales, c'est-à-dire relatives à un système donné de valeurs de ρ, ρ_1, ρ_2 , vérifient les relations entre les neuf cosinus.

Puis, pour déterminer les coordonnées x' , y' , z' du sommet du trièdre (T) par rapport au trièdre fixe, on aura les formules

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial x'}{\partial \rho_i} = X \xi_i + X_1 \eta_i + X_2 \zeta_i, \\ \frac{\partial y'}{\partial \rho_i} = Y \xi_i + Y_1 \eta_i + Y_2 \zeta_i, \\ \frac{\partial z'}{\partial \rho_i} = Z \xi_i + Z_1 \eta_i + Z_2 \zeta_i, \end{cases}$$

qui feront connaître x' , y' , z' par des quadratures.

Tous les développements que nous avons déjà donnés (1) relativement à l'intégration du système (3) subsisteront ici sans modification. En particulier, si l'on exprime U , U_1 , U_2 en fonction de deux arbitraires en posant

$$(5) \quad U = \frac{1 - \alpha\beta}{\alpha - \beta}, \quad U_1 = i \frac{1 + \alpha\beta}{\alpha - \beta}, \quad U_2 = \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta},$$

α et β seront des solutions particulières des trois équations de Riccati comprises dans le type suivant :

$$(6) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \rho_k} = -i r_k \sigma + \frac{q_k - i p_k}{2} + \frac{q_k + i p_k}{2} \sigma^2, \quad (k = 0, 1, 2);$$

et les propositions que nous avons fait connaître relativement à l'intégration simultanée de deux équations de cette nature s'étendront d'elles-mêmes au système précédent de trois équations.

Ajoutons encore que, si l'on considère un point dont les coordonnées relatives au trièdre mobile soient x , y , z , les projections D_x , D_y , D_z du déplacement infiniment petit de ce point sur les axes du trièdre mobile auront pour expressions

$$(7) \quad \begin{cases} D_x = dx + \sum (\xi_i + q_i z - r_i y) d\rho_i, \\ D_y = dy + \sum (\eta_i + r_i x - p_i z) d\rho_i, \\ D_z = dz + \sum (\zeta_i + p_i y - q_i x) d\rho_i. \end{cases}$$

(1) *Leçons sur la théorie des surfaces* (Livre I, Chap. VI).

Ces expressions sont de la forme

$$(8) \quad \begin{cases} D_x = A d\rho + A_1 d\rho_1 + A_2 d\rho_2, \\ D_y = B d\rho + B_1 d\rho_1 + B_2 d\rho_2, \\ D_z = C d\rho + C_1 d\rho_1 + C_2 d\rho_2, \end{cases}$$

où l'on a

$$(9) \quad \begin{cases} A_i = \frac{\partial x}{\partial \rho_i} + \xi_i + q_i z - r_i y, \\ B_i = \frac{\partial y}{\partial \rho_i} + \eta_i + r_i x - p_i z, \\ C_i = \frac{\partial z}{\partial \rho_i} + \zeta_i + p_i y - q_i x; \end{cases}$$

et il est clair que, si l'on transportait l'origine du trièdre (T) au point considéré, les translations ξ_i , η_i , ζ_i seraient remplacées par A_i , B_i , C_i . Ces nouvelles fonctions doivent donc satisfaire aux mêmes équations aux dérivées partielles que les translations : c'est-à-dire que l'on doit avoir

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{\partial A_i}{\partial \rho_k} - \frac{\partial A_k}{\partial \rho_i} = q_i C_k - q_k C_i - r_i B_k + r_k B_i, \\ \frac{\partial B_i}{\partial \rho_k} - \frac{\partial B_k}{\partial \rho_i} = r_i A_k - r_k A_i - p_i C_k + p_k C_i, \\ \frac{\partial C_i}{\partial \rho_k} - \frac{\partial C_k}{\partial \rho_i} = p_i B_k - p_k B_i - q_i A_k + q_k A_i. \end{cases}$$

Telle est la théorie générale du déplacement d'un trièdre qui dépend de trois variables, théorie entièrement semblable à celle que nous avons développée pour le cas de deux variables, et qui s'appliquerait encore si le mouvement du trièdre dépendait d'un plus grand nombre de variables indépendantes. Voyons comment on peut l'appliquer à la théorie des systèmes triples orthogonaux.

106. Nous désignerons alors par ρ , ρ_1 , ρ_2 les paramètres des trois familles qui composent le système; et, si l'on considère les surfaces des trois familles qui se croisent en un point M de l'espace, nous prendrons le trièdre mobile dont les axes Mx , M_y , Mz sont respectivement normaux aux surfaces de paramètres ρ , ρ_1 et ρ_2 . Alors, six des neuf translations seront nulles. Si l'on fait varier, par exemple, le seul paramètre ρ , la trajectoire sera tan-

gente à l'axe des x du trièdre; on pourra donc poser

$$(11) \quad \xi = H, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0,$$

en désignant par $H d\rho$, conformément aux notations précédentes, le chemin accompli suivant la normale. On aura de même

$$(11)' \quad \begin{cases} \xi_1 = 0, & \eta_1 = H_1, & \zeta_1 = 0, \\ \xi_2 = 0, & \eta_2 = 0, & \zeta_2 = H_2. \end{cases}$$

Si l'on porte ces valeurs des translations dans le groupe (1), on aura un premier système de relations

$$\frac{\partial H}{\partial \rho_1} = -r H_1, \quad \frac{\partial H_1}{\partial \rho} = r_1 H, \quad 0 = p H_1 + q_1 H,$$

d'où les autres se déduiront par des permutations circulaires. Les trois équations

$$0 = p H_1 + q_1 H, \quad 0 = q_1 H_2 + r_2 H_1, \quad 0 = r_2 H + p H_2,$$

déduites de la dernière, nous donnent d'abord

$$(12) \quad p = q_1 = r_2 = 0;$$

les autres relations nous feront connaître les valeurs des différentes rotations; et si l'on pose, conformément à une notation déjà employée,

$$(A) \quad \beta_{ik} = \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_k}{\partial \rho_i}, \quad (i \neq k),$$

on aura

$$(13) \quad \begin{cases} p = 0, & q = \beta_{20}, & r = -\beta_{10}, \\ p_1 = -\beta_{21}, & q_1 = 0, & r_1 = \beta_{01}, \\ p_2 = \beta_{12}, & q_2 = -\beta_{02}, & r_2 = 0. \end{cases}$$

Ce système de formules nous donne la signification géométrique des quantités β_{ik} qui se présentent dans notre première solution : ces quantités sont, au signe près, les six rotations du trièdre (T) qui sont différentes de zéro.

Si l'on porte les valeurs des rotations dans les formules (2), on

obtiendra les neuf relations suivantes :

$$(B) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \beta_{12}}{\partial \rho} = \beta_{10} \beta_{02}, & \frac{\partial \beta_{21}}{\partial \rho} = \beta_{20} \beta_{01}, \\ \frac{\partial \beta_{20}}{\partial \rho_1} = \beta_{21} \beta_{10}, & \frac{\partial \beta_{02}}{\partial \rho_1} = \beta_{01} \beta_{12}, \\ \frac{\partial \beta_{01}}{\partial \rho_2} = \beta_{02} \beta_{21}, & \frac{\partial \beta_{10}}{\partial \rho_2} = \beta_{12} \beta_{20}; \end{array} \right.$$

$$(B') \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \beta_{01}}{\partial \rho} + \frac{\partial \beta_{10}}{\partial \rho_1} + \beta_{20} \beta_{21} = 0, \\ \frac{\partial \beta_{12}}{\partial \rho_1} + \frac{\partial \beta_{21}}{\partial \rho_2} + \beta_{01} \beta_{02} = 0, \\ \frac{\partial \beta_{20}}{\partial \rho_2} + \frac{\partial \beta_{02}}{\partial \rho} + \beta_{10} \beta_{12} = 0, \end{array} \right.$$

qui sont des cas spéciaux des formules (27), (28) établies au Chapitre précédent.

107. Le système (7) nous permet encore d'écrire les projections du déplacement d'un point, projections qui, par application des équations (11) et (13), deviennent ici

$$(C) \quad \left\{ \begin{array}{l} D_x = dx + (H + y \beta_{10} + z \beta_{20}) d\rho - y \beta_{01} d\rho_1 - z \beta_{02} d\rho_2, \\ D_y = dy - x \beta_{10} d\rho + (H_1 + z \beta_{21} + x \beta_{01}) d\rho_1 - z \beta_{12} d\rho_2, \\ D_z = dz - x \beta_{20} d\rho - y \beta_{21} d\rho_1 + (H_2 + x \beta_{02} + y \beta_{12}) d\rho_2. \end{array} \right.$$

Ces formules permettent d'ailleurs de démontrer immédiatement le théorème de Dupin. En effet, un point de la normale à la surface de paramètre ρ est caractérisé par les équations

$$y = 0, \quad z = 0;$$

les projections de son déplacement, lorsque ρ_1 varie seule, sont donc

$$\frac{\partial x}{\partial \rho_1} d\rho_1, \quad (H_1 + x \beta_{01}) d\rho_1, \quad 0.$$

Le plan tangent en tous les points de la surface réglée décrite par la normale est donc le plan des xy ; et, par suite, la normale engendre une surface développable, ce qui est le théorème de Dupin. Mais on voit de plus que le point où elle touche l'arête de rebrousse-

ment est défini en égalant à zéro le second déplacement, ce qui donne

$$x = -\frac{H_1}{\beta_{01}};$$

x est donc, en grandeur et en signe, le rayon de courbure principal de la surface de paramètre ρ , relatif à la ligne de courbure sur laquelle ρ_1 varie seule. Si donc on convient de désigner par R_{ik} le rayon de courbure principal pour la surface de paramètre ρ_i et pour l'arc $H_k d\rho_k$, on aura

$$(14) \quad \begin{cases} R_{01} = -\frac{H_1}{\beta_{01}}, & R_{10} = -\frac{H}{\beta_{10}}, & R_{20} = -\frac{H}{\beta_{20}}, \\ R_{02} = -\frac{H_2}{\beta_{02}}, & R_{12} = -\frac{H_2}{\beta_{12}}, & R_{21} = -\frac{H_1}{\beta_{21}}. \end{cases}$$

Ces expressions sont bien définies en grandeur et en signe; le rayon de courbure est celle des trois coordonnées du centre de courbure correspondant qui n'est pas nulle, ces coordonnées étant relatives au trièdre (T).

108. Le système (3), qui établit les relations différentielles entre les cosinus-directeurs d'une droite fixe relativement au trièdre (T), prend ici la forme

$$(D) \quad \begin{cases} \frac{\partial U_i}{\partial \rho_j} = -U_k \beta_{ki} - U_l \beta_{li}, \\ \frac{\partial U_i}{\partial \rho_k} = \beta_{ik} U_k, \end{cases} \quad (i \neq k \neq l),$$

en parfait accord avec les formules déjà établies (29) (n° 93).

Si l'on prend un point fixe O de l'espace pour sommet d'un trièdre (T') dont les axes soient parallèles à ceux du trièdre (T), les translations de (T') seront nulles, mais ses rotations seront égales à celles du trièdre (T); de sorte que les projections du déplacement d'un point dont les coordonnées relatives à ce trièdre seraient x', y', z' auront pour valeurs

$$(C) \quad \begin{cases} D'_x = dx' + (y' \beta_{10} + z' \beta_{20}) d\rho - y' \beta_{01} d\rho_1 - z' \beta_{02} d\rho_2, \\ D'_y = dy' - x' \beta_{10} d\rho + (x' \beta_{01} + z' \beta_{21}) d\rho_1 - z' \beta_{12} d\rho_2, \\ D'_z = dz' - x' \beta_{20} d\rho - y' \beta_{21} d\rho_1 + (y' \beta_{12} + x' \beta_{02}) d\rho_2. \end{cases}$$

Par exemple, le point de la sphère de centre O et de rayon 1 qui

sert de représentation à la surface de paramètre ρ aura pour coordonnées

$$x' = 1, \quad y' = 0, \quad z' = 0.$$

Les projections de son déplacement sur les axes de l'un quelconque des deux trièdres seront

$$0, \quad -\beta_{10} d\rho + \beta_{01} d\rho_1, \quad -\beta_{20} d\rho + \beta_{02} d\rho_2.$$

Lorsque ρ demeurera constante, elles se réduiront à

$$(15) \quad 0, \quad \beta_{01} d\rho_1, \quad \beta_{02} d\rho_2.$$

Donc la représentation sphérique de la surface de paramètre ρ aura pour élément linéaire

$$d\sigma^2 = \beta_{01}^2 d\rho_1^2 + \beta_{02}^2 d\rho_2^2.$$

En général, l'élément linéaire de la représentation sphérique, pour la surface de paramètre ρ_i , sera donné par la formule

$$(16) \quad d\sigma_i^2 = \beta_{ik}^2 d\rho_k^2 + \beta_{il}^2 d\rho_l^2, \quad (i \neq k \neq l).$$

En exprimant que le déplacement défini par les formules (15) est orthogonal à celui qui s'effectue sur la surface, on aura l'équation différentielle

$$H_1 \beta_{01} d\rho_1^2 + H_2 \beta_{02} d\rho_2^2 = 0$$

des lignes asymptotiques de la surface de paramètre ρ (1). Celles de la surface de paramètre ρ_i seraient de même

$$(17) \quad H_k \beta_{ik} d\rho_k^2 + H_l \beta_{il} d\rho_l^2 = 0.$$

Au reste, il est inutile de poursuivre ces applications; il suffit de remarquer que le trièdre (T) occupe, par rapport aux surfaces de paramètre ρ_2 , exactement la position que nous avons adoptée dans nos *Leçons sur la théorie des surfaces* (2); toutes les formules et tous les résultats que nous avons donnés dans cet Ouvrage seront donc applicables aux surfaces de paramètre ρ_2 ; il suffira ensuite d'effectuer des permutations circulaires, pour les rendre applicables aux surfaces de paramètre ρ ou de paramètre ρ_1 .

(1) *Leçons sur la théorie des surfaces* (I^e Partie, n^o 142).

(2) *Leçons sur la théorie des surfaces* (II^e Partie, Liv. V, Chap. II, Tableau V).

109. Dans ses *Leçons sur les coordonnées curvilignes*, Lamé a remarqué que les équations aux dérivées partielles (B), (B') peuvent être transformées de manière à ne contenir que les rayons de courbure principaux et leurs variations quand on se déplace suivant les directions des lignes de courbure. Voici comment on peut établir ces lois de la variation des courbures.

Désignons avec Lamé par *variation* ou *dérivée* d'une fonction des trois coordonnées x, y, z , relative à une direction donnée, le quotient de l'accroissement infiniment petit que prend la fonction, quand on se déplace suivant cette direction, par le chemin parcouru; et désignons aussi par ds, ds_1, ds_2 les arcs $Hd\rho, H_1 d\rho_1, H_2 d\rho_2$ que l'on décrit lorsqu'on se déplace infiniment peu sur une des lignes d'intersection. Si l'on porte les expressions des quantités β_{ik} , déduites des formules (A), dans les systèmes (B), (B') et si l'on remarque qu'en vertu même des formules (14) et de la définition des β_{ik} , on a

$$(18) \quad \frac{\partial H_i}{\partial \rho_k} = - \frac{H_i H_k}{R_{ki}},$$

on pourra remplacer toutes les dérivées des fonctions H_i par ces expressions en fonction des rayons de courbure, et l'on obtiendra ainsi les relations suivantes :

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \left(\frac{1}{R_{01}} \right)}{\partial s_2} = \frac{1}{R_{21}} \left(\frac{1}{R_{01}} - \frac{1}{R_{02}} \right), & \frac{\partial \left(\frac{1}{R_{10}} \right)}{\partial s_2} = \frac{1}{R_{20}} \left(\frac{1}{R_{10}} - \frac{1}{R_{12}} \right), \\ \frac{\partial \left(\frac{1}{R_{12}} \right)}{\partial s} = \frac{1}{R_{02}} \left(\frac{1}{R_{12}} - \frac{1}{R_{10}} \right), & \frac{\partial \left(\frac{1}{R_{21}} \right)}{\partial s} = \frac{1}{R_{01}} \left(\frac{1}{R_{21}} - \frac{1}{R_{20}} \right), \\ \frac{\partial \left(\frac{1}{R_{20}} \right)}{\partial s_1} = \frac{1}{R_{10}} \left(\frac{1}{R_{20}} - \frac{1}{R_{21}} \right), & \frac{\partial \left(\frac{1}{R_{02}} \right)}{\partial s_1} = \frac{1}{R_{12}} \left(\frac{1}{R_{02}} - \frac{1}{R_{01}} \right); \end{array} \right.$$

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{R_{01}} \right) + \frac{\partial}{\partial s_1} \left(\frac{1}{R_{10}} \right) = \frac{1}{R_{01}^2} + \frac{1}{R_{10}^2} + \frac{1}{R_{20} R_{21}}, \\ \frac{\partial}{\partial s_1} \left(\frac{1}{R_{12}} \right) + \frac{\partial}{\partial s_2} \left(\frac{1}{R_{21}} \right) = \frac{1}{R_{12}^2} + \frac{1}{R_{21}^2} + \frac{1}{R_{01} R_{02}}, \\ \frac{\partial}{\partial s_2} \left(\frac{1}{R_{20}} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{R_{02}} \right) = \frac{1}{R_{20}^2} + \frac{1}{R_{02}^2} + \frac{1}{R_{10} R_{12}}, \end{array} \right.$$

qui ont été données par Lamé (1) et où la notation $\frac{\partial}{\partial s_i}$ désigne une dérivée relative à la direction de l'arc ds_i .

110. On sait comment Lamé a rattaché à cette notion de la dérivée prise dans différentes directions la définition du paramètre différentiel du premier ordre. Étant donnée une fonction U des trois coordonnées x, y, z , la dérivée de U relative à une direction quelconque est la projection, sur cette direction, d'une grandeur géométrique qui est dirigée suivant la normale à la surface $U = \text{const.}$ et est égale à la dérivée $\frac{\partial U}{\partial n}$ suivant cette normale. Il résulte immédiatement de là que si l'on porte, suivant trois directions rectangulaires quelconques, des longueurs égales aux dérivées prises suivant ces directions, la résultante de ces trois segments est le segment $\frac{\partial U}{\partial n}$ porté sur la normale à la surface $U = \text{const.}$ et, par suite, que la somme des carrés de ces trois longueurs est constante et égale au carré de $\frac{\partial U}{\partial n}$. C'est cette somme des carrés à laquelle Lamé a donné le nom de *paramètre différentiel du premier ordre*, en le désignant par ΔU . Si l'on applique la propriété que nous venons de rappeler, on voit que l'on aura, en coordonnées rectangulaires,

$$(21) \quad \Delta U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2,$$

et en coordonnées curvilignes,

$$(22) \quad \Delta U = \frac{1}{H^2} \left(\frac{\partial U}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{H_1^2} \left(\frac{\partial U}{\partial \rho_1}\right)^2 + \frac{1}{H_2^2} \left(\frac{\partial U}{\partial \rho_2}\right)^2,$$

les trois termes représentant les dérivées prises suivant les trois lignes d'intersection.

L'invariant différentiel précédent est relatif à une seule fonction, mais il est aisé d'en déduire un autre relatif à deux fonctions distinctes U et V . A cet effet, il suffira de remplacer, dans les deux expressions précédentes de ΔU , U par $U + \lambda V$, λ désignant

(1) LAMÉ, *Leçons sur les coordonnées curvilignes*, p. 79 et suiv.

une constante, et d'égaliser les coefficients de λ dans ces deux expressions. On est ainsi conduit à un nouvel invariant simultané $\Delta(U, V)$, défini par la double expression

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta(U, V) &= \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} \\ &= \frac{1}{H^2} \frac{\partial U}{\partial \rho} \frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{1}{H_1^2} \frac{\partial U}{\partial \rho_1} \frac{\partial V}{\partial \rho_1} + \frac{1}{H_2^2} \frac{\partial U}{\partial \rho_2} \frac{\partial V}{\partial \rho_2}. \end{aligned} \right.$$

On reconnaît presque immédiatement qu'il a pour expression géométrique

$$(24) \quad \Delta(U, V) = \frac{\partial U}{\partial n} \frac{\partial V}{\partial n'} \cos(\widehat{nn'}),$$

$\frac{\partial U}{\partial n}$, $\frac{\partial V}{\partial n'}$ désignant, pour chaque point de l'espace, les dérivées de U et de V prises respectivement suivant les normales aux surfaces $U = \text{const.}$, $V = \text{const.}$, et $\widehat{nn'}$ désignant l'angle de ces deux normales.

111. L'invariant ΔU ne contient que les dérivées premières de U ; il y en a d'autres qui contiennent les dérivées du second ordre. Nous allons définir d'abord le plus important, celui qui est linéaire par rapport aux dérivées de la fonction U . A cet effet, nous établirons d'abord une formule générale, analogue à l'équation de Stokes et de C. Neumann.

Étant donné un système de coordonnées curvilignes orthogonales, considérons une portion de l'espace assez petite pour que les surfaces coordonnées y forment un réseau tout pareil à celui qui est constitué par un système de plans rectangulaires; de telle manière que l'un des réseaux puisse se déduire de l'autre par une déformation dans laquelle les longueurs seront altérées, sans que la situation relative des parties soit changée. A l'intérieur de la portion de l'espace ainsi constituée, imaginons une surface fermée quelconque (Σ); et, bien que cela ne soit pas nécessaire, supposons, pour plus de simplicité, que cette surface (Σ) soit rencontrée en deux points seulement par les lignes d'intersection des surfaces coordonnées. Cela posé, considérons l'intégrale triple

$$J = \iiint \left(\frac{\partial A}{\partial \rho} + \frac{\partial B}{\partial \rho_1} + \frac{\partial C}{\partial \rho_2} \right) d\rho \, d\rho_1 \, d\rho_2,$$

où A, B, C désignent trois fonctions quelconques, et qui est étendue à tout l'espace intérieur à (Σ). On peut la transformer comme il suit :

Considérons son premier terme seulement

$$\iiint \frac{\partial A}{\partial \rho} d\rho d\rho_1 d\rho_2,$$

et intégrons par rapport à ρ . Il résulte des hypothèses faites que toute ligne d'intersection des surfaces de paramètres ρ_1 et ρ_2 coupe la surface (Σ) en deux points seulement; que, sur cette ligne, ρ ne cesse de varier dans le même sens. On a donc

$$\int \frac{\partial A}{\partial \rho} d\rho = A'' - A',$$

A' et A'' désignant les valeurs de A pour les deux points M' , M'' où la ligne suivant laquelle on intègre coupe (Σ). On déduit de là

$$\iiint \frac{\partial A}{\partial \rho} d\rho d\rho_1 d\rho_2 = \iint d\rho_1 d\rho_2 (A'' - A').$$

Mais on peut remarquer que si l'on désigne par α l'angle que fait la normale *extérieure* à la surface (Σ) avec la normale à la surface coordonnée de paramètre ρ , on a, au point M' ,

$$H_1 H_2 d\rho_1 d\rho_2 = d\sigma \cos \alpha,$$

et au point M'' ,

$$H_1 H_2 d\rho_1 d\rho_2 = -d\sigma \cos \alpha,$$

$d\sigma$ désignant l'élément de la surface (Σ). On peut donc écrire

$$\iiint \frac{\partial A}{\partial \rho} d\rho d\rho_1 d\rho_2 = \iint \frac{A}{H_1 H_2} \cos \alpha d\sigma,$$

la seconde intégrale étant étendue à toute la surface (Σ).

En appliquant des transformations analogues au second et au troisième terme de l'intégrale J, on obtient la formule générale

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} & \iiint \left(\frac{\partial A}{\partial \rho} + \frac{\partial B}{\partial \rho_1} + \frac{\partial C}{\partial \rho_1} \right) d\rho d\rho_1 d\rho_2 \\ & = \iint \left(\frac{A}{H_1 H_2} \cos \alpha + \frac{B}{H H_2} \cos \beta + \frac{C}{H H_1} \cos \gamma \right) d\sigma, \end{aligned} \right.$$

où α, β, γ désignent les angles de la normale extérieure à (Σ) avec les normales aux surfaces coordonnées. Si ρ, ρ_1, ρ_2 se réduisent aux coordonnées rectilignes rectangulaires, on retrouve la formule de Stokes et de C. Neumann.

Pour appliquer la formule précédente, introduisons deux fonctions arbitraires U et V et adoptons les valeurs suivantes de A, B, C ,

$$A = V \frac{H_1 H_2}{H} \frac{\partial U}{\partial \rho}, \quad B = V \frac{H H_2}{H_1} \frac{\partial U}{\partial \rho_1}, \quad C = V \frac{H H_1}{H_2} \frac{\partial U}{\partial \rho_2}.$$

L'intégrale triple contenue dans la formule (25) prendra la forme suivante :

Si l'on pose

$$(26) \quad \Delta_2 U = \frac{1}{H H_1 H_2} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{H_1 H_2}{H} \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\frac{H H_2}{H_1} \frac{\partial U}{\partial \rho_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left(\frac{H H_1}{H_2} \frac{\partial U}{\partial \rho_2} \right) \right],$$

elle deviendra

$$\iiint [\Delta(U, V) + V \Delta_2 U] H H_1 H_2 d\rho d\rho_1 d\rho_2.$$

Quant à l'intégrale double, elle sera

$$\iint \left(\frac{\partial U}{H \partial \rho} \cos \alpha + \frac{\partial U}{H_1 \partial \rho_1} \cos \beta + \frac{\partial U}{H_2 \partial \rho_2} \cos \gamma \right) V d\sigma.$$

La quantité qui multiplie $V d\sigma$ est évidemment la somme des projections des dérivées de U relatives à trois directions rectangulaires (les normales aux surfaces coordonnées) sur la normale extérieure à la surface (Σ) . C'est donc la dérivée $\frac{\partial U}{\partial n}$ de U relative à cette normale extérieure, et l'intégrale double précédente peut ainsi s'écrire

$$\iint V \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma.$$

Si l'on remarque enfin que

$$H H_1 H_2 d\rho d\rho_1 d\rho_2$$

est l'élément de volume dm de l'espace, on verra que la formule

de Stokes et de Neumann nous donne ici

$$(27) \quad \iint \int \Delta(U, V) dm + \iint \int V \Delta_2 U dm = \iint \int V \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma.$$

Tous les termes, sauf celui qui contient $\Delta_2 U$, ont une signification géométrique indépendante du choix des coordonnées, nous l'avons établi. Il doit donc en être de même pour $\Delta_2 U$. Il est ainsi démontré que cette fonction, définie par la formule (26), est un invariant.

Si l'on prend les coordonnées rectilignes, on a

$$\Delta_2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

112. On est encore conduit à l'invariant linéaire du second ordre par une autre méthode que nous allons exposer.

Considérons une transformation ponctuelle définie par les formules

$$(28) \quad X = f(x, y, z), \quad Y = f_1(x, y, z), \quad Z = f_2(x, y, z),$$

où X, Y, Z, x, y, z désignent les coordonnées rectangulaires des deux points qui se correspondent, points que nous désignerons par M et m . Aux différentielles dx, dy, dz des coordonnées de m correspondent des valeurs des différentielles dX, dY, dZ définies par les formules

$$(29) \quad \begin{cases} dX = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz, \\ dY = \frac{\partial f_1}{\partial x} dx + \frac{\partial f_1}{\partial y} dy + \frac{\partial f_1}{\partial z} dz, \\ dZ = \frac{\partial f_2}{\partial x} dx + \frac{\partial f_2}{\partial y} dy + \frac{\partial f_2}{\partial z} dz, \end{cases}$$

qui peuvent être considérées comme établissant la correspondance entre deux points m', M' , respectivement voisins de m et de M . Cette correspondance est une transformation homographique, dans laquelle les points à l'infini auraient pour homologues des points à l'infini et dont l'étude permet de diviser en deux classes les différentes transformations. L'homographie définie par les

formules (29) résulte, en effet, de l'addition ou de la composition des deux autres, définies par les formules suivantes :

$$(30) \quad \begin{cases} dX = a_{11} dx + a_{12} dy + a_{13} dz, \\ dY = a_{21} dx + a_{22} dy + a_{23} dz, \\ dZ = a_{31} dx + a_{32} dy + a_{33} dz; \end{cases}$$

$$(31) \quad \begin{cases} dX = b_1 dz - b_2 dy, \\ dY = b_2 dx - b dz, \\ dZ = b dy - b_1 dx, \end{cases}$$

où l'on a posé

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{lll} a_{11} = \frac{\partial f}{\partial x}, & a_{22} = \frac{\partial f_1}{\partial y}, & a_{33} = \frac{\partial f_2}{\partial z}, \\ a_{12} = a_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial x} \right), & a_{23} = a_{32} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \right), & a_{13} = a_{31} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f_2}{\partial x} \right), \\ b = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial f_1}{\partial z} \right), & b_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f_2}{\partial x} \right), & b_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right), \end{array} \right.$$

et qui, toutes deux, conservent leur forme lorsqu'on fait un changement d'axes coordonnés. La seconde disparaîtra lorsqu'on aura

$$b_1 = b_2 = b_3 = 0,$$

c'est-à-dire lorsque f, f_1, f_2 seront les dérivées, prises respectivement par rapport à x, y, z , d'une même fonction. Ainsi, les transformations définies par des formules telles que les suivantes

$$(33) \quad X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z},$$

forment un groupe spécial, se séparant nettement par des propriétés qui ne dépendent nullement du choix des axes coordonnés rectangulaires. On les retrouve encore en étudiant le problème suivant.

113. Puisque les formules (29) établissent une relation homographique entre les directions des déplacements correspondants des points M et m , on peut prévoir qu'il y aura, en général, trois déplacements du point m à chacun desquels correspondra un déplacement parallèle du point M . C'est ce que confirme le calcul

suisant : si l'on pose

$$\frac{dX}{dx} = \frac{dY}{dy} = \frac{dZ}{dz} = \lambda,$$

on devra avoir, en remplaçant dX , dY , dZ par leurs valeurs,

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \right) dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0, \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} dx + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} - \lambda \right) dy + \frac{\partial f_1}{\partial z} dz = 0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} dx + \frac{\partial f_2}{\partial y} dy + \left(\frac{\partial f_2}{\partial z} - \lambda \right) dz = 0. \end{array} \right.$$

L'élimination de dx , dy , dz entre ces trois équations conduira bien à une équation du troisième ordre en λ . À chacune des racines de cette équation correspondra, en général, une seule direction.

Proposons-nous de rechercher toutes les transformations pour lesquelles les trois déplacements précédents sont deux à deux rectangulaires. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que, si d et δ désignent les différentielles relatives à deux de ces déplacements, on ait

$$dx \delta x + dy \delta y + dz \delta z = 0.$$

Joignons à cette équation les suivantes :

$$\begin{array}{lll} \lambda dx = df, & \lambda dy = df_1, & \lambda dz = df_2, \\ \lambda' \delta x = \delta f, & \lambda' \delta y = \delta f_1, & \lambda' \delta z = \delta f_2, \end{array}$$

d'où l'on déduira l'identité

$$\begin{aligned} & (\lambda - \lambda')(dx \delta x + dy \delta y + dz \delta z) \\ & = df \delta x - \delta f dx + df_1 \delta y - \delta f_1 dy + df_2 \delta z - \delta f_2 dz, \end{aligned}$$

qui conduira à l'équation

$$df \delta x - \delta f dx + df_1 \delta y - \delta f_1 dy + df_2 \delta z - \delta f_2 dz = 0,$$

ou encore

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f_1}{\partial x} \right) (dx \delta y - dy \delta x) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) (dy \delta z - dz \delta y) \\ & + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial z} \right) (dz \delta x - dx \delta z) = 0. \end{aligned}$$

Si l'on désigne par le symbole δ' la différentielle relative au troisième déplacement, qui doit être rectangulaire aux deux premiers, l'équation précédente peut s'écrire

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_2}{\partial y}\right) \delta'x + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial z}\right) \delta'y + \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f_1}{\partial x}\right) \delta'z = 0.$$

Comme elle doit être vérifiée pour les trois déplacements rectangulaires, il faut nécessairement que l'on ait

$$\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f_1}{\partial x} = 0,$$

c'est-à-dire que la transformation soit définie par les formules suivantes :

$$(35) \quad X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z},$$

où U désignera une fonction quelconque de x, y, z .

Les trois dérivées $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$ ou, plus simplement, U_1, U_2, U_3 sont évidemment les composantes de la grandeur $\frac{\partial U}{\partial n}$ dirigée suivant la normale à la surface (U) définie par l'équation $U = \text{const.}$ Cette remarque donne l'interprétation géométrique de la transformation à laquelle nous sommes conduits : le rayon vecteur OM représente, *en grandeur et en sens*, la dérivée de U suivant la normale à la surface qui passe au point correspondant m et pour laquelle U conserve une valeur constante.

On voit quel intérêt il peut y avoir, soit en Géométrie, soit en Physique mathématique, à associer à l'étude d'une fonction U des trois variables x, y, z celle de la transformation qui lui correspond et qui est définie par les formules précédentes (35). Sans entrer dans cette étude détaillée, nous allons montrer comment on peut obtenir l'invariant linéaire et deux autres invariants du second ordre.

Il suffit, pour cela, de former l'équation en λ qui prend ici la forme

$$(36) \quad \begin{vmatrix} U_{11} - \lambda & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} - \lambda & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

et dont les racines sont évidemment des invariants. En prenant leur somme, on retrouve l'invariant linéaire de Lamé

$$\Delta_2 U = U_{11} + U_{22} + U_{33};$$

mais il y en a encore deux autres, formés par la somme des produits deux à deux ou par le produit des trois racines et qui sont respectivement du second et du troisième degré par rapport aux dérivées secondes.

Ces invariants peuvent être tous formés en coordonnées curvilignes orthogonales.

Si l'on rapporte, en effet, les points m de l'espace à un système de coordonnées curvilignes ρ , ρ_1 , ρ_2 , la grandeur géométrique OM a pour composantes relatives aux axes du trièdre (T) les dérivées de la fonction U suivant ces trois axes, c'est-à-dire les quantités

$$(37) \quad x = \frac{1}{H} \frac{\partial U}{\partial \rho}, \quad y = \frac{1}{H_1} \frac{\partial U}{\partial \rho_1}, \quad z = \frac{1}{H_2} \frac{\partial U}{\partial \rho_2},$$

U étant exprimée en fonction de ρ , ρ_1 , ρ_2 . Si donc on construit le trièdre (T') dont l'origine est le point fixe O et dont les axes sont parallèles à ceux de (T), les valeurs de x , y , z données par les formules précédentes seront les coordonnées du point M relatives à ce trièdre (T').

Par suite, lorsque ρ , ρ_1 , ρ_2 varieront, les projections du déplacement de M sur les axes du trièdre (T') ou du trièdre parallèle (T), seront définies par les formules (C'), déjà données au n° 108,

$$(38) \quad \begin{cases} D_x = dx + (\beta_{10}y + \beta_{20}z) d\rho - y\beta_{01} d\rho_1 - z\beta_{02} d\rho_2, \\ D_y = dy - x\beta_{10} d\rho + (\beta_{21}z + \beta_{01}x) d\rho_1 - z\beta_{12} d\rho_2, \\ D_z = dz - x\beta_{20} d\rho - y\beta_{21} d\rho_1 + (x\beta_{02} + y\beta_{12}) d\rho_2. \end{cases}$$

En exprimant qu'elles sont proportionnelles aux projections

$$H d\rho, \quad H_1 d\rho_1, \quad H_2 d\rho_2$$

du déplacement du sommet m du trièdre (T), on aura l'équivalent des équations (34), c'est-à-dire

$$(39) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial x}{\partial \rho} + \beta_{10}y + \beta_{20}z - \lambda H \right) d\rho + \left(\frac{\partial x}{\partial \rho_1} - y\beta_{01} \right) d\rho_1 + \left(\frac{\partial x}{\partial \rho_2} - z\beta_{02} \right) d\rho_2 = 0, \\ \left(\frac{\partial y}{\partial \rho} - x\beta_{10} \right) d\rho + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho_1} + \beta_{21}z + \beta_{01}x - \lambda H_1 \right) d\rho_1 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho_2} - z\beta_{12} \right) d\rho_2 = 0, \\ \left(\frac{\partial z}{\partial \rho} - x\beta_{20} \right) d\rho + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho_1} - y\beta_{21} \right) d\rho_1 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho_2} + \beta_{02}x + \beta_{12}y - \lambda H_2 \right) d\rho_2 = 0. \end{cases}$$

En éliminant $d\rho$, $d\rho_1$, $d\rho_2$, on retrouve l'équation (36) en λ dont les racines sont des invariants. On pourra donc retrouver l'expression en coordonnées curvilignes des trois invariants définis plus haut.

En particulier, si l'on prend la somme des racines, qui doit être $\Delta_2 U$, on trouvera

$$\begin{aligned} \Delta_2 U = \frac{1}{H} \left(\frac{\partial x}{\partial \rho} + \beta_{10} \gamma + \beta_{20} z \right) + \frac{1}{H_1} \left(\frac{\partial y}{\partial \rho_1} + \beta_{21} z + \beta_{01} x \right) \\ + \frac{1}{H_2} \left(\frac{\partial z}{\partial \rho_2} + \beta_{02} x + \beta_{12} \gamma \right), \end{aligned}$$

et un calcul facile, où l'on remplacera les β_{ik} et les x , y , z par leurs valeurs (A) et (37), donnera immédiatement l'expression déjà obtenue plus haut.

114. Les formules précédentes nous permettent encore de résoudre une question intéressante relative aux transformations définies par les formules (35).

Nous avons vu que, pour chaque point m , les trois déplacements qui sont parallèles aux déplacements correspondants de M sont rectangulaires. Mais on peut demander, de plus, que ces trois déplacements s'effectuent suivant les normales à trois familles de surfaces orthogonales données. Cette question peut se résoudre comme il suit :

Rapportons les points de l'espace au système de coordonnées curvilignes déterminé par les surfaces normales aux trois déplacements et cherchons à déterminer U en fonction de ρ , ρ_1 , ρ_2 . Les équations (39) devront être vérifiées lorsqu'on y annulera deux des différentielles $d\rho$, $d\rho_1$, $d\rho_2$.

Cela donnera les équations

$$(40) \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \rho_1} - \gamma \beta_{01} = 0, & \frac{\partial y}{\partial \rho} - x \beta_{10} = 0, & \frac{\partial z}{\partial \rho} - x \beta_{20} = 0, \\ \frac{\partial x}{\partial \rho_2} - z \beta_{02} = 0, & \frac{\partial y}{\partial \rho_2} - z \beta_{12} = 0, & \frac{\partial z}{\partial \rho_1} - \gamma \beta_{21} = 0, \end{cases}$$

auxquelles devra satisfaire U. Si l'on y remplace x , y , z par leurs

expressions, elles se réduisent aux trois suivantes :

$$(E) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 U}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \rho_2} \frac{\partial U}{\partial \rho_1} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \rho_1} \frac{\partial U}{\partial \rho_2} = 0, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \rho \partial \rho_2} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \rho} \frac{\partial U}{\partial \rho_2} - \frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial \rho_2} \frac{\partial U}{\partial \rho} = 0, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \rho \partial \rho_1} - \frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial \rho_1} \frac{\partial U}{\partial \rho} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \rho} \frac{\partial U}{\partial \rho_1} = 0, \end{array} \right.$$

que nous rencontrerons plus loin. Contentons-nous de rappeler maintenant qu'elles admettent une solution dépendant de trois fonctions arbitraires d'une variable (1). Il y a donc toujours une infinité de transformations jouissant de la propriété requise, relativement à tout système triple orthogonal.

115. Nous allons terminer ce Chapitre en donnant à la fois une nouvelle application et un complément de la théorie du déplacement d'un trièdre mobile qui dépend de trois variables. Nous montrerons que cette théorie permet d'étendre aux coordonnées curvilignes obliques les systèmes (B) et (B') de formules que l'on doit à Lamé.

Considérons trois familles de surfaces définies respectivement par les paramètres ρ , ρ_1 , ρ_2 . Si ces trois paramètres ne sont assujettis à aucune condition, ils peuvent être considérés comme des coordonnées curvilignes, aussi générales que possible, qu'il pourra y avoir avantage à introduire dans certaines recherches.

En chaque point M de l'espace, faisons passer trois droites rectangulaires formant un trièdre trirectangle (T), dont la position relativement aux plans tangents des trois surfaces coordonnées qui se croisent en ce point sera définie d'une manière arbitraire. Par exemple, l'une des arêtes du trièdre pourra être tangente à l'intersection de deux surfaces coordonnées, et l'une des faces qui passent par cette arête sera tangente à l'une des deux surfaces auxquelles l'arête est tangente. En général, la position du trièdre trirectangle relativement au trièdre formé par les plans tangents aux surfaces coordonnées dépend de trois paramètres pour lesquels

(1) *Leçons sur la théorie des surfaces* (IV^e Partie, Livre VIII, Chap. XII).

on pourra choisir des valeurs qui seront des fonctions quelconques des coordonnées curvilignes. Dans le cas des coordonnées rectangulaires, nous avons supposé que les deux trièdres coïncidaient. Cette hypothèse ne saurait être introduite dans le cas général; mais on peut toujours supposer, par exemple, que les arêtes du trièdre (T) ont été choisies parallèles à trois droites fixes, de sorte que le trièdre n'aurait alors aucune rotation.

Conservons les notations précédentes et désignons par ds l'élément linéaire de l'espace, c'est-à-dire l'arc décrit par le sommet du trièdre (T) lorsque ρ , ρ_1 , ρ_2 varient et deviennent respectivement $\rho + d\rho$, $\rho_1 + d\rho_1$, $\rho_2 + d\rho_2$; on aura

$$(41) \quad \left\{ \begin{aligned} ds^2 &= (\xi d\rho + \xi_1 d\rho_1 + \xi_2 d\rho_2)^2 \\ &\quad + (\eta d\rho + \eta_1 d\rho_1 + \eta_2 d\rho_2)^2 + (\zeta d\rho + \zeta_1 d\rho_1 + \zeta_2 d\rho_2)^2, \end{aligned} \right.$$

et si l'on pose

$$(42) \quad ds^2 = \sum_i \sum_k A_{ik} d\rho_i d\rho_k,$$

il viendra

$$(43) \quad A_{ik} = \xi_i \xi_k + \eta_i \eta_k + \zeta_i \zeta_k = \sum \xi_i \xi_k.$$

Nous allons montrer que les quantités A_{ik} satisfont à des équations aux dérivées partielles du second ordre analogues aux équations (B) et (B').

A cet effet, nous remarquerons que le système (1), où l'on donnera à i et à k toutes les valeurs possibles, nous fournit neuf équations du premier degré, d'où l'on pourra déduire les valeurs des neuf rotations p_i, q_i, r_i exprimées en fonction des translations. Si l'on porte les expressions ainsi obtenues des rotations dans les formules (2), on aura neuf équations du second ordre auxquelles devront satisfaire les translations. Ces équations du second ordre, dont le nombre se réduira à six, nous le verrons, ne se présenteraient pas dans le cas où le déplacement dépendait de deux variables seulement. C'est grâce à elles que la théorie relative aux déplacements qui dépendent de trois variables présente quelque intérêt nouveau. Nous allons d'abord montrer qu'elles peuvent nous fournir les relations différentielles entre les coefficients de

la forme quadratique (42), relations que nous avons principalement en vue (1).

Supposons, par exemple, que le trièdre (T) ait été choisi de telle manière que son axe des x soit tangent à l'intersection des surfaces de paramètres ρ_1 et ρ_2 et que son axe des y soit normal à la surface de paramètre ρ_1 . On aura alors

$$\eta_1 = 0, \quad \zeta = 0, \quad \eta_2 = 0.$$

Les équations de définition (43) donneront toutes les autres translations exprimées en fonction des coefficients de l'élément linéaire. On aura, par exemple,

$$\begin{aligned} \xi^2 &= A_{00}, & \xi\xi_1 &= A_{01}, & \xi\xi_2 &= A_{02}, \\ \xi_2^2 + \zeta_2^2 &= A_{22}, & \dots & & & \end{aligned}$$

et ainsi de suite. On tirera de là

$$(44) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = \sqrt{A_{00}}, \quad \xi_1 = \frac{A_{01}}{\sqrt{A_{00}}}, \quad \xi_2 = \frac{A_{02}}{\sqrt{A_{00}}}; \\ \eta = 0, \quad \eta_1 = \frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{A_{22}A_{00} - A_{02}^2}}, \quad \eta_2 = 0; \\ \zeta = 0, \quad \zeta_1 = \frac{A_{12}A_{00} - A_{01}A_{02}}{\sqrt{A_{00}}\sqrt{A_{22}A_{00} - A_{02}^2}}, \quad \zeta_2 = \frac{\sqrt{A_{22}A_{00} - A_{02}^2}}{\sqrt{A_{00}}}, \end{array} \right.$$

Δ désignant le déterminant

$$(45) \quad \Delta = \begin{vmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}.$$

On pourrait donc utiliser les valeurs précédentes (44) des translations, et en les portant dans les relations différentielles du second ordre dont nous avons signalé l'existence et indiqué plus haut le mode de formation, on aurait toutes les relations différentielles qui doivent exister entre les quantités A_{ik} .

(1) On sait que la théorie des formes quadratiques de différentielles, sur laquelle nous avons l'intention de revenir, pour lui donner tous les développements qu'elle comporte, a été inaugurée par les travaux de MM. Christoffel et Lipschitz parus à la suite l'un de l'autre, en 1869, dans le Tome LXX du *Journal de Crelle*.

Le calcul que nous venons d'indiquer serait dépourvu d'élégance et de symétrie ; on peut l'éviter comme il suit.

116. Désignons par δ le déterminant

$$(46) \quad \delta = \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \end{vmatrix},$$

qui, par l'emploi des relations (43), conduit presque immédiatement à la formule

$$(47) \quad \delta^2 = \Delta,$$

et introduisons les neuf quantités A_{ikl} définies par les formules

$$(48) \quad A_{ikl} = \sum \xi_i \frac{\partial \xi_i}{\partial \rho_l} = \xi_i \frac{\partial \xi_i}{\partial \rho_l} + \eta_i \frac{\partial \eta_i}{\partial \rho_l} + \zeta_i \frac{\partial \zeta_i}{\partial \rho_l}.$$

Nous allons chercher d'abord les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il soit possible de tirer des équations (43) et (48), où l'on regardera comme connues toutes les fonctions A_{ik} , A_{ikl} , au moins un système de valeurs des fonctions ξ_i , η_i , ζ_i .

En différentiant l'équation (43), on obtiendra immédiatement la condition

$$(49) \quad \frac{\partial A_{ik}}{\partial \rho_l} = A_{ikl} + A_{kil},$$

où les indices i , k , l peuvent recevoir toutes les valeurs possibles. Ce premier système de formules est nécessaire, mais il n'est pas suffisant. Il exprime simplement, en effet, que les équations obtenues en joignant au système (48) les équations dérivées du système (43) sont algébriquement compatibles et ne fournissent qu'un système de valeurs pour les dérivées $\frac{\partial \xi_i}{\partial \rho_l}$, $\frac{\partial \eta_i}{\partial \rho_l}$, $\frac{\partial \zeta_i}{\partial \rho_l}$.

Pour obtenir les valeurs de ces dérivées, on peut résoudre les trois équations qui définissent A_{0kl} , A_{1kl} , A_{2kl} et l'on sera conduit au système suivant :

$$(50) \quad \begin{cases} \delta \frac{\partial \xi_i}{\partial \rho_l} = A_{0kl} \frac{\partial \delta}{\partial \xi_i} + A_{1kl} \frac{\partial \delta}{\partial \xi_1} + A_{2kl} \frac{\partial \delta}{\partial \xi_2}, \\ \delta \frac{\partial \eta_i}{\partial \rho_l} = A_{0kl} \frac{\partial \delta}{\partial \eta_i} + A_{1kl} \frac{\partial \delta}{\partial \eta_1} + A_{2kl} \frac{\partial \delta}{\partial \eta_2}, \\ \delta \frac{\partial \zeta_i}{\partial \rho_l} = A_{0kl} \frac{\partial \delta}{\partial \zeta_i} + A_{1kl} \frac{\partial \delta}{\partial \zeta_1} + A_{2kl} \frac{\partial \delta}{\partial \zeta_2}; \end{cases}$$

d'où l'on déduira, par un calcul facile, la relation

$$(51) \quad \left(\begin{array}{l} \Delta \sum \frac{\partial \xi_k}{\partial \rho_l} \frac{\partial \xi_{k'}}{\partial \rho_{l'}} \\ = \Delta \left(\frac{\partial \xi_k}{\partial \rho_l} \frac{\partial \xi_{k'}}{\partial \rho_{l'}} + \frac{\partial \eta_k}{\partial \rho_l} \frac{\partial \eta_{k'}}{\partial \rho_{l'}} + \frac{\partial \zeta_k}{\partial \rho_l} \frac{\partial \zeta_{k'}}{\partial \rho_{l'}} \right) = \sum_h \sum_{h'} \Delta_{hkl} \Delta_{h'k'l'} \Delta_{hh'}, \end{array} \right.$$

la somme du dernier membre étant étendue aux valeurs 0, 1, 2 des deux indices h, h' , et $\Delta_{hh'}$ désignant le mineur qui est le coefficient de $\Delta_{hh'}$ dans le déterminant Δ .

Cela posé, en différenciant les équations (48), nous serons conduits sans difficulté à la formule suivante :

$$(52) \quad \frac{\partial \Delta_{ikl}}{\partial \rho_{l'}} - \frac{\partial \Delta_{lkl'}}{\partial \rho_l} = \sum \frac{\partial \xi_i}{\partial \rho_{l'}} \frac{\partial \zeta_k}{\partial \rho_l} - \sum \frac{\partial \xi_i}{\partial \rho_l} \frac{\partial \zeta_k}{\partial \rho_{l'}}$$

où les indices i, k, l, l' peuvent prendre toutes les valeurs possibles; et il est clair que toutes les équations ainsi obtenues tiennent lieu de celles que l'on obtiendrait si l'on égalait les deux valeurs distinctes des dérivées telles que $\frac{\partial^2 \xi_k}{\partial \rho_l \partial \rho_{l'}}$, $\frac{\partial^2 \eta_k}{\partial \rho_l \partial \rho_{l'}}$, $\frac{\partial^2 \zeta_k}{\partial \rho_l \partial \rho_{l'}}$, que peuvent fournir, par différenciations, les formules (50).

On peut évidemment, soit à l'aide des formules (50), soit plus simplement à l'aide de la relation générale (51), éliminer de la relation précédente toutes les dérivées premières des fonctions ξ_i, η_i, ζ_i , et l'on se trouve ainsi conduit aux équations fondamentales comprises dans le type suivant :

$$(53) \quad \frac{\partial \Delta_{ikl}}{\partial \rho_{l'}} - \frac{\partial \Delta_{lkl'}}{\partial \rho_l} = \sum_h \sum_{h'} (\Delta_{hil'} \Delta_{h'kl} - \Delta_{hil} \Delta_{h'kl'}) \frac{\Delta_{hh'}}{\Delta},$$

qui, d'après les raisonnements précédents, constituent, avec les relations (49), les conditions, à la fois nécessaires et suffisantes, pour qu'il y ait des fonctions ξ_i, η_i, ζ_i vérifiant, à la fois, les équations (43) et (48), où l'on considérera les Δ_{ik} et les Δ_{ikl} comme des fonctions données et connues. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Étant donnée une forme quadratique de différentielles

$$ds^2 = \sum \sum \Delta_{ik} d\rho_i d\rho_k,$$

si l'on a déterminé les valeurs les plus générales des fonctions A_{ikl} vérifiant les relations (49) et (53), l'intégration du système complet fourni par les équations (43) et (48) fournira tous les systèmes de valeurs des fonctions ξ_i, η_i, ζ_i permettant de décomposer la forme en trois carrés, de telle manière que l'on ait

$$ds^2 = (\xi d\rho + \xi_1 d\rho_1 + \xi_2 d\rho_2)^2 \\ + (\eta d\rho + \eta_1 d\rho_1 + \eta_2 d\rho_2)^2 + (\zeta d\rho + \zeta_1 d\rho_1 + \zeta_2 d\rho_2)^2.$$

Il est évident que ce théorème purement analytique s'étend de lui-même au cas de n variables, et, de plus, que les différentes décompositions en carrés de la forme qui répondent au même système de valeurs des A_{ikl} , mais à des solutions différentes des équations (43) et (48), se déduisent les unes des autres par des substitutions linéaires orthogonales à coefficients constants.

117. Supposons maintenant que la forme quadratique considérée soit l'élément linéaire de l'espace. On pourra la ramener à la forme

$$dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

et il y aura une de ses décompositions en carrés (1) pour laquelle on pourra prendre

$$(54) \quad \xi_k = \frac{\partial x}{\partial \rho_k}, \quad \eta_k = \frac{\partial y}{\partial \rho_k}, \quad \zeta_k = \frac{\partial z}{\partial \rho_k}.$$

On peut alors calculer très simplement les quantités A_{ikl} ; on a, dans ce cas

$$(55) \quad A_{iil} = A_{ilk} = \sum \frac{\partial x}{\partial \rho_i} \frac{\partial^2 x}{\partial \rho_k \partial \rho_l},$$

et des formules

$$A_{ik} = \sum \frac{\partial x}{\partial \rho_i} \frac{\partial x}{\partial \rho_k}, \quad A_{kl} = \sum \frac{\partial x}{\partial \rho_k} \frac{\partial x}{\partial \rho_l}, \quad A_{li} = \sum \frac{\partial x}{\partial \rho_l} \frac{\partial x}{\partial \rho_i},$$

(1) Si nous revenons au point de vue géométrique, cette décomposition en carrés correspond au cas où le trièdre (T) aurait ses arêtes parallèles à des droites fixes.

on déduira, par différentiation, la suivante :

$$\frac{\partial A_{ik}}{\partial \rho_l} + \frac{\partial A_{il}}{\partial \rho_k} - \frac{\partial A_{kl}}{\partial \rho_i} = 2 \sum \frac{\partial x}{\partial \rho_i} \frac{\partial^2 x}{\partial \rho_k \partial \rho_l} = 2 A_{ikl}.$$

Si donc on introduit le symbole de MM. Christoffel et Lipschitz défini par la relation

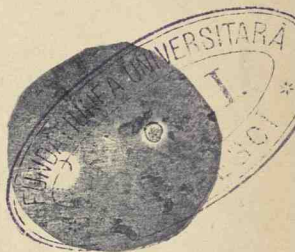
$$(56) \quad \left[\begin{matrix} kl \\ i \end{matrix} \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial A_{ik}}{\partial \rho_l} + \frac{1}{2} \frac{\partial A_{il}}{\partial \rho_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial A_{kl}}{\partial \rho_i},$$

qui conduit à l'identité

$$(57) \quad \left[\begin{matrix} kl \\ i \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} lk \\ i \end{matrix} \right],$$

nous aurons

$$(58) \quad A_{ikl} = \left[\begin{matrix} kl \\ i \end{matrix} \right].$$



Toutes les quantités A_{ikl} s'expriment donc exclusivement à l'aide des coefficients de l'élément linéaire et de leurs dérivées premières. Si l'on transporte leurs valeurs dans les formules générales (49) et (53), les premières sont vérifiées, les autres nous donnent la relation générale

$$(H) \quad \frac{\partial}{\partial \rho_{l'}} \left[\begin{matrix} kl \\ i \end{matrix} \right] - \frac{\partial}{\partial \rho_l} \left[\begin{matrix} k'l' \\ i \end{matrix} \right] = \sum_h \sum_{h'} \left\{ \left[\begin{matrix} i'l' \\ h \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} kl \\ h' \end{matrix} \right] - \left[\begin{matrix} il \\ h \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} k'l' \\ h' \end{matrix} \right] \right\} \frac{\Delta_{hh'}}{\Delta},$$

qui résout le problème proposé. Elle ne change pas, on le reconnaît aisément, lorsqu'on échange soit i et k , soit l et l' , soit i , k et l , l' ; et elle tient lieu de six équations entre les coefficients de la forme et leurs dérivées des deux premiers ordres. Ces équations appartiennent à deux types différents : l'un qu'on obtient en supposant $l = i$, $l' = k$, $i \neq k$; l'autre, en supposant $i \neq k \neq l$, $l' = i$.

La méthode suivie montre d'ailleurs que ces relations nécessaires sont encore suffisantes; car, si elles sont remplies, les relations générales (49) et (53) sont vérifiées par les valeurs (58) des quantités A_{ikl} . Comme ces valeurs satisfont aux relations

$$A_{ikl} = A_{ilk},$$

les dérivées correspondantes des quantités ξ_i , η_i , ζ_i , qui sont dé-

finies par les équations aux dérivées partielles (50), seront telles que l'on aura, pour tous les indices k et l

$$\frac{\partial \xi_k}{\partial \rho_l} = \frac{\partial \xi_l}{\partial \rho_k}, \quad \frac{\partial \eta_k}{\partial \rho_l} = \frac{\partial \eta_l}{\partial \rho_k}, \quad \frac{\partial \zeta_k}{\partial \rho_l} = \frac{\partial \zeta_l}{\partial \rho_k},$$

ce qui permettra d'exprimer ξ_k , η_k , ζ_k par les formules

$$\xi_k = \frac{\partial x}{\partial \rho_k}, \quad \eta_k = \frac{\partial y}{\partial \rho_k}, \quad \zeta_k = \frac{\partial z}{\partial \rho_k},$$

x , y , z étant trois fonctions convenablement choisies.

118. L'analyse précédente aurait pu aisément être détachée de la considération du trièdre (T); voici quelques remarques qui nous y ramènent.

D'abord si, entre les équations (1) et (2), on veut éliminer les rotations, on sera évidemment conduit aux relations (53). Mais, sans éliminer les rotations, on est conduit à quelques formules qui méritent d'être signalées.

Reprenons les équations (1) entre les translations et ajoutons-les après les avoir multipliées respectivement par ξ_i , η_i , ζ_i . On obtiendra une équation ne différant que par les notations de la suivante

$$\Lambda_{ikl} - \Lambda_{ilk} = \begin{vmatrix} \xi_i & \xi_k & \rho_l \\ \eta_i & \eta_k & q_l \\ \zeta_i & \zeta_k & r_l \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \xi_i & \xi_l & p_k \\ \eta_i & \eta_l & q_k \\ \zeta_i & \zeta_l & r_k \end{vmatrix}.$$

Si donc on pose, pour abrégé,

$$(59) \quad \varepsilon_{ikl} = \begin{vmatrix} \xi_i & \xi_k & \rho_l \\ \eta_i & \eta_k & q_l \\ \zeta_i & \zeta_k & r_l \end{vmatrix},$$

ce qui entraîne les relations

$$(60) \quad \varepsilon_{ikl} + \varepsilon_{kil} = 0, \quad \varepsilon_{iil} = 0,$$

on aura, pour toutes les valeurs des indices,

$$(61) \quad \Lambda_{ikl} - \Lambda_{ilk} = \varepsilon_{ikl} - \varepsilon_{ilk}.$$

On a, d'ailleurs,

$$(62) \quad \frac{\partial \Lambda_{ik}}{\partial \rho_l} = \Lambda_{ikl} + \Lambda_{kil} = \begin{bmatrix} i & l \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & l \\ i \end{bmatrix},$$

et cette équation, jointe à la précédente, permet d'obtenir l'expression générale suivante

$$(63) \quad A_{ikl} = \begin{bmatrix} kl \\ i \end{bmatrix} + \varepsilon_{ikl}$$

des quantités A_{ikl} .

En substituant ces valeurs des A_{ikl} dans les formules (53), on obtiendra un système de relations différentielles entre les coefficients de la forme quadratique et les déterminants ε_{ikl} . Ces déterminants seront tous nuls si, comme nous l'avons supposé d'abord, le trièdre n'a pas de rotations. Mais, dans les autres cas, quelques-uns au moins seront différents de zéro. Leur emploi permettra de traiter les différents problèmes que l'on peut se poser et qui concernent la relation entre le trièdre mobile et celui qui est formé par les plans tangents aux surfaces coordonnées. Si, par exemple, on annulait les trois déterminants ε_{ikl} pour lesquels les indices sont différents, on exprimerait, par cela même, que la rotation dont les composantes sont p_k, q_k, r_k a son axe situé dans le plan tangent à la surface de paramètre ρ_k et cela pour les trois valeurs 0, 1, 2 de k .

CHAPITRE III.

RECHERCHE D'UN SYSTÈME TRIPLE PARTICULIER.

Avant de poursuivre la théorie, on veut indiquer des applications des équations fondamentales à la recherche d'un système triple particulier. — Dans ses *Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications*, Lamé a attaché une importance toute particulière aux systèmes composés de trois familles isothermes. — Définition d'une famille isotherme. — Condition d'isothermie; elle est vérifiée pour le système des ellipsoïdes homofocaux. — Il existe donc au moins un système triple, à la fois orthogonal et isotherme. — Lamé s'est proposé de déterminer tous les systèmes de ce genre. En mettant le problème en équation, on reconnaît que ces systèmes particuliers ont une première propriété signalée par M. J. Bertrand : les surfaces qui les composent sont isothermiques, c'est-à-dire sont divisibles en carrés infiniment petits par leurs lignes de courbure. Mais cette propriété n'est nullement caractéristique; elle appartient, par exemple, au système des cyclides homofocales, qui n'est pas isotherme. — Par suite, en se proposant la recherche de tous les systèmes triples composés de surfaces isothermiques, on est assuré d'obtenir non seulement tous les systèmes isothermes, comme le désirait Lamé, mais d'autres systèmes plus généraux. — Pour accroître encore l'intérêt qui s'attache à ce problème général, on remarque que l'on sera encore conduit à le poser si l'on approfondit une belle découverte de Lamé. — L'illustration géométrique a montré que, si ρ , ρ_1 , ρ_2 désignent les coordonnées elliptiques d'un point de l'espace, l'équation de la chaleur admet une infinité de solutions de la forme suivante : $f(\rho)f_1(\rho_1)f_2(\rho_2)$. — Si l'on cherche tous les systèmes triples orthogonaux pour lesquels on peut formuler une proposition analogue, on reconnaît encore qu'ils doivent être composés de surfaces isothermiques. — Toutes ces remarques nous conduisent donc à entreprendre l'étude du problème le plus général : détermination des systèmes triples composés de surfaces isothermiques. — Mise en équation; forme des valeurs de H , H_1 , H_2 . — On exprime d'abord que ces valeurs satisfont au système (B), ce qui conduit à préciser leur forme. — On obtient ainsi trois types différents de solutions. — Pour étudier ces trois types et achever la solution, on exprime que les valeurs de H , H_1 , H_2 , vérifient le système (B'). — Forme générale des équations qui en résultent. — Conditions pour qu'elles soient compatibles avec celles que l'on a déduites du système (B). — Application aux trois types précédemment obtenus. — Le premier type nous conduit à trois systèmes triples comprenant, soit une famille de plans parallèles et deux familles de cylindres isothermes; soit une famille de sphères concentriques et deux familles de cônes isothermes; soit une famille de plans passant par une droite et deux familles de révolution ayant cette droite pour axe, et dont les méridiens forment un système à la fois orthogonal et isotherme. D'une manière générale, il faut joindre à ces systèmes leurs transformés par inversion, qui jouissent évidemment de la même propriété. — Le second type ne fournit aucune solution du problème et doit être rejeté. — Quant au troisième, il sera étudié dans le Chapitre suivant.

119. Nous avons établi maintenant les équations fondamentales qui se présentent dans la théorie générale des systèmes orthogonaux. Avant de poursuivre le développement de cette théorie, il convient que nous indiquions quelques applications de la méthode de recherche qui a été développée dans les Chapitres précédents. Nous étudierons tout d'abord un problème célèbre que Lamé s'est proposé dans ses *Leçons sur la théorie des coordonnées curvilignes et leurs diverses applications*.

On sait que, dans un milieu solide homogène en équilibre de chaleur, la température stationnaire V doit satisfaire à l'équation aux dérivées partielles

$$(1) \quad \Delta_2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0;$$

et, réciproquement, toute fonction finie V satisfaisant à cette équation définit un état de température pour lequel le milieu se trouve en équilibre de chaleur. Les surfaces pour lesquelles la température conserve la même valeur sont ce que Lamé a appelé les *surfaces isothermes* du milieu relatives à l'état d'équilibre considéré.

Pour qu'une famille de surfaces représentée par l'équation

$$(2) \quad \varphi(x, y, z, \lambda) = 0$$

soit isotherme, il faut évidemment que l'on puisse prendre pour V une fonction de λ ,

$$V = \Phi(\lambda),$$

satisfaisant à l'équation (1); ce qui donnera la condition

$$\Phi''(\lambda) \left[\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z} \right)^2 \right] + \Phi'(\lambda) \left[\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z^2} \right] = 0;$$

d'où résulte la règle énoncée par Lamé : *Pour que la famille de surfaces représentée par l'équation (2) soit isotherme, il faut et il suffit que l'on ait*

$$(3) \quad \frac{\Delta_2(\lambda)}{\Delta(\lambda)} = f(\lambda).$$

Du reste, quand la condition sera remplie, la température V , relative à l'état de distribution de la chaleur pour lequel les surfaces

sont isothermes, se calculera par la relation

$$\frac{d^2 V}{d\lambda^2} + f(\lambda) \frac{dV}{d\lambda} = 0,$$

dont l'intégrale est donnée par la formule

$$(4) \quad V = \int e^{-\int f(\lambda) d\lambda} d\lambda;$$

elle est, par rapport aux constantes arbitraires C, C' introduites par les quadratures, de la forme

$$(5) \quad V = CV_0 + C',$$

de sorte qu'à une même famille isotherme correspondent une infinité d'états stationnaires différents.

120. Considérons, par exemple, l'une des trois familles de quadriques homofocales définies par l'équation

$$(6) \quad \frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} + \frac{z^2}{c-\lambda} - 1 = 0,$$

où λ désigne le paramètre de la famille. Si l'on pose, pour abrégér,

$$A = \mathcal{S} \frac{x^2}{(a-\lambda)^2}, \quad B = \mathcal{S} \frac{2x^2}{(a-\lambda)^3},$$

on aura d'abord

$$\frac{2x}{a-\lambda} + A \frac{\partial \lambda}{\partial x} = 0;$$

ce qui donnera

$$\Delta(\lambda) = \frac{4}{A},$$

puis, en prenant les dérivées secondes,

$$\frac{2}{a-\lambda} + 4 \frac{x}{(a-\lambda)^2} \frac{\partial \lambda}{\partial x} + B \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \right)^2 + A \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} = 0.$$

En ajoutant cette équation aux deux équations analogues en y et z , et tenant compte des précédentes, on trouvera

$$\frac{\Delta_2(\lambda)}{\Delta(\lambda)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda-a} + \frac{1}{\lambda-b} + \frac{1}{\lambda-c} \right).$$

La condition de Lamé est donc remplie et la température V cor-

respondante à chaque famille sera déterminée par la formule (4), qui donnera ici

$$(7) \quad V = C \int \frac{d\lambda}{\sqrt{(a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda)}} + C'.$$

Ainsi, les quadriques homofocales et orthogonales définies par l'équation (6) constituent un système composé de trois familles isothermes. En d'autres termes, il existe dans un milieu homogène trois états différents d'équilibre de chaleur pour lesquels la température demeure constante, soit sur des ellipsoïdes, soit sur des hyperboloïdes à une nappe, soit sur des hyperboloïdes à deux nappes, homofocaux.

On peut démontrer ce résultat par une méthode toute différente. Étant donné un système triple orthogonal, nous savons (n° 411) qu'en gardant toutes les notations précédentes, on a

$$(8) \quad \text{HH}_1\text{H}_2\Delta_2V = \frac{\partial}{\partial\rho} \left(\frac{\text{H}_1\text{H}_2}{\text{H}} \frac{\partial V}{\partial\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial\rho_1} \left(\frac{\text{H}\text{H}_2}{\text{H}_1} \frac{\partial V}{\partial\rho_1} \right) + \frac{\partial}{\partial\rho_2} \left(\frac{\text{HH}_1}{\text{H}_2} \frac{\partial V}{\partial\rho_2} \right).$$

Cette relation nous permet d'écrire en coordonnées curvilignes l'équation aux dérivées partielles qui régit la température. Et, en particulier, elle nous permet de reconnaître immédiatement si la condition d'isothermie est vérifiée pour l'une ou l'autre des familles qui composent le système orthogonal.

Si l'on veut exprimer, par exemple, qu'il existe un état stationnaire de distribution de la chaleur dans lequel les surfaces de paramètre ρ sont isothermes, il faudra exprimer que l'équation

$$\Delta_2 V = 0$$

est vérifiée quand on y remplace V par une fonction $F(\rho)$ de ρ , ce qui donnera

$$\frac{\partial}{\partial\rho} \left[\frac{\text{H}_1\text{H}_2}{\text{H}} F'(\rho) \right] = 0,$$

ou, en intégrant,

$$(9) \quad \frac{\text{H}_1\text{H}_2}{\text{H}} F'(\rho) = S,$$

S désignant une fonction qui ne dépendra que de ρ_1 et de ρ_2 .

Appliquons cette condition au système triple formé par les surfaces homofocales (6). On sait (1) qu'avec ce système l'élément linéaire de l'espace est donné par la formule

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} ds^2 &= \frac{(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)}{f(\rho)} d\rho^2 \\ &+ \frac{(\rho_1 - \rho)(\rho_1 - \rho_2)}{f(\rho_1)} d\rho_1^2 + \frac{(\rho_2 - \rho)(\rho_2 - \rho_1)}{f(\rho_2)} d\rho_2^2, \end{aligned} \right.$$

où l'on a posé

$$(11) \quad f(\rho) = 4(a - \rho)(b - \rho)(c - \rho).$$

On a ici

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} H &= \frac{\sqrt{(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)}}{\sqrt{f(\rho)}}, \\ H_1 &= \frac{\sqrt{(\rho_1 - \rho)(\rho_1 - \rho_2)}}{\sqrt{f(\rho_1)}}, \\ H_2 &= \frac{\sqrt{(\rho_2 - \rho)(\rho_2 - \rho_1)}}{\sqrt{f(\rho_2)}}. \end{aligned} \right.$$

et la condition (9) devient

$$\frac{(\rho_1 - \rho_2)\sqrt{f(\rho)}}{\sqrt{-f(\rho_1)f(\rho_2)}} F'(\rho) = S.$$

Elle sera vérifiée pourvu que l'on ait

$$\sqrt{f(\rho)} F'(\rho) = 2C,$$

C désignant une constante, ce qui donnera

$$(13) \quad V = 2C \int \frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}} + C'.$$

Nous retrouvons la formule déjà obtenue plus haut.

121. On voit qu'il existe au moins un système triple, à la fois orthogonal et isotherme, c'est-à-dire un système triple composé de trois familles isothermes. Lamé s'est proposé de déterminer tous les systèmes de coordonnées curvilignes qui satisfont à cette

(1) *Leçons sur la théorie des surfaces* (I^{re} Partie, p. 158).

double condition. Il est aisé de trouver tout d'abord les relations différentielles que doivent vérifier alors les fonctions H, H_1, H_2 .

Supposons que ρ, ρ_1, ρ_2 aient été choisis de manière à être, selon l'expression de Lamé, les paramètres thermométriques des trois familles isothermes, c'est-à-dire vérifient les équations

$$\Delta_2 \rho = 0, \quad \Delta_2 \rho_1 = 0, \quad \Delta_2 \rho_2 = 0.$$

En substituant ρ, ρ_1, ρ_2 dans l'expression générale de $\Delta_2(V)$, on aura tout de suite les équations aux dérivées partielles

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{H_1 H_2}{H} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\frac{H H_2}{H_1} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left(\frac{H H_1}{H_2} \right) = 0,$$

qui expriment la propriété cherchée. Elles donnent, en intégrant,

$$(14) \quad \frac{H_1 H_2}{H} = S, \quad \frac{H H_2}{H_1} = S_1, \quad \frac{H H_1}{H_2} = S_2,$$

S_i désignant, pour abrégé, une fonction qui ne contiendra pas la variable ρ_i .

On déduit des équations précédentes les valeurs

$$(15) \quad H = \sqrt{S_1 S_2}, \quad H_1 = \sqrt{S S_2}, \quad H_2 = \sqrt{S S_1}$$

de H, H_1, H_2 ; de sorte que l'on aura, pour l'élément du système triple cherché, l'expression suivante

$$(16) \quad ds^2 = S_1 S_2 d\rho^2 + S S_2 d\rho_1^2 + S S_1 d\rho_2^2.$$

Cette formule permet de vérifier immédiatement une propriété des systèmes triples isothermes, qui a été signalée par M. J. Bertrand ⁽¹⁾. *Chacune des surfaces qui les composent peut être divisée en carrés infiniment petits par ses lignes de courbure.* Si l'on suppose, en effet, $d\rho_2 = 0$, l'élément linéaire de la surface de paramètre ρ_2 sera défini par la formule

$$(17) \quad ds^2 = S_2 (S_1 d\rho^2 + S d\rho_1^2).$$

(1) J. BERTRAND, *Mémoire sur les surfaces isothermes orthogonales* (*Journal de Liouville*, t. IX, p. 117; 1844).

Le paramètre ρ_2 étant constant, S_1 deviendra une fonction de ρ , S une fonction de ρ_1 ; par suite, le rapport des coefficients de $d\rho^2$ et de $d\rho_1^2$ sera le quotient d'une fonction de ρ par une fonction de ρ_1 . Cette relation caractérise, sur une surface quelconque, les systèmes de coordonnées jouissant de la propriété annoncée (1).

122. Ainsi, tous les systèmes triples, à la fois orthogonaux et isothermes, sont nécessairement composés de surfaces qui peuvent être divisées en carrés infiniment petits par leurs lignes de courbure. Mais la réciproque n'est pas vraie, et l'on connaît au moins un système orthogonal, celui des cyclides homofocales, qui, sans être isotherme, jouit de la même propriété. On sait, en effet (2), que, si l'on considère les cyclides homofocales définies en coordonnées pentasphériques par l'équation

$$(18) \quad \sum_1^5 \frac{x_i^2}{a_i - \lambda} = 0,$$

il passera trois de ces surfaces par chaque point de l'espace; et, si l'on désigne par ρ , ρ_1 , ρ_2 les paramètres de ces trois surfaces, l'élément linéaire de l'espace sera défini par la formule

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} M^2 ds^2 &= \frac{(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)}{f(\rho)} d\rho^2 \\ &+ \frac{(\rho_1 - \rho)(\rho_1 - \rho_2)}{f(\rho_1)} d\rho_1^2 + \frac{(\rho_2 - \rho)(\rho_2 - \rho_1)}{f(\rho_2)} d\rho_2^2, \end{aligned} \right.$$

où l'on a posé

$$(20) \quad f(\rho) = (\rho - a_1)(\rho - a_2) \dots (\rho - a_5)$$

et

$$(21) \quad M = 2 \sum_1^5 \frac{1}{R_k} \sqrt{\frac{(a_k - \rho)(a_k - \rho_1)(a_k - \rho_2)}{f'(a_k)}},$$

R_k étant le rayon de la sphère coordonnée (S_k). Quant aux coordonnées x_i , elles s'expriment en fonction des coordonnées curvi-

(1) *Leçons sur la théorie des surfaces* (I^{re} Partie, n^o 115).

(2) *Leçons sur la théorie des surfaces* (I^{re} Partie, n^o 154). Voir aussi plus loin, n^o 164.

lignes par les formules

$$(22) \quad x_i = \sqrt{\frac{(a_i - \rho)(a_i - \rho_1)(a_i - \rho_2)}{f'(a_i)}}, \quad (i = 1, 2, \dots, 5).$$

La formule (19), en même temps qu'elle met en évidence l'orthogonalité du système de coordonnées curvilignes ainsi constitué, montre aussi que chaque cyclide peut être découpée en carrés infiniment petits par ses lignes de courbure, car si l'on fait, par exemple, $\rho_2 = \text{const.}$, on obtient, pour l'élément linéaire de la surface de paramètre ρ_2 , l'expression

$$(23) \quad ds^2 = \frac{\rho - \rho_1}{M^2} \left[\frac{\rho - \rho_2}{f(\rho)} d\rho^2 - \frac{\rho_1 - \rho_2}{f(\rho_1)} d\rho_1^2 \right],$$

d'où résulte immédiatement la propriété annoncée. Nous avons déjà exprimé cette propriété en disant que la surface est *isothermique* (1).

123. Proposons-nous, d'une manière générale, de rechercher tous les systèmes triples orthogonaux, nécessairement plus nombreux que les systèmes isothermes, pour lesquels toute surface de chacune des trois familles peut être divisée en carrés infiniment petits par ses lignes de courbure, c'est-à-dire est isothermique. Il est facile de trouver quelle doit être, dans ce cas, la forme de l'élément linéaire de l'espace. Posons toujours

$$ds^2 = H^2 d\rho^2 + H_1^2 d\rho_1^2 + H_2^2 d\rho_2^2.$$

Sur la surface de paramètre ρ_2 , l'élément linéaire aura pour expression

$$ds^2 = H^2 d\rho^2 + H_1^2 d\rho_1^2;$$

et, pour que le réseau des lignes de courbure soit isotherme, il faudra que l'on ait

$$\frac{H}{H_1} = \frac{f(\rho)}{f_1(\rho_1)};$$

mais, ρ_2 étant constant sur la surface, les fonctions f et f_1 peu-

(1) *Leçons sur la théorie des surfaces* (II^e Partie, n^o 434).

vent contenir ρ_2 , et l'on doit écrire

$$\frac{H}{H_1} = \frac{f(\rho, \rho_2)}{f_1(\rho_1, \rho_2)}.$$

Dans tout ce qui va suivre, nous désignerons par une grande lettre affectée d'indice, A_i par exemple, une fonction ne contenant pas la variable ρ_i , et par une petite lettre affectée d'indice, a_i par exemple, une fonction de la seule variable ρ_i . L'indice zéro correspondant à la variable ρ sera supprimé. L'équation précédente pourra donc s'écrire

$$\frac{H}{H_1} = \frac{A_1}{A}.$$

On devra avoir de même, en considérant les deux autres familles,

$$\frac{H_1}{H_2} = \frac{B_2}{B_1}, \quad \frac{H_2}{H} = \frac{C}{C_2}.$$

La multiplication des trois équations nous donne

$$\frac{CA_1B_2}{AB_1C_2} = 1.$$

Il est facile de voir que la solution la plus générale de cette équation est fournie par les formules

$$\frac{C}{A} = \frac{a_2}{a_1}, \quad \frac{A_1}{B_1} = \frac{a}{a_2}, \quad \frac{B_2}{C_2} = \frac{a_1}{a},$$

qui donnent, en introduisant les fonctions S, S_1, S_2 de même définition que A, A_1, \dots ,

$$S = Aa_2 = Ca_1, \quad S_1 = A_1a_2 = aB_1, \quad S_2 = B_2a = C_2a_1.$$

On déduit de là les relations

$$\frac{H}{H_1} = \frac{S_1}{S}, \quad \frac{H_1}{H_2} = \frac{S_2}{S_1}, \quad \frac{H_2}{H} = \frac{S}{S_2},$$

et l'on pourra adopter les expressions suivantes

$$(24) \quad H = \frac{S_1S_2}{M}, \quad H_1 = \frac{SS_2}{M}, \quad H_2 = \frac{SS_1}{M},$$

où M désignera une fonction quelconque de ρ, ρ_1, ρ_2 . Pour la

commodité des calculs, nous prendrons

$$(25) \quad H = \frac{1}{M} e^{R_1 + R_2}, \quad H_1 = \frac{1}{M} e^{R_1 + R_2}, \quad H_2 = \frac{1}{M} e^{R_1 + R_2},$$

R, R_1, R_2 étant de même définition que S, S_1, S_2 , c'est-à-dire ne contenant chacune que les deux variables d'indices différents. On obtiendra les expressions données plus haut relatives aux systèmes isothermes en faisant

$$M = 1.$$

124. On est encore conduit à rechercher les mêmes systèmes orthogonaux si l'on se propose une question très intéressante dont l'origine remonte à la plus belle découverte de Lamé.

Si l'on applique l'expression (8) de $\Delta_2 V$ au système de coordonnées elliptiques pour lequel l'élément linéaire est défini par la formule (10), on reconnaît immédiatement que l'on a

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta_2 V &= \frac{\sqrt{f(\rho)}}{(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\sqrt{f(\rho)} \frac{\partial V}{\partial \rho} \right] \\ &+ \frac{\sqrt{f(\rho_1)}}{(\rho_1 - \rho)(\rho_1 - \rho_2)} \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left[\sqrt{f(\rho_1)} \frac{\partial V}{\partial \rho_1} \right] \\ &+ \frac{\sqrt{f(\rho_2)}}{(\rho_2 - \rho)(\rho_2 - \rho_1)} \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left[\sqrt{f(\rho_2)} \frac{\partial V}{\partial \rho_2} \right]; \end{aligned} \right.$$

et de là il résulte que l'on aura des solutions de l'équation de la chaleur

$$\Delta_2 V = 0,$$

si l'on peut satisfaire aux trois relations

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} \sqrt{f(\rho)} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\sqrt{f(\rho)} \frac{\partial V}{\partial \rho} \right] &= (A\rho + B)V, \\ \sqrt{f(\rho_1)} \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left[\sqrt{f(\rho_1)} \frac{\partial V}{\partial \rho_1} \right] &= (A\rho_1 + B)V, \\ \sqrt{f(\rho_2)} \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left[\sqrt{f(\rho_2)} \frac{\partial V}{\partial \rho_2} \right] &= (A\rho_2 + B)V, \end{aligned} \right.$$

où A et B sont deux fonctions quelconques. C'est ce qui aura lieu si l'on suppose A et B constantes, et si l'on prend

$$(28) \quad V = \varphi(\rho) \varphi_1(\rho_1) \varphi_2(\rho_2),$$

les fonctions d'une seule variable $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ étant déterminées par

les équations linéaires

$$\begin{aligned}\sqrt{f(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left[\sqrt{f(\rho)} \frac{d\varphi}{d\rho} \right] &= (A\rho + B)\varphi, \\ \sqrt{f(\rho_1)} \frac{d}{d\rho_1} \left[\sqrt{f(\rho_1)} \frac{d\varphi_1}{d\rho_1} \right] &= (A\rho_1 + B)\varphi_1, \\ \sqrt{f(\rho_2)} \frac{d}{d\rho_2} \left[\sqrt{f(\rho_2)} \frac{d\varphi_2}{d\rho_2} \right] &= (A\rho_2 + B)\varphi_2.\end{aligned}$$

Il y aura, en définitive, pour trouver la solution particulière définie par la formule (28), à intégrer l'unique équation linéaire

$$(29) \quad \sqrt{f(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left(\sqrt{f(\rho)} \frac{du}{d\rho} \right) = (A\rho + B)u,$$

où A et B sont des constantes quelconques.

On sait comment l'emploi des solutions particulières (28) a permis à Lamé de résoudre le beau problème de la distribution de la chaleur à l'intérieur d'un ellipsoïde, et comment l'étude de l'équation linéaire précédente, faite par M. Hermite, a été l'origine des plus importantes découvertes analytiques. Il était donc naturel de se proposer la recherche de tous les systèmes orthogonaux auxquels on pourra appliquer la méthode de Lamé, et avec lesquels on pourra trouver une infinité de solutions de l'équation de la chaleur, en prenant pour V une fonction de la forme

$$(30) \quad V = Pf(\rho)f_1(\rho_1)f_2(\rho_2),$$

où P désignera une fonction tout à fait déterminée de ρ, ρ_1, ρ_2 , mais où les fonctions f, f_1, f_2 pourront être choisies d'une infinité de manières différentes et devront satisfaire à des équations du second ordre. La forme précédente, un peu plus générale que celle (28) de Lamé, la comprend comme cas particulier et s'y réduit pour $P = 1$. Voyons comment on pourra traiter le problème ainsi posé.

Si, pour abrégé, on pose

$$\alpha = \frac{H_1 H_2}{H}, \quad \alpha_1 = \frac{H H_2}{H_1}, \quad \alpha_2 = \frac{H H_1}{H_2},$$

l'équation de la chaleur prendra la forme

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\alpha \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\alpha_1 \frac{\partial V}{\partial \rho_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left(\alpha_2 \frac{\partial V}{\partial \rho_2} \right) = 0.$$

Si l'on y substitue la valeur (30) de \bar{V} , elle devient

$$(31) \quad P\alpha \frac{f''(\rho)}{f(\rho)} + \left(2\alpha \frac{\partial P}{\partial \rho} + P \frac{\partial \alpha}{\partial \rho}\right) \frac{f'(\rho)}{f(\rho)} + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\alpha \frac{\partial P}{\partial \rho}\right) + \dots = 0,$$

les termes non écrits s'obtenant par des permutations circulaires, effectuées sur l'indice. Les fonctions f, f_1, f_2 doivent donc satisfaire à des équations linéaires. Par exemple si, dans l'équation précédente, on donne à ρ_1 et à ρ_2 deux valeurs constantes quelconques, on trouvera pour f une équation de la forme suivante :

$$af'' + bf' + cf = 0,$$

où a, b, c sont des fonctions quelconques de ρ .

Réciproquement, si l'on veut que les deux solutions d'une telle équation puissent être associées aux fonctions f_1, f_2 pour donner une intégrale de l'équation de la chaleur, comme cela a lieu dans le cas des surfaces homofocales du second degré, il faudra que l'équation (31) soit identiquement vérifiée par l'emploi de trois équations de la forme précédente, l'une pour f , la seconde pour f_1 , la troisième pour f_2 . Écrivons ces trois équations sous la forme suivante :

$$(32) \quad \begin{cases} f''(\rho) + \varphi(\rho)f'(\rho) + \psi(\rho)f = 0, \\ f_1''(\rho_1) + \varphi_1(\rho_1)f_1'(\rho_1) + \psi_1(\rho_1)f_1 = 0, \\ f_2''(\rho_2) + \varphi_2(\rho_2)f_2'(\rho_2) + \psi_2(\rho_2)f_2 = 0, \end{cases}$$

il faudra que, si l'on en tire les valeurs des dérivées secondes $f''(\rho), f_1''(\rho_1), f_2''(\rho_2)$ pour les porter dans l'équation (31), celle-ci soit vérifiée au moins pour deux valeurs différentes des rapports $\frac{f'}{f}, \frac{f_1'}{f_1}, \frac{f_2'}{f_2}$. Comme elle est linéaire par rapport à ces rapports, il faudra égaliser à zéro le coefficient de chacun de ces rapports ainsi que l'ensemble des termes qui ne les contiennent pas. On obtient ainsi les conditions

$$(33) \quad \begin{cases} 2\alpha \frac{\partial P}{\partial \rho} + P \frac{\partial \alpha}{\partial \rho} = P\alpha\varphi(\rho), \\ 2\alpha_1 \frac{\partial P}{\partial \rho_1} + P \frac{\partial \alpha_1}{\partial \rho_1} = P\alpha_1\varphi_1(\rho_1), \\ 2\alpha_2 \frac{\partial P}{\partial \rho_2} + P \frac{\partial \alpha_2}{\partial \rho_2} = P\alpha_2\varphi_2(\rho_2), \\ \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\alpha \frac{\partial P}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\alpha_1 \frac{\partial P}{\partial \rho_1}\right) + \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left(\alpha_2 \frac{\partial P}{\partial \rho_2}\right) \\ - P(\alpha\psi + \alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2) = 0, \end{cases}$$

qui devront être satisfaites grâce à un choix convenable des fonctions φ , φ_1 , φ_2 et ψ , ψ_1 , ψ_2 . Réciproquement, toutes les fois qu'elles seront vérifiées, on pourra affirmer que l'équation de la chaleur admet huit solutions particulières, linéairement distinctes, de la forme suivante

$$P f(\rho) f_1(\rho_1) f_2(\rho_2)$$

où $f(\rho)$, $f_1(\rho_1)$, $f_2(\rho_2)$ désignent respectivement des intégrales particulières des équations linéaires (32).

Il nous reste maintenant à examiner les conséquences des relations (33).

La discussion se simplifie beaucoup si l'on remarque que les équations (32) sont linéaires; on peut donc, en remplaçant respectivement ρ , ρ_1 , ρ_2 par des fonctions convenablement choisies de ces paramètres, les ramener à une forme nouvelle pour laquelle seront nulles les fonctions φ , φ_1 , φ_2 . Alors les trois premières équations (33) se réduiront aux suivantes :

$$(34) \quad \frac{\partial(\alpha P^2)}{\partial \rho} = \frac{\partial(\alpha_1 P^2)}{\partial \rho_1} = \frac{\partial(\alpha_2 P^2)}{\partial \rho_2} = 0,$$

et donneront, en intégrant,

$$\alpha P^2 = S^2, \quad \alpha_1 P^2 = S_1^2, \quad \alpha_2 P^2 = S_2^2,$$

S_i ne dépendant pas de ρ_i . Si l'on se rappelle la signification de α , α_1 , α_2 , cela donne, pour H , H_1 , H_2 , des valeurs de la forme suivante

$$(35) \quad H = \frac{S_1 S_2}{P^2}, \quad H_1 = \frac{S S_2}{P^2}, \quad H_2 = \frac{S S_1}{P^2},$$

identiques, aux notations près, à celles que nous avons obtenues plus haut.

Ainsi, l'on est encore ramené à la recherche des systèmes triples pour lesquels H , H_1 , H_2 sont donnés par les formules (25). Pour ces systèmes, on aura

$$(36) \quad \alpha_i = \frac{1}{M} e^{2R_i},$$

de sorte que les équations (34) nous donneront

$$\frac{\partial}{\partial \rho_i} \left(\frac{P^2}{M} \right) = 0,$$

et, par conséquent, le rapport $\frac{P^2}{M}$ sera une constante. On pourra

prendre

$$P = M^{\frac{1}{2}}.$$

Si l'on substitue cette valeur de P ainsi que les valeurs de α , α_1 , α_2 dans la dernière équation (33), elle deviendra

$$e^{2R} \left(\frac{\partial^2 M^{-\frac{1}{2}}}{\partial \rho^2} + \psi M^{-\frac{1}{2}} \right) + e^{2R_1} \left(\frac{\partial^2 M^{-\frac{1}{2}}}{\partial \rho_1^2} + \psi_1 M^{-\frac{1}{2}} \right) + e^{2R_2} \left(\frac{\partial^2 M^{-\frac{1}{2}}}{\partial \rho_2^2} + \psi_2 M^{-\frac{1}{2}} \right) = 0.$$

Mais nous ne ferons pas usage, au début tout au moins, de cette condition supplémentaire pour M.

125. Proposons-nous donc de déterminer tous les systèmes orthogonaux pour lesquels les valeurs de H, H_1 , H_2 sont données simplement par les formules déjà écrites

$$(37) \quad H = \frac{1}{M} e^{R_1+R_2}, \quad H_1 = \frac{1}{M} e^{R+R_2}, \quad H_2 = \frac{1}{M} e^{R+R_1}.$$

Il faudra former les fonctions β_{ik} , exprimer ensuite que ces fonctions vérifient les systèmes (B) et (B') du Chapitre précédent. Calculons d'abord ces fonctions β_{ik} . On aura

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \beta_{01} = e^{R-R_1} \left(-\frac{x_0}{M} + \frac{\partial R_2}{\partial \rho} \right), & \beta_{10} = e^{R_1-R} \left(-\frac{x_1}{M} + \frac{\partial R_2}{\partial \rho_1} \right), \\ \beta_{12} = e^{R_1-R_2} \left(-\frac{x_1}{M} + \frac{\partial R}{\partial \rho_1} \right), & \beta_{21} = e^{R_2-R_1} \left(-\frac{x_2}{M} + \frac{\partial R}{\partial \rho_2} \right), \\ \beta_{20} = e^{R_2-R} \left(-\frac{x_2}{M} + \frac{\partial R_1}{\partial \rho_2} \right), & \beta_{02} = e^{R-R_2} \left(-\frac{x_0}{M} + \frac{\partial R_1}{\partial \rho} \right). \end{array} \right.$$

Nous avons, pour abrégér, désigné par x_0 , x_1 , x_2 les dérivées premières de M; nous adopterons une notation analogue pour les dérivées d'ordre supérieur.

Les fonctions β_{ik} doivent d'abord satisfaire aux équations (B) du Chapitre précédent

$$\frac{\partial \beta_{12}}{\partial \rho} = \beta_{10} \beta_{02}, \quad \frac{\partial \beta_{20}}{\partial \rho_1} = \beta_{21} \beta_{10}, \quad \frac{\partial \beta_{01}}{\partial \rho_2} = \beta_{02} \beta_{21}.$$

En substituant leurs expressions dans ces équations, on ob-

tiendra le système

$$(3g) \quad \begin{cases} x_{12} = x_2 \frac{\partial R}{\partial \rho_1} + x_1 \frac{\partial R}{\partial \rho_2} + MU, \\ x_{20} = x_0 \frac{\partial R_1}{\partial \rho_2} + x_2 \frac{\partial R_1}{\partial \rho} + MU_1, \\ x_{01} = x_1 \frac{\partial R_2}{\partial \rho} + x_0 \frac{\partial R_2}{\partial \rho_1} + MU_2, \end{cases}$$

où l'on a posé, pour abrégér,

$$(40) \quad \begin{cases} U = \frac{\partial(R - R_2)}{\partial \rho_1} \frac{\partial(R - R_1)}{\partial \rho_2} - \frac{\partial R}{\partial \rho_1} \frac{\partial R}{\partial \rho_2}, \\ U_1 = \frac{\partial(R_1 - R)}{\partial \rho_2} \frac{\partial(R_1 - R_2)}{\partial \rho} - \frac{\partial R_1}{\partial \rho_2} \frac{\partial R_1}{\partial \rho}, \\ U_2 = \frac{\partial(R_2 - R_1)}{\partial \rho} \frac{\partial(R_2 - R)}{\partial \rho_1} - \frac{\partial R_2}{\partial \rho} \frac{\partial R_2}{\partial \rho_1}. \end{cases}$$

Pour que les équations (3g) soient compatibles, il faudra que les trois valeurs différentes de

$$\frac{\partial^3 M}{\partial \rho \partial \rho_1 \partial \rho_2} = x_{012}$$

que l'on peut en déduire par la différentiation soient égales. Or, en différentiant la première équation par rapport à ρ et remplaçant x_{20} , x_{10} par leurs valeurs déduites des deux autres, on trouve

$$x_{012} = x_0 \frac{\partial R_1}{\partial \rho_2} \frac{\partial R_2}{\partial \rho_1} + x_1 \frac{\partial R}{\partial \rho_2} \frac{\partial R_2}{\partial \rho} + x_2 \frac{\partial R_1}{\partial \rho} \frac{\partial R}{\partial \rho_1} \\ + M \left(\frac{\partial U}{\partial \rho} + U_1 \frac{\partial R}{\partial \rho_1} + U_2 \frac{\partial R}{\partial \rho_2} \right).$$

Les valeurs que l'on trouvera en opérant de même avec les deux autres équations (3g) ne différeront évidemment de la précédente que par le coefficient de M. On doit donc avoir

$$(41) \quad \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial \rho} + U_1 \frac{\partial R}{\partial \rho_1} + U_2 \frac{\partial R}{\partial \rho_2} \\ = \frac{\partial U_1}{\partial \rho_1} + U_2 \frac{\partial R_1}{\partial \rho_2} + U \frac{\partial R_1}{\partial \rho} = \frac{\partial U_2}{\partial \rho_2} + U \frac{\partial R_2}{\partial \rho} + U_1 \frac{\partial R_2}{\partial \rho_1}. \end{cases}$$

Or il est aisé de vérifier les identités

$$U_1 \frac{\partial R}{\partial \rho_1} + U_2 \frac{\partial R}{\partial \rho_2} = U_2 \frac{\partial R_1}{\partial \rho_2} + U \frac{\partial R_1}{\partial \rho} = U \frac{\partial R_2}{\partial \rho} + U_1 \frac{\partial R_2}{\partial \rho_1}.$$

Les équations (41) se réduisent donc aux suivantes :

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = \frac{\partial U_1}{\partial \rho_1} = \frac{\partial U_2}{\partial \rho_2}.$$

Comme un calcul direct permet de constater que l'on a identiquement

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{\partial U_1}{\partial \rho_1} + \frac{\partial U_2}{\partial \rho_2} = 0,$$

on voit que les équations (41) peuvent être remplacées par les suivantes :

$$(42) \quad \frac{\partial U}{\partial \rho} = \frac{\partial U_1}{\partial \rho_1} = \frac{\partial U_2}{\partial \rho_2} = 0.$$

Chacune des trois fonctions U_i ne doit donc pas dépendre de la variable de même indice. Par suite, en désignant par K, K_1, K_2 trois fonctions de deux variables telles que K_i ne dépende pas de ρ_i , on pourra toujours écrire

$$U = \frac{\partial^2 K}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} - \frac{\partial R}{\partial \rho_1} \frac{\partial R}{\partial \rho_2},$$

et de même pour U_1 et U_2 . Nous mettons une dérivée seconde pour la commodité des calculs qui vont suivre.

Nous aurons ainsi le système suivant :

$$(43) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial R_2}{\partial \rho_1} - \frac{\partial R}{\partial \rho_1} \right) \left(\frac{\partial R_1}{\partial \rho_2} - \frac{\partial R}{\partial \rho_2} \right) = \frac{\partial^2 K}{\partial \rho_1 \partial \rho_2}, \\ \left(\frac{\partial R}{\partial \rho_2} - \frac{\partial R_1}{\partial \rho_2} \right) \left(\frac{\partial R_2}{\partial \rho} - \frac{\partial R_1}{\partial \rho} \right) = \frac{\partial^2 K_1}{\partial \rho \partial \rho_2}, \\ \left(\frac{\partial R_1}{\partial \rho} - \frac{\partial R_2}{\partial \rho} \right) \left(\frac{\partial R}{\partial \rho_1} - \frac{\partial R_2}{\partial \rho_1} \right) = \frac{\partial^2 K_2}{\partial \rho \partial \rho_1}, \end{array} \right.$$

qui devra être vérifié quand on choisira pour K, K_1, K_2 des fonctions convenables des variables dont elles dépendent.

Quant aux équations auxquelles doit satisfaire M , elles prendront la forme

$$(44) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{12} = x_1 \frac{\partial R}{\partial \rho_2} + x_2 \frac{\partial R}{\partial \rho_1} + M \left(\frac{\partial^2 K}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} - \frac{\partial R}{\partial \rho_1} \frac{\partial R}{\partial \rho_2} \right), \\ x_{20} = x_2 \frac{\partial R_1}{\partial \rho} + x_0 \frac{\partial R_1}{\partial \rho_2} + M \left(\frac{\partial^2 K_1}{\partial \rho \partial \rho_2} - \frac{\partial R_1}{\partial \rho_2} \frac{\partial R_1}{\partial \rho} \right), \\ x_{01} = x_0 \frac{\partial R_2}{\partial \rho_1} + x_1 \frac{\partial R_2}{\partial \rho} + M \left(\frac{\partial^2 K_2}{\partial \rho \partial \rho_1} - \frac{\partial R_2}{\partial \rho} \frac{\partial R_2}{\partial \rho_1} \right); \end{array} \right.$$

et elles deviendront compatibles, c'est-à-dire elles admettront une solution dépendant de trois fonctions arbitraires d'une variable, si le système (43) est vérifié.

126. Nous allons d'abord chercher la forme des fonctions R , R_1 , R_2 ; K , K_1 , K_2 qui peuvent satisfaire aux équations (43). Ces équations, différenciées respectivement par rapport à ρ , ρ_1 , ρ_2 , nous donneront les suivantes :

$$(45) \quad \left(\frac{\partial R_1}{\partial \rho} - \frac{\partial R_2}{\partial \rho} \right) \frac{\partial^2 R}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} = \left(\frac{\partial R_2}{\partial \rho_1} - \frac{\partial R}{\partial \rho_1} \right) \frac{\partial^2 R_1}{\partial \rho \partial \rho_2} = \left(\frac{\partial R}{\partial \rho_2} - \frac{\partial R_1}{\partial \rho_2} \right) \frac{\partial^2 R_2}{\partial \rho \partial \rho_1}.$$

Supposons d'abord que l'un des binomes

$$(46) \quad \frac{\partial R_1}{\partial \rho} - \frac{\partial R_2}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial R_2}{\partial \rho_1} - \frac{\partial R}{\partial \rho_1}, \quad \frac{\partial R}{\partial \rho_2} - \frac{\partial R_1}{\partial \rho_2}$$

soit nul et que l'on ait, par exemple,

$$(47) \quad \frac{\partial R_1}{\partial \rho} - \frac{\partial R_2}{\partial \rho} = 0,$$

ce qui donne, en différenciant,

$$\frac{\partial^2 R_1}{\partial \rho \partial \rho_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 R_2}{\partial \rho \partial \rho_1} = 0.$$

Alors les équations (45) seront vérifiées. Nous avons ainsi une première solution du problème proposé. On déduit facilement des trois équations précédentes que l'on a

$$(48) \quad R_1 = \alpha + \alpha_2, \quad R_2 = \alpha + \alpha_1,$$

α_i ne dépendant que de la variable ρ_i . Quant à R , comme il ne doit satisfaire à aucune condition, ce sera une fonction quelconque de ρ_1 , ρ_2 . Mais on peut simplifier cette première solution.

Remarquons en effet que, si, dans les expressions (37) de H , H_1 , H_2 , on remplace R , R_1 , R_2 respectivement par

$$R' + \alpha_1 + \alpha_2, \quad R'_1 + \alpha + \alpha_2, \quad R'_2 + \alpha + \alpha_1,$$

α_i ne dépendant que de ρ_i , R' , R'_1 , R'_2 seront des fonctions de même définition respectivement que R , R_1 , R_2 . Remplaçons maintenant M par $M'e^{\alpha+\alpha_1+\alpha_2}$; les nouvelles expressions de H ,

H_1, H_2 seront

$$H = \frac{1}{M} e^{R_1 + R_2 + \alpha}, \quad H_1 = \frac{1}{M} e^{R_1 + R_2 + \alpha_1}, \quad H_2 = \frac{1}{M} e^{R_1 + R_2 + \alpha_2}$$

et ne différeront des anciennes que par la présence des facteurs $e^\alpha, e^{\alpha_1}, e^{\alpha_2}$. Mais on pourra faire disparaître ces facteurs en substituant aux coordonnées curvilignes ρ, ρ_1, ρ_2 de nouvelles coordonnées ρ', ρ'_1, ρ'_2 , définies par les quadratures

$$\rho' = \int e^\alpha d\rho, \quad \rho'_1 = \int e^{\alpha_1} d\rho_1, \quad \rho'_2 = \int e^{\alpha_2} d\rho_2.$$

On voit donc que, sans diminuer la généralité du système cherché, on peut remplacer les fonctions R, R_1, R_2 par les suivantes :

$$R + \alpha_1 + \alpha_2, \quad R_1 + \alpha + \alpha_2, \quad R_2 + \alpha + \alpha_1,$$

où $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ désignent trois fonctions quelconques qui dépendent chacune de la variable de même indice.

Appliquons cette remarque générale à notre première solution, définie par les formules (48). Nous voyons que les fonctions R_1, R_2 pourront être ramenées à zéro pourvu que l'on prenne

$$\alpha + \alpha_1 = 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \quad \alpha_2 + \alpha = 0.$$

Ainsi cette solution est caractérisée par les deux relations

$$(49) \quad R_1 = 0, \quad R_2 = 0.$$

127. Supposons maintenant qu'aucun des binômes (46) ne soit nul, mais que l'une des dérivées secondes

$$(50) \quad \frac{\partial^2 R}{\partial \rho_1 \partial \rho_2}, \quad \frac{\partial^2 R_1}{\partial \rho \partial \rho_2}, \quad \frac{\partial^2 R_2}{\partial \rho \partial \rho_1}$$

le soit. Alors, d'après les équations (45) et l'hypothèse précédente, ces trois dérivées seront nulles en même temps, ce qui donnera

$$R = a_1 + b_2, \quad R_1 = a_2 + b, \quad R_2 = a + b_1,$$

a_i, b_i désignant des fonctions de la seule variable ρ_i . En introduisant comme précédemment des fonctions $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$, on pourra ra-

mener les valeurs précédentes à la forme plus élégante

$$(51) \quad R = a_1 - a_2, \quad R_1 = a_2 - a, \quad R_2 = a - a_1;$$

mais, pour qu'aucun des binomes (46) ne soit nul, il sera *nécessaire qu'aucune des fonctions a_i ne se réduise à une constante.*

Tel est le type de notre deuxième solution.

128. En dehors de ces deux premières solutions, il n'en existe aucune pour laquelle l'un des binomes (46) ou l'une des dérivées secondes (50) soit nulle. Par suite, la comparaison des équations (43) et (45) nous conduira, pour toutes les autres solutions cherchées, aux relations suivantes :

$$\frac{\frac{\partial^2 K}{\partial \rho_1 \partial \rho_2}}{\frac{\partial^2 R}{\partial \rho_1 \partial \rho_2}} = \frac{\frac{\partial^2 K_1}{\partial \rho \partial \rho_2}}{\frac{\partial^2 R_1}{\partial \rho \partial \rho_2}} = \frac{\frac{\partial^2 K_2}{\partial \rho \partial \rho_1}}{\frac{\partial^2 R_2}{\partial \rho \partial \rho_1}}.$$

La valeur commune de ces trois rapports, le premier ne dépendant pas de ρ , le deuxième de ρ_1 et le troisième de ρ_2 , ne peut être qu'une constante h , différente de zéro. Il suit de là que les équations (43) se changeront dans les suivantes :

$$(52) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial R}{\partial \rho_1} - \frac{\partial R_2}{\partial \rho_1} \right) \left(\frac{\partial R}{\partial \rho_2} - \frac{\partial R_1}{\partial \rho_2} \right) = h \frac{\partial^2 R}{\partial \rho_1 \partial \rho_2}, \\ \left(\frac{\partial R_1}{\partial \rho_2} - \frac{\partial R}{\partial \rho_2} \right) \left(\frac{\partial R_1}{\partial \rho} - \frac{\partial R_2}{\partial \rho} \right) = h \frac{\partial^2 R_1}{\partial \rho \partial \rho_2}, \\ \left(\frac{\partial R_2}{\partial \rho} - \frac{\partial R_1}{\partial \rho} \right) \left(\frac{\partial R_2}{\partial \rho_1} - \frac{\partial R}{\partial \rho_1} \right) = h \frac{\partial^2 R_2}{\partial \rho \partial \rho_1}, \end{array} \right.$$

où ne figurent plus les fonctions K, K_1, K_2 . Nous allons voir qu'on peut aisément les intégrer.

Prenons, par exemple, la première et effectuons-y la substitution

$$R = R_1 + R_2 - h \log \theta,$$

elle deviendra

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} = 0.$$

On aura donc

$$\theta = S_1 + S_2, \quad R = R_1 + R_2 - h \log(S_1 + S_2),$$

S_1, S_2 étant des fonctions de même définition que R_1, R_2 , c'est-à-dire ne contenant pas respectivement ρ_1 et ρ_2 .

Comme R ne doit pas dépendre de ρ , on pourra, dans la formule précédente, donner à ρ une valeur constante qui transformera R_1, S_1 en des fonctions de ρ_2, R_2, S_2 en des fonctions de ρ_1 . On a donc pour l'expression générale de R

$$(53) \quad R = \alpha_1 + \alpha_2 - h \log(a_1 - a_2),$$

α_i, a_i dépendant seulement de ρ_i . Aucune des fonctions a, a_1, a_2 ne peut se réduire à une constante; car, sans cela, deux des trois dérivées secondes (50) seraient nulles, contrairement à l'hypothèse qui caractérise cette troisième solution.

Cela posé, prenons la première des équations (52) et remplaçons-y R par la valeur précédente. Elle pourra se mettre sous la forme

$$\frac{ha'_1}{\frac{\partial R_2}{\partial \rho_1} - \alpha'_1} + \alpha_1 = \frac{ha'_2}{\frac{\partial R_1}{\partial \rho_2} - \alpha'_2} + \alpha_2.$$

Les deux membres de l'équation précédente sont indépendants, l'un de ρ_2 , l'autre de ρ_1 . Ils sont donc égaux à une même fonction de ρ , que nous désignerons par a . On aura donc

$$\frac{\partial R_2}{\partial \rho_1} - \alpha'_1 = \frac{ha'_1}{a - a_1}, \quad \frac{\partial R_1}{\partial \rho_2} - \alpha'_2 = \frac{ha'_2}{a - a_2},$$

ce qui donnera en intégrant

$$(54) \quad \begin{cases} R_2 = \alpha_1 + \alpha - h \log(a - a_1), \\ R_1 = \alpha_2 + \beta - h \log(a_2 - a), \end{cases}$$

α et β désignant des fonctions de ρ .

Substituons ces valeurs, ainsi que celle de R , dans la seconde équation (52); si l'on se rappelle qu'aucune des fonctions a_i ne peut se réduire à une constante, il viendra

$$\alpha' = \beta'.$$

On peut supposer, sans restreindre la généralité,

$$\alpha = \beta;$$

car on peut, sans changer la valeur (53) de R , remplacer α_1, α_2 par $\alpha_1 + h', \alpha_2 - h'$, h' désignant une constante quelconque. On obtient donc, pour la forme définitive de la troisième solution, les expressions suivantes

$$(55) \quad \begin{cases} R = \alpha_1 + \alpha_2 - h \log(\alpha_1 - \alpha_2), \\ R_1 = \alpha + \alpha_2 - h \log(\alpha_2 - \alpha), \\ R_2 = \alpha + \alpha_1 - h \log(\alpha - \alpha_1) \end{cases}$$

de R, R_1, R_2 .

429. En résumé, nous avons les trois types de solutions caractérisés respectivement par les formules (49), (51) et (55). Nous allons les examiner successivement. Mais auparavant indiquons d'une manière précise le point où nous sommes parvenus.

La fonction M devra satisfaire aux trois équations aux dérivées partielles (44), qui seront compatibles; mais il nous reste à exprimer que les fonctions β_{ik} satisfont encore au système (B') du Chapitre précédent

$$(56) \quad \begin{cases} \frac{\partial \beta_{12}}{\partial \rho_1} + \frac{\partial \beta_{21}}{\partial \rho_2} + \beta_{01} \beta_{02} = 0, \\ \frac{\partial \beta_{20}}{\partial \rho_2} + \frac{\partial \beta_{02}}{\partial \rho} + \beta_{10} \beta_{12} = 0, \\ \frac{\partial \beta_{01}}{\partial \rho} + \frac{\partial \beta_{10}}{\partial \rho_1} + \beta_{20} \beta_{21} = 0; \end{cases}$$

ce qui va nous donner trois nouvelles équations aux dérivées partielles pour M . Or, ces équations ne contiennent, outre les dérivées premières, que les dérivées secondes x_{00}, x_{11}, x_{22} de M , et il est aisé de les résoudre par rapport à ces dérivées. Si on les ajoute, par exemple, après les avoir multipliées respectivement par $-H, H_1$ et H_2 , on aura

$$(57) \quad \left\{ \begin{aligned} & e^{2R} \left[-\frac{2x_{00}}{M} + \frac{x_0^2}{M^2} + \frac{2x_0}{M} \left(\frac{\partial R_1}{\partial \rho} + \frac{\partial R_2}{\partial \rho} \right) - 3 \frac{\partial R_1}{\partial \rho} \frac{\partial R_2}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 R_1}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 R_2}{\partial \rho^2} \right] \\ & + e^{2R_1} \left[\left(\frac{x_1}{M} - \frac{\partial R_2}{\partial \rho_1} \right)^2 + \frac{\partial^2 R_2}{\partial \rho_1^2} - \frac{\partial^2 R}{\partial \rho_1^2} + \frac{\partial R_2}{\partial \rho_1} \left(\frac{\partial R}{\partial \rho_1} - \frac{\partial R_2}{\partial \rho_1} \right) \right] \\ & + e^{2R_2} \left[\left(\frac{x_2}{M} - \frac{\partial R_1}{\partial \rho_2} \right)^2 + \frac{\partial^2 R_1}{\partial \rho_2^2} - \frac{\partial^2 R}{\partial \rho_2^2} + \frac{\partial R_1}{\partial \rho_2} \left(\frac{\partial R}{\partial \rho_2} - \frac{\partial R_1}{\partial \rho_2} \right) \right] = 0. \end{aligned} \right.$$

Les équations que l'on obtiendrait en permutant les indices donneraient de même les dérivées secondes x_{11} et x_{22} .

Ces nouvelles équations ne sont pas nécessairement compatibles avec les équations (44). Cherchons d'abord quel est le degré de généralité de la solution commune qu'elles doivent avoir.

S'il existe un système orthogonal répondant à la question, ses transformés par inversion donneront aussi des solutions pour lesquelles les rapports mutuels de H, H_1, H_2 seront les mêmes; Mais M sera remplacée (n° 98) par

$$kM[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2],$$

x, y, z étant les coordonnées rectilignes et a, b, c, k quatre constantes arbitraires. Il faut donc que la solution commune des six équations (44), (57) contienne au moins quatre constantes, c'est-à-dire que l'on puisse prendre arbitrairement, pour un système donné de valeurs de ρ, ρ_1, ρ_2 , la fonction M et ses trois dérivées premières. Or, comme ces équations font connaître toutes les dérivées secondes de M , on reconnaît immédiatement qu'elles ne peuvent admettre une solution plus générale. Pour exprimer qu'elles sont compatibles, on les différentiera, ce qui permettra d'obtenir deux ou trois expressions différentes pour les dérivées troisièmes de M relatives à deux au moins des variables ρ, ρ_1, ρ_2 ; ces expressions d'une même dérivée, qu'on pourra ramener à ne contenir que les dérivées premières x_0, x_1, x_2 , devront être égales pour toutes les valeurs de ces dérivées, c'est-à-dire qu'elles devront être les mêmes, terme pour terme.

On a déjà exprimé, en étudiant le système (44), que les trois valeurs obtenues pour x_{012} par la différentiation de ces équations sont égales; il resterait à exprimer que, si l'on calcule de deux manières différentes une dérivée telle que x_{001} , soit en différentiant par rapport à ρ la troisième équation (44), soit en différentiant par rapport à ρ_1 l'équation (57), les deux expressions obtenues sont égales terme à terme. Cela fait, les six équations auraient une solution commune avec quatre constantes arbitraires et formeraient un système complet.

130. Le calcul indiqué n'est pas impraticable; mais on peut l'abrégé beaucoup et le faire sous une autre forme en remarquant que les six équations (B), (B') offrent des combinaisons intégrables.

Considérons, en effet, les deux équations

$$\begin{aligned}\frac{\partial \beta_{10}}{\partial \rho_1} + \frac{\partial \beta_{01}}{\partial \rho} + \beta_{20} \beta_{21} &= 0, \\ \frac{\partial \beta_{02}}{\partial \rho} + \frac{\partial \beta_{20}}{\partial \rho_2} + \beta_{10} \beta_{12} &= 0\end{aligned}$$

du groupe (B'), et multiplions-les respectivement par $\beta_{10} d\rho_1$, $\beta_{20} d\rho_2$. En vertu des équations (B), elles pourront s'écrire

$$\begin{aligned}\beta_{10} \frac{\partial \beta_{10}}{\partial \rho_1} d\rho_1 + \beta_{20} \frac{\partial \beta_{20}}{\partial \rho_1} d\rho_1 + \beta_{10} \frac{\partial \beta_{01}}{\partial \rho} d\rho_1 &= 0, \\ \beta_{10} \frac{\partial \beta_{10}}{\partial \rho_2} d\rho_2 + \beta_{20} \frac{\partial \beta_{20}}{\partial \rho_2} d\rho_2 + \beta_{20} \frac{\partial \beta_{02}}{\partial \rho} d\rho_2 &= 0.\end{aligned}$$

En les ajoutant et *supposant constante la variable* ρ , on trouve

$$(58) \quad \alpha \frac{\beta_{10}^2 + \beta_{20}^2}{2} + \beta_{10} \frac{\partial \beta_{11}}{\partial \rho} d\rho_1 + \beta_{20} \frac{\partial \beta_{02}}{\partial \rho} d\rho_2 = 0.$$

Or on a, dans tous les cas, en vertu des équations (B),

$$\frac{\partial}{\partial \rho_2} \left(\beta_{10} \frac{\partial \beta_{01}}{\partial \rho} \right) = \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\beta_{20} \frac{\partial \beta_{02}}{\partial \rho} \right);$$

et, par conséquent, si l'on regarde toujours ρ comme une constante, la différentielle

$$\beta_{10} \frac{\partial \beta_{01}}{\partial \rho} d\rho_1 + \beta_{20} \frac{\partial \beta_{02}}{\partial \rho} d\rho_2$$

peut être exactement intégrée.

Dans le cas particulier que nous avons à traiter, ce point peut être vérifié comme il suit. On a, en se servant des expressions (38) des fonctions β_{ik} ,

$$\begin{aligned}\beta_{10} \frac{\partial \beta_{01}}{\partial \rho} &= -\frac{\partial R_1}{\partial \rho} \beta_{01} \beta_{10} + \left(\frac{x_1}{M} - \frac{\partial R_2}{\partial \rho_1} \right) \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{x_0}{M} - \frac{\partial R_2}{\partial \rho} \right) \\ &= -\frac{\partial R_1}{\partial \rho} \beta_{10} \beta_{01} + \frac{\partial}{\partial \rho} (\beta_{10} \beta_{01}) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\frac{x_0}{M} - \frac{\partial R_2}{\partial \rho} \right)^2.\end{aligned}$$

On trouve, d'autre part, en tenant compte de la troisième équation (44),

$$\beta_{01} \beta_{10} = \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(-\frac{x_0}{M} + \frac{\partial K_2}{\partial \rho} \right) = \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \rho_1} (K_2 - \text{Log } M);$$

ce qui permet d'écrire

$$\beta_{10} \frac{\partial \beta_{01}}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \rho_1} \frac{\partial R_1}{\partial \rho} \left(\frac{x_0}{M} - \frac{\partial K_2}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2 \partial \rho_1} (K_2 - \text{Log} M) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\frac{x_0}{M} - \frac{\partial R_2}{\partial \rho} \right)^2.$$

En intégrant, on trouve

$$\int \beta_{10} \frac{\partial \beta_{01}}{\partial \rho} d\rho_1 = \frac{\partial R_1}{\partial \rho} \left(\frac{x_0}{M} - \frac{\partial K_2}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} (K_2 - \text{Log} M) - \frac{1}{2} \left(\frac{x_0}{M} - \frac{\partial R_2}{\partial \rho} \right)^2 - L_1 + \frac{\partial^2 K_1}{\partial \rho^2} - \frac{\partial R_1}{\partial \rho} \frac{\partial K_1}{\partial \rho},$$

L_1 désignant une fonction qui ne dépend pas de ρ_1 ; quant aux deux termes qui suivent et qui ne dépendent pas non plus de ρ_1 , ils sont ajoutés pour la symétrie des calculs. On trouverait de même

$$\int \beta_{20} \frac{\partial \beta_{02}}{\partial \rho} d\rho_2 = \frac{\partial R_2}{\partial \rho} \left(\frac{x_0}{M} - \frac{\partial K_1}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} (K_1 - \text{Log} M) - \frac{1}{2} \left(\frac{x_0}{M} - \frac{\partial R_1}{\partial \rho} \right)^2 - L_2 + \frac{\partial^2 K_2}{\partial \rho^2} - \frac{\partial R_2}{\partial \rho} \frac{\partial K_2}{\partial \rho},$$

L_2 ne contenant pas ρ_2 . Les deux fonctions L_1, L_2 doivent être telles que ces intégrales soient égales, ce qui donne, en retranchant,

$$(59) \quad L_1 - L_2 = \left(\frac{\partial R_2}{\partial \rho} - \frac{\partial R_1}{\partial \rho} \right) \left(\frac{\partial K_1}{\partial \rho} + \frac{\partial K_2}{\partial \rho} - \frac{1}{2} \frac{\partial R_1}{\partial \rho} - \frac{1}{2} \frac{\partial R_2}{\partial \rho} \right).$$

Il est facile de vérifier que la dérivée seconde du second membre, prise par rapport à ρ_1, ρ_2 , est nulle comme celle du premier. Le second membre est donc de la forme $A_1 - A_2$, A_i ne contenant pas ρ_i ; et, comme l'équation pourra s'écrire

$$L_1 - A_1 = L_2 - A_2,$$

la valeur commune des deux membres ne pourra dépendre que

de ρ ; on aura donc

$$(60) \quad \begin{cases} L_1 = A_1 + f(\rho), \\ L_2 = A_2 + f(\rho), \end{cases}$$

ce qui détermine L_1, L_2 à une fonction près de ρ .

En intégrant la formule (58), on obtiendra la relation

$$\beta_{10}^2 + \beta_{20}^2 + 2 \int \left(\beta_{10} \frac{\partial \beta_{01}}{\partial \rho} d\rho_1 + \beta_{20} \frac{\partial \beta_{02}}{\partial \rho} d\rho_2 \right) = 0;$$

et, en substituant la valeur de l'intégrale que nous venons de calculer, on trouvera

$$\begin{aligned} e^{2R} \left[\frac{2x_{00}}{M} - \frac{x_0^2}{M^2} - \frac{2x_0}{M} \left(\frac{\partial R_1}{\partial \rho} + \frac{\partial R_2}{\partial \rho} \right) \right. \\ \left. + 2 \frac{\partial R_1}{\partial \rho} \left(\frac{\partial K_1}{\partial \rho} + \frac{\partial K_2}{\partial \rho} \right) - 2 \frac{\partial^2 K_1}{\partial \rho^2} - 2 \frac{\partial^2 K_2}{\partial \rho^2} + 2L_1 + \left(\frac{\partial R_2}{\partial \rho} \right)^2 \right] \\ - e^{2R_1} \left(\frac{x_1}{M} - \frac{\partial R_2}{\partial \rho_1} \right)^2 - e^{2R_2} \left(\frac{x_2}{M} - \frac{\partial R_1}{\partial \rho_2} \right)^2 = 0, \end{aligned}$$

ce qui donnera une nouvelle équation aux dérivées partielles à laquelle devra satisfaire la fonction M . Si l'on compare cette équation à la première (57) qui donne aussi x_{00} , on trouve qu'en éliminant cette dérivée on fait disparaître toutes les autres, et il reste l'équation de condition

$$(61) \quad \left\{ \begin{aligned} & e^{2R} \left[2 \frac{\partial^2 K_1}{\partial \rho^2} + 2 \frac{\partial^2 K_2}{\partial \rho^2} - 2L_1 - 2 \frac{\partial R_1}{\partial \rho} \left(\frac{\partial K_1}{\partial \rho} + \frac{\partial K_2}{\partial \rho} \right) \right. \\ & \quad \left. - \left(\frac{\partial R_2}{\partial \rho} \right)^2 + 3 \frac{\partial R_1}{\partial \rho} \frac{\partial R_2}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 R_1}{\partial \rho^2} - \frac{\partial^2 R_2}{\partial \rho^2} \right] \\ & + e^{2R_1} \left[\frac{\partial^2 R}{\partial \rho_1^2} - \frac{\partial^2 R_2}{\partial \rho_1^2} + \frac{\partial R_2}{\partial \rho_1} \left(\frac{\partial R_2}{\partial \rho_1} - \frac{\partial R}{\partial \rho_1} \right) \right] \\ & + e^{2R_2} \left[\frac{\partial^2 R}{\partial \rho_2^2} - \frac{\partial^2 R_1}{\partial \rho_2^2} + \frac{\partial R_1}{\partial \rho_2} \left(\frac{\partial R_1}{\partial \rho_2} - \frac{\partial R}{\partial \rho_2} \right) \right] = 0. \end{aligned} \right.$$

Cette formule, où L_1 est défini par les équations (59), (60), constitue une condition nouvelle à laquelle doivent satisfaire les fonctions R, R_1, R_2 . En permutant les indices dans les formules (59), (60), (61), on aurait deux autres conditions de même nature entre les mêmes fonctions.

131. Maintenant, toute difficulté relative à la fonction M a disparu. Nous avons à reprendre nos trois types de solutions, à exprimer que les valeurs correspondantes des fonctions R, R_1, R_2 vérifient l'équation (61) et les deux équations semblables. Si elles peuvent satisfaire à cette nouvelle et triple condition, il ne restera plus qu'à intégrer les six équations simultanées du second ordre, formant un système complet, auxquelles doit satisfaire la fonction M .

Appliquons cette méthode à nos trois types de solutions (49), (51) et (55). Pour le premier, on a

$$R_1 = R_2 = 0, \quad K_1 = K_2 = 0.$$

Les valeurs de H, H_1, H_2 sont les suivantes

$$(62) \quad H = \frac{1}{M}, \quad H_1 = \frac{e^R}{M}, \quad H_2 = \frac{e^R}{M}.$$

L'élément linéaire du système triple orthogonal correspondant est donné par la formule

$$(63) \quad ds^2 = \frac{1}{M^2} [d\rho^2 + e^{2R}(d\rho_1^2 + d\rho_2^2)].$$

La forme même de cette expression montre immédiatement que les surfaces de paramètre ρ sont des sphères ou des plans; car on peut changer les variables ρ_1, ρ_2 en d'autres ρ'_1, ρ'_2 qui dépendent seulement de ρ_1, ρ_2 et obtenir, *d'une infinité de manières*, la relation

$$d\rho_1^2 + d\rho_2^2 = \lambda^2(d\rho_1'^2 + d\rho_2'^2).$$

Par conséquent, les surfaces de paramètre ρ ont une infinité de systèmes de lignes de courbure et ne peuvent être, par suite, que des sphères ou des plans. On voit même que les autres surfaces les coupent suivant des lignes formant un système isotherme ou isométrique.

Ici l'équation (59) devient

$$L_1 - L_2 = 0$$

et donne

$$L_1 = f(\rho).$$

La condition (61) se réduit à la suivante

$$-2f(\rho)e^{2R} + \frac{\partial^2 R}{\partial \rho_1^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial \rho_2^2} = 0;$$

et comme R ne contient pas ρ , il faut que $f(\rho)$ soit une constante, ce qui donne, en désignant cette constante par $\frac{-C}{2}$,

$$(64) \quad Ce^{2R} + \frac{\partial^2 R}{\partial \rho_1^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial \rho_2^2} = 0.$$

Cette équation nous apprend ⁽¹⁾ que les surfaces dont l'élément linéaire est donné par la formule

$$ds^2 = e^{2R}(d\rho_1^2 + d\rho_2^2)$$

ont leur courbure constante et égale à C .

Supposons d'abord $C = 0$. Alors, en remplaçant ρ_1, ρ_2 par de nouvelles variables ρ'_1, ρ'_2 et, sans changer ρ , on pourra toujours ramener

$$e^{2R}(d\rho_1^2 + d\rho_2^2)$$

à la forme

$$d\rho_1'^2 + d\rho_2'^2;$$

nous aurons, par suite, pour le système orthogonal formé avec les variables ρ, ρ'_1, ρ'_2 un élément linéaire dont l'expression sera

$$(65) \quad ds^2 = \frac{1}{M^2}(d\rho^2 + d\rho_1'^2 + d\rho_2'^2).$$

Or, nous avons vu (n° 96) que cette forme de l'élément linéaire ne peut convenir qu'au système formé de trois familles de plans rectangulaires et à ses transformés par inversion. Si l'on tient compte de la substitution opérée sur ρ_1, ρ_2 , on voit que ce premier cas nous donne les *systèmes triples orthogonaux formés d'une famille de plans parallèles, de deux familles de cylindres isothermes*, et les systèmes qui en sont les transformés par inversion.

(1) *Leçons sur la théorie des surfaces* (II^e Partie, n° 499, p. 371).

132. Traitons maintenant le cas où la constante C est positive et égale à $\frac{1}{a^2}$. Alors on pourra ramener

$$e^{2R}(d\rho_1^2 + d\rho_2^2)$$

à la forme

$$a^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

par un simple changement des seules variables ρ_1 et ρ_2 , ce qui donnera, pour l'élément linéaire du système triple cherché, l'expression suivante

$$ds^2 = \frac{1}{M^2}(d\rho^2 + a^2 d\theta^2 + a^2 \sin^2\theta d\varphi^2),$$

ou, en remplaçant ρ par $a \log \rho$ et $M\rho$ par aN ,

$$(66) \quad ds^2 = \frac{1}{N^2}(d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2\theta d\varphi^2).$$

On reconnaît, dans la parenthèse, la forme de l'élément linéaire qui convient aux coordonnées polaires. Si l'on tient compte de la substitution effectuée sur les variables ρ_1, ρ_2 , on voit que notre seconde hypothèse nous conduit aux *systèmes formés d'une famille de sphères concentriques, de deux familles de cônes isothermes* et à leurs transformés par inversion.

133. Enfin, supposons la constante C négative et égale à $-\frac{1}{a^2}$. On pourra alors ramener

$$e^{2R}(d\rho_1^2 + d\rho_2^2)$$

à la forme

$$a^2 \frac{dx^2 + dy^2}{y^2};$$

en remplaçant ρ par $a\omega$ et M par $\frac{aN}{y}$, on aura, pour le système orthogonal,

$$(67) \quad ds^2 = \frac{1}{N^2}(y^2 d\omega^2 + dx^2 + dy^2).$$

Cette forme convient au système de coordonnées semi-polaires constitué avec une famille de plans parallèles (de paramètre x),

avec une famille de cylindres de révolution (de paramètre γ) et une famille de plans passant par une droite (de paramètre ω), ainsi qu'à ses transformés par inversion. En tenant compte du changement des variables ρ_1, ρ_2 , on voit que nous obtenons ici *tous les systèmes triples formés d'une famille de plans passant par une droite, de deux familles de surfaces de révolution ayant cette droite pour axe et dont les méridiens forment dans le plan un système à la fois orthogonal et isotherme, ainsi que leurs transformés par inversion.*

134. Tels sont les résultats auxquels nous conduit l'étude de notre première solution. Envisageons maintenant la seconde, pour laquelle on a

$$R = a_1 - a_2, \quad R_1 = a_2 - a, \quad R_2 = a - a_1.$$

On peut prendre ici

$$K = -4a_1a_2, \quad K_1 = -4aa_2, \quad K_2 = -4aa_1,$$

et l'on a

$$L_1 - L_2 = -8a'^2(a_1 + a_2),$$

a' désignant la dérivée de a , ce qui permet de prendre

$$L_1 = -8a'^2a_2 + f(\rho).$$

L'équation (61) à vérifier devient donc

$$(68) \quad \begin{cases} -4(a'' + a'^2)a_1 - 4(a'' - a'^2)a_2 + 4f_1(\rho) \\ + e^{4a_2 - 2a - 2a_1}(a_1'' + a_1'^2) - e^{2a + 2a_2 - 4a_1}(a_2'' - a_2'^2) = 0, \end{cases}$$

$4f_1(\rho)$ désignant une nouvelle fonction de ρ provenant de la réunion à $-f(\rho)$ de tous les termes qui ne dépendent que de ρ .

Si l'on prend la dérivée seconde par rapport à ρ_1, ρ_2 , on trouve

$$a_2' e^{-2a} e^{4a_2} \frac{d}{d\rho_1} e^{-2a_1}(a_1'' + a_1'^2) + a_1' e^{2a} e^{-4a_1} \frac{d}{d\rho_2} e^{2a_2}(a_2'' - a_2'^2) = 0.$$

Comme la fonction a ne peut être constante, cette équation ne sera vérifiée que si les coefficients de e^{2a} , e^{-2a} sont nuls, ce qui donne

$$e^{-2a_1}(a_1'' + a_1'^2) = 4C, \quad e^{2a_2}(a_2'' - a_2'^2) = 4C',$$

C et C' étant des constantes. L'équation (68) devient donc

$$-(a'' + a'^2)a_1 - (a'' - a'^2)a_2 + f_1(\rho) + Ce^{4a_2-2a} - C'e^{2a-4a_1} = 0.$$

Prenant les deux dérivées du premier membre par rapport à ρ_1 et à ρ_2 , nous trouvons

$$a'' + a'^2 = 4C'e^{2a-4a_1},$$

$$a'' - a'^2 = 4Ce^{4a_1-2a}.$$

Comme aucune des fonctions a , a_1 , a_2 ne peut se réduire à une constante, il est évidemment impossible de satisfaire à ces conditions : donc *le second type de solution doit être rejeté.*

CHAPITRE IV.

RECHERCHE D'UN SYSTÈME PARTICULIER (SUITE).

EXAMEN DU TROISIÈME TYPE DE SOLUTION.

Le troisième type de solution du problème que l'on a commencé à étudier dans le Chapitre précédent correspond aux valeurs suivantes

$$H = \frac{(\rho_1 - \rho)^{-h} (\rho - \rho_2)^{-h}}{M \sqrt{a}},$$
$$H_1 = \frac{(\rho_2 - \rho_1)^{-h} (\rho_1 - \rho)^{-h}}{M \sqrt{a_1}},$$
$$H_2 = \frac{(\rho - \rho_2)^{-h} (\rho_2 - \rho_1)^{-h}}{M \sqrt{a_2}}$$

de H , H_1 , H_2 . Dans ces formules, M désigne une fonction quelconque, h une constante, a_i une fonction de la seule variable ρ_i . En écrivant que les équations de condition données au Chapitre précédent sont vérifiées, on obtient les solutions suivantes. — Pour la première, on a $h = -\frac{1}{2}$; $a(\rho)$, $a_1(\rho)$, $a_2(\rho)$ sont des polynômes identiques du 5^e degré; ces hypothèses correspondent au système formé par les cyclides homofocales et à ses variétés. — La seconde solution correspond à l'hypothèse $h = \frac{1}{2}$; $a(\rho)$, $a_1(\rho)$, $a_2(\rho)$ sont des polynômes identiques du 3^e degré. — La troisième solution correspond à la valeur $h = 1$; $a(\rho)$, $a_1(\rho)$, $a_2(\rho)$ sont des polynômes du second degré qui doivent satisfaire à l'identité

$$a(\rho) + a_1(\rho) + a_2(\rho) = 0.$$

La quatrième solution correspond à la valeur $h = 2$; les fonctions a , a_1 , a_2 se réduisent alors à des constantes dont la somme est nulle. — Remarques générales sur la manière dont on pourra déterminer la valeur de M correspondant à chaque solution. — Étude détaillée du cas pour lequel on a $h = 1$. — Le système correspondant est exclusivement formé de *cyclides de Dupin*. — On démontre qu'il est identique à ceux qui ont été étudiés au Livre I^{er}, Ch. III. —

Pour l'étude des systèmes qui correspondent aux valeurs $h = 2$, $h = \frac{1}{2}$ et qui n'apparaîtront pas, d'ailleurs, dans le Chapitre suivant, il est renvoyé à un Mémoire de l'auteur.

135. Il nous reste maintenant à étudier la troisième solution, celle qui est donnée par les formules (55) du Chapitre précédent. Comme, dans ces formules, a , a_1 , a_2 , qui ne dépendent respecti-

vement que de ρ, ρ_1, ρ_2 , ne se réduisent jamais à des constantes, nous prendrons a, a_1, a_2 pour les valeurs même de ces paramètres, ce qui nous permettra d'écrire, en changeant les notations,

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} R = -\frac{1}{2} \log a_1 - \frac{1}{2} \log a_2 - h \log(\rho_1 - \rho_2), \\ R_1 = -\frac{1}{2} \log a - \frac{1}{2} \log a_2 - h \log(\rho_2 - \rho), \\ R_2 = -\frac{1}{2} \log a_1 - \frac{1}{2} \log a - h \log(\rho - \rho_1). \end{array} \right.$$

En modifiant un peu la fonction M et la remplaçant par

$$(2) \quad \frac{M}{\sqrt{aa_1a_2}},$$

il en résultera, pour H, H₁, H₂, les expressions suivantes :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} H = \frac{(\rho_1 - \rho)^{-h} (\rho - \rho_2)^{-h}}{M \sqrt{a}}, \\ H_1 = \frac{(\rho_2 - \rho_1)^{-h} (\rho_1 - \rho)^{-h}}{M \sqrt{a_1}}, \\ H_2 = \frac{(\rho - \rho_2)^{-h} (\rho_2 - \rho_1)^{-h}}{M \sqrt{a_2}}, \end{array} \right.$$

que nous adopterons désormais. Il importe de remarquer que ces expressions ne sont pas *typiques* et qu'elles subsisteraient, moyennant des modifications convenables de M, a, a₁, a₂, si l'on effectuait sur ρ, ρ_1, ρ_2 *une même substitution linéaire à coefficients constants*. Nous ferons plus loin usage de cette remarque.

Si nous tenons compte de la modification (2) que nous avons fait subir à M, les équations (44) du n° 125, auxquelles devait satisfaire cette fonction, se changeront dans les suivantes :

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\rho - \rho_1)x_{01} = h(x_0 - x_1), \\ (\rho_1 - \rho_2)x_{12} = h(x_1 - x_2), \\ (\rho_2 - \rho)x_{20} = h(x_2 - x_0). \end{array} \right.$$

Quant à la relation (61) du n° 130, si l'on remarque que l'on peut prendre ici

$$(5) \quad K_i = h R_i,$$

on trouvera qu'elle devient

$$(6) \left\{ \begin{aligned} & \frac{\alpha(\rho)}{(\rho_2 - \rho_1)^{2h}} \left[F(\rho) - \frac{2h^3 - 3h^2}{(\rho_1 - \rho)(\rho - \rho_2)} - \frac{\alpha'}{2\alpha} (2h^2 - h) \left(\frac{1}{\rho_1 - \rho} - \frac{1}{\rho - \rho_2} \right) \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{h - h^2}{(\rho_1 - \rho)^2} + \frac{h - h^2}{(\rho - \rho_2)^2} \right] \\ & + \frac{a_1(\rho_1)}{(\rho - \rho_2)^{2h}} \left[\frac{ha'_1}{2a_1} \frac{\rho - \rho_2}{(\rho_2 - \rho_1)(\rho_1 - \rho)} - \frac{h}{(\rho_2 - \rho_1)^2} + \frac{h - h^2}{(\rho_1 - \rho)^2} - \frac{h^2}{(\rho_1 - \rho)(\rho_2 - \rho_1)} \right] \\ & + \frac{a_2(\rho_2)}{(\rho_1 - \rho)^{2h}} \left[-\frac{ha'_2}{2a_2} \frac{\rho_1 - \rho}{(\rho_2 - \rho_1)(\rho - \rho_2)} - \frac{h}{(\rho_2 - \rho_1)^2} + \frac{h - h^2}{(\rho - \rho_2)^2} - \frac{h^2}{(\rho_2 - \rho_1)(\rho - \rho_2)} \right] = 0. \end{aligned} \right.$$

On a réuni dans $F(\rho)$ à la fonction arbitraire $2f(\rho)$ de l'équation (60) du Chapitre précédent tous les termes qui ne dépendent que de ρ . On obtiendrait deux équations semblables à la précédente en permutant les indices.

Voyons comment on pourra satisfaire à cette équation. Remplaçons-y d'abord ρ_1 et ρ_2 par les expressions

$$\rho_1 = \rho + \alpha u, \quad \rho_2 = \rho + u,$$

et multiplions tous les termes par u^{2h+2} . Il viendra

$$(7) \left\{ \begin{aligned} & \frac{\alpha(\rho)}{(1-\alpha)^{2h}} \left[F(\rho)u^2 + \frac{2h^3 - 3h^2}{\alpha} - (2h^2 - h) \frac{\alpha' u}{2\alpha} \left(\frac{1}{\alpha} + 1 \right) + (h - h^2) \left(1 + \frac{1}{\alpha^2} \right) \right] \\ & + \frac{a_1(\rho_1)}{(-1)^{2h}} \left[-\frac{ha'_1}{2a_1} \frac{u}{\alpha(1-\alpha)} - \frac{h}{(1-\alpha)^2} + \frac{h - h^2}{\alpha^2} - \frac{h^2}{\alpha(1-\alpha)} \right] \\ & + \frac{a_2(\rho_2)}{\alpha^{2h}} \left[-\frac{ha'_2}{2a_2} \frac{\alpha u}{\alpha - 1} + h - h^2 - \frac{h}{(1-\alpha)^2} + \frac{h^2}{1-\alpha} \right] = 0. \end{aligned} \right.$$

Si maintenant nous faisons $u = 0$, ρ_1 et ρ_2 deviendront égaux à ρ , quel que soit α , et l'équation précédente deviendra

$$(8) \left\{ \begin{aligned} & \frac{\alpha(\rho)}{(1-\alpha)^{2h}} \left[\frac{2h^3 - 3h^2}{\alpha} + (h - h^2) \left(1 + \frac{1}{\alpha^2} \right) \right] \\ & + \frac{a_1(\rho)}{(-1)^{2h}} \left[\frac{h - h^2}{\alpha^2} - \frac{h^2}{\alpha(1-\alpha)} - \frac{h}{(1-\alpha)^2} \right] \\ & + \frac{a_2(\rho)}{\alpha^{2h}} \left[h - h^2 - \frac{h}{(1-\alpha)^2} + \frac{h^2}{1-\alpha} \right] = 0. \end{aligned} \right.$$

Cette nouvelle relation ne contiendra plus que les deux variables ρ , α et devra être vérifiée pour toutes les valeurs de ces variables.

136. Supposons d'abord $h < 1$. Multiplions par $(1 - \alpha)^2$ et faisons ensuite $\alpha = 1$, on trouvera, h n'étant pas nul,

$$a_1(\rho) = (-1)^{2h+1} a_2(\rho).$$

Multipliant par α^2 et faisant ensuite $\alpha = 0$, on a de même

$$a_1(\rho) = (-1)^{2h+1} a(\rho).$$

On a, par suite,

$$a(\rho) = a_2(\rho),$$

et, en permutant les indices,

$$a(\rho) = a_1(\rho);$$

ce qui donne

$$(-1)^{2h+1} = 1, \quad (-1)^{2h} = -1.$$

Ainsi les symboles a , a_1 , a_2 représentent une même fonction. En les supprimant dans l'équation (8), il reste une relation qui ne contient plus que α et qui doit être vérifiée pour toutes les valeurs de cette variable. Si on développe le premier membre suivant les puissances ascendantes de α , on obtient un résultat de la forme suivante

$$(9) \quad h(2h+1)(h-1)(h-2) + (h^2-2h)\alpha^{1-2h} + \dots = 0,$$

les degrés des termes non écrits surpassant d'une unité au moins le degré de l'un des termes précédents.

Si l'on a $2h > 1$, le premier terme du développement est

$$\alpha^{1-2h}(h^2-2h),$$

et il ne peut être nul, h étant supposé inférieur à 1. Donc l'équation ne sera pas vérifiée.

Si l'on a $2h = 1$, il est aisé de reconnaître que l'équation (8) sera, au contraire, vérifiée. Voilà donc une première solution possible :

$$h = \frac{1}{2}.$$

Si l'on a $2h < 1$, le premier terme du développement (9) devant être nul et h étant différent de zéro, on aura nécessairement

$$h = -\frac{1}{2}.$$

Et, en effet, dans cette hypothèse, l'équation (8) est encore vérifiée.

137. Jusqu'ici nous avons supposé que h était inférieur à l'unité. Nous avons donc à considérer les cas où h est égal ou supérieur à l'unité. Commençons par le supposer supérieur à l'unité. Si l'on multiplie le premier membre de l'équation (8) par $(1-x)^{2h}$ et que l'on donne ensuite à x la valeur $x = 1$, il restera

$$2h^3 - 5h^2 + 2h = h(2h-1)(h-2) = 0.$$

Il faut donc que l'on ait

$$h = 2.$$

En introduisant, en effet, cette hypothèse dans l'équation (8), elle se réduira à la forme simple

$$(10) \quad a(\rho) + a_1(\rho) + a_2(\rho) = 0$$

et sera vérifiée si cette relation a lieu entre les trois fonctions a , a_1 , a_2 .

Enfin, la dernière hypothèse à examiner,

$$h = 1,$$

nous conduit à la même conclusion : l'équation (8) sera encore vérifiée, pourvu que les fonctions a , a_1 , a_2 soient liées par la relation (10).

138. En résumé, l'équation fonctionnelle (8) admet quatre solutions distinctes qui correspondent aux valeurs suivantes de h ,

$$h = -\frac{1}{2}, \quad h = \frac{1}{2}, \quad h = 1, \quad h = 2.$$

Pour les deux premières, a , a_1 , a_2 sont les valeurs que prend une même fonction quand on y remplace la variable indépendante successivement par ρ , ρ_1 et ρ_2 . Pour les deux dernières valeurs de h , les trois fonctions doivent satisfaire à la condition (10). Mais il faut bien remarquer que c'est l'équation (8), et non l'équation plus générale (6) dont elle est une simple conséquence, qui se trouve vérifiée.

Une remarque très simple va nous permettre d'achever la dis-

cussion. Si l'on admet que les fonctions a, a_1, a_2 soient des polynomes, il est aisé de déterminer leur degré *a priori*. Reprenons, en effet, les valeurs de H, H_1, H_2 , l'expression de H , par exemple,

$$H = \frac{(\rho_1 - \rho)^{-h}(\rho - \rho_2)^{-h}}{M\sqrt{a}}.$$

Supposons que a soit un polynome de degré p et effectuons la substitution

$$\rho = \frac{1}{\rho'}, \quad \rho_1 = \frac{1}{\rho'_1}, \quad \rho_2 = \frac{1}{\rho'_2},$$

la nouvelle valeur H' de H sera

$$H' = \frac{(\rho'_1 - \rho')^{-h}(\rho' - \rho'_2)^{-h}}{M'\sqrt{a'(\rho')}} \rho'^{\frac{p}{2} + h - 2},$$

$a'(\rho')$ étant ce que devient le polynome $a(\rho)$ lorsqu'on y remplace ρ par $\frac{1}{\rho'}$ en multipliant par ρ'^p , et M' étant égal à M multiplié par le facteur $(\rho'\rho'_1\rho'_2)^{-h}$. Pour que l'expression primitive de H soit conservée, il faudra que l'on ait

$$\frac{p}{2} + h - 2 \geq 0, \quad p \geq 4 - 2h.$$

Ainsi si la fonction $a(\rho)$ est un polynome, ce polynome sera au plus du degré $p = 4 - 2h$. Cette remarque nous servira de guide dans la suite de la discussion.

139. Commençons par l'hypothèse $h = -\frac{1}{2}$. Nous aurons ici

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} H = \frac{\sqrt{(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)}}{M\sqrt{a(\rho)}}, \\ H_1 = \frac{\sqrt{(\rho_1 - \rho)(\rho_1 - \rho_2)}}{M\sqrt{a(\rho_1)}}, \\ H_2 = \frac{\sqrt{(\rho_2 - \rho)(\rho_2 - \rho_1)}}{M\sqrt{a(\rho_2)}}. \end{array} \right.$$

Il reste à déterminer M et la fonction $a(\rho)$.

A cet effet, reprenons l'équation (6); remplaçons-y h par sa

valeur $-\frac{1}{2}$; multiplions-la par $(\rho_1 - \rho)^2(\rho_1 - \rho_2)^2$ et prenons la dérivée sixième par rapport à ρ_1 . Il viendra

$$\frac{\partial^6}{\partial \rho_1^6} [a'_1(\rho_1 - \rho)(\rho_1 - \rho_2) + a_1(-5\rho_1 + 2\rho + 3\rho_2)] = 0,$$

ou, en développant,

$$\frac{d^7 a_1}{d\rho_1^7} (\rho_1 - \rho)(\rho_1 - \rho_2) + \frac{d^6 a_1}{d\rho_1^6} (7\rho_1 - 4\rho - 3\rho_2) = 0.$$

Cette équation devant être vérifiée identiquement, il faudra que l'on ait

$$\frac{d^6 a_1}{d\rho_1^6} = 0,$$

ce qui donne, pour la fonction $a(x)$, un polynôme du cinquième degré.

Il est inutile de continuer la recherche et la question peut être considérée comme résolue. On sait, en effet, qu'il existe un système triple de cyclides homofocales pour lequel l'expression de l'élément linéaire sera donnée par la formule

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} ds'^2 = & \frac{1}{M'^2} \left[\frac{(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)}{a(\rho)} d\rho^2 \right. \\ & \left. + \frac{(\rho_1 - \rho)(\rho_1 - \rho_2)}{a(\rho_1)} d\rho_1^2 + \frac{(\rho_2 - \rho)(\rho_2 - \rho_1)}{a(\rho_2)} d\rho_2^2 \right]. \end{aligned} \right.$$

Si on le compare au système cherché, on aura donc

$$M'^2 ds'^2 = M^2 ds^2,$$

ce qui exige, comme on l'a vu au n° 96, que les deux systèmes soient semblables ou se déduisent l'un de l'autre par inversion. Ainsi notre première solution

$$h = -\frac{1}{2}$$

nous donne le système des cyclides homofocales et ses variétés, au nombre desquelles il faut compter le système des surfaces homofocales du second degré.

140. Examinons maintenant l'hypothèse

$$h = \frac{1}{2}.$$

Nous savons qu'ici encore a , a_1 , a_2 sont trois valeurs différentes de la même fonction. En chassant les dénominateurs dans l'équation (6), on obtient la suivante,

$$\begin{aligned} (a_2 - a)(\rho - \rho_1)^2(2\rho - 3\rho_2 + \rho_1) + (a_1 - a)(\rho - \rho_2)^2(3\rho_1 - 2\rho - \rho_2) \\ + a'_1(\rho_2 - \rho_1)(\rho_1 - \rho)(\rho - \rho_2)^2 + a'_2(\rho - \rho_2)(\rho_1 - \rho_2)(\rho_1 - \rho)^2 \\ + 4aF(\rho)(\rho_2 - \rho_1)(\rho - \rho_1)^2(\rho - \rho_2)^2 = 0, \end{aligned}$$

Si l'on prend la dérivée trois fois par rapport à ρ_1 et trois fois par rapport à ρ_2 , on aura

$$(13) \quad (\rho_1 - \rho) \frac{d^3 a_1}{d\rho_1^3} + 2 \frac{d^3 a_1}{d\rho_1^3} - (\rho_2 - \rho) \frac{d^3 a_2}{d\rho_2^3} - 2 \frac{d^3 a_2}{d\rho_2^3} = 0.$$

Cette équation ne peut être vérifiée, quel que soit ρ , que si l'on a

$$\frac{d^3 a_1}{d\rho_1^3} = \frac{d^3 a_2}{d\rho_2^3} = 0,$$

et, par conséquent, si la dérivée quatrième de a_1 est nulle, ce qui exige que a_1 soit un polynome du troisième degré au plus. On aura donc ici

$$(14) \quad \begin{cases} a = m\rho^3 + n\rho^2 + p\rho + q, \\ a_1 = m\rho_1^3 + n\rho_1^2 + p\rho_1 + q, \\ a_2 = m\rho_2^3 + n\rho_2^2 + p\rho_2 + q. \end{cases}$$

Avec ces hypothèses, et quelles que soient les constantes m , n , p , q , l'équation (6) sera vérifiée; il suffira de faire

$$F(\rho) = 0$$

141. Examinons maintenant l'hypothèse

$$h = 1.$$

Après quelques réductions, l'équation (6) se réduira à la suivante,

$$(15) \quad \begin{cases} 0 = (a'_1 - a'_2)(\rho_2 - \rho_1) + 2(a + a_1 + a_2) \\ \quad + a'(\rho_1 + \rho_2 - 2\rho) - 2a(\rho_1 - \rho)(\rho_2 - \rho)F(\rho) = 0. \end{cases}$$

Différentions deux fois par rapport à ρ_1 ; il viendra

$$a_1'''(\rho_2 - \rho_1) = 0.$$

Il faut donc que a_1''' soit nul et, par suite, que a_1 soit un polynome du second degré. On aura donc ici

$$(16) \quad \begin{cases} a = m\rho^2 + 2n\rho + p, \\ a_1 = m_1\rho_1^2 + 2n_1\rho_1 + p_1, \\ a_2 = m_2\rho_2^2 + 2n_2\rho_2 + p_2. \end{cases}$$

D'ailleurs, si dans l'équation (15) on prend $\rho = \rho_1 = \rho_2$, il reste, conformément à un résultat déjà établi,

$$a + a_1 + a_2 = 0.$$

Il faut donc que l'on ait

$$(17) \quad \begin{cases} m + m_1 + m_2 = 0, \\ n + n_1 + n_2 = 0, \\ p + p_1 + p_2 = 0, \end{cases}$$

et ces conditions sont d'ailleurs suffisantes, car l'équation (15) est alors vérifiée si l'on y prend $F(\rho) = -\frac{m}{a}$.

142. Examinons enfin l'hypothèse

$$h = 2.$$

Reportons-nous à l'équation (6), remplaçons-y h par 2 et multiplions par $(\rho_1 - \rho_2)^4$. En faisant ensuite $\rho_1 = \rho_2$, il restera

$$F(\rho) + \frac{6a'}{a} \frac{1}{\rho - \rho_1} = 0,$$

équation qui ne peut être vérifiée pour toutes les valeurs de ρ et de ρ_1 que si l'on a

$$a' = 0, \quad F(\rho) = 0.$$

Par suite, les trois fonctions a , a_1 , a_2 se réduisent ici à des constantes, et l'équation (6) fournit entre ces constantes l'unique

relation

$$(18) \quad a + a_1 + a_2 = 0.$$

143. Ainsi nous sommes, dès à présent, assurés qu'il existe trois systèmes triples orthogonaux, correspondants aux trois hypothèses

$$h = \frac{1}{2}, \quad h = 1, \quad h = 2.$$

Mais aussi nous nous trouvons en présence d'une difficulté nouvelle. Jusqu'ici nous n'avions rencontré que des systèmes connus et nous n'avions pas eu à achever les calculs qu'exige l'application de la méthode générale. Maintenant, au contraire, nous devons intégrer d'abord les six équations aux dérivées partielles du second ordre auxquelles satisfait la fonction M , et qui doivent donner, nous le savons, une solution avec quatre constantes arbitraires. Ensuite, quand M aura été obtenu, il faudra chercher les expressions des coordonnées rectangulaires x , y , z en fonction de ρ , ρ_1 , ρ_2 . Nous allons montrer, tout d'abord, que ce second problème sera complètement résolu toutes les fois qu'on aura déterminé la valeur la plus générale de M .

Nous avons vu, en effet (n° 98), que si l'on a obtenu une valeur particulière de M et les expressions de x , y , z en fonction de ρ , ρ_1 , ρ_2 dans le système orthogonal correspondant, les autres valeurs de M , correspondant aux systèmes qui dérivent par inversion du proposé, sont de la forme

$$kM[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2],$$

a , b , c , k désignant quatre constantes quelconques. Si donc on pose

$$(19) \quad \begin{cases} M_1 = Mx, & M_2 = My, & M_3 = Mz, \\ M_4 = M \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}, & M_5 = M, \end{cases}$$

on voit que la valeur la plus générale de M sera

$$M = -2akM_1 - 2bkM_2 - 2ckM_3 + 2kM_4 + (a^2 + b^2 + c^2)kM_5,$$

ou, sous une forme plus élégante,

$$(20) \quad M = a_1M_1 + a_2M_2 + a_3M_3 + a_4M_4 + a_5M_5,$$

les constantes a_i étant liées par la relation quadratique

$$(21) \quad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - 2a_4a_5 = 0.$$

Remarquons d'ailleurs que les cinq fonctions M_i seront, elles aussi, liées par la relation quadratique homogène

$$(22) \quad M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 - 2M_4M_5 = 0,$$

et que cette relation homogène du second degré est la seule qui puisse exister entre les cinq fonctions.

De plus, un calcul facile montre que, si l'élément linéaire du système cherché est donné par la formule

$$(23) \quad ds^2 = \frac{1}{M^2} (A d\rho^2 + A_1 d\rho_1^2 + A_2 d\rho_2^2),$$

on a identiquement

$$(24) \quad dM_1^2 + dM_2^2 + dM_3^2 - 2dM_4dM_5 = A d\rho^2 + A_1 d\rho_1^2 + A_2 d\rho_2^2.$$

Il résulte de toutes ces remarques que la solution la plus générale des six équations aux dérivées partielles qui déterminent M et forment un système complet se présentera sous la forme

$$(25) \quad M = a_1M_1 + a_2M_2 + a_3M_3 + a_4M_4 + a_5M_5,$$

les six fonctions M_i n'étant pas nécessairement celles qui sont définies par les formules (19), mais *pouvant s'y ramener par une substitution linéaire à coefficients constants*. De là et des propriétés élémentaires des formes quadratiques résulte la conséquence suivante :

La valeur la plus générale de M satisfaisant aux six équations aux dérivées partielles se présentera sous la forme (25), les six fonctions M_i étant liées par une relation quadratique homogène à coefficients constants

$$(26) \quad \varphi(M_1, M_2, \dots, M_5) = 0,$$

et les six constantes a_i par une autre relation homogène

$$(27) \quad \psi(a_1, a_2, \dots, a_5) = 0.$$

Les deux formes quadratiques φ et ψ seront adjointes l'une à

l'autre et l'on aura

$$(28) \quad \varphi(dM_1, dM_2, \dots, dM_5) = \frac{1}{\lambda^2} (A d\rho^2 + A_1 d\rho_1^2 + A_2 d\rho_2^2),$$

λ désignant une nouvelle constante.

Si, par une substitution linéaire quelconque, on ramène la relation (26) à la forme (22), ou, ce qui est la même chose, la relation (27) à la forme (21), il existera un système orthogonal pour lequel on aura

$$(29) \quad \begin{cases} x = \frac{M_1}{M_5}, & y = \frac{M_2}{M_5}, & z = \frac{M_3}{M_5}, & x^2 + y^2 + z^2 = \frac{2M_4}{M_5}, \\ M = \lambda M_5. \end{cases}$$

On obtient un résultat plus élégant encore en ramenant les deux relations quadratiques à ne contenir que les carrés des variables, de telle manière que l'on ait

$$(30) \quad \sum_{i=1}^{i=5} M_i^2 = 0, \quad \sum_{i=1}^{i=5} a_i^2 = 0.$$

Les M_i , étant des fonctions linéaires de $x, y, z, x^2 + y^2 + z^2$, représenteront alors les coordonnées pentasphériques du point (x, y, z) relatives à un système quelconque de sphères orthogonales; et l'expression de l'élément linéaire de l'espace dans ce système sera donnée par la formule

$$(31) \quad ds^2 = \frac{\sum dM_i^2}{\left(\sum \frac{M_i}{R_i}\right)^2},$$

R_1, R_2, \dots, R_5 désignant les rayons des cinq sphères coordonnées. Comme on a alors, en vertu de la relation générale (28),

$$(32) \quad \sum dM_i^2 = \frac{1}{\lambda^2} (A d\rho^2 + A_1 d\rho_1^2 + A_2 d\rho_2^2),$$

on voit bien que l'on obtiendra la formule

$$(33) \quad ds^2 = \frac{A d\rho^2 + A_1 d\rho_1^2 + A_2 d\rho_2^2}{\left(\lambda \sum \frac{M_i}{R_i}\right)^2}.$$

C'est l'élément linéaire du système qui correspond à la valeur suivante de M (1)

$$(34) \quad M = \lambda \sum \frac{M_i}{R_i}.$$

144. Nous allons appliquer la méthode précédente à la recherche de l'un des trois systèmes triples qui restent à déterminer. Nous choisirons le cas où l'on a

$$h = 1,$$

parce que le système auquel il conduit se retrouvera au Chapitre suivant.

Les valeurs de H , H_1 , H_2 sont alors les suivantes :

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} H = \frac{1}{M\sqrt{a}(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)}, \\ H_1 = \frac{1}{M\sqrt{a_1}(\rho_1 - \rho)(\rho_1 - \rho_2)}, \\ H_2 = \frac{1}{M\sqrt{a_2}(\rho_2 - \rho)(\rho_2 - \rho_1)}, \end{array} \right.$$

et l'on a

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} a = m\rho^2 + 2n\rho + p, \\ a_1 = m_1\rho_1^2 + 2n_1\rho_1 + p_1, \\ a_2 = m_2\rho_2^2 + 2n_2\rho_2 + p_2, \end{array} \right.$$

(1) En vertu de la relation bien connue

$$\sum \frac{1}{R_i^2} = 0$$

entre les rayons de cinq sphères orthogonales, on voit bien que les coefficients des M_i dans la formule (34) satisferont à la seconde des relations (30).

Il n'est pas inutile de remarquer qu'un système de coordonnées pentasphériques est pleinement déterminé, si l'on donne les rayons des cinq sphères orthogonales; car la distance d_{ij} des centres de deux sphères coordonnées quelconques (S_i) et (S_j) est immédiatement donnée par la formule

$$d_{ij}^2 = R_i^2 + R_j^2,$$

et il est clair qu'on peut construire l'ensemble des cinq sphères si l'on connaît à la fois leurs rayons et les distances mutuelles de leurs centres.

avec les conditions

$$(37) \quad \begin{cases} m + m_1 + m_2 = 0, \\ n + n_1 + n_2 = 0, \\ p + p_1 + p_2 = 0. \end{cases}$$

Quant à la fonction M, elle satisfait d'abord aux trois équations

$$(38) \quad \begin{cases} (\rho - \rho_1)x_{01} = x_0 - x_1, \\ (\rho_1 - \rho_2)x_{12} = x_1 - x_2, \\ (\rho_2 - \rho)x_{02} = x_2 - x_0, \end{cases}$$

déduites des formules (4) où l'on a fait $h = 1$.

Dans ce cas particulier, le système (B) peut être complètement intégré et les équations (38) admettent pour intégrale générale la valeur suivante de M

$$(39) \quad M = \frac{r}{(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)} + \frac{r_1}{(\rho_1 - \rho)(\rho_1 - \rho_2)} + \frac{r_2}{(\rho_2 - \rho)(\rho_2 - \rho_1)},$$

où chacune des fonctions r_i ne dépend que de la variable de même indice. Tout se ramène donc à la détermination de ces trois fonctions r_i .

Posons

$$(40) \quad N = r(\rho_1 - \rho_2) + r_1(\rho_2 - \rho) + r_2(\rho - \rho_1).$$

Les quantités H, H₁, H₂ prendront la forme plus simple

$$(41) \quad H = \frac{\rho_1 - \rho_2}{N\sqrt{a}}, \quad H_1 = \frac{\rho_2 - \rho}{N\sqrt{a_1}}, \quad H_2 = \frac{\rho - \rho_1}{N\sqrt{a_2}}.$$

Si nous calculons les valeurs des fonctions β_{ik} , nous aurons, par exemple,

$$(42) \quad \begin{cases} \beta_{01} = \frac{\sqrt{a}}{N\sqrt{a_1}} [r'(\rho - \rho_2) + r_2 - r], \\ \beta_{10} = \frac{\sqrt{a_1}}{N\sqrt{a}} [r'_1(\rho_2 - \rho_1) + r_1 - r_2]. \end{cases}$$

Ces formules nous permettent d'établir immédiatement une propriété géométrique fondamentale du système cherché.

Appliquons la relation (18) du n° 109

$$(43) \quad \frac{1}{R_{01}} = -\frac{1}{HH_1} \frac{\partial H_1}{\partial \rho} = -\frac{\beta_{01}}{H_1},$$

qui fait connaître le rayon de courbure principal pour la surface de paramètre ρ relativement à l'arc $H_1 d\rho_1$; nous aurons ici

$$(44) \quad \frac{1}{R_{01}} = \sqrt{a} \left(r' - \frac{r - r_2}{\rho - \rho_2} \right).$$

On voit que ce rayon de courbure ne dépend pas de ρ_1 et demeure, par conséquent, le même quand on se déplace sur la ligne de courbure pour laquelle ρ_1 varie seule. *Cette ligne de courbure est donc un cercle et notre système triple est, par suite, exclusivement formé avec des surfaces à lignes de courbure circulaires, c'est-à-dire avec des cyclides de Dupin.*

145. Or nous avons déjà rencontré deux systèmes formés exclusivement avec de telles cyclides. Pour l'un d'eux notamment, celui qui a été étudié au n° 36, nous avons vu qu'il est formé avec des cyclides du troisième ordre. Si l'on désigne par ρ, ρ_1, ρ_2 les paramètres des trois familles de quadriques définies par l'équation

$$(45) \quad \frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} + \frac{z^2}{c-\lambda} - 1 = 0,$$

nous avons montré que les paramètres des trois familles orthogonales sont

$$\frac{(a-\rho_1)(a-\rho_2)}{a-\rho}, \quad \frac{(b-\rho_1)(b-\rho_2)}{b-\rho}, \quad \frac{(c-\rho_1)(c-\rho_2)}{c-\rho}.$$

Si donc nous désignons par α, β, γ les paramètres de ces trois familles, nous pourrons les définir par les équations

$$(46) \quad \begin{cases} \frac{(a-\rho_1)(a-\rho_2)}{a-\rho} = a - \alpha, \\ \frac{(b-\rho_1)(b-\rho_2)}{b-\rho} = b - \beta, \\ \frac{(c-\rho_1)(c-\rho_2)}{c-\rho} = c - \gamma. \end{cases}$$

Un calcul facile nous conduit à la relation

$$\frac{(a-x)(a-\rho)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(b-\beta)(b-\rho)}{(b-a)(b-c)} + \frac{(c-\gamma)(c-\rho)}{(c-a)(c-b)} = 1,$$

qui fera connaître ρ et donnera

$$(47) \quad \rho = \frac{a(b-c)x + b(c-a)\beta + c(a-b)\gamma}{(b-c)x + (c-a)\beta + (a-b)\gamma}.$$

De là, on déduira aisément les expressions des coordonnées rectangulaires x, y, z en fonction des coordonnées curvilignes α, β, γ . On a, par exemple,

$$(48) \quad x = (a-\rho) \sqrt{\frac{a-x}{(a-b)(a-c)}} = \frac{\sqrt{(a-b)(a-c)(a-x)}(\gamma-\beta)}{(b-c)x + (c-a)\beta + (a-b)\gamma},$$

et les expressions analogues en y et z .

Mais l'essentiel est d'obtenir l'expression de l'élément linéaire. En différenciant les formules (46), on a

$$(49) \quad \frac{dx}{x-a} = \frac{d\rho_1}{\rho_1-a} + \frac{d\rho_2}{\rho_2-a} - \frac{d\rho}{\rho-a}.$$

En multipliant cette équation par x , en l'élevant au carré et ajoutant ensuite les deux équations analogues, on aura

$$(50) \quad 4ds^2 = \frac{x^2 dx^2}{(x-a)^2} + \frac{y^2 d\beta^2}{(\beta-b)^2} + \frac{z^2 d\gamma^2}{(\gamma-c)^2},$$

ou encore

$$(51) \quad ds^2 = \frac{1}{M^2} \left[\frac{(\beta-\gamma)^2 dx^2}{(a-x)(b-c)} + \frac{(\gamma-x)^2 d\beta^2}{(b-\beta)(c-a)} + \frac{(x-\beta)^2 d\gamma^2}{(c-\gamma)(a-b)} \right],$$

M ayant la valeur

$$(52) \quad M = \frac{2(b-c)x + 2(c-a)\beta + 2(a-b)\gamma}{\sqrt{(a-b)(a-c)(b-c)}}.$$

C'est bien là un cas particulier de la forme que nous étudions, celui où les polynômes a, a_1, a_2 seraient du premier degré et auraient les valeurs suivantes

$$(a-x)(b-c), \quad (b-\beta)(c-a), \quad (c-\gamma)(a-b).$$

En effectuant une même transformation homographique sur α , β , γ , on obtiendrait le cas où les trois polynômes du second degré $a(\rho)$, $a_1(\rho)$, $a_2(\rho)$ sont assujettis à l'unique condition d'avoir une racine commune. Mais on ne parvient pas ainsi au système le plus général de la forme (35).

146. Il est vrai que nous avons fait connaître, au n° 35, un autre système triple orthogonal, exclusivement composé de cyclides et plus étendu que le précédent. Nous pourrions procéder pour ce nouveau système comme pour le précédent et vérifier qu'il nous donne cette fois l'élément linéaire le plus général défini par les valeurs (35) de H , H_1 , H_2 . Mais il nous paraît plus intéressant d'aborder le problème directement et de le résoudre par la détermination effective de la fonction M . Nous nous contenterons seulement de remarquer, pour simplifier la recherche, que les polynômes a , a_1 , a_2 étant liés par la relation

$$a(\rho) + a_1(\rho) + a_2(\rho) = 0,$$

c'est-à-dire étant en involution, ils pourront toujours, excepté dans le cas, déjà examiné au numéro précédent, où ils auraient une seule racine commune, être ramenés par une même substitution homographique à ne plus contenir les termes du premier degré. Nous pourrions donc supposer, dans ce qui va suivre,

$$n = n_1 = n_2 = 0.$$

Par suite de la forme de N , les équations du système (B) sont toutes vérifiées et il reste seulement à satisfaire aux trois équations du système (B'), telles que la suivante

$$\frac{\partial \beta_{01}}{\partial \rho} + \frac{\partial \beta_{10}}{\partial \rho_1} + \beta_{20} \beta_{21} = 0,$$

Si nous substituons dans cette équation les expressions des quantités β_{ik} fournies par les formules (42) et celles que l'on en déduit à l'aide de permutations circulaires, elle devient

$$(53) \quad \begin{cases} a'N[r'(\rho - \rho_2) + r_2 - r] + 2a N r''(\rho - \rho_2) \\ + a'_1N[r'_1(\rho_2 - \rho_1) + r_1 - r_2] + 2a_1N r''_1(\rho_2 - \rho_1) \\ - 2a [r'(\rho - \rho_2) + r_2 - r][r'(\rho_1 - \rho_2) + r_2 - r_1] \\ - 2a_1[r'_1(\rho_2 - \rho_1) + r_1 - r_2][r'_1(\rho_2 - \rho_1) + r_1 - r_2] \\ + 2a_2[r'_2(\rho_2 - \rho_1) + r_1 - r_2][r'_2(\rho - \rho_2) + r_2 - r] = 0. \end{cases}$$

Pour trouver les valeurs de r , r_1 , r_2 qui peuvent vérifier cette équation, prenons deux fois la dérivée par rapport à ρ et deux fois la dérivée par rapport à ρ_1 . Nous aurons

$$\begin{aligned} r_1'' \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \{ & a'(\rho_2 - \rho)[r'(\rho - \rho_2) + r_2 - r] \\ & - 2ar''(\rho - \rho_2)^2 + 2ar'(\rho - \rho_2) + 2ar_2 - 2ar \} \\ + r'' \frac{\partial^2}{\partial \rho_1^2} \{ & a'_1(\rho_1 - \rho_2)[r'_1(\rho_2 - \rho_1) + r_1 - r_2] \\ & - 2a_1r_1''(\rho_1 - \rho_2)^2 - 2a_1r_1'(\rho_2 - \rho_1) \\ & + 2a_1r_2 - 2a_1r_1 \} - 2a_2r''r_1'' = 0. \end{aligned}$$

Si nous remarquons que r_2 disparaît de cette équation et que, en vertu des formules (37), on peut écrire

$$a_2r''r_1'' = -r_1'' \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} [(m\rho_2^2 + p)r] - r'' \frac{\partial^2}{\partial \rho_1^2} [(m_1\rho_2^2 + p_1)r_1],$$

l'équation précédente prendra la forme

$$\begin{aligned} r_1'' \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} [& -a'r'(\rho - \rho_2)^2 + ra'(\rho - \rho_2) \\ & - 2ar''(\rho - \rho_2)^2 + 2ar'(\rho - \rho_2) - 2ar + 2(m\rho_2^2 + p)r] \\ + r'' \frac{\partial^2}{\partial \rho_1^2} [& -a'_1r'_1(\rho_1 - \rho_2)^2 + r_1a'_1(\rho_1 - \rho_2) - 2a_1r_1''(\rho_1 - \rho_2)^2 \\ & + 2a_1r'_1(\rho_1 - \rho_2) - 2a_1r_1 + 2(m_1\rho_2^2 + p_1)r_1] = 0. \end{aligned}$$

En égalant à zéro le coefficient de ρ_2^2 , celui de ρ_2 et le terme indépendant de ρ_2 , on trouvera les trois relations

$$r_1'' \frac{d^2}{d\rho^2} (-a'r' - 2ar'' + 2mr) + r'' \frac{d^2}{d\rho_1^2} (-a'_1r'_1 - 2a_1r_1'' + 2m_1r_1) = 0,$$

$$\begin{aligned} r_1'' \frac{d^2}{d\rho^2} (2a'r'\rho - ra' + 4ar''\rho - 2ar') \\ + r'' \frac{d^2}{d\rho_1^2} (2a'_1r'_1\rho_1 - r_1a'_1 + 4a_1r_1''\rho_1 - 2a_1r_1') = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_1'' \frac{d^2}{d\rho^2} (-a'r'\rho^2 + r\rho a' - 2a\rho^2r'' + 2a\rho r' - 2ar + 2pr) \\ + r'' \frac{d^2}{d\rho_1^2} (-a'_1r'_1\rho_1^2 + r_1\rho_1a'_1 - 2a_1\rho_1^2r_1'' + 2a_1\rho_1r_1' - 2a_1r_1 + 2p_1r_1) = 0. \end{aligned}$$

Or la forme de ces équations indique comment on pourra y sa-

tisfaire. Chacune d'elles, divisée par $r''r_1''$, prend la forme

$$\varpi(\rho) + \varpi_1(\rho_1) = 0;$$

et, par des permutations circulaires, on peut lui adjoindre les suivantes

$$\varpi_1(\rho_1) + \varpi_2(\rho_2) = 0,$$

$$\varpi_2(\rho_2) + \varpi(\rho) = 0;$$

il faudra donc que l'on ait à la fois

$$\varpi(\rho) = 0, \quad \varpi_1(\rho_1) = 0, \quad \varpi_2(\rho_2) = 0.$$

Ainsi nous pouvons écrire ici :

$$\frac{d^2}{d\rho^2} (-a'r' - 2ar'' + 2mr) = 0,$$

$$\frac{d^2}{d\rho^2} [4a\rho r'' - 2ar' + a'(2r'\rho - r)] = 0,$$

$$\frac{d^2}{d\rho^2} [-2ar''\rho^2 + 2ar'\rho - 2ar + a'\rho(r - r'\rho) + 2pr] = 0,$$

et des formules semblables pour r_1, r_2 .

En intégrant les équations précédentes, on a

$$(54) \quad \left\{ \begin{array}{l} -2ar'' - a'r' + 2mr = u, \\ 2a(2\rho r'' - r') + a'(2r'\rho - r) = v, \\ -2a(r''\rho^2 - r'\rho + r) + a'\rho(r - r'\rho) + 2pr = w, \end{array} \right.$$

u, v, w étant des polynomes du premier degré en ρ . En éliminant r'' entre les deux premières, on trouve

$$(55) \quad -2ar' + a'r = 2u\rho + v,$$

ce qui donne, en différentiant,

$$-2ar'' - a'r' + ra'' = 2u + 2\rho u' + v'.$$

Retranchons de cette équation la première (54), il viendra la relation

$$u + 2\rho u' + v' = 0,$$

d'où l'on déduit que le polynome u doit nécessairement se réduire à une constante. On est ainsi conduit à reconnaître, en reprenant l'équation (55), que r doit satisfaire à une équation de la forme

suivante

$$a'r - 2ar' = \alpha_0\rho + \beta_0,$$

où α_0 et β_0 désignent deux constantes arbitraires.

On pourrait aussi remarquer que l'on a identiquement

$$u\rho^2 + v\rho + w = 0,$$

ce qui exige encore que le polynome du premier degré u se réduise à une constante.

L'intégrale de l'équation en r est de la forme suivante

$$(56) \quad r = \beta\rho - \alpha + \gamma\sqrt{a},$$

α , β , γ étant des constantes. On aura de même, α_i , β_i , γ_i désignant de nouvelles constantes,

$$(56)' \quad \begin{cases} r_1 = \beta_1\rho_1 - \alpha_1 + \gamma_1\sqrt{a_1}, \\ r_2 = \beta_2\rho_2 - \alpha_2 + \gamma_2\sqrt{a_2}. \end{cases}$$

En portant ces valeurs dans l'équation de condition (53), on trouvera entre ces constantes les trois relations

$$(57) \quad \begin{cases} m\alpha + m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 = 0, \\ p\beta + p_1\beta_1 + p_2\beta_2 = 0, \\ -mp\gamma^2 - m_1p_1\gamma_1^2 - m_2p_2\gamma_2^2 \\ \quad + m\alpha^2 + p\beta^2 + m_1\alpha_1^2 + p_1\beta_1^2 + m_2\alpha_2^2 + p_2\beta_2^2 = 0, \end{cases}$$

qui seront, à la fois, nécessaires et suffisantes.

On peut résoudre ces équations comme il suit. Écrivons la première sous la forme

$$m_1(\alpha_1 - \alpha) + m_2(\alpha_2 - \alpha) = 0.$$

On pourra poser

$$\alpha_1 = \alpha - \lambda m_2, \quad \alpha_2 = \alpha + \lambda m_1.$$

De même on pourra écrire

$$\beta_1 = \beta - \mu p_2, \quad \beta_2 = \beta + \mu p_1,$$

et il viendra alors

$$\begin{aligned} N = & \gamma(\rho_1 - \rho_2)\sqrt{a} + \gamma_1(\rho_2 - \rho)\sqrt{a_1} + \gamma_2(\rho - \rho_1)\sqrt{a_2} \\ & + \lambda(m\rho + m_1\rho_1 + m_2\rho_2) + \mu(p\rho_1\rho_2 + p_1\rho\rho_2 + p_2\rho\rho_1), \end{aligned}$$

les cinq constantes $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \lambda, \mu$ étant liées, comme il fallait s'y attendre, par une équation homogène du second degré qui est

$$mp\gamma^2 + m_1p_1\gamma_1^2 + m_2p_2\gamma_2^2 + mm_1m_2\lambda^2 + pp_1p_2\mu^2 = 0.$$

Si donc on pose

$$(58) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{(\rho_1 - \rho_2)\sqrt{a}}{\sqrt{-mp}}, & x_2 = \frac{(\rho_2 - \rho)\sqrt{a_1}}{\sqrt{-m_1p_1}}, & x_3 = \frac{(\rho - \rho_1)\sqrt{a_2}}{\sqrt{-m_2p_2}}, \\ x_4 = \frac{m\rho + m_1\rho_1 + m_2\rho_2}{\sqrt{-mm_1m_2}}, & x_5 = \frac{p\rho_1\rho_2 + p_1\rho\rho_2 + p_2\rho\rho_1}{\sqrt{-pp_1p_2}} \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\gamma'_1}{\sqrt{-mp}}, & \gamma_1 &= \frac{\gamma'_2}{\sqrt{-m_1p_1}}, \\ \gamma_2 &= \frac{\gamma'_3}{\sqrt{-m_2p_2}}, & \lambda &= \frac{\gamma'_4}{\sqrt{-mm_1m_2}}, & \mu &= \frac{\gamma'_5}{\sqrt{-pp_1p_2}}, \end{aligned}$$

on aura

$$(59) \quad N = \gamma'_1 x_1 + \gamma'_2 x_2 + \gamma'_3 x_3 + \gamma'_4 x_4 + \gamma'_5 x_5,$$

les constantes γ'_k étant liées par la relation quadratique

$$(60) \quad \sum \gamma_i'^2 = 0.$$

Donc, d'après la remarque du n° 143, les valeurs des x_i données par les formules (58) seront les expressions des coordonnées pentasphériques en fonction de ρ, ρ_1, ρ_2 . On vérifiera, en effet, conformément à la théorie du numéro cité, que ces coordonnées vérifient l'équation

$$(61) \quad \sum x_i^2 = 0,$$

et qu'elles donnent la relation différentielle

$$(62) \quad \sum dx_i^2 = (\rho_1 - \rho_2)^2 \frac{d\rho^2}{a} + (\rho_2 - \rho)^2 \frac{d\rho_1^2}{a_1} + (\rho - \rho_1)^2 \frac{d\rho_2^2}{a_2}.$$

Les formules précédentes mettent en évidence toutes les propriétés du nouveau système. On voit d'abord que les intersections mutuelles des surfaces qui le composent sont des cercles. Si l'on donne, par exemple, des valeurs constantes à ρ_1 et à ρ_2 , les quatre coordonnées x_2, x_3, x_4, x_5 deviennent des fonctions linéaires de ρ et sont, par suite, reliées par deux équations linéaires et homogènes. Donc les surfaces qui composent le système sont des

cyclides de Dupin. De plus, puisque les cercles d'intersection des surfaces de paramètres ρ_1 et ρ_2 sont définis par deux équations linéaires où ne figure pas x_1 , ils sont tous orthogonaux à la sphère coordonnée (S_1) représentée par l'équation

$$x_1 = 0.$$

Ces cercles seront donc orthogonaux à une cyclide fixe (l'une quelconque de celles de paramètre ρ) et à une sphère fixe (S_1) . Ils forment donc le système le plus général défini au n° 33. C'est ce que nous voulions établir.

Au reste, ce résultat aurait pu se déduire, *sans nouveau développement*, des valeurs obtenues plus haut pour les fonctions r, r_1, r_2 . Car l'expression de r , par exemple, montre que, pour la surface dont le paramètre ρ satisfait à l'équation

$$m\rho^2 + p = a = 0,$$

les deux rayons de courbure principaux R_{01}, R_{02} , qui se calculent immédiatement à l'aide de la formule (44), auront pour valeur commune

$$R_{01} = R_{02} = \frac{1}{r'\sqrt{a}} = \frac{1}{\gamma\sqrt{-mp}}.$$

Donc *cette surface sera une sphère*, ce qui suffit à la démonstration du résultat précédent.

147. Pour l'étude des deux autres hypothèses

$$h = 2, \quad h = \frac{1}{2},$$

nous renverrons à notre travail déjà cité plus haut, nous contentant d'indiquer ici que le système correspondant à l'hypothèse $h = 2$ est nécessairement imaginaire et que le système correspondant à l'hypothèse $h = \frac{1}{2}$ est transcendant. Remarquons d'ailleurs que, malgré son apparente généralité, ce dernier système ne dépend d'aucune constante, le polynôme du troisième degré qui y figure pouvant toujours, par une substitution homographique légitime (n° 135), être réduit à n'avoir que des racines numériques.

CHAPITRE V.

RECHERCHE DES SYSTÈMES ISOTHERMES ET D'AUTRES SYSTÈMES QUI SE PRÉSENTENT DANS LA THÉORIE DE LA CHALEUR.

On a vu que, parmi les systèmes déterminés dans les deux Chapitres précédents doivent se trouver : 1^o les systèmes composés de trois familles isothermes; 2^o ceux pour lesquels l'équation de la chaleur admet, dans des conditions précédemment définies, une infinité de solutions de la forme $P f(\rho) f_1(\rho_1) f_2(\rho_2)$. — L'objet du présent Chapitre est précisément la détermination de ces deux classes particulières, comprises dans celle que nous avons déterminée. — On commence par la recherche des systèmes isothermes en envisageant successivement les différentes solutions obtenues dans les deux Chapitres précédents. — On obtient d'abord des systèmes formés d'une famille de plans parallèles et de deux familles de cylindres isothermes, ou d'une famille de sphères concentriques et de deux familles de cônes isothermes, ou d'une famille de plans passant par une droite et de deux familles de quadriques homofocales de révolution. — On obtient aussi le système des quadriques homofocales et un autre système imaginaire qui a été signalé, mais non déterminé, par Combescur. — Bien que ce dernier système ne puisse jouer aucun rôle en Physique mathématique, il y a intérêt à le déterminer; on montre qu'il est formé avec des cyclides de Dupin qui sont imaginaires et du troisième degré. — Après avoir ainsi terminé la recherche des systèmes isothermes, on suit une méthode analogue pour la détermination de la seconde classe signalée plus haut. — On démontre d'abord un lemme fondamental de Lord Kelvin, relatif à l'inversion, puis on montre que les systèmes cherchés se réduisent en définitive au seul système des cyclides homofocales et à ses variétés. — On retrouve cette propriété des cyclides homofocales par une démonstration directe où l'on emploie les coordonnées pentasphériques et une forme remarquable que prend, avec ce système de coordonnées, l'équation de la chaleur. — Le Chapitre se termine par une remarque qui permet d'étendre une partie des résultats précédents aux systèmes de coordonnées curvilignes les plus généraux.

148. Après avoir indiqué comment on peut résoudre le plus général des problèmes que nous nous étions proposés, celui qui a pour objet la détermination de tous les systèmes triples dont les trois familles sont composées de surfaces à lignes de courbure isothermes, nous devons rappeler qu'au nombre des systèmes ainsi obtenus se trouvent nécessairement, comme nous l'avons démontré, 1^o tous ceux qui se composent de trois familles iso-

thermes; 2° ceux aussi pour lesquels l'équation de la chaleur admet les solutions particulières précédemment définies au n° 124 et de la forme $P f(\rho) f_1(\rho_1) f_2(\rho_2)$.

Nous commencerons par la recherche des systèmes composés de trois familles isothermes; c'est une question sur laquelle les découvertes de Lamé ont appelé les travaux d'un grand nombre de géomètres; les résultats obtenus dans les Chapitres antérieurs vont nous permettre d'en donner une solution complète et, nous l'espérons, rigoureuse (1).

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que trois fonctions $f(\rho)$, $f_1(\rho_1)$, $f_2(\rho_2)$ des coordonnées curvilignes puissent être des températures, c'est-à-dire soient solutions particulières de l'équation

$$\Delta_2 V = 0,$$

s'expriment, nous l'avons vu, par les équations

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{H_1 H_2}{H} f'(\rho) \right] = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left[\frac{H H_2}{H_1} f'_1(\rho_1) \right] = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left[\frac{H H_1}{H_2} f'_2(\rho_2) \right] = 0.$$

Il faudra donc, pour que les trois familles dont se compose le système orthogonal soient isothermes, que l'on puisse choisir les fonctions f , f_1 , f_2 de manière à vérifier les trois équations précédentes. Appliquons cette règle aux différents systèmes triples que nous avons obtenus.

149. Pour les premiers, on a (n° 131)

$$(2) \quad ds^2 = \frac{1}{M^2} [d\rho^2 + e^{2R}(d\rho_1^2 + d\rho_2^2)],$$

la fonction R de ρ_1 , ρ_2 devant vérifier l'équation

$$(3) \quad \frac{\partial^2 R}{\partial \rho_1^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial \rho_2^2} + C e^{2R} = 0,$$

où C désigne une constante quelconque.

(1) Il est clair que, si l'on se bornait à cette recherche particulière, les méthodes et les calculs donnés plus haut subiraient de très grandes simplifications.

Ici les conditions (1) prennent la forme suivante

$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial \rho_i} \left(\frac{f'_i(\rho_i)}{M} \right) = 0, \quad (i = 0, 1, 2),$$

et, si l'on pose

$$(5) \quad M = k f'(\rho) f'_1(\rho_1) f'_2(\rho_2),$$

elles expriment que les trois dérivées de k sont nulles; par suite, k est une constante et M est le produit de trois fonctions qui dépendent respectivement de ρ , de ρ_1 et de ρ_2 . Nous poserons, pour la commodité des calculs,

$$(6) \quad M = e^{-\alpha - \alpha_1 - \alpha_2},$$

α_i ne dépendant que de ρ_i . Alors, pour chacune des trois familles, les températures seront respectivement égales aux intégrales suivantes

$$\int e^{-\alpha} d\rho, \quad \int e^{-\alpha_1} d\rho_1, \quad \int e^{-\alpha_2} d\rho_2,$$

multipliées par des constantes quelconques.

Calculons les fonctions β_{ik} ; nous aurons ici

$$(7) \quad \begin{cases} \beta_{01} = e^R \alpha', & \beta_{10} = e^{-R} \alpha'_1, & \beta_{12} = \frac{\partial R}{\partial \rho_1} + \alpha'_1, \\ \beta_{02} = e^R \alpha', & \beta_{20} = e^{-R} \alpha'_2, & \beta_{21} = \frac{\partial R}{\partial \rho_2} + \alpha'_2. \end{cases}$$

En exprimant que ces fonctions vérifient les équations (B), (B'), on aura les conditions

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha' \alpha'_1 = 0, \quad \alpha' \alpha'_2 = 0, \\ \alpha'_1 \frac{\partial R}{\partial \rho_2} + \alpha'_2 \frac{\partial R}{\partial \rho_1} + \alpha'_1 \alpha'_2 = 0, \\ \alpha''_1 + \alpha'^2_2 + \alpha'_2 \frac{\partial R}{\partial \rho_2} - \alpha'_1 \frac{\partial R}{\partial \rho_1} + e^{2R} \alpha'' = 0, \\ \alpha''_2 + \alpha'^2_1 + \alpha'_1 \frac{\partial R}{\partial \rho_1} - \alpha'_2 \frac{\partial R}{\partial \rho_2} + e^{2R} \alpha'' = 0, \\ \frac{\partial^2 R}{\partial \rho_1^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial \rho_2^2} + \alpha''_1 + \alpha''_2 + e^{2R} \alpha'^2 = 0. \end{array} \right.$$

Si nous considérons les deux premières, nous avons le choix

entre deux hypothèses possibles, que nous allons envisager successivement. On peut supposer d'abord

$$(9) \quad \alpha'_1 = 0, \quad \alpha'_2 = 0.$$

Alors la troisième équation est vérifiée, les deux suivantes donnent

$$(10) \quad \alpha'' = 0, \\ \frac{\partial^2 R}{\partial \rho_1^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial \rho_2^2} + e^{2R} \alpha'^2 = 0.$$

Il faut que α' soit une constante. Si cette constante est nulle, l'expression de M fournie par la formule (6) se réduit à une constante. On peut faire

$$M = 1,$$

et l'élément linéaire du système triple a pour expression

$$(11) \quad ds^2 = d\rho^2 + e^{2R}(d\rho_1^2 + d\rho_2^2).$$

Les surfaces de paramètre ρ forment des plans parallèles, et les surfaces de paramètre ρ_1 et ρ_2 forment deux familles de cylindres isothermes. Telle est notre première solution.

150. Si la constante α' n'est pas nulle, posons

$$\alpha' = \frac{1}{a}.$$

On aura, en vertu de l'équation (10),

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \rho_1^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial \rho_2^2} + \frac{1}{a^2} e^{2R} = 0.$$

Cette équation exprime que la surface dont l'élément linéaire serait déterminé par la formule

$$ds^2 = e^{2R}(d\rho_1^2 + d\rho_2^2)$$

aurait sa courbure totale égale à $\frac{1}{a^2}$.

Comme on peut prendre ici

$$(12) \quad M = e^{-\frac{\rho}{a}},$$

L'élément linéaire du système triple aura pour expression

$$(13) \quad ds^2 = e^{\frac{2\rho}{a}} [d\rho^2 + e^{2R} (d\rho_1^2 + d\rho_2^2)].$$

Posons

$$(14) \quad e^{\frac{\rho}{a}} d\rho = d\rho', \quad e^{\frac{\rho}{a}} = \frac{\rho'}{a};$$

il viendra

$$(15) \quad ds^2 = d\rho'^2 + \rho'^2 \frac{e^{2R} (d\rho_1^2 + d\rho_2^2)}{a^2}.$$

Cet élément linéaire convient évidemment à un système composé d'une famille de sphères concentriques et de deux familles de cônes isothermes. Ce sera notre deuxième solution.

151. Revenons maintenant aux deux premières équations (8) pour examiner leur deuxième solution, qui correspond à l'hypothèse

$$(16) \quad \alpha' = 0.$$

Alors les trois équations suivantes du même système nous donneront les relations

$$\alpha_1'' + \alpha_1'^2 + \alpha_2'' + \alpha_2'^2 = 0, \\ \frac{\partial R}{\partial \rho_1} = \frac{\alpha_1' \alpha_1''}{\alpha_1'^2 + \alpha_2'^2}, \quad \frac{\partial R}{\partial \rho_2} = \frac{\alpha_2' \alpha_2''}{\alpha_1'^2 + \alpha_2'^2},$$

d'où l'on déduira, en désignant par h et k deux constantes,

$$(17) \quad \begin{cases} \alpha_1'' + \alpha_1'^2 = h^2, & \alpha_2'' + \alpha_2'^2 = -h^2, \\ e^{2R} = \frac{\alpha_1'^2 + \alpha_2'^2}{k}. \end{cases}$$

Posons

$$(18) \quad e^{\alpha_1} = \rho_1', \quad e^{\alpha_2} = \rho_2';$$

les deux premières équations (17) se transformeront dans les suivantes

$$\frac{d^2 \rho_1'}{d\rho_1'^2} = h^2 \rho_1', \quad \frac{d^2 \rho_2'}{d\rho_2'^2} = -h^2 \rho_2',$$

ce qui nous donnera, en intégrant et désignant par A, B, A', B' des constantes quelconques,

$$(19) \quad \begin{cases} \rho'_1 = A e^{h\rho_1} + B e^{-h\rho_1}, & \frac{d\rho'_1}{d\rho_1} = h \sqrt{\rho_1'^2 - 4AB}, \\ \rho'_2 = A' e^{ih\rho_2} + B' e^{-ih\rho_2}, & \frac{d\rho'_2}{d\rho_2} = h \sqrt{4A'B' - \rho_2'^2}. \end{cases}$$

Comme α_1 et α_2 n'entrent que par leur somme dans l'expression de M, il est permis de multiplier ρ'_1 par une constante, à la condition de diviser ρ'_2 par la même constante. Cela nous permettra de supposer, sans diminuer la généralité, que l'on a

$$(20) \quad AB = A'B'.$$

Alors on trouve

$$e^{2R} = \frac{4AB}{k} h^2 \frac{\rho_1'^2 - \rho_2'^2}{\rho_1' \rho_2'}.$$

Comme on peut prendre, en vertu des formules (6) et (18),

$$M = \frac{1}{\rho_1' \rho_2'},$$

on obtient, pour l'élément linéaire du système cherché, l'expression

$$(21) \quad ds^2 = (\rho_1' \rho_2')^2 d\varphi^2 + \frac{4AB}{k} (\rho_1'^2 - \rho_2'^2) \left\{ \frac{d\rho_1'^2}{\rho_1'^2 - 4AB} - \frac{d\rho_2'^2}{\rho_2'^2 - 4AB} \right\}.$$

Le lecteur vérifiera aisément que cette expression convient au système triple dont *deux familles sont formées de quadriques de révolution engendrées par des coniques homofocales tournant autour d'un de leurs axes communs, la troisième famille étant formée de plans passant par cet axe.*

Les valeurs particulières des constantes que nous avons négligées donneraient des cas-limites du système précédent.

152. Examinons maintenant les systèmes triples pour lesquels les valeurs de H, H₁, H₂ sont données par les formules (3) du Chapitre précédent (n° 135). Alors les conditions d'isothermie (1)

prendront la forme

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{f'(\rho) \sqrt{a}}{M} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\frac{f'_1(\rho_1) \sqrt{a_1}}{M} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left(\frac{f'_2(\rho_2) \sqrt{a_2}}{M} \right) = 0,$$

et elles ne pourront être vérifiées que si M est proportionnel au produit

$$f'(\rho) f'_1(\rho_1) f'_2(\rho_2) \sqrt{aa_1a_2},$$

c'est-à-dire est le produit de trois fonctions

$$\alpha, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2,$$

dépendant respectivement de ρ , de ρ_1 et de ρ_2 . Mais, comme M doit d'abord être une solution des trois équations (4) du n° 135, on reconnaîtra aisément, en substituant la valeur précédente dans ces équations, que l'on doit avoir

$$\rho + \frac{h\alpha}{\alpha'} = \rho_1 + \frac{h\alpha'_1}{\alpha'_1} = \rho_2 + \frac{h\alpha'_2}{\alpha'_2}.$$

La valeur commune des trois expressions précédentes ne doit dépendre ni de ρ , ni de ρ_1 , ni de ρ_2 et doit, par conséquent, se réduire à une constante k . En intégrant les équations

$$\rho_i + \frac{h\alpha_i}{\alpha'_i} = k,$$

on obtiendra pour M la valeur suivante

$$M = A(\rho - k)^{-h}(\rho_1 - k)^{-h}(\rho_2 - k)^{-h};$$

et cette valeur peut même être réduite à une constante ou à l'unité si l'on effectue sur les variables ρ , ρ_1 , ρ_2 la substitution

$$\rho - k = \frac{1}{\rho'}, \quad \rho_1 - k = \frac{1}{\rho'_1}, \quad \rho_2 - k = \frac{1}{\rho'_2},$$

qui est évidemment permise, d'après la remarque faite au n° 135.

Ainsi, on pourra supposer, dans la suite, $M = 1$ et l'on voit qu'alors, si le système est isotherme, les températures relatives aux trois familles qui le composent seront respectivement données par

les intégrales

$$\int \frac{d\rho}{\sqrt{a}}, \quad \int \frac{d\rho_1}{\sqrt{a_1}}, \quad \int \frac{d\rho_2}{\sqrt{a_2}},$$

que l'on pourra multiplier par des constantes quelconques.

153. Pour trouver ceux des systèmes qui sont isothermes, il faudra remarquer qu'ici les équations (B) sont toujours vérifiées et que, si l'on substitue les valeurs des fonctions β_{ik} dans le groupe (B'), on obtient trois conditions telles que la suivante

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\rho_1 - \rho_2)^{1-2h} \left[\frac{a'}{2} (\rho_2 - \rho) + a \frac{\rho - \rho_2}{\rho - \rho_1} - ah \right] \\ + (\rho_2 - \rho)^{1-2h} \left[\frac{a'_1}{2} (\rho_2 - \rho_1) + a_1 \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho - \rho_1} - a_1 h \right] \\ + a_2 h (\rho - \rho_1)^{1-2h} = 0. \end{array} \right.$$

Nous savons déjà que a_2 est un polynôme en ρ_2 d'un degré au plus égal à $4 - 2h$. L'équation précédente montre immédiatement que ce degré ne pourra dépasser $2 - 2h$; et, par conséquent, elle exclut déjà celui de nos systèmes qui correspond à l'hypothèse

$$h = 2.$$

Si l'on suppose maintenant $h = -\frac{1}{2}$, a , a_1 , a_2 représentent alors un même polynôme qui, d'après la remarque précédente, doit être du troisième degré au plus. On verra aisément que l'équation précédente est alors vérifiée sans qu'il soit nécessaire d'imposer de nouvelle condition à ce polynôme. On obtient ainsi *le système formé par les surfaces homofocales du second degré* et toutes ses variétés.

Si l'on suppose $h = \frac{1}{2}$, a , a_1 , a_2 , qui, dans le système correspondant, sont des polynômes du troisième degré au plus, devraient se réduire au premier degré. On verra aisément que l'équation précédente ne peut être vérifiée.

Enfin, si l'on suppose $h = 1$, a , a_1 , a_2 , qui sont, en général, des polynômes du second degré (n° 141), doivent se réduire à des constantes p , p_1 , p_2 dont la somme sera nulle. Dans ce cas, en effet, l'équation (22) sera toujours vérifiée.

154. Il semble donc que l'on puisse ajouter aux systèmes connus de Lamé, et retrouvés plus haut, un système nouveau pour lequel l'élément linéaire sera donné par la formule

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} ds^2 &= \frac{1}{(\rho - \rho_1)^2 (\rho_1 - \rho_2)^2 (\rho_2 - \rho)^2} \\ &\times \left[(\rho_1 - \rho_2)^2 \frac{d\rho^2}{p} + (\rho_2 - \rho)^2 \frac{d\rho_1^2}{p_1} + (\rho - \rho_1)^2 \frac{d\rho_2^2}{p_2} \right]. \end{aligned} \right.$$

Ce système, signalé pour la première fois par Combescure ⁽¹⁾, existe en effet. Mais, par suite de la relation

$$p + p_1 + p_2 = 0,$$

qui a lieu entre les constantes, il est toujours imaginaire. Il n'a donc pas d'intérêt pour la Physique mathématique; toutefois, comme les imaginaires doivent prendre une place aussi grande en Géométrie qu'en Analyse, il nous a paru intéressant de le définir complètement. C'est ce que l'on peut faire si on le considère comme un cas-limite de celui qui est formé de trois familles de cyclides à lignes de courbure circulaires et qui a été déjà déterminé plus haut, au n° 146.

Reprenons en effet les formules (58), (62) du n° 146 relatives à ce système; elles entraînent cette conséquence que l'expression de l'élément linéaire dans un système de coordonnées pentasphériques pour lequel les rayons des sphères coordonnées seraient R_1, R_2, \dots, R_5 serait donnée par la formule

$$(24) \quad ds^2 = \frac{\sum dx_k^2}{\left(\sum \frac{x_k}{R_k}\right)^2} = \frac{(\rho_1 - \rho_2)^2 \frac{d\rho^2}{a} + (\rho_2 - \rho)^2 \frac{d\rho_1^2}{a_1} + (\rho - \rho_1)^2 \frac{d\rho_2^2}{a_2}}{\left(\sum \frac{x_k}{R_k}\right)^2}.$$

Si nous faisons tendre vers zéro les trois constantes m, m_1, m_2 pour obtenir le cas où les polynômes a, a_1, a_2 se réduisent à des constantes p, p_1, p_2 dont la somme est nulle, les expressions des coordonnées x_k deviennent illusoires. Mais, si l'on développe les trois premières suivant les puissances positives des quantités m ,

(1) COMBESCURE (E.). *Sur les déterminants fonctionnels et les coordonnées curvilignes* (*Annales de l'École Normale*, 1^{re} série, t. IV, p. 93; 1867).

m_1 ou m_2 , considérées comme étant du même ordre, et si l'on pose, pour abrégér,

$$(25) \quad \begin{cases} \mathcal{Y}_1 = \rho_1 - \rho_2, & \mathcal{Y}_2 = \rho_2 - \rho, & \mathcal{Y}_3 = \rho - \rho_1, \\ p\mathcal{Y}'_1 = -\rho^2(\rho_1 - \rho_2), & p_1\mathcal{Y}'_2 = -\rho_1^2(\rho_2 - \rho), & p_2\mathcal{Y}'_3 = -\rho_2^2(\rho - \rho_1) \end{cases}$$

on aura

$$(26) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{\mathcal{Y}_1}{\sqrt{-m}} + \frac{\mathcal{Y}'_1}{2} \sqrt{-m} + \dots, \\ x_2 = \frac{\mathcal{Y}_2}{\sqrt{-m_1}} + \frac{\mathcal{Y}'_2}{2} \sqrt{-m_1} + \dots, \\ x_3 = \frac{\mathcal{Y}_3}{\sqrt{-m_2}} + \frac{\mathcal{Y}'_3}{2} \sqrt{-m_2} + \dots \end{cases}$$

Portons, concurremment avec x_4, x_5 , ces expressions dans l'identité (61) du n° 146; on obtiendra, en égalant à zéro les termes des deux premiers degrés, les nouvelles relations identiques

$$(27) \quad \begin{cases} \frac{\mathcal{Y}_1^2}{m} + \frac{\mathcal{Y}_2^2}{m_1} + \frac{\mathcal{Y}_3^2}{m_2} - x_4^2 = 0, \\ \mathcal{Y}_1\mathcal{Y}'_1 + \mathcal{Y}_2\mathcal{Y}'_2 + \mathcal{Y}_3\mathcal{Y}'_3 + x_5^2 = 0, \end{cases}$$

auxquelles il faudra joindre la suivante

$$(28) \quad \mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y}_2 + \mathcal{Y}_3 = 0,$$

simple conséquence des équations de définition (25).

En effectuant les mêmes substitutions des valeurs des x_k dans l'équation (62) du n° 146, on trouvera de même

$$(29) \quad \frac{d\mathcal{Y}_1^2}{m_1} + \frac{d\mathcal{Y}_2^2}{m_2} + \frac{d\mathcal{Y}_3^2}{m_3} - dx_4^2 = 0,$$

$$(30) \quad \begin{cases} d\mathcal{Y}_1 d\mathcal{Y}'_1 + d\mathcal{Y}_2 d\mathcal{Y}'_2 + d\mathcal{Y}_3 d\mathcal{Y}'_3 + dx_5^2 \\ = (\rho_1 - \rho_2)^2 \frac{d\rho^2}{p} + (\rho_2 - \rho)^2 \frac{d\rho_1^2}{p_1} + (\rho - \rho_1)^2 \frac{d\rho_2^2}{p_2}. \end{cases}$$

Ces relations permettent d'obtenir le résultat cherché.

Si l'on élimine, en effet, \mathcal{Y}_3 à l'aide de l'identité (28), la seconde identité (27) prend la forme

$$\mathcal{Y}_1(\mathcal{Y}'_1 - \mathcal{Y}'_3) + \mathcal{Y}_2(\mathcal{Y}'_2 - \mathcal{Y}'_3) + x_5^2 = 0$$

et se présente sous la forme d'une relation quadratique entre cinq fonctions. Si l'on pose

$$(31) \quad \begin{cases} x'_1 = \frac{\gamma_1 + \gamma'_1 - \gamma'_3}{2}, & x'_2 = i \frac{\gamma_1 - \gamma'_1 + \gamma'_3}{2}, \\ x'_3 = \frac{\gamma_2 + \gamma'_2 - \gamma'_3}{2}, & x'_4 = i \frac{\gamma_2 - \gamma'_2 + \gamma'_3}{2}, & x'_5 = x_5, \end{cases}$$

cette relation quadratique prend la forme

$$\sum x'_k{}^2 = 0,$$

et l'équation (30) nous donne alors

$$(32) \quad \sum dx'_k{}^2 = (\rho_1 - \rho_2)^2 \frac{d\rho^2}{p} + (\rho_2 - \rho)^2 \frac{d\rho_1^2}{p_1} + (\rho - \rho_1)^2 \frac{d\rho_2^2}{p_2}.$$

Cela posé, essayons de disposer des cinq constantes R_k de telle manière que l'on ait

$$(33) \quad \sum \frac{x'_k}{R_k} = (\rho_1 - \rho_2)(\rho_2 - \rho)(\rho - \rho_1) = \zeta.$$

On verra facilement qu'il suffit, pour cela, de prendre

$$(34) \quad \frac{1}{R_1} = p, \quad \frac{1}{R_2} = ip, \quad \frac{1}{R_3} = p_1, \quad \frac{1}{R_4} = ip_1, \quad \frac{1}{R_5} = 0.$$

Alors l'élément linéaire de l'espace, dans le système de coordonnées pentasphériques pour lequel les rayons des sphères coordonnées seraient donnés par les formules précédentes, aura précisément pour expression

$$(35) \quad \left\{ \begin{aligned} ds^2 &= \frac{\sum dx_k^2}{\left(\sum \frac{x_k}{R_k}\right)^2} \\ &= \frac{1}{\zeta^2} \left[(\rho_1 - \rho_2)^2 \frac{d\rho^2}{p} + (\rho_2 - \rho)^2 \frac{d\rho_1^2}{p_1} + (\rho - \rho_1)^2 \frac{d\rho_2^2}{p_2} \right]. \end{aligned} \right.$$

C'est la formule (23) donnée plus haut, qui caractérise le système cherché.

155. Si l'on ne veut pas employer les coordonnées pentasphériques, on peut raisonner comme il suit. Les fonctions γ_i, γ'_i, x_5

satisfont aux relations (27), (30) que l'on peut transformer comme il suit. On a

$$(36) \quad \rho y'_1 + \rho_1 y'_2 + \rho_2 y'_3 = (\rho - \rho_1)(\rho_1 - \rho_2)(\rho_2 - \rho) = \zeta.$$

Introduisons dans les relations la fonction ζ à la place de y'_i ; elles deviendront

$$(37) \quad \frac{x_1 \zeta}{\rho} + \left(y_2 - \frac{\rho_1}{\rho} y_1 \right) (\rho_2 - \rho) + x_3^2 = 0,$$

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dy_1}{\rho} d\zeta + d \left(y_2 - \frac{\rho_1}{\rho} y_1 \right) d(\rho_2 - \rho) + dx_3^2 \\ = (\rho_1 - \rho_2)^2 \frac{d\rho^2}{\rho} + (\rho_2 - \rho)^2 \frac{d\rho_1^2}{\rho_1} + (\rho - \rho_1)^2 \frac{d\rho_2^2}{\rho_2}. \end{aligned} \right.$$

Cela posé, il suffit d'appliquer le lemme du n° 143. On satisfera à la première identité en prenant

$$(39) \quad \left\{ \begin{aligned} X &= \frac{x_3}{\zeta} = \frac{\rho \rho_1 \rho_2 + \rho_1 \rho \rho_2 + \rho_2 \rho \rho_1}{\zeta \sqrt{-\rho \rho_1 \rho_2}}, \\ Y - Zi &= \frac{\rho y_2 - \rho_1 y_1}{-\zeta \sqrt{-\rho \rho_1 \rho_2}} = \frac{\rho \rho + \rho_1 \rho_1 + \rho_2 \rho_2}{\zeta \sqrt{-\rho \rho_1 \rho_2}}, \\ Y + Zi &= \frac{y'_3 - y'_2}{\rho \zeta} \sqrt{-\rho \rho_1 \rho_2} = \frac{\rho_1 \rho_2^2 (\rho - \rho_1) - \rho_2 \rho_1^2 (\rho_2 - \rho)}{\zeta \sqrt{-\rho \rho_1 \rho_2}}, \\ X^2 + Y^2 + Z^2 &= -\frac{y_1}{\rho \zeta} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho \zeta}, \end{aligned} \right.$$

et la formule (38) donnera alors

$$(40) \quad \left\{ \begin{aligned} dX^2 + dY^2 + dZ^2 \\ = \frac{1}{\zeta^2} \left[(\rho_1 - \rho_2)^2 \frac{d\rho^2}{\rho} + (\rho_2 - \rho)^2 \frac{d\rho_1^2}{\rho_1} + (\rho - \rho_1)^2 \frac{d\rho_2^2}{\rho_2} \right]. \end{aligned} \right.$$

Par suite, X, Y, Z sont les coordonnées rectangulaires du point qui, dans le système cherché, a pour coordonnées curvilignes ρ , ρ_1 , ρ_2 . Les formules (39) résolvent donc analytiquement la question proposée. On peut en déduire les conséquences géométriques suivantes.

Si l'on augmente ρ , ρ_1 , ρ_2 d'une même quantité h dans les formules (39), les nouvelles coordonnées X' , Y' , Z' seront liées aux

anciennes par les formules

$$(41) \quad \begin{cases} X' = X - h(Y - Zi), \\ Y' - Zi' = Y - Zi, \\ Y' + Zi' = Y + Zi + 2hX - h^2(Y - Zi), \end{cases}$$

qui entraînent la suivante

$$(42) \quad X'^2 + Y'^2 + Z'^2 = X^2 + Y^2 + Z^2.$$

Ces formules définissent une rotation finie autour de la droite *isotrope*

$$(43) \quad X = 0, \quad Y - Zi = 0.$$

Ainsi le système tout entier ne change pas quand on lui imprime une rotation quelconque autour de cette droite et, par suite, les surfaces de chacune des trois familles qui composent le système se déduisent de l'une d'entre elles à l'aide d'une rotation autour de cette même droite.

Étudions, par exemple, les surfaces de paramètre ρ_2 . Pour connaître leur forme, il suffira de prendre celle qui correspond à la valeur

$$\rho_2 = 0.$$

On aura alors

$$(44) \quad \begin{cases} X = \frac{P_2}{(\rho_1 - \rho)\sqrt{-PP_1P_2}}, & Y + Zi = \frac{P_2\rho_1}{(\rho_1 - \rho)\sqrt{-PP_1P_2}}, \\ X^2 + Y^2 + Z^2 = -\frac{1}{P\rho(\rho_1 - \rho)}. \end{cases}$$

L'élimination de ρ et de ρ_1 conduit à l'équation

$$(45) \quad (X^2 + Y^2 + Z^2) \left(Y + Zi - \sqrt{\frac{-P_2}{PP_1}} \right) = -X^2 \sqrt{\frac{-P_1}{PP_2}}.$$

On reconnaît aisément qu'elle définit une cyclide imaginaire du troisième degré, qui est l'inverse, par rapport à l'origine des coordonnées, du cône défini par l'équation

$$(46) \quad -X^2 + (Y + Zi) \left[\sqrt{\frac{-P_1P_2}{P}} + \frac{P_2}{P}(Y - Zi) \right] = 0.$$

Ce cône est de révolution et une de ses génératrices isotropes passe à l'origine.

Nous signalerons aussi cette circonstance singulière que, si l'on effectue une inversion dont le pôle est placé à l'origine, le système orthogonal se transforme en un autre dont les trois familles sont formées de cônes égaux du second degré, tous de révolution.

156. Nous allons maintenant étudier le second des deux problèmes que nous nous étions proposés et déterminer tous les systèmes triples pour lesquels l'équation de la chaleur admet une infinité de solutions de la forme

$$(47) \quad P f(\rho) f_1(\rho_1) f_2(\rho_2).$$

Mais auparavant nous démontrerons un lemme célèbre qui est dû à Lord Kelvin ⁽¹⁾ :

Si V(x, y, z) est une solution de l'équation de la chaleur et si l'on effectue une inversion, définie, par exemple, par les formules

$$(48) \quad \frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'} = \frac{k^2}{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \frac{k^2}{r'^2},$$

la fonction

$$\frac{1}{r'} V\left(\frac{k^2 x'}{r'^2}, \frac{k^2 y'}{r'^2}, \frac{k^2 z'}{r'^2}\right)$$

sera une solution de l'équation de la chaleur relative aux nouvelles variables x', y', z' .

En effet, comme l'on a

$$(49) \quad dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{k^4}{r'^4} (dx'^2 + dy'^2 + dz'^2),$$

on pourra considérer x', y', z' comme des coordonnées curvilignes et appliquer la formule (26) du n° 111, ce qui donnera

$$\begin{aligned} \Delta_2 V &= \frac{r'^6}{k^4} \left[\frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{1}{r'^2} \frac{\partial V}{\partial x'} \right) + \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{1}{r'^2} \frac{\partial V}{\partial y'} \right) + \frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{1}{r'^2} \frac{\partial V}{\partial z'} \right) \right] \\ &= \frac{r'^4}{k^4} \frac{\partial^2 V}{\partial x'^2} + \frac{2r'^5}{k^4} \frac{\partial \left(\frac{1}{r'} \right)}{\partial x'} \frac{\partial V}{\partial x'} + \dots \end{aligned}$$

(1) SIR W. THOMSON, *Extrait de deux lettres adressées à M. Liouville.* — LIOUVILLE, *Note au sujet de l'article précédent (Journal de Liouville, 1^{re} série, t. XII, p. 256 et 265; 1847).*

Comme l'on a

$$\frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r'} \right)}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r'} \right)}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r'} \right)}{\partial z'^2} = 0,$$

L'équation précédente pourra s'écrire

$$\Delta_2 V = \frac{r'^5}{k^4} \left[\frac{1}{r'} \frac{\partial^2 V}{\partial x'^2} + 2 \frac{\partial \left(\frac{1}{r'} \right)}{\partial x'} \frac{\partial V}{\partial x'} + V \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r'} \right)}{\partial x'^2} \right] + \dots,$$

et elle donne, par suite,

$$(50) \quad \Delta_2 V = \frac{r'^5}{k^4} \left[\frac{\partial^2 \left(\frac{V}{r'} \right)}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \left(\frac{V}{r'} \right)}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \left(\frac{V}{r'} \right)}{\partial z'^2} \right].$$

Cette identité démontre la proposition de Lord Kelvin.

Cette proposition entraîne la conséquence suivante :

Si un système triple a la propriété que nous recherchons, c'est-à-dire si l'équation de la chaleur admet, dans les conditions que nous avons indiquées au n° 124, une infinité de solutions de la forme (47), la même propriété appartiendra aussi à tous les systèmes triples qui se déduisent par une inversion du système proposé, avec cette seule modification que le facteur P qui se trouve dans toutes les solutions sera remplacé par $\frac{P}{r'}$. Il résulte de là que, dans un groupe de systèmes triples orthogonaux qui sont les inverses les uns des autres, il nous sera permis de choisir comme nous voudrons l'un quelconque des systèmes, pour reconnaître si la propriété appartient au groupe tout entier (1).

157. Appliquons cette remarque à notre première solution.

(1) La proposition de Lord Kelvin montre également comment on pouvait être conduit à se proposer le problème que nous allons étudier : du moment que l'équation de la chaleur admet une infinité de solutions de la forme

$$f(\rho) f_1(\rho_1) f_2(\rho_2),$$

où ρ , ρ_1 , ρ_2 sont les paramètres de trois familles de quadriques homofocales, elle devait admettre des solutions de la forme (47) pour tous les systèmes triples inverses du précédent. On voit donc qu'il y a des systèmes jouissant de la propriété que nous recherchons, et il était naturel de se proposer de les déterminer tous.

Elle nous a donné trois systèmes triples différents, comprenant, le premier une famille de plans parallèles et deux familles de cylindres isothermes, le second une famille de sphères concentriques et deux familles de cônes isothermes, le troisième une famille de plans passant par une droite et deux familles de surfaces de révolution à méridiens isothermes, systèmes auxquels il faut ajouter tous ceux qui en dérivent par inversion. Nous pouvons évidemment nous borner à considérer les trois systèmes fondamentaux et négliger leurs transformés par inversion; mais on peut aller plus loin et négliger même le troisième système, celui qui comprend deux familles de révolution. On peut, en effet, démontrer le théorème suivant :

Si l'on admet l'emploi des inversions imaginaires, toute surface de révolution dérive d'un cône par des inversions (1); tout système triple qui comprend deux familles de surfaces de révolution ayant un même axe dérive par inversion d'un système triple comprenant une famille de sphères concentriques.

Considérons en effet les plans passant par une droite fixe; une première inversion les transforme en sphères ayant un cercle commun; si l'on place le pôle d'une seconde inversion au centre d'une des sphères de rayon nul qui contiennent ce cercle commun, les sphères passant par le cercle se transforment en sphères concentriques.

Il suit de là que toute surface de révolution, c'est-à-dire toute surface qui coupe à angle droit des plans passant par une droite fixe, se transforme en une surface qui coupe à angle droit des sphères concentriques, c'est-à-dire en un cône ayant son sommet au centre de ces sphères.

On voit aussi que tout système triple comprenant une famille de plans qui passent par une droite peut se transformer en un autre système comprenant une famille de sphères concentriques. En particulier, notre troisième système fondamental, qui comprend deux familles de surfaces de révolution à méridiens iso-

(1) *Mémoire sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*, p. 162.

thermes, dérive par deux inversions du second système, qui comprend deux familles isothermes.

Nous pourrions donc nous borner, dans l'étude du problème proposé, aux deux premiers systèmes fondamentaux comprenant deux familles isothermes, soit de cylindres, soit de cônes.

158. Pour le premier, qui comprend deux familles de cylindres, l'élément linéaire est donné par la formule

$$(51) \quad ds^2 = d\rho^2 + e^{2R}(d\rho_1^2 + d\rho_2^2)$$

avec la condition

$$(52) \quad \frac{\partial^2 R}{\partial \rho_1^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial \rho_2^2} = 0.$$

L'équation de la chaleur prend la forme

$$e^{2R} \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \rho_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \rho_2^2} = 0.$$

Il faut exprimer qu'elle a des solutions de la forme

$$V = P r r_1 r_2,$$

r_i dépendant de la seule variable ρ_i . En substituant cette valeur de V , on trouve

$$\frac{1}{r} e^{2R} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} (Pr) + \frac{1}{r_1} \frac{\partial^2 (Pr_1)}{\partial \rho_1^2} + \frac{1}{r_2} \frac{\partial^2 (Pr_2)}{\partial \rho_2^2} = 0,$$

ou encore

$$(53) \quad \left\{ \begin{aligned} e^{2R} \frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \rho_1^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \rho_2^2} + 2e^{2R} \frac{\partial P}{\partial \rho} \frac{r'}{r} + e^{2R} P \frac{r''}{r} \\ + 2 \frac{\partial P}{\partial \rho_1} \frac{r'_1}{r_1} + P \frac{r''_1}{r_1} + 2 \frac{\partial P}{\partial \rho_2} \frac{r'_2}{r_2} + P \frac{r''_2}{r_2} = 0. \end{aligned} \right.$$

L'hypothèse est que r , r_1 , r_2 doivent satisfaire respectivement à des équations telles que la suivante

$$r''_i + \psi_i(\rho_i) r'_i + \chi_i(\rho_i) r_i = 0,$$

et l'on peut toujours mettre de telles équations sous la forme

$$(54) \quad f_i(\rho_i) r''_i + 2f'_i(\rho_i) r'_i + \varphi_i(\rho_i) r_i = 0,$$

que nous adopterons. Il faut substituer dans l'équation (53) les valeurs des dérivées r_i'' déduites des équations précédentes et égaliser à zéro les coefficients des dérivées premières ainsi que le terme indépendant. On obtient ainsi les conditions

$$(55) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial \rho_i} = \frac{f_i'(\rho_i)}{f_i(\rho_i)}, \quad (i = 0, 1, 2), \\ e^{2R} \frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \rho_1^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \rho_2^2} - P \left[e^{2R} \frac{\varphi(\rho)}{f(\rho)} + \frac{\varphi_1(\rho_1)}{f_1(\rho_1)} + \frac{\varphi_2(\rho_2)}{f_2(\rho_2)} \right] = 0. \end{array} \right.$$

On déduit de là d'abord, en négligeant une constante,

$$(56) \quad P = f(\rho) f_1(\rho_1) f_2(\rho_2),$$

puis ensuite

$$(57) \quad e^{2R} \frac{f''(\rho) - \varphi(\rho)}{f(\rho)} + \frac{f_1''(\rho_1) - \varphi_1(\rho_1)}{f_1(\rho_1)} + \frac{f_2''(\rho_2) - \varphi_2(\rho_2)}{f_2(\rho_2)} = 0.$$

Comme R ne doit pas dépendre de ρ , cette dernière équation montre d'abord que e^{2R} est nécessairement de la forme (1)

$$(58) \quad e^{2R} = \theta_1(\rho_1) + \theta_2(\rho_2).$$

Nous sommes donc conduits à chercher les systèmes plans orthogonaux qui donnent pour l'élément linéaire du plan l'expression suivante

$$(59) \quad ds^2 = [\theta_1(\rho_1) + \theta_2(\rho_2)](d\rho_1^2 + d\rho_2^2).$$

Cette question, qui se présente en Mécanique analytique, a été résolue depuis longtemps par Liouville (2), et les systèmes ortho-

(1) Le raisonnement suppose que le coefficient de e^{2R} n'est pas nul; l'hypothèse contraire conduirait aux solutions qui satisfont à la fois aux deux conditions

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \rho_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \rho_2^2} = 0.$$

Ces solutions sont de la forme

$$(A\rho + B)(A' \cos k\rho_1 + B' \sin k\rho_1)(A'' e^{k\rho_2} + B'' e^{-k\rho_2}),$$

A, B, A', B', A'', B'', k désignant des constantes, et elles se rencontrent dans tous les systèmes triples considérés; mais elles sont linéaires par rapport à ρ .

(2) LIOUVILLE, *Sur quelques cas particuliers où les équations du mouvement d'un point matériel peuvent s'intégrer* (Journal de Liouville, 1^{re} série, t. XI, p. 360; 1846).

gonaux qui en donnent la solution se réduisent, on le sait, à ceux qui sont formés de deux familles d'ellipses et d'hyperboles homofocales et à leurs variétés.

Admettons ce résultat et achevons la solution. D'après la forme même que nous trouvons pour P, on peut, en réunissant la fonction $f_i(\rho_i)$ à r_i , réduire P à l'unité. Faisons donc

$$P = 1;$$

l'équation à résoudre deviendra

$$\varphi(\rho)[\theta_1(\rho_1) + \theta_2(\rho_2)] + \varphi_1(\rho_1) + \varphi_2(\rho_2) = 0.$$

Elle se décomposera évidemment dans les suivantes

$$\begin{aligned} \varphi(\rho) &= k, \\ k\theta_1(\rho_1) + \varphi_1(\rho_1) &= k', & k\theta_2(\rho_2) + \varphi_2(\rho_2) &= -k', \end{aligned}$$

où k et k' désignent deux constantes arbitraires.

Les équations différentielles qui déterminent r , r_1 , r_2 seront les suivantes

$$\begin{aligned} r'' + kr &= 0, \\ r_1'' + [k' - k\theta_1(\rho_1)]r_1 &= 0, & r_2'' - [k' + k\theta_2(\rho_2)]r_2 &= 0. \end{aligned}$$

159. Nous n'insisterons pas sur ces résultats, qui sont bien connus, et nous passerons aux systèmes triples qui comprennent deux familles de cônes isothermes.

Dans ce cas, l'élément linéaire de l'espace est donné par la formule

$$(60) \quad ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 e^{2R}(d\rho_1^2 + d\rho_2^2),$$

avec la condition

$$(61) \quad \frac{\partial^2 R}{\partial \rho_1^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial \rho_2^2} + e^{2R} = 0.$$

Un calcul presque identique au précédent montrera de même que l'on doit avoir (1)

$$e^{2R} = \theta_1(\rho_1) + \theta_2(\rho_2).$$

(1) Ici encore il faudra laisser de côté des solutions qui sont linéaires en $\frac{1}{\rho}$ et conviennent à tous les systèmes considérés.

On sera donc conduit au problème suivant, dont la solution est bien connue (1) :

Mettre l'élément linéaire

$$ds^2 = e^{2R}(d\rho_1^2 + d\rho_2^2),$$

de la sphère de rayon 1 sous la forme

$$(62) \quad ds^2 = [\theta_1(\rho_1) + \theta_2(\rho_2)](d\rho_1^2 + d\rho_2^2).$$

Le système triple correspondant comprend deux familles de cônes homofocaux du second degré. Ainsi que le précédent, il se rattache comme cas-limite à celui qui est formé par trois familles de surfaces du second degré.

160. Il nous reste à traiter les systèmes les plus importants, ceux pour lesquels H , H_1 , H_2 sont données par les formules (3) du n° 135. L'équation de la chaleur devient alors

$$(63) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\rho_1 - \rho_2)^{-2h} \sqrt{a} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\sqrt{a}}{M} \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) \\ + (\rho_2 - \rho)^{-2h} \sqrt{a_1} \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\frac{\sqrt{a_1}}{M} \frac{\partial V}{\partial \rho_1} \right) + (\rho - \rho_1)^{-2h} \sqrt{a_2} \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left(\frac{\sqrt{a_2}}{M} \frac{\partial V}{\partial \rho_2} \right) = 0. \end{array} \right.$$

Si l'on substitue à ρ , ρ_1 , ρ_2 les variables ε , ε_1 , ε_2 définies par les formules

$$(64) \quad \varepsilon_i = \int \frac{d\rho_i}{\sqrt{a_i}}, \quad (i = 0, 1, 2),$$

elle peut s'écrire

$$(65) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\rho_1 - \rho_2)^{-2h} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{1}{M} \frac{\partial V}{\partial \varepsilon} \right) \\ + (\rho_2 - \rho)^{-2h} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_1} \left(\frac{1}{M} \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_1} \right) + (\rho - \rho_1)^{-2h} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_2} \left(\frac{1}{M} \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_2} \right) = 0. \end{array} \right.$$

Faisons

$$(66) \quad V = P r r_1 r_2,$$

(1) *Leçons sur la théorie des surfaces* (II^e Partie, n° 414, p. 209).

r_i ne dépendant que de ε_i ; l'équation deviendra

$$(\rho_1 - \rho_2)^{-2h} \left[\frac{P}{M} \frac{r''}{r} + \left(\frac{2}{M} \frac{\partial P}{\partial \varepsilon} - \frac{P}{M^2} \frac{\partial M}{\partial \varepsilon} \right) \frac{r'}{r} + \frac{1}{M} \frac{\partial^2 P}{\partial \varepsilon^2} - \frac{1}{M^2} \frac{\partial M}{\partial \varepsilon} \frac{\partial P}{\partial \varepsilon} \right] + \dots = 0,$$

les termes non écrits se déduisant des précédents par des permutations circulaires. Si l'équation du second ordre à laquelle doit satisfaire r_i est donnée sous la forme déjà employée

$$f_i(\varepsilon_i) r_i'' + 2f_i'(\varepsilon_i) r_i' + \theta_i(\varepsilon_i) r_i = 0,$$

on obtiendra, en substituant la valeur de r_i'' et en égalant à zéro le coefficient de r_i' dans le résultat de la substitution, l'équation

$$\frac{2}{P} \frac{\partial P}{\partial \varepsilon_i} - \frac{1}{M} \frac{\partial M}{\partial \varepsilon_i} = \frac{2f_i'(\varepsilon_i)}{f_i(\varepsilon_i)},$$

d'où l'on déduit, en intégrant et négligeant une constante,

$$P = \sqrt{M} f(\varepsilon) f_1(\varepsilon_1) f_2(\varepsilon_2).$$

Comme il est permis de réunir $f_i(\varepsilon_i)$ à r_i , on pourra supposer que l'on ait

$$f_i(\varepsilon_i) = 1,$$

ce qui donnera

$$(67) \quad P = \sqrt{M}.$$

Quant à l'équation en r_i , elle prendra la forme plus simple

$$(68) \quad \frac{d^2 r_i}{d\varepsilon_i^2} = r_i'' = \varphi_i(\rho_i) r_i.$$

Si l'on substitue les valeurs de P et de r_i , il restera la condition

$$(69) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\rho_1 - \rho_2)^{-2h} \left[\frac{\varphi(\rho)}{\sqrt{M}} - \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{\sqrt{M}} \right)}{\partial \varepsilon^2} \right] \\ + (\rho_2 - \rho)^{-2h} \left[\frac{\varphi_1(\rho_1)}{\sqrt{M}} - \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{\sqrt{M}} \right)}{\partial \varepsilon_1^2} \right] \\ + (\rho - \rho_1)^{-2h} \left[\frac{\varphi_2(\rho_2)}{\sqrt{M}} - \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{\sqrt{M}} \right)}{\partial \varepsilon_2^2} \right] \end{array} \right. = 0,$$

qu'il y aura à vérifier.

Or, si l'on ajoute les trois équations du système (B'), après les avoir multipliées respectivement par H , H_1 , H_2 , on trouve

$$(\rho_1 - \rho_2)^{-2h} \left[4\sqrt{M} \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{\sqrt{M}} \right)}{\partial \varepsilon^2} + \frac{h}{2} \frac{a'}{\rho_1 - \rho} + \frac{h}{2} \frac{a'}{\rho_2 - \rho} \right. \\ \left. + \frac{ha}{(\rho_1 - \rho)^2} + \frac{ha}{(\rho_2 - \rho)^2} - \frac{h^2 a}{(\rho_1 - \rho)(\rho_2 - \rho)} \right] + \dots = 0,$$

les termes non écrits se déduisant des précédents par des permutations circulaires. Ajoutant cette condition à la précédente multipliée par $4\sqrt{M}$, on obtient la condition suivante :

$$(70) \quad \left\{ \begin{aligned} (\rho_1 - \rho_2)^{-2h} \left[4\varphi(\rho) + \frac{h}{2} \frac{a'}{\rho_1 - \rho} + \frac{h}{2} \frac{a'}{\rho_2 - \rho} + h \frac{a}{(\rho_1 - \rho)^2} \right. \\ \left. + h \frac{a}{(\rho_2 - \rho)^2} - \frac{h^2 a}{(\rho_1 - \rho)(\rho_2 - \rho)} \right] + \dots = 0, \end{aligned} \right.$$

qui ne contiendra plus M . On aura certainement une solution du problème, si l'on peut disposer des trois fonctions $\varphi_i(\rho_i)$ de manière à satisfaire cette condition. Pour examiner cette question, nous donnerons successivement à h les valeurs que nous avons obtenues au Chapitre précédent.

161. Pour $h = -\frac{1}{2}$, nous savons que a est un polynôme du cinquième degré au plus. Posons donc, $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ étant des constantes,

$$(71) \quad a_i = \alpha_0 \rho_i^5 + \alpha_1 \rho_i^4 + \alpha_2 \rho_i^3 + \alpha_3 \rho_i^2 + \dots,$$

l'équation prendra la forme

$$(\rho_1 - \rho_2) \left[16\varphi(\rho) + 5\alpha_0 \rho^3 + 3\alpha_1 \rho^2 + \frac{3}{2}\alpha_2 \rho + \frac{1}{2}\alpha_3 \right] + \dots = 0,$$

et elle donnera la solution

$$(72) \quad 16\varphi_i(\rho_i) = -5\alpha_0 \rho_i^3 - 3\alpha_1 \rho_i^2 - m\rho_i - n,$$

m et n étant deux constantes quelconques.

Les solutions particulières en nombre infini auxquelles nous

sommes ainsi conduits sont donc de la forme suivante

$$(73) \quad V = \sqrt{M} r r_1 r_2,$$

la fonction r_i satisfaisant à l'équation

$$(74) \quad a_i \frac{d^2 r_i}{d\rho_i^2} + \frac{a'_i}{2} \frac{dr_i}{d\rho_i} + \left(\frac{5}{16} \alpha_0 \rho_i^3 + \frac{3}{16} \alpha_1 \rho_i^2 + \frac{m}{16} \rho_i + \frac{n}{16} \right) r_i = 0,$$

où m et n désignent deux constantes arbitraires.

Si le polynôme a_i se réduit au troisième degré, M devient égal à 1, α_0 et α_1 sont nuls et l'équation linéaire précédente devient équivalente à celle qui a été obtenue par Lamé et que nous avons donnée au n° 124.

162. Examinons maintenant les autres valeurs que l'on peut prendre pour h . Si l'on fait d'abord

$$h = 1,$$

on aura

$$a_i = m_i \rho_i^2 + n_i \rho_i + p_i.$$

En tenant compte des relations (17) du n° 141 qui existent entre les coefficients m_i , n_i , p_i , on réduira l'équation (70) à la forme suivante

$$\frac{4\varphi(\rho) - m}{(\rho_1 - \rho_2)^2} + \frac{4\varphi_1(\rho_1) - m_1}{(\rho_2 - \rho)^2} + \frac{4\varphi_2(\rho_2) - m_2}{(\rho - \rho_1)^2} = 0.$$

Il n'y a évidemment qu'une seule manière de satisfaire à cette relation, celle pour laquelle on aura

$$\varphi_k(\rho_k) = \frac{m_k}{4}, \quad (k = 0, 1, 2).$$

L'équation de la chaleur aura donc seulement huit solutions de la forme cherchée.

Supposons maintenant $h = 2$. Les fonctions a_i se réduisent à des constantes dont la somme est nulle, et l'équation à vérifier (70) devient

$$\frac{\varphi(\rho)}{(\rho_1 - \rho_2)^4} + \frac{\varphi_1(\rho_1)}{(\rho_2 - \rho)^4} + \frac{\varphi_2(\rho_2)}{(\rho - \rho_1)^4} = 0.$$

Ici encore il y a une seule solution possible, pour laquelle on a

$$\varphi_i(\rho_i) = 0,$$

et l'équation de la chaleur admet seulement huit solutions particulières de la forme cherchée.

Enfin, si l'on fait $h = \frac{1}{2}$, les fonctions a , a_1 , a_2 se réduisent à un même polynome du troisième degré. L'équation à vérifier devient impossible; on le reconnaît immédiatement en chassant les dénominateurs et faisant $\rho = \rho_1 = \rho_2$.

En résumé, en dehors des systèmes considérés par Lamé, on ne trouve, à proprement parler, que le système des cyclides homofocales et ses variétés, pour lequel la propriété a été établie en premier lieu, au moins en ce qui concerne les cyclides à plans principaux, par M. Wangerin (1).

163. Il nous paraît intéressant de faire connaître ici la méthode directe par laquelle nous avons démontré et étendu aux cyclides les plus générales l'élégant résultat que l'on doit à M. Wangerin (2).

On sait que l'équation du système des cyclides homofocales peut prendre une forme très simple si l'on adopte, pour représenter un point de l'espace, le système des cinq coordonnées pentasphériques

$$(75) \quad x_i = \frac{S_i}{R_i},$$

S_1, S_2, \dots, S_5 désignant les puissances du point par rapport à cinq sphères, deux à deux orthogonales. Je rappelle les relations

$$(76) \quad \begin{cases} \frac{\partial S_k}{\partial x} \frac{\partial S_{k'}}{\partial x} + \frac{\partial S_k}{\partial y} \frac{\partial S_{k'}}{\partial y} + \frac{\partial S_k}{\partial z} \frac{\partial S_{k'}}{\partial z} = 2(S_k + S_{k'}), \\ \left(\frac{\partial S_k}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_k}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_k}{\partial z}\right)^2 = 4(S_k + R_k^2), \end{cases}$$

(1) WANGERIN (A.), *Ueber ein dreifach orthogonales Flächensystem, gebildet aus gewissen Flächen vierter Ordnung* (Journal de Crellé, t. 82, p. 145; 1876).

(2) *Sur l'application de méthodes de la Physique mathématique à l'étude des corps terminés par des cyclides* (Comptes rendus, t. LXXXIII, p. 1037 et 1099; novembre 1876).

qui sont d'ailleurs d'une vérification facile, et auxquelles on peut joindre l'équation évidente

$$(77) \quad \frac{\partial^2 S_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_k}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S_k}{\partial z^2} = 6.$$

Ces relations vont nous permettre d'écrire, dans le système de coordonnées pentasphériques, l'équation aux dérivées partielles de la chaleur ou du potentiel.

Soit V une fonction quelconque des cinq quantités S_i ; on pourra toujours, en faisant usage de la relation identique entre les quantités S_i ,

$$(78) \quad \sum \frac{S_i}{R_i^2} = -2,$$

la rendre homogène et même lui donner tel degré que l'on voudra. En calculant les dérivées secondes de V et tenant compte des relations (76), on établira sans difficulté l'équation suivante

$$(79) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 4 \sum R_i^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_i^2} + (4\mu + 2) \sum \frac{\partial V}{\partial S_i},$$

où μ désigne le degré de V . Si donc on admet que, par l'emploi de la relation (78), la fonction homogène V ait été rendue de degré $-\frac{1}{2}$, $4\mu + 2$ sera nul, et l'équation du potentiel dans le nouveau système de coordonnées prendra la forme élégante

$$(80) \quad \Delta_2 V = 4 \sum \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} = 0.$$

Cette équation doit d'ailleurs être vérifiée, soit identiquement, soit en vertu de la relation homogène qui relie les quantités x_i .

Avec son aide, on peut établir sans calcul le lemme de Lord Kelvin. Il est aisé de reconnaître que, si l'on transforme une figure par inversion, les coordonnées x_i d'un point M demeurent proportionnelles à celles x'_i du point homologue M' , prises par rapport à cinq nouvelles sphères orthogonales qui sont les inverses des premières. On a

$$(81) \quad x_i = \frac{k^2 x'_i}{r'^2},$$

k^2 étant le module de l'inversion, et r' la distance du point M' au pôle de la transformation. Or, considérons une fonction V satisfaisant à l'équation (80). Comme elle est supposée mise sous forme homogène et de degré $-\frac{1}{2}$, on aura, si on l'exprime en fonction des nouvelles coordonnées x'_i du point M' ,

$$V = \frac{r'}{k} V',$$

V' désignant ce que devient V quand on y remplace x_i par x'_i .

Puisque V' ne diffère de V que par l'accentuation des lettres, on aura évidemment

$$\sum \frac{\partial^2 V'}{\partial x_i'^2} = 0,$$

ou encore

$$k \sum \frac{\partial^2}{\partial x_i'^2} \left(\frac{V}{r'} \right) = 0;$$

c'est-à-dire que la fonction $\frac{V}{r'}$, exprimée en fonction des coordonnées du point M' , sera une solution de l'équation du potentiel. C'est le résultat de Lord Kelvin déjà établi plus haut (n° 156).

164. Cela posé, considérons le système des cyclides homofocales et orthogonales, défini par l'équation

$$(82) \quad \sum \frac{x_i^2}{\lambda - a_i} = 0.$$

Si, dans cette équation, on considère les x_i comme les coordonnées d'un point M , elle fera connaître trois valeurs de λ , que nous désignerons par ρ , ρ_1 , ρ_2 , et qui seront les paramètres des trois cyclides orthogonales se croisant au point M .

L'identité

$$(83) \quad F(\lambda) = \sum \frac{x_i^2}{\lambda - a_i} = P \frac{(\lambda - \rho)(\lambda - \rho_1)(\lambda - \rho_2)}{f(\lambda)},$$

où l'on a posé

$$(84) \quad f(\lambda) = (\lambda - a_1)(\lambda - a_2) \dots (\lambda - a_5),$$

et qui est analogue à une équation semblable de la théorie des

coordonnées elliptiques, nous conduit sans effort aux résultats suivants.

En développant les deux membres suivant les puissances négatives de λ et posant

$$(85) \quad x = a_1 + a_2 + \dots + a_3,$$

on trouve d'abord

$$(86) \quad \sum a_i x_i^2 = P,$$

$$(87) \quad \sum a_i^2 x_i^2 = P(x - \rho - \rho_1 - \rho_2).$$

En prenant les dérivées des deux membres de l'identité (83) par rapport à λ , et faisant ensuite $\lambda = \rho$, on trouve

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=\rho} = \frac{P(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)}{f(\rho)} = F'(\rho),$$

équation à laquelle il faudra joindre celles qu'on en déduirait par l'échange de ρ en ρ_1 et en ρ_2 . On a d'ailleurs identiquement

$$(88) \quad \sum \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)^2 = -4 \frac{\partial F}{\partial \lambda},$$

et, par des calculs fort simples où l'on emploiera l'équation

$$\frac{2x_i}{\rho - a_i} + F'(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = 0,$$

on établira sans difficulté les relations suivantes :

$$(89) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_i}\right)^2 = -\frac{4}{F'(\rho)}, \\ \sum \left(\frac{\partial P}{\partial x_i}\right)^2 = 4 \sum a_i^2 x_i^2 = 4P(x - \rho - \rho_1 - \rho_2), \\ \sum \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \frac{\partial \rho_1}{\partial x_i} = 0, \\ \sum \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \frac{\partial P}{\partial x_i} = 0, \\ \sum \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i^2} = -\frac{2}{F'(\rho)} \sum \frac{1}{\rho - a_i}, \\ \sum \frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2} = 2x, \end{array} \right.$$

où les sommes doivent être étendues à toutes les valeurs de l'indice i ; on obtiendrait des relations analogues en échangeant ρ , ρ_1 , ρ_2 .

Au moyen de tous ces résultats, on peut former sans difficulté l'équation aux dérivées partielles qui définit le potentiel. La fonction V que l'on doit substituer dans l'équation (80) devant être homogène et de degré $-\frac{1}{2}$, nous l'écrivons

$$(90) \quad V = P^{-\frac{1}{2}} \varphi(\rho, \rho_1, \rho_2).$$

P étant du degré 2, d'après la formule (86), et ρ , ρ_1 , ρ_2 ne dépendant que des rapports des quantités x_i , cette expression de V satisfait bien à la condition exigée.

En la substituant dans l'équation (80), et tenant compte des formules (89), nous aurons en facteur $P^{-\frac{5}{2}}$ dans tous les termes; ce facteur étant supprimé, il restera l'équation

$$\frac{\varphi}{4}(3\alpha - 5\rho - 5\rho_1 - 5\rho_2) - \frac{4f(\rho) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} + 2f'(\rho) \frac{\partial \varphi}{\partial \rho}}{(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)} - \dots = 0,$$

les deux termes non écrits se déduisant des précédents par le changement de ρ en ρ_1 et en ρ_2 . On peut encore écrire l'équation sous la forme

$$\sum_{\rho} \frac{\left(\frac{3}{4}\alpha\rho^2 - \frac{5}{4}\rho^3\right)\varphi - 2f'(\rho) \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} - 4f(\rho) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2}}{(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)} = 0,$$

d'où il suit immédiatement qu'elle sera vérifiée si l'on prend pour φ le produit rr_1r_2 de trois fonctions dépendant respectivement de ρ , ρ_1 , ρ_2 , la première étant déterminée par l'équation

$$(91) \quad f(\rho)r'' + \frac{1}{2}f'(\rho)r' + \frac{1}{16}(5\rho^3 - 3\alpha\rho^2 + C\rho + D)r = 0,$$

où C , D désignent deux constantes, et les autres fonctions r_1 , r_2 satisfaisant aux équations toutes semblables que l'on obtient en conservant les constantes C , D et changeant ρ en ρ_1 ou en ρ_2 .

C'est le résultat que M. Wangerin avait publié, dans le Mémoire déjà cité, pour les cyclides à plans principaux.

On peut constater qu'il est en parfaite concordance avec celui que nous avons établi plus haut.

En effet, si, dans l'identité fondamentale (83) qui a lieu pour toutes les valeurs de λ , on donne à cette variable la valeur a_i , on obtiendra l'équation

$$(92) \quad x_i = \sqrt{P} \sqrt{\frac{(a_i - \rho)(a_i - \rho_1)(a_i - \rho_2)}{f'(a_i)}},$$

qui fournira les valeurs des coordonnées pentasphériques x_i en fonction de P , de ρ , de ρ_1 et de ρ_2 . Quant à la valeur de P , elle se déduira de l'identité (78)

$$\sum \frac{x_i}{R_i} = -2,$$

qui donnera, si l'on y remplace les x_i par leurs valeurs (92),

$$(93) \quad -\frac{2}{\sqrt{P}} = \sum_i \frac{1}{R_i} \sqrt{\frac{(a_i - \rho)(a_i - \rho_1)(a_i - \rho_2)}{f'(a_i)}}.$$

Il suffit ensuite de porter la valeur des x_i dans l'équation

$$ds^2 = \frac{\sum dx_i^2}{\left(\sum \frac{x_i}{R_i}\right)^2},$$

qui fait connaître l'élément linéaire de l'espace en coordonnées pentasphériques (1), pour obtenir la formule

$$(94) \quad \left\{ \begin{aligned} ds^2 = \frac{P}{16} & \left[\frac{(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)}{f(\rho)} d\rho^2 \right. \\ & \left. + \frac{(\rho_1 - \rho)(\rho_1 - \rho_2)}{f(\rho_1)} d\rho_1^2 + \frac{(\rho_2 - \rho)(\rho_2 - \rho_1)}{f(\rho_2)} d\rho_2^2 \right], \end{aligned} \right.$$

qui donne l'élément linéaire de l'espace exprimé en fonction des variables ρ , ρ_1 , ρ_2 . Cet élément linéaire reproduit, avec un léger changement de notations, la forme générale que nous avons obtenue plus haut pour la valeur $-\frac{1}{2}$ de h , et il est en parfait accord avec les formules du n° 122, si l'on y remplace P par $\frac{16}{M^2}$.

(1) *Leçons sur la théorie des surfaces* (I^e Partie, p. 219).

165. La recherche que nous venons de terminer n'a pas un caractère aussi particulier qu'on pourrait le croire au premier abord. Il est aisé de démontrer qu'elle nous fait connaître tous les cas dans lesquels l'équation de la chaleur admet des solutions de la forme suivante

$$V = Nf(\rho)f_1(\rho_1)f_2(\rho_2),$$

où N , ρ , ρ_1 , ρ_2 sont des fonctions déterminées et où f , f_1 , f_2 sont des fonctions qui seront *uniquement* assujetties à satisfaire à des équations linéaires de la forme suivante

$$a_i f_i''(\rho_i) + b_i f_i'(\rho_i) + c_i f_i(\rho_i) = 0.$$

Un calcul des plus simples nous montre, en effet, que l'on a

$$\begin{aligned} \Delta_2 V = & ff_1 f_2 \Delta_2 N + 2f'f_1 f_2 \Delta(\rho, N) + 2ff_1' f_2 \Delta(\rho_1, N) + 2ff_1 f_2' \Delta(\rho_2, N) \\ & + 2Nff_1' f_2' \Delta(\rho_1, \rho_2) + 2Nf'f_1 f_2' \Delta(\rho, \rho_2) + 2Nf'f_1' f_2 \Delta(\rho, \rho_1) \\ & + Nf'' f_1 f_2 \Delta(\rho) + Nf_1 f_1'' f_2 \Delta(\rho_1) + Nff_1 f_2'' \Delta(\rho_2) \\ & + Nf'f_1 f_2 \Delta_2(\rho) + Nff_1' f_2 \Delta_2(\rho_1) + Nff_1 f_2' \Delta_2(\rho_2). \end{aligned}$$

Par suite, si dans l'équation

$$\Delta_2 V = 0,$$

on remplace les f_i'' par leurs valeurs déduites de l'équation, on aura une équation trilineaire par rapport aux quotients $\frac{f_i'}{f_i}$ qui, devant être vérifiée au moins pour deux valeurs indépendantes de chacun de ces rapports, devra avoir lieu pour toutes leurs valeurs possibles. Comme elle ne contiendra les produits de ces rapports que dans les termes de la seconde ligne, il sera nécessaire que l'on ait

$$\Delta(\rho_1, \rho_2) = 0, \quad \Delta(\rho, \rho_2) = 0, \quad \Delta(\rho, \rho_1) = 0.$$

Par suite, ρ , ρ_1 , ρ_2 sont les paramètres de trois familles orthogonales, et nous retombons précisément sur le problème que nous venons d'étudier.

CHAPITRE VI.

LES SYSTÈMES TRIPLES DE M. BIANCHI.

Dans ce Chapitre, on se propose de donner une nouvelle application de la méthode générale de recherche en déterminant tous les systèmes triples orthogonaux pour lesquels une des familles est composée de surfaces à courbure totale constante. — Cette application, due à M. L. Bianchi, a son origine dans un théorème de M. Weingarten qui fait prévoir l'existence d'une classe étendue de ces systèmes. — Ce théorème peut s'énoncer comme il suit : Étant donnée une surface (S) à courbure totale constante $\frac{1}{k}$, si l'on porte sur la normale en chacun de ses points une longueur infiniment petite MM' proportionnelle à $\cos \frac{d}{\sqrt{k}}$, d désignant la distance géodésique de M à un point fixe A de (S), la surface (S') décrite par le point M' est, elle aussi, à courbure constante $\frac{1}{k}$ et elle fait partie avec (S) d'une famille de Lamé. — Il permet évidemment de construire, de proche en proche, des surfaces à courbure constante et égale, qui dépendent de quatre fonctions arbitraires et forment une famille de Lamé. — Examen d'un problème auquel conduit naturellement la proposition de M. Weingarten; propriétés de certains systèmes cycliques se rattachant à une surface applicable sur une surface de révolution. — Exposé des recherches de M. Bianchi; ce géomètre s'est proposé de déterminer tous les systèmes triples pour lesquels une des familles est composée de surfaces à courbure totale constante; mais il a donné de l'extension aux recherches de M. Weingarten en supposant que la courbure totale puisse varier lorsqu'on change de surface. — Mise en équation du problème. — En écartant le cas spécial où les surfaces cherchées seraient de révolution, on obtient une forme élégante de l'élément linéaire; cette forme dépend d'une seule fonction ω qui doit satisfaire à trois équations aux dérivées partielles du deuxième et du troisième ordre. — Étude de ce système d'équations aux dérivées partielles; il est montré que son intégrale générale dépend de cinq fonctions arbitraires d'une variable. — Propriétés générales des systèmes triples auxquels on est conduit; M. Bianchi a fait voir qu'on peut leur appliquer la transformation de M. Bäcklund. Il suffit pour cela d'intégrer trois équations de Riccati auxquelles satisfait une même fonction. — Examen particulier des systèmes de M. Weingarten pour lesquels la courbure totale ne varie pas lorsqu'on passe de l'une des surfaces à toute autre de la même famille. — On vérifie les propriétés géométriques qui résultent de la proposition énoncée plus haut. — Recherche d'une classe particulière de systèmes de Weingarten. — En essayant de déterminer tous les systèmes triples pour lesquels les neuf quantités H_i, β_{ik} dépendent d'une seule variable α , on est conduit à un système exclusivement composé d'hélicoïdes à courbure totale constante.

166. Parmi les applications de la méthode générale de recherche des systèmes triples orthogonaux, nous signalerons encore celle que l'on doit à M. Bianchi et qui concerne les systèmes triples pour lesquels l'une des familles se compose exclusivement de surfaces dont la courbure totale est constante. Cette application a son origine dans un élégant théorème de M. Weingarten ⁽¹⁾, dont nous allons tout d'abord faire l'étude approfondie.

Considérons, pour fixer les idées, une surface (S) à courbure constante négative $-\frac{1}{a^2}$. C'est un théorème dû à Ribaucour que si, d'un point quelconque de la surface comme centre et dans le plan tangent, on décrit un cercle de rayon a , tous les cercles ainsi obtenus sont normaux à une famille de surfaces (S₁) qui sont toutes à courbure constante $\frac{-1}{a^2}$ et qui font partie d'un système triple orthogonal ⁽²⁾.

Voilà donc une première catégorie de systèmes triples orthogonaux pour lesquels une des familles est composée de surfaces à courbure constante. Nous les nommerons *systèmes de Ribaucour*. Toute surface à courbure constante (S) fait partie d'une infinité de systèmes de Ribaucour. Car, si l'on prend l'une quelconque des surfaces dérivées (S₁) définies plus haut et si on lui applique la même construction qu'à la surface (S), il est clair que l'on en fera dériver une série de cercles tous normaux à (S) et, par conséquent, un système triple orthogonal dont (S) fera partie. L'étude approfondie de l'opération, par laquelle on dérive (S₁) de (S), a été faite dans nos *Leçons* ⁽³⁾, je n'y reviendrai pas ici.

Étant donnée la surface (S), associons-lui l'une quelconque des surfaces (S₁): nous obtenons ainsi deux surfaces dont nous désignerons les points correspondants par M, M₁. Nous savons que la droite MM₁ est normale à une famille de surfaces parallèles pour lesquelles la différence des rayons de courbure est constante et égale à a . De plus, les lignes qui, sur la surface (S),

⁽¹⁾ Nous connaissons ce théorème par l'énoncé qu'en a donné M. L. Bianchi, dans les *Rendiconti* de l'Académie royale des *Lincei*, série IV, vol. I, p. 163.

⁽²⁾ *Leçons sur la théorie des surfaces* (III^e Partie, p. 423, n^o 804).

⁽³⁾ *Leçons sur la théorie des surfaces* (III^e Partie, Livre VII).

sont tangentes à MM_1 sont des géodésiques, allant toutes concourir en un même point de la surface situé à l'infini, de sorte que la construction par laquelle on passe de (S) à (S_1) peut s'énoncer de la manière suivante :

Sur la surface (S) à courbure constante négative $\frac{-1}{a^2}$, on construit toutes les géodésiques qui vont passer par un même point à l'infini : les droites (d) tangentes à toutes ces géodésiques sont aussi tangentes à une autre surface (S_1) qui est encore à courbure constante $-\frac{1}{a^2}$; et si l'on désigne par M et M_1 les points de contact de chaque tangente avec (S) et (S_1) , on a toujours $MM_1 = a$.

De plus, la relation entre (S) et (S_1) est réciproque, et les géodésiques de (S_1) , qui sont tangentes à ces mêmes droites (d) , vont, elles aussi, concourir en un point à l'infini.

167. Tous ces points étant rappelés, considérons la surface (S_1) , construisons dans ses plans tangents, et des points de contact comme centres, les cercles de rayon a ; les surfaces trajectoires orthogonales de ces cercles auront toutes leur courbure constante égale à $-\frac{1}{a^2}$ et elles formeront une famille de Lamé dont (S) fera partie. Proposons-nous de déterminer, dans cette famille, la surface infiniment voisine de (S) . Il faudra, pour cela, porter sur la normale en M à la surface (S) une longueur infiniment petite $MM' = H$ que nous allons déterminer.

La trajectoire orthogonale de toutes les surfaces associées à (S) , étant le cercle qui passe par M et a son centre en M_1 , sera à elle-même son propre cercle osculateur. Il va donc nous être permis d'appliquer une proposition donnée plus haut, au n° 40.

Nous savons, en effet, que le rayon de ce cercle osculateur est donné par la formule

$$(1) \quad \frac{1}{\rho} = -\frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial n},$$

$\frac{\partial H}{\partial n}$ désignant la dérivée de H lorsqu'on se déplace sur la surface suivant la courbe tangente au rayon du cercle osculateur. Nous allons montrer comment on peut calculer cette dérivée.

Construisons sur (S) les géodésiques dont les tangentes sont aussi tangentes à (S₁). Si l'on rapporte les points de la surface au système de coordonnées formé de ces géodésiques et de leurs trajectoires orthogonales, l'élément linéaire de (S) pourra être ramené à la forme

$$(2) \quad ds^2 = a^2(du^2 + e^{2u} dv^2);$$

$\frac{\partial H}{\partial n}$ sera égal à $-\frac{1}{a} \frac{dH}{du}$ (1). Si donc on applique la formule (1) en y remplaçant ρ par a , il faudra que l'on ait

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{aH} \frac{dH}{du},$$

ce qui donne, en désignant par C une constante infiniment petite,

$$(3) \quad H = Ce^u.$$

De là résulte le théorème suivant :

Étant donnée une surface à courbure constante $\frac{-1}{a^2}$ dont l'élément linéaire est ramené à la forme (2), si l'on porte sur la normale en chacun de ses points M une longueur infiniment petite MM' proportionnelle à e^u , la surface infiniment voisine, lieu de M', sera, elle aussi, à courbure constante négative $-\frac{1}{a^2}$ et elle fera partie, avec (S), d'une même famille de Lamé.

Ce théorème peut être immédiatement généralisé. On sait, en effet, que l'élément linéaire de la surface (S) peut être ramené d'une infinité de manières à la forme (2). Si l'on effectue la substitution définie par les formules suivantes :

$$(4) \quad v' = \frac{v - \alpha}{(v - \alpha)^2 + e^{-2u}}, \quad e^{-u'} = \frac{e^{-u}}{(v - \alpha)^2 + e^{-2u}},$$

où α désigne une constante, cet élément linéaire deviendra, en

(1) H ne dépend que de u ; cela résulte de la théorie développée dans nos *Leçons*, théorie qui conduirait d'ailleurs très aisément à l'expression de H donnée par la formule (3).

effet (1) :

$$(5) \quad ds^2 = \alpha^2 (du'^2 + e^{2u'} dv'^2).$$

Le théorème subsistera donc si la longueur MM' porté sur la normale est e^u , c'est-à-dire a pour valeur

$$(6) \quad e^u = (v - \alpha)^2 e^u + e^{-u}.$$

Cette expression est une combinaison linéaire des trois suivantes :

$$(7) \quad v^2 e^u + e^{-u}, \quad v e^u, \quad e^u;$$

et, d'après la forme linéaire des équations du problème, on aperçoit immédiatement que le théorème précédent s'appliquera à toute combinaison linéaire à coefficients constants de ces trois expressions. En effet, pour que la surface (S') infiniment voisine de (S), décrite par le point M' , appartienne avec (S) à une famille de Lamé, il faut, nous le savons, que MM' vérifie une équation aux dérivées partielles du second ordre, l'équation étudiée au Livre I, (Chap. III et IV). Or cette équation ne saurait admettre, pour toutes les valeurs de α , la solution (6) sans admettre aussi les trois solutions particulières (7). Le raisonnement est le même en ce qui concerne la courbure. Sans faire de calcul, on reconnaît immédiatement que la courbure totale de (S') au point M' diffère de la courbure de (S) au point M d'une quantité qui est une fonction linéaire de MM' et de ses dérivées des deux premiers ordres. Par conséquent, ici encore, si cette différence s'annule pour la solution (6), elle s'annulera aussi pour les trois solutions (7) et, par suite, pour une quelconque de leurs combinaisons linéaires.

Or, considérons la combinaison linéaire suivante

$$(v - \alpha)^2 e^u + (\beta^2 + e^{-2u}) e^u.$$

D'après une formule connue (2), elle représente

$$2\beta \cos \frac{d}{ai},$$

(1) *Leçons sur la théorie des surfaces* (III^e Partie, n^o 796).

(2) *Leçons sur la théorie des surfaces* (III^e Partie, n^o 789).

d désignant la distance géodésique du point de coordonnées u, v au point dont les coordonnées sont

$$u = -\text{Log } \beta, \quad v = \alpha;$$

2β pouvant être remplacé par un facteur de proportionnalité et $\frac{1}{\alpha i}$ étant la racine carrée de la courbure, nous pouvons énoncer le théorème de M. Weingarten :

Étant donnée une surface (S) à courbure totale constante $\frac{1}{k}$, si l'on porte sur la normale en chacun de ses points M une longueur infiniment petite MM' proportionnelle à $\cos \frac{d}{\sqrt{k}}$, d désignant la distance géodésique de M à un point fixe A de (S), la surface (S') décrite par le point M' est, elle aussi, à courbure totale $\frac{1}{k}$ et elle fait partie avec (S) d'une même famille de Lamé.

En répétant la même construction sur (S'), on en déduira une surface nouvelle (S''), puis une suite illimitée de surfaces (S'''), (S'''), . . . , qui formeront une famille de Lamé. Cette famille sera assez générale, car elle dépendra de quatre fonctions arbitraires d'une variable, celles, au nombre de deux, qui entrent dans la définition de (S), puis celles qui servent à définir les positions des points A, A', A'', . . . dans les surfaces correspondantes (S), (S'), (S''), Un raisonnement intuitif montre même que l'on pourra choisir arbitrairement (S) et une des trajectoires orthogonales de la famille de Lamé.

Désignons, en effet, par (C) cette trajectoire orthogonale, qui coupera normalement (S) en un point P. Comme on connaît en ce point le cercle osculateur de (C) et comme H est constant en même temps que d , on sait déjà (n° 40) que le point A sera sur la géodésique admettant pour tangente en P la section du plan tangent à la surface par le plan osculateur. D'autre part, d'après la formule déjà rappelée (1), le rayon connu de ce cercle osculateur doit être défini par la formule

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial n},$$

où H désigne MM' ; et, comme on a ici

$$H = \cos \frac{d}{\sqrt{k}},$$

et comme $\frac{\partial H}{\partial n}$ n'est autre que la dérivée prise par rapport à d , on aura

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{k}} \operatorname{tang} \frac{d}{\sqrt{k}},$$

équation qui fera connaître, en grandeur et en signe, la distance d de P au point A , sur la géodésique passant par P et déterminée plus haut. On pourra donc construire le point A et, par suite, faire dériver (S') de (S) . Recommencant le raisonnement avec (S') et continuant ensuite indéfiniment, on pourra reconstruire toute la famille de Lamé.

Ces raisonnements demandent sans doute à être complétés, mais ils donnent une idée très nette *a priori* des systèmes que nous voulons étudier. Avant de retrouver tous les résultats par une analyse plus irréprochable, nous allons étudier quelques questions qui sont clairement posées par les énoncés précédents.

168. La construction que M. Weingarten a donnée, pour passer de la surface (S) à la surface (S') , offre ce caractère essentiel qu'elle est indépendante de la forme de la surface (S) et demeure la même quand celle-ci se déforme d'une manière quelconque. Nous sommes ainsi conduits à nous proposer le problème suivant :

Étant donnée une surface quelconque (S) , on porte sur ses normales des longueurs infiniment petites MM' . Est-il possible que la surface (S') décrite par M' appartienne toujours, avec (S) , à une famille de Lamé, lorsque (S) se déformera de toutes les manières possibles en entraînant avec elle les petites normales MM' ?

Pour résoudre cette intéressante question, nous supposons la surface rapportée à des coordonnées curvilignes.

Nous construirons le trièdre (T) attaché à la surface et nous emploierons le Tableau IV de formules donné dans nos *Leçons sur la théorie des surfaces* (II^e Partie, p. 387).

Formons d'abord, d'une manière générale, l'équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre à laquelle satisfont les

fonctions

$$1, \quad x', \quad y', \quad z', \quad x'^2 + y'^2 + z'^2,$$

x', y', z' désignant les coordonnées *absolues* d'un point de la surface, c'est-à-dire les coordonnées relativement à un système fixe d'axes coordonnés rectangulaires.

Nous savons que les caractéristiques de cette équation seront les lignes de courbure, et, par suite, c'est à elle que devra satisfaire la plus courte distance de deux surfaces infiniment voisines. Au lieu de calculer à la fois x', y', z' , nous remarquerons que l'équation aux dérivées partielles précédente *est caractérisée par la propriété d'admettre comme solution particulière le carré de la distance du point de la surface à un point fixe quelconque de l'espace.*

Or, si l'on désigne par x, y, z les coordonnées d'un point fixe de l'espace relativement au trièdre (T) attaché à la surface, on a, comme on sait,

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u} + \xi + qz - ry = 0, & \frac{\partial x}{\partial v} + \xi_1 + q_1z - r_1y = 0, \\ \frac{\partial y}{\partial u} + \eta + rx - pz = 0, & \frac{\partial y}{\partial v} + \eta_1 + r_1x - p_1z = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial u} + py - qx = 0, & \frac{\partial z}{\partial v} + p_1y - q_1x = 0; \end{cases}$$

le carré de la distance à un point fixe de l'espace aura donc pour expression

$$(9) \quad \theta = x^2 + y^2 + z^2.$$

Les dérivées de cette fonction θ se calculent aisément à l'aide des formules précédentes et sont données par le Tableau suivant :

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial u} = -\xi x - \eta y, & \frac{\partial \theta}{\partial v} = -\xi_1 x - \eta_1 y, \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} = \xi^2 + \eta^2 - x \left(\frac{\partial \xi}{\partial u} - \eta r \right) - y \left(\frac{\partial \eta}{\partial u} + \xi r \right) - (\eta p - \xi q) z, \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = \xi \xi_1 + \eta \eta_1 - x \left(\frac{\partial \xi}{\partial v} - \eta r_1 \right) - y \left(\frac{\partial \eta}{\partial v} + \xi r_1 \right) - (\eta p_1 - \xi q_1) z, \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = \xi_1^2 + \eta_1^2 - x \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial v} - \eta_1 r_1 \right) - y \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial v} + \xi_1 r_1 \right) - (\eta_1 p_1 - \xi_1 q_1) z. \end{cases}$$

Éliminant x, y, z entre ces équations, de manière à obtenir une équation homogène en θ , nous voyons que θ satisfera à l'équa-

tion aux dérivées partielles linéaire suivante :

$$(11) \quad \left| \begin{array}{cccccc} \frac{\partial \theta}{\partial u} & \xi & \tau_1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial v} & \xi_1 & \tau_1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} & \frac{\partial \xi}{\partial u} - \tau_1 r & \frac{\partial \tau_1}{\partial u} + \xi r & \tau_1 p - \xi q & \xi^2 + \tau_1^2 \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} & \frac{\partial \xi}{\partial v} - \tau_1 r_1 & \frac{\partial \tau_1}{\partial v} + \xi r_1 & \tau_1 p_1 - \xi q_1 & \xi \xi_1 + \tau_1 \tau_1 \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} & \frac{\partial \xi_1}{\partial v} - \tau_1 r_1 & \frac{\partial \tau_1}{\partial v} + \xi_1 r_1 & \tau_1 p_1 - \xi_1 q_1 & \xi_1^2 + \tau_1^2 \end{array} \right| = 0.$$

Telle est donc aussi l'équation à laquelle devra satisfaire la plus courte distance de deux surfaces infiniment voisines. Cette équation, dans notre hypothèse, devra avoir une solution particulière

$$\theta = H,$$

qui se conservera quand la surface se déformera de toutes les manières possibles.

Or, lorsque la surface se déforme, il existe entre les rotations p, q, p_1, q_1 une seule relation linéaire

$$\tau_1 p_1 - \xi q_1 = \tau_1 p - \xi q,$$

à laquelle ne pourra jamais se réduire l'équation (11) donnée plus haut. Il faudra donc que la solution $\theta = H$ vérifie les trois équations aux dérivées partielles que l'on obtiendra en supprimant, dans le déterminant précédent, l'une quelconque des trois dernières lignes et la quatrième colonne. En d'autres termes, il sera nécessaire et suffisant que tous les déterminants contenus dans le système linéaire

$$(12) \quad \left| \begin{array}{cccc} \frac{\partial H}{\partial u} & \xi & \tau_1 & 0 \\ \frac{\partial H}{\partial v} & \xi_1 & \tau_1 & 0 \\ \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} & \frac{\partial \xi}{\partial u} - \tau_1 r & \frac{\partial \tau_1}{\partial u} + \xi r & \tau_1^2 + \xi^2 \\ \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial v} & \frac{\partial \xi}{\partial v} - \tau_1 r_1 & \frac{\partial \tau_1}{\partial v} + \xi r_1 & \tau_1 \tau_1 + \xi \xi_1 \\ \frac{\partial^2 H}{\partial v^2} & \frac{\partial \xi_1}{\partial v} - \tau_1 r_1 & \frac{\partial \tau_1}{\partial v} + \xi_1 r_1 & \tau_1^2 + \xi_1^2 \end{array} \right|$$

soient nuls.

Il y a une solution évidente

$$H = \text{const.}$$

qui correspond au passage à la surface parallèle. Mais, si nous l'écartons pour chercher les autres, on doit supposer que les deux dérivées premières de H ne soient pas nulles en même temps.

Pour obtenir des formules simples, supposons que l'on ait rapporté la surface au système de coordonnées formé avec les courbes $H = \text{const.}$ et leurs trajectoires orthogonales. Alors, on pourra faire

$$H = u, \quad \eta = \xi_1 = 0;$$

et, en appliquant les formules du Tableau IV de nos *Leçons sur la théorie des surfaces*, on aura les deux conditions :

$$\frac{\partial A}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial(AC)}{\partial u} = 0;$$

d'où l'on déduit aisément que l'élément linéaire de la surface cherchée sera réductible à la forme

$$(13) \quad ds^2 = \varphi^2(u) du^2 + \frac{1}{\varphi^2(u)} dv^2.$$

De là, il résulte qu'elle est applicable sur une surface de révolution et comme l'élément d'aire est $du dv$, on est conduit au théorème suivant :

Considérons une surface (S) et imaginons que l'on porte sur toutes ses normales des longueurs infiniment petites MM' , de manière à obtenir une surface infiniment voisine (S') qui forme avec (S) une famille de Lamé. Pour que cette propriété subsiste lorsque (S) se déforme de toutes les manières possibles en entraînant toutes les petites normales MM' , il faut, ou bien que MM' soit une constante, ou bien que (S) soit applicable sur une certaine surface de révolution (Σ). Alors, pour définir toutes les longueurs MM' , on portera sur chaque normale à (Σ) une longueur proportionnelle à l'aire comprise entre un parallèle fixe et le parallèle qui passe par le pied de cette normale.

Ce parallèle fixe pouvant être choisi arbitrairement, l'expression

de H contiendra une constante arbitraire en dehors du facteur de proportionnalité.

Par exemple, si la surface est à courbure constante $\frac{1}{a^2}$, on pourra ramener son élément linéaire à la forme

$$ds^2 = (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2) a^2,$$

et il faudra porter sur chaque normale des quantités proportionnelles à

$$\cos\theta + k.$$

Dans le cas particulier des surfaces à courbure constante, qui sert de point de départ à cette recherche, la surface (S') conserve toujours la même courbure totale, lorsque la surface (S) se déforme et, par suite, la surface (S') demeure toujours applicable sur elle-même. Cette propriété, il est aisé de le reconnaître, ne saurait subsister lorsque la surface (S) a sa courbure totale variable. En effet, lorsqu'elle se déforme en demeurant de révolution, la surface (S') est aussi de révolution. Par suite, si celle-ci demeurerait toujours applicable sur elle-même, elle devrait l'être sur une surface de révolution dont les parallèles correspondraient à ceux de la surface (Σ). Un calcul que nous omettons montrera au lecteur que cela n'arrive jamais. Cette remarque accroît encore l'intérêt du théorème de M. Weingarten.

169. Nous avons vu (nos 40, 41 et 46) qu'à chaque valeur de H correspond un système cyclique formé par les cercles osculateurs des trajectoires et *vice versa*. Le théorème précédent montre donc qu'il existe des systèmes cycliques formés de cercles normaux à une surface (S) et qui conservent cette propriété lorsque la surface se déforme de toutes les manières possibles en entraînant ces cercles. La surface (S) est alors applicable sur une surface de révolution (Σ) et les plans des cercles qui composent le système sont tangents à la surface complémentaire.

Le raisonnement suivant par lequel on peut retrouver cette propriété des surfaces applicables sur une surface de révolution mettra une fois de plus en évidence l'intérêt qu'il y a à introduire l'imaginaire en Géométrie.

Si l'élément linéaire d'une surface (S) est réductible à la forme

$$(14) \quad ds^2 = du^2 + C^2 dv^2,$$

où C est fonction de u , on sait que cette surface (S) est applicable sur une surface de révolution (Σ); de plus, les tangentes aux géodésiques de paramètre v touchent une autre surface (S_1) dont l'élément linéaire est réductible à la forme

$$(15) \quad ds_1^2 = \left(\frac{CC''}{C'^2} \right)^2 du^2 + \frac{dw^2}{C'^2}.$$

Par suite, cette surface (S_1), que nous appellerons avec M. Bianchi *la surface complémentaire de (S)*, est, elle aussi, applicable sur une surface de révolution (Σ_1) (1).

Nous avons étudié cette proposition avec tous les détails nécessaires, nous en signalerons ici une conséquence nouvelle et singulière : c'est que toute surface de révolution peut, en se déformant, venir s'appliquer sur une droite quelconque. Imaginons, par exemple, que (S), en se déformant, vienne s'appliquer sur la surface (Σ), il faudra bien que la surface (S_1) vienne, en se déformant, s'appliquer sur l'axe même de (Σ); chaque point de cet axe contiendra tous les points de (S_1) qui correspondent à un même parallèle de (Σ). Nous allons retrouver cette proposition et montrer de plus que (S_1), *en se déformant, peut même se réduire à une droite isotrope*.

En effet, nous savons que la variable w employée plus haut, dans la formule (15), est définie par la quadrature

$$(16) \quad dw = C(q du + q_1 dv),$$

où nous conservons toutes les notations de nos *Leçons* (II^e Partie, n^o 749). Les quantités q, q_1 satisfont, avec les autres rotations du trièdre (T) attaché à (S), aux relations

$$(17) \quad \begin{cases} r = 0, & q_1 + Cp = 0, & \frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial p_1}{\partial u} = qC', \\ r_1 = C', & C'' + pq_1 - qp_1 = 0, & \frac{\partial q}{\partial v} - \frac{\partial q_1}{\partial u} = -pC'. \end{cases}$$

(1) *Leçons sur la théorie des surfaces* (III^e Partie, Livre VII, Chap. X).

En général, la rotation q_1 n'est pas nulle, w est alors une fonction qui ne dépend pas uniquement de u ; l'expression de ds_1^2 est une somme de deux carrés et convient à une surface (S_1) qui a réellement deux dimensions. Mais il est facile de voir que l'hypothèse

$$q_1 = 0,$$

peut être admise; elle réduit alors ds_1^2 à un carré parfait et la surface (S_1) à une ligne droite. On a, en effet, dans ce cas,

$$\begin{aligned} p &= 0, & C'' &= qp_1, \\ \frac{\partial q}{\partial v} &= 0, & \frac{\partial p_1}{\partial u} &= -qC'; \end{aligned}$$

d'où l'on déduit, en intégrant,

$$(18) \quad p_1^2 + C'^2 = h^2, \quad q = \frac{C''}{p_1}, \quad dw = \frac{CC''}{p_1} du,$$

h désignant une constante.

L'élément linéaire de (S_1) prend alors la forme suivante :

$$(19) \quad ds_1^2 = \left(\frac{CC''h}{C'^2 p_1} \right)^2 du^2,$$

c'est-à-dire qu'il se réduit à un carré parfait. Il est aisé de vérifier, d'après les résultats donnés au n° 749 de nos *Leçons*, que (S_1) se réduit à une droite. Si la constante h devient nulle, *cette droite est isotrope*.

Ainsi, il existe une infinité de déformations simultanées des surfaces complémentaires (S) et (S_1) dans lesquelles l'une d'elles (S_1) se réduit à une droite (d) , et, parmi elles il y en a une pour laquelle cette droite est isotrope.

Soit (Σ_0) l'une des formes de (S) pour lesquelles (S_1) se réduit à une droite (d) et soit alors m un point quelconque de (d) . La sphère de rayon nul admettant pour centre le point m coupera les plans tangents de (Σ_0) suivant des cercles (C_0) et nous savons ⁽¹⁾ que, lorsque (Σ_0) se déforme, en entraînant ces cercles (C_0) , de manière à reprendre sa forme primitive (S) , les nouvelles posi-

(1) *Leçons sur la théorie des surfaces* (III^e Partie, Livre VII, Chap. VIII).

tions (C) des cercles (C_0) engendrent un système cyclique, quel que soit le point m choisi sur (d).

Au lieu de rattacher tous les cercles (C) à la surface (S), on peut définir leur position relativement à la surface complémentaire (S_1).

Soit p un point de (S), p_1 le point correspondant de (S_1), les plans tangents en p , p_1 aux deux surfaces se coupent suivant la droite pp_1 , ils sont rectangulaires et forment avec pp_1 une figure qui demeure invariable lorsque (S) et, par suite, (S_1) se déforment d'une manière quelconque.

Lorsque (S) prend la forme (Σ_0) pour laquelle (S_1) se réduit à une droite (d), p_1 devient le point où le plan tangent en p à (Σ_0) vient couper la droite (d), le plan tangent à (S_1) en p_1 se réduit au plan passant par les droites (d) et pp_1 ; de sorte que le cercle (C_0) défini plus haut a nécessairement son centre sur la droite pp_1 . Il en sera donc de même des cercles (C).

Ainsi, étant donnée une surface (S_1) applicable sur une surface de révolution, il existe une infinité de systèmes cycliques que l'on peut rattacher comme il suit à cette surface : si p_1 est un point quelconque de (S_1), il lui correspondra un cercle dont le centre sera situé sur la tangente en p_1 à la géodésique qui résulte de la déformation d'un méridien et dont le plan sera le plan osculateur à cette géodésique. Et le système de tous ces cercles ne cessera pas de rester cyclique lorsque la surface se déformera d'une manière quelconque en les entraînant.

Comme les déformations qui réduisent (S_1) à une droite (d) dépendent d'un paramètre arbitraire h , comme, d'autre part, on peut choisir arbitrairement le point m sur chaque droite (d), les systèmes cycliques précédents dépendent de deux paramètres.

Parmi eux, nous devons distinguer ceux qui correspondent au cas, signalé plus haut, où la droite (d) est isotrope; alors, comme chaque point-sphère ayant son centre sur cette droite la contiendra tout entière, les cercles (C_0) et, par suite, les cercles (C) passeront par le point p_1 . *Ils deviendront normaux à (S_1) en ce point.*

Il est ainsi établi par la Géométrie qu'à chaque surface applicable sur une surface de révolution, on peut faire correspondre une suite simplement infinie de systèmes cycliques; ces systèmes sont formés de cercles normaux à la surface et ne cessent pas de

rester cycliques quand la surface se déforme d'une manière quelconque en entraînant tous les cercles. Les plans de ces cercles demeurent tangents à la surface complémentaire.

170. Après ces remarques sur la proposition de M. Weingarten, nous allons faire connaître l'extension que lui a donnée M. Bianchi. Non seulement l'éminent géomètre a démontré en toute précision l'existence des systèmes triples orthogonaux que le théorème de M. Weingarten permettait de prévoir; il a mis, de plus, en évidence l'existence d'une infinité d'autres familles de Lamé qui sont toujours composées de surfaces à courbure constante; mais la courbure de chaque surface n'est pas la même; elle varie suivant une loi quelconque, lorsqu'on passe de l'une des surfaces à toute autre de la même famille. Il a fait, en outre, connaître un grand nombre de propriétés géométriques des systèmes triples auxquels on est ainsi conduit ⁽¹⁾. Nous allons démontrer ici les plus essentiels des résultats que l'on doit à M. Bianchi.

Considérons un système triple et supposons que les surfaces à courbure totale constante soient celles dont le paramètre est ρ . Admettons, pour fixer les idées, que la courbure de toutes les surfaces, qui pourrait être tantôt positive et tantôt négative, soit négative et égale à $-\frac{1}{R^2}$. R sera une constante s'il s'agit des systèmes de M. Weingarten, et une simple fonction de ρ s'il s'agit de ceux de M. Bianchi. Exprimons d'abord que les surfaces de paramètre ρ ont leur courbure totale égale à $-\frac{1}{R^2}$.

Les deux rayons de courbure de la surface de paramètre ρ sont donnés par les formules (n° 107)

$$(20) \quad \frac{1}{R_{01}} = -\frac{1}{HH_1} \frac{\partial H_1}{\partial \rho}, \quad \frac{1}{R_{02}} = -\frac{1}{HH_2} \frac{\partial H_2}{\partial \rho}.$$

(1) Les recherches de M. L. Bianchi sont résumées dans ses excellentes *Lezioni di Geometria differenziale*. Elles sont développées principalement dans deux Mémoires insérés aux tomes XIII et XIV des *Annali di Matematica* de Milan, 2^e série. On pourra consulter aussi les deux Notes insérées le 15 février et le 15 mars 1885, dans les *Rendiconti* de l'Académie Royale des *Lineei*, série IV, t. I.

Posons, en introduisant une variable auxiliaire ω ,

$$(21) \quad R_{01} = R \cot \omega, \quad R_{02} = -R \tan \omega.$$

Il viendra

$$(22) \quad \frac{\partial \log H_1}{\partial \rho} = -\frac{H}{R} \tan \omega, \quad \frac{\partial \log H_2}{\partial \rho} = \frac{H}{R} \cot \omega.$$

Si nous portons ces valeurs de $\frac{\partial H_1}{\partial \rho}$, $\frac{\partial H_2}{\partial \rho}$ dans celles des équations (B) qui contiennent après leur développement $\frac{\partial^2 H_1}{\partial \rho \partial \rho_1}$, $\frac{\partial^2 H_2}{\partial \rho \partial \rho_1}$, nous aurons

$$(23) \quad \begin{cases} \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \rho_2} = -\tan \omega \frac{\partial \omega}{\partial \rho_2}, \\ \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \rho_1} = \cot \omega \frac{\partial \omega}{\partial \rho_1}. \end{cases}$$

On déduira de là, en intégrant,

$$(24) \quad H_1 = S_2 \cos \omega, \quad H_2 = S_1 \sin \omega,$$

S_k ne dépendant pas de la variable ρ_k .

Substituons ces valeurs de H_1, H_2 dans les équations (22); elles nous donnent les deux suivantes :

$$(25) \quad \begin{cases} \frac{\partial \log S_1}{\partial \rho} = \cot \omega \left(\frac{H}{R} - \frac{\partial \omega}{\partial \rho} \right), \\ \frac{\partial \log S_2}{\partial \rho} = -\tan \omega \left(\frac{H}{R} - \frac{\partial \omega}{\partial \rho} \right). \end{cases}$$

Si donc on n'a pas, à la fois,

$$\frac{H}{R} - \frac{\partial \omega}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{\partial S_1}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{\partial S_2}{\partial \rho} = 0,$$

on déduira des équations précédentes la relation

$$\tan \omega \frac{\partial \log S_1}{\partial \rho} + \cot \omega \frac{\partial \log S_2}{\partial \rho} = 0;$$

et, par suite, $\tan \omega$ sera de la forme

$$(26) \quad \tan \omega = \frac{M(\rho, \rho_1)}{N(\rho, \rho_2)}.$$

Nous allons voir que cette hypothèse conviendrait aux seuls systèmes pour lesquels toutes les surfaces à courbure constante sont de révolution.

171. En effet, considérons une surface particulière de paramètre ρ . Son élément linéaire, qui est donné par la formule

$$ds^2 = \cos^2 \omega S_2^2 d\rho_1^2 + \sin^2 \omega S_1^2 d\rho_2^2,$$

peut être ramené à la forme plus simple

$$(27) \quad ds^2 = \cos^2 \omega du^2 + \sin^2 \omega dv^2.$$

Il suffit, pour cela, de poser

$$(28) \quad u = \int S_2 d\rho_1, \quad v = \int S_1 d\rho_2.$$

Avec ce changement de variables, la formule (26) nous donnera

$$(29) \quad \text{tang } \omega = \frac{U}{V},$$

U et V dépendant respectivement de u et de v . D'autre part, en exprimant que la courbure totale est égale à $-\frac{1}{R^2}$, on aura l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} = \frac{\sin \omega \cos \omega}{R^2},$$

à laquelle devra satisfaire ω . Si l'on remplace ω par sa valeur déduite de l'équation (29) et si l'on emploie la notation de Lagrange pour les dérivées de U et de V, il viendra la condition

$$(30) \quad \left(\frac{U''}{U} + \frac{V''}{V} \right) (U^2 + V^2) = \frac{U^2 + V^2}{R^2} + 2U'U' + 2V'V'.$$

Cette équation fonctionnelle, dérivée successivement par rapport à u et à v , nous donnera

$$\left(\frac{U''}{U} \right)' V V' + \left(\frac{V''}{V} \right)' U U' = 0.$$

On déduit de là que l'on doit poser, k désignant une constante,

$$\left(\frac{U''}{U} \right)' = 4k U U', \quad \left(\frac{V''}{V} \right)' = -4k V V'.$$

En intégrant, on aura d'abord

$$U'' = 2kU^3 + hU, \quad V'' = -2kV^3 + h_1V,$$

h et h_1 désignant de nouvelles constantes, puis

$$U'^2 = kU^4 + hU^2 + l, \quad V'^2 = -kV^4 + h_1V^2 + l_1,$$

l et l_1 étant encore des constantes. En portant les valeurs de U' , V' , U'' , V'' dans l'équation fonctionnelle, il viendra

$$(31) \quad \left(h_1 - h - \frac{1}{R^2}\right)U^2 + \left(h - h_1 - \frac{1}{R^2}\right)V^2 - 2l - 2l_1 = 0.$$

Les coefficients de U^2 et de V^2 ne pourraient être nuls en même temps que si la surface avait une courbure totale nulle, c'est-à-dire se réduisait à une développable ou à un plan. Si nous écartons ces cas déjà étudiés, il faudra donc que l'une des fonctions U ou V se réduise à une constante. Mais alors, ω ne dépendant que de l'une des variables u et v , on sait que la surface est de révolution.

Ces systèmes formés de surfaces de révolution peuvent être construits *a priori*. Écartons le cas, déjà étudié, où elles sont toutes des sphères; il résulte de la proposition démontrée au n° 64, que l'axe de révolution sera commun à toutes les surfaces qui composent une telle famille de Lamé. Or une surface à courbure constante de révolution, qui admet un axe donné de révolution, dépend de trois constantes arbitraires.

En établissant deux relations entre ces trois constantes, on formera une infinité de familles de Lamé répondant aux conditions du problème et l'on trouvera sans difficulté, en construisant les trajectoires orthogonales des méridiens, la famille de surfaces de révolution qui, jointe à l'ensemble des méridiens, complète le système triple cherché.

172. Si nous écartons encore cette solution spéciale du problème, nous voyons qu'on devra supposer

$$H = R \frac{\partial \omega}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial S_1}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{\partial S_2}{\partial \rho} = 0;$$

S_1 dépendra de la seule variable ρ_2 et S_2 de la seule variable ρ_1 .

Par suite, en substituant à ρ_1 et à ρ_2 les deux quadratures

$$\int S_2 d\rho_1, \quad \int S_1 d\rho_2,$$

on pourra ramener l'expression de l'élément linéaire, dans le système orthogonal cherché, à la forme élégante

$$(32) \quad ds^2 = R^2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial \rho} \right)^2 d\rho^2 + \cos^2 \omega d\rho_1^2 + \sin^2 \omega d\rho_2^2,$$

c'est-à-dire prendre

$$(33) \quad H = R \frac{\partial \omega}{\partial \rho}, \quad H_1 = \cos \omega, \quad H_2 = \sin \omega.$$

Il ne restera plus qu'à substituer ces expressions de H , H_1 , H_2 dans les équations fondamentales (B) et (B') pour obtenir les équations aux dérivées partielles auxquelles devra satisfaire ω . On est ainsi conduit aux formules suivantes.

Calculons d'abord les rotations β_{ik} . On aura

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \beta_{01} = -\frac{\sin \omega}{R}, & \beta_{10} = \frac{R}{\cos \omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \rho \partial \rho_1}, \\ \beta_{02} = \frac{\cos \omega}{R}, & \beta_{20} = \frac{R}{\sin \omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \rho \partial \rho_2}, \\ \beta_{12} = \frac{\partial \omega}{\partial \rho_1}, & \beta_{21} = -\frac{\partial \omega}{\partial \rho_2}. \end{array} \right.$$

En les substituant dans les six équations (B), (B'), il restera seulement les quatre équations suivantes :

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial \rho_1^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial \rho_2^2} - \frac{\sin \omega \cos \omega}{R^2} = 0, \\ \mathfrak{B} = \frac{\partial^3 \omega}{\partial \rho \partial \rho_1 \partial \rho_2} - \cot \omega \frac{\partial \omega}{\partial \rho_1} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \rho \partial \rho_2} + \tan \omega \frac{\partial \omega}{\partial \rho_2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \rho \partial \rho_1} = 0, \\ \mathfrak{C} = \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\frac{1}{\cos \omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \rho \partial \rho_1} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\sin \omega}{R} \right) - \frac{1}{\sin \omega} \frac{\partial \omega}{\partial \rho_2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \rho \partial \rho_2} = 0, \\ \mathfrak{D} = \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left(\frac{1}{\sin \omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \rho \partial \rho_2} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\cos \omega}{R} \right) + \frac{1}{\cos \omega} \frac{\partial \omega}{\partial \rho_1} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \rho \partial \rho_1} = 0. \end{array} \right.$$

La seconde équation joue un rôle important dans des recherches qui seront exposées plus loin et son intégration permettrait de déterminer *tous* les systèmes triples orthogonaux; elle peut se

mettre sous l'une des trois formes suivantes :

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\mathfrak{A}}{\cos \omega} = \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left(\frac{1}{\cos \omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \rho \partial \rho_1} \right) - \frac{1}{\sin \omega} \frac{\partial \omega}{\partial \rho_1} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \rho \partial \rho_2} = 0, \\ \frac{\mathfrak{A}}{\sin \omega} = \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\frac{1}{\sin \omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \rho \partial \rho_2} \right) + \frac{1}{\cos \omega} \frac{\partial \omega}{\partial \rho_2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \rho \partial \rho_1} = 0, \\ \frac{\mathfrak{A}}{\sin \omega \cos \omega} = \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\cot \omega \frac{\partial^2 \omega}{\partial \rho \partial \rho_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left(\text{tang} \omega \frac{\partial^2 \omega}{\partial \rho \partial \rho_1} \right) = 0; \end{array} \right.$$

ces trois formes permettent de vérifier aisément les relations identiques suivantes auxquelles satisfont les premiers membres des équations (35)

$$(37) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{C} \cos \omega - \mathfrak{D} \sin \omega = \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial \rho}, \\ \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\frac{\mathfrak{A}}{\cos \omega} \right) - \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial \rho_2} = - \frac{1}{\sin \omega} \frac{\partial \omega}{\partial \rho_1} \mathfrak{A} + \frac{\partial \omega}{\partial \rho_2} \mathfrak{C} - \frac{1}{\sin \omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \rho \partial \rho_2} \mathfrak{A}, \\ \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left(\frac{\mathfrak{A}}{\sin \omega} \right) - \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial \rho_1} = \frac{1}{\cos \omega} \frac{\partial \omega}{\partial \rho_2} \mathfrak{A} - \frac{\partial \omega}{\partial \rho_1} \mathfrak{D} - \frac{1}{\cos \omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \rho \partial \rho_1} \mathfrak{A}, \end{array} \right.$$

et qui vont jouer un rôle essentiel dans notre discussion.

On pourrait d'abord en déduire que les deux dernières équations (35) sont de simples conséquences des deux premières. Laisant ce point de côté, nous remarquerons tout d'abord qu'en vertu de la première identité on peut supprimer l'une quelconque des équations

$$\mathfrak{C} = 0, \quad \text{ou} \quad \mathfrak{D} = 0.$$

En tenant compte des deux autres identités, on peut montrer que si l'équation

$$\mathfrak{A} = 0$$

est toujours vérifiée et si les équations

$$\mathfrak{A} = 0, \quad \mathfrak{D} = 0$$

le sont seulement pour $\rho_1 = 0$, elles le seront pour toutes les valeurs de ρ_1 .

Supposons, en effet, que \mathfrak{A} , \mathfrak{C} et, par suite, \mathfrak{D} soient nuls pour $\rho_1 = 0$. Il résulte des identités qu'il en sera de même des dérivées premières de ces fonctions par rapport à ρ_1 . En différenciant les identités par rapport à cette même variable, on verra

qu'il en est de même de toutes les dérivées de \mathfrak{B} , \mathfrak{C} , \mathfrak{D} jusqu'à un ordre quelconque, prises par rapport à ρ_1 . Par conséquent, ces fonctions, qui sont développables, seront nulles pour toutes les valeurs de ρ_1 .

De cette proposition, on peut déduire la règle suivante :

On intégrera l'équation

$$\mathfrak{A} = 0,$$

en déterminant une solution ω qui satisfasse aux conditions initiales suivantes

$$\omega = \omega_0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial \rho_1} = \psi_0, \quad \text{pour} \quad \rho_1 = 0,$$

ω_0 et ψ_0 étant des fonctions de deux variables assujetties à vérifier les deux équations

$$\mathfrak{B} = 0, \quad \mathfrak{D} = 0,$$

où l'on aura remplacé ω par ω_0 , $\frac{\partial \omega}{\partial \rho_1}$ par ψ_0 , c'est-à-dire étant déterminées par le système

$$(38) \quad \begin{cases} \mathfrak{B}' = \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \rho \partial \rho_2} - \psi_0 \cot \omega_0 \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial \rho \partial \rho_2} + \operatorname{tang} \omega_0 \frac{\partial \omega_0}{\partial \rho_2} \frac{\partial \psi_0}{\partial \rho} = 0, \\ \mathfrak{D}' = \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left(\frac{1}{\sin \omega_0} \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial \rho \partial \rho_2} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\cos \omega_0}{R} \right) + \frac{\psi_0}{\cos \omega_0} \frac{\partial \psi_0}{\partial \rho} = 0. \end{cases}$$

La fonction ω ainsi déterminée sera la solution la plus générale des équations (35); car elle satisfait à la première pour toutes les valeurs de ρ_1 et aux trois autres pour $\rho_1 = 0$.

Il nous reste à discuter le système précédent (38); mais ce système contient deux fonctions inconnues et il se compose de deux équations, l'une du second, l'autre du troisième ordre. Il admettra donc une solution générale dépendant de cinq fonctions arbitraires d'une variable. Ainsi se trouve fixé le degré de généralité de la solution la plus étendue du système (35).

Il y a cependant à préciser, à distinguer les cas où R est constant de ceux où R est une fonction de ρ .

Dans la première hypothèse qui correspond aux systèmes de M. Weingarten, on ne change pas la forme des équations en remplaçant ρ par une fonction de ρ . On peut ainsi faire disparaître une

fonction arbitraire et la solution ne dépend plus que de quatre fonctions arbitraires.

Si l'on faisait le même changement dans le second cas, on modifierait la forme de la relation qui relie R à ρ , ce qui n'est évidemment pas permis. Les systèmes de M. Bianchi, qui correspondent à cette hypothèse, contiennent donc une fonction arbitraire de plus que ceux de M. Weingarten.

173. On aurait pu encore montrer que les équations (35) admettent une intégrale commune et fixer le degré de généralité de cette intégrale en raisonnant de la manière suivante.

Remplaçons dans le système (35) la première équation par ses trois dérivées relatives à ρ , ρ_1 , ρ_2 . En tenant compte de la première identité (37), on reconnaît qu'il restera seulement cinq équations du troisième ordre, pouvant être résolues par rapport aux dérivées troisièmes

$$\frac{\partial^3 \omega}{\partial \rho_1^3}, \quad \frac{\partial^3 \omega}{\partial \rho_1^2 \partial \rho_2}, \quad \frac{\partial^3 \omega}{\partial \rho_1 \partial \rho_2^2}, \quad \frac{\partial^3 \omega}{\partial \rho_1 \partial \rho_2 \partial \rho}, \quad \frac{\partial^3 \omega}{\partial \rho_2^2 \partial \rho},$$

et toutes les valeurs que l'on en déduira pour celles des dérivées quatrièmes, cinquièmes ou sixièmes qui peuvent être obtenues de différentes manières par la différentiation seront compatibles. De là il résulte qu'en différentiant jusqu'à un ordre quelconque, on n'aura jamais de valeurs discordantes pour une même dérivée et l'on pourra déterminer toutes les dérivées du $n^{\text{ième}}$ ordre sauf

$$\frac{\partial^n \omega}{\partial \rho_1^n}, \quad \frac{\partial^n \omega}{\partial \rho_1^{n-1} \partial \rho_1}, \quad \frac{\partial^n \omega}{\partial \rho_1^{n-1} \partial \rho_2}, \quad \frac{\partial^n \omega}{\partial \rho_2^n}, \quad \frac{\partial^n \omega}{\partial \rho_2^{n-1} \partial \rho_1}.$$

La solution générale comportera donc cinq fonctions arbitraires d'une variable. Cela résulte des propositions générales relatives à la théorie des systèmes d'équations aux dérivées partielles.

174. M. Bianchi a remarqué que, lorsqu'on a trouvé un système orthogonal de la nature des précédents, on pourra en déduire une infinité d'autres de même nature en leur appliquant des transformations analogues à celles qui ont été employées pour les surfaces isolées. On peut établir ce résultat comme il suit.

Prenons dans le plan des yz du trièdre (T) formé par les nor-

males en M aux surfaces coordonnées, c'est-à-dire dans le plan tangent à celle des trois surfaces dont la courbure est constante, le point M' dont les coordonnées sont

$$(39) \quad x = 0, \quad y = m \cos \theta, \quad z = m \sin \theta,$$

m désignant une fonction inconnue de ρ . Les projections du déplacement de ce point seront définies par les formules

$$(40) \quad \begin{cases} D_x = \left(R \frac{\partial \omega}{\partial \rho} + y \beta_{10} + z \beta_{20} \right) d\rho - y \beta_{01} d\rho_1 - z \beta_{02} d\rho_2, \\ D_y = \cos \theta dm - z(d\theta - \beta_{21} d\rho_1 + \beta_{12} d\rho_2) + \cos \omega d\rho_1, \\ D_z = \sin \theta dm + y(d\theta - \beta_{21} d\rho_1 + \beta_{12} d\rho_2) + \sin \omega d\rho_2, \end{cases}$$

qui sont une simple application des équations (C) (n° 107).

Si nous nous déplaçons sur la surface de paramètre ρ et si nous voulions obtenir la transformation de M. Bäcklund, c'est-à-dire si nous voulions que la surface décrite par le point M' fût à courbure constante comme la surface décrite par le sommet M du trièdre (T), il faudrait choisir pour θ une fonction satisfaisant à la condition (1)

$$\begin{aligned} m(d\theta - \beta_{21} d\rho_1 + \beta_{12} d\rho_2) \\ = \sin \theta \cos \omega (d\rho_1 + \lambda d\rho_2) - \sin \omega \cos \theta (\lambda d\rho_1 + d\rho_2). \end{aligned}$$

Conservons ici la même équation; mais, pour tenir compte de ce que θ dépend de ρ , remplaçons-y $d\theta$ par $d\theta - \frac{\partial \theta}{\partial \rho} d\rho$ afin qu'elle convienne à des variations arbitraires de ρ , ρ_1 , ρ_2 . Nous aurons ainsi l'équation

$$(41) \quad \begin{cases} m(d\theta - \beta_{21} d\rho_1 + \beta_{12} d\rho_2) \\ = \sin \theta \cos \omega (d\rho_1 + \lambda d\rho_2) - \sin \omega \cos \theta (\lambda d\rho_1 + d\rho_2) + m \frac{\partial \theta}{\partial \rho} d\rho, \end{cases}$$

qui s'appliquera à des valeurs quelconques des différentielles $d\rho$, $d\rho_1$, $d\rho_2$.

On peut s'en servir pour simplifier les expressions (40) des projections du déplacement. Mais, auparavant, faisons tourner le trièdre (T) d'un angle θ autour de Mx , de manière que son axe

(1) *Leçons sur la théorie des surfaces* (III^e Partie, Livre VII, Chap. XII).

des y prendra la direction MM' . En désignant par D_y, D_z les projections du déplacement sur les nouveaux axes des y et des z , on aura

$$(42) \quad \begin{cases} D_x = \left(R \frac{\partial \omega}{\partial \rho} + y \beta_{10} + z \beta_{20} \right) d\rho + \frac{m}{R} (\sin \omega \cos \theta d\rho_1 - \sin \theta \cos \omega d\rho_2), \\ D_y = \frac{\partial m}{\partial \rho} d\rho + \cos \omega \cos \theta d\rho_1 + \sin \omega \sin \theta d\rho_2, \\ D_z = m \frac{\partial \theta}{\partial \rho} d\rho - \lambda (\sin \omega \cos \theta d\rho_1 - \sin \theta \cos \omega d\rho_2). \end{cases}$$

Aux surfaces coordonnées décrites par le point M correspondent trois familles de surfaces décrites par le point M' . Pour que ces trois familles soient orthogonales, il sera nécessaire et suffisant que l'expression de

$$ds'^2 = D_x^2 + D_y^2 + D_z^2$$

ne contienne que les carrés des différentielles $d\rho, d\rho_1, d\rho_2$.

En exprimant d'abord que le rectangle $d\rho_1 d\rho_2$ disparaît, on trouve l'équation

$$(43) \quad 1 = \lambda^2 + \frac{m^2}{R^2},$$

puis, en égalant à zéro les deux autres rectangles, on a

$$(44) \quad \frac{\partial m}{\partial \rho} = 0, \quad R \frac{\partial \omega}{\partial \rho} + y \beta_{10} + z \beta_{20} = R \lambda \frac{\partial \theta}{\partial \rho};$$

de sorte que, en rapprochant les équations (34), (41), (44), on voit que θ sera défini par le système suivant

$$(45) \quad \begin{cases} m \left(\frac{\partial \theta}{\partial \rho_1} + \frac{\partial \omega}{\partial \rho_2} \right) = \sin \theta \cos \omega - \lambda \sin \omega \cos \theta, \\ m \left(\frac{\partial \theta}{\partial \rho_2} + \frac{\partial \omega}{\partial \rho_1} \right) = \lambda \sin \theta \cos \omega - \sin \omega \cos \theta, \\ \lambda \frac{\partial \theta}{\partial \rho} = \frac{\partial \omega}{\partial \rho} + m \frac{\cos \theta}{\cos \omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \rho \partial \rho_1} + m \frac{\sin \theta}{\sin \omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \rho \partial \rho_2}, \end{cases}$$

qui se ramène immédiatement à l'ensemble de trois équations de Riccati, si l'on prend comme inconnue $\tan \frac{\theta}{2}$. Les méthodes que

nous avons souvent appliquées (1) montrent que ces trois équations admettront une intégrale contenant une constante arbitraire toutes les fois que ω satisfera aux équations fondamentales (35). On peut maintenant, comme l'a fait M. Bianchi, édifier une théorie toute semblable à celle que l'on applique à des surfaces isolées et qui a été développée dans nos *Leçons* (Livre VII, Chap. XII et XIII). Mais nous renverrons sur ce point aux Mémoires et à l'excellent Ouvrage de M. Bianchi.

175. Nous terminerons cette étude générale en vérifiant par l'Analyse une des propriétés fondamentales des systèmes de M. Weingarten. Pour les familles de Lamé formées de surfaces ayant toutes la même courbure totale $\frac{1}{k}$, les lignes d'équidistance de chaque surface, c'est-à-dire les lignes pour lesquelles la distance à la surface infiniment voisine est la même, sont définies, d'après l'énoncé même du théorème fondamental, par une équation de la forme

$$\cos \frac{d}{\sqrt{k}} = \text{const.}$$

et sont, par suite, des cercles géodésiques concentriques. Si les systèmes que nous avons obtenus se confondent réellement, en supposant que R soit constant, avec ceux dont le théorème de M. Weingarten fait prévoir l'existence, il faudra que les lignes d'équidistance, définies évidemment par l'équation

$$\frac{\partial \omega}{\partial \rho} = \text{const.},$$

soient des cercles géodésiques parallèles.

La condition de parallélisme pour les courbes définies par une équation

$$n = \text{const.},$$

sur la surface de paramètre ρ , s'exprime, comme on sait, par l'équation (2)

$$(46) \quad \Delta n = \frac{1}{\cos^2 \omega} \left(\frac{\partial n}{\partial \rho_1} \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \omega} \left(\frac{\partial n}{\partial \rho_2} \right)^2 = F(n).$$

(1) *Leçons sur la théorie des surfaces* (I^e Partie, Livre I).

(2) *Leçons sur la théorie des surfaces* (II^e Partie, Livre V, Chap. IV et V).

Nous sommes ainsi conduits à calculer la fonction

$$(47) \quad \Delta \left(\frac{\partial \omega}{\partial \rho} \right) = \frac{1}{\cos^2 \omega} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \rho \partial \rho_1} \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \omega} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \rho \partial \rho_2} \right)^2.$$

Or, dans le cas où R est constant, un calcul facile montre qu'en combinant les équations (35) on peut obtenir les deux suivantes

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \rho_1} - \frac{2}{R^2} \frac{\partial \omega}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \rho \partial \rho_1} = 0, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial \rho_2} - \frac{2}{R^2} \frac{\partial \omega}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \rho \partial \rho_2} = 0;$$

d'où l'on déduit, en intégrant et posant

$$(48) \quad n = \frac{\partial \omega}{\partial \rho},$$

la relation

$$(49) \quad \Delta n = \frac{n^2 + F(\rho)}{R^2};$$

où F(ρ) désigne une fonction arbitraire de ρ. Cette équation montre déjà que les courbes d'équidistance sont parallèles.

Si l'on veut rapporter la surface à ces courbes et à leurs trajectoires orthogonales, il faudra partir de l'identité

$$\begin{aligned} ds^2 &= \cos^2 \omega d\rho_1^2 + \sin^2 \omega d\rho_2^2 \\ &= \frac{dn^2}{\Delta n} + \frac{1}{\Delta n} \left(\operatorname{tang} \omega \frac{\partial^2 \omega}{\partial \rho \partial \rho_1} d\rho_2 - \cot \omega \frac{\partial^2 \omega}{\partial \rho \partial \rho_2} d\rho_1 \right)^2. \end{aligned}$$

Si, comme nous le supposons, les courbes d'équidistance sont des cercles concentriques, il faudra que la différentielle entre parenthèses ait un multiplicateur fonction de la seule variable n. Cette condition permet de le déterminer et l'on trouve aisément que l'on peut poser

$$(50) \quad \operatorname{tang} \omega \frac{\partial^2 \omega}{\partial \rho \partial \rho_1} d\rho_2 - \cot \omega \frac{\partial^2 \omega}{\partial \rho \partial \rho_2} d\rho_1 = \Delta n dv.$$

On a ainsi pour l'élément linéaire de la surface l'expression très simple

$$(51) \quad ds^2 = \frac{R^2 dn^2}{n^2 + F(\rho)} + \frac{n^2 + F(\rho)}{R^2} dv^2,$$

qui convient, on s'en assure aisément, à une surface de courbure

totale $-\frac{1}{R^2}$, rapportée à une famille de cercles concentriques et aux géodésiques qui les coupent à angle droit.

Si F est positive, on peut poser

$$n + \sqrt{n^2 + F} = \sqrt{F} e^{\frac{u}{R}},$$

et l'élément linéaire prend la forme

$$(52) \quad ds^2 = du^2 + \left(\frac{e^{\frac{u}{R}} + e^{-\frac{u}{R}}}{2} \right)^2 \frac{F}{R^2} dv^2,$$

qui convient au cas où le centre des cercles géodésiques est *idéal*.

Si F est nulle, on pourra poser

$$n = R e^{\frac{u}{R}},$$

et il viendra

$$(53) \quad ds^2 = du^2 + e^{\frac{2u}{R}} dv^2.$$

Le centre des cercles géodésiques est alors à *l'infini*.

Enfin, si F est négative, on aura

$$n + \sqrt{n^2 + F} = \sqrt{-F} e^{\frac{u}{R}},$$

$$n - \sqrt{n^2 + F} = \sqrt{-F} e^{-\frac{u}{R}},$$

et l'élément linéaire sera donné par la formule

$$(54) \quad ds^2 = du^2 - \left(\frac{e^{\frac{u}{R}} - e^{-\frac{u}{R}}}{2} \right)^2 \frac{F}{R^2} dv^2,$$

qui caractérise le cas où les cercles géodésiques ont leur centre réel.

176. On obtient un des systèmes triples orthogonaux que nous venons d'étudier lorsqu'on se propose le problème suivant.

La recherche d'un système triple dépend de la détermination des neuf quantités H_i, β_{ik} . Proposons-nous de trouver tous les systèmes dans lesquels ces neuf quantités sont reliées par huit relations et dépendent, par conséquent, d'une seule fonction inconnue α .

Les six équations (B) montrent d'abord que cette fonction α doit satisfaire à des relations telles que les suivantes

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \rho_i} = \varphi_i(\alpha), \quad (i = 0, 1, 2),$$

et, de là, on déduit facilement qu'elle dépend d'une fonction linéaire

$$C\rho + C_1\rho_1 + C_2\rho_2,$$

de ρ, ρ_1, ρ_2 . Envisageons le cas général où aucune des constantes C_i n'est nulle; on pourra, en substituant à ρ, ρ_1, ρ_2 les variables $C\rho, C_1\rho_1, C_2\rho_2$ et en remplaçant α par une fonction convenablement choisie, ramener α à la forme plus simple

$$(55) \quad \alpha = \rho + \rho_1 + \rho_2.$$

Alors on remplacera dans les équations (B) les β_{ik} par leurs expressions

$$\beta_{ik} = \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_k}{\partial \rho_i} = \frac{H'_k}{H_i},$$

et l'on aura trois équations du second ordre qui s'intégreront immédiatement et donneront les relations

$$(56) \quad H'_k = C_k H_i H_l, \quad (i \neq k \neq l),$$

où C_k désigne une constante. En substituant les valeurs des β_{ik} dans les équations (B'), on reconnaîtra que ces équations sont vérifiées pourvu que les constantes C_i vérifient l'unique relation

$$(57) \quad \frac{1}{C} + \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = 0.$$

Les équations (56) appartiennent à un type que l'on rencontre notamment dans l'étude du mouvement de rotation d'un corps solide. Leur intégrale peut être donnée, comme on sait, par les formules (1)

$$(58) \quad H = A \operatorname{sn} z, \quad H_1 = A_1 \operatorname{cn} z, \quad H_2 = A_2 \operatorname{dn} z,$$

(1) Pour avoir l'intégrale générale, il faudrait au lieu de z mettre une fonction linéaire de α , mais cela ne ferait que compliquer l'écriture.

où les constantes A, A_1, A_2 doivent vérifier les relations

$$(59) \quad A = CA_1A_2, \quad A_1 = -C_1AA_2, \quad A_2 = -C_2k^2AA_1,$$

k désignant le module des fonctions elliptiques. En substituant les valeurs de C, C_1, C_2 déduites des relations précédentes dans la condition (57), on aura l'unique relation

$$\frac{1}{A^2} - \frac{1}{A_1^2} - \frac{k^2}{A_2^2} = 0,$$

à laquelle doivent satisfaire les quatre constantes k, A, A_1, A_2 .

On peut poser

$$(60) \quad \frac{A}{A_1} = \operatorname{dn} \alpha_0, \quad \frac{A}{A_2} = \operatorname{sn} \alpha_0,$$

et il viendra alors, en supposant $A = 1$, ce qui équivaut à remplacer le système triple par un système semblable,

$$(61) \quad H = \operatorname{sn} \alpha, \quad H_1 = \frac{\operatorname{cn} \alpha}{\operatorname{dn} \alpha_0}, \quad H_2 = \frac{\operatorname{dn} \alpha}{\operatorname{sn} \alpha_0}.$$

L'élément linéaire sera donné par la formule

$$(62) \quad ds^2 = \operatorname{sn}^2 \alpha d\rho^2 + \frac{\operatorname{cn}^2 \alpha}{\operatorname{dn}^2 \alpha_0} d\rho_1^2 + \frac{\operatorname{dn}^2 \alpha}{\operatorname{sn}^2 \alpha_0} d\rho_2^2.$$

Il est facile de voir que le système triple ainsi obtenu est exclusivement composé de surfaces à courbure constante. En conservant, en effet, les valeurs des constantes C_i qui figurent dans les relations (59), on a

$$H'_k = C_k H_i H_l,$$

et, par suite, le rayon de courbure R_{ik} sera déterminé par l'équation

$$(63) \quad \frac{1}{R_{ik}} = -\frac{H'_k}{H_i H_k} = -C_k \frac{H_l}{H_k}, \quad (i \neq k \neq l).$$

On déduit de là

$$(64) \quad \frac{1}{R_{ik} R_{il}} = C_k C_l.$$

Cette relation montre que la courbure totale de la surface de pa-

ramètre ρ_i est invariable. De plus, en vertu de la relation (57), la somme des courbures relatives aux trois familles sera nulle.

Comme les expressions de H , H_1 , H_2 demeurent invariables lorsqu'on ajoute à ρ , ρ_1 , ρ_2 des constantes dont la somme est nulle, on reconnaîtra qu'il existe une infinité de déplacements laissant invariable le système triple, et de là on déduira sans peine qu'il est exclusivement composé de surfaces hélicoïdes.

FIN DU TOME PREMIER.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME PREMIER.

LIVRE I.

L'ÉQUATION DU TROISIÈME ORDRE.

CHAPITRE I.

	Pages.
<i>Les familles de Lamé. Théorème de Dupin et sa réciproque.</i>	1
Équations aux dérivées partielles auxquelles satisfont les paramètres α , β , γ de trois familles orthogonales, considérés comme fonctions des coordonnées rectilignes x , y , z d'un point de l'espace. — Application du théorème de Cauchy; on peut déterminer un système triple orthogonal par la condition que les trois familles de surfaces qui le composent interceptent sur une surface donnée des courbes données assujetties à la condition de ne pas se couper mutuellement à angle droit. — Élimination de deux des trois paramètres. L'élimination de l'un d'eux conduit immédiatement au théorème de Dupin : « Les surfaces qui composent un système triple orthogonal se coupent mutuellement suivant leurs lignes de courbure. » — Réciproque de ce théorème : « Si l'on a deux familles de surfaces se coupant à angle droit, suivant des courbes qui soient lignes de courbure pour les surfaces de l'une des deux familles, il existe une troisième famille complétant le système orthogonal. » — Cette réciproque permet d'établir que le paramètre de toute famille faisant partie d'un système triple doit satisfaire à une équation aux dérivées partielles du troisième ordre, qui est à la fois nécessaire et suffisante, c'est-à-dire dont toute solution conduira à un système triple. — On donne le nom de <i>famille de Lamé</i> à toute famille qui fait partie d'un système triple orthogonal. — Pour former l'équation aux dérivées partielles du troisième ordre, dont l'existence a été reconnue dès 1866 par l'auteur, mais qui a été obtenue, pour la première fois, sous forme développée, par M. Cayley, on définit d'abord une opération différentielle $\delta_u v$, et l'on établit quelques propriétés de ce symbole. — On établit ensuite, par un raisonnement nouveau, que toute la difficulté du problème des systèmes orthogonaux se ramène à l'intégration de l'équation du troisième ordre, que l'on écrit sous la forme d'un déterminant très simple du sixième ordre. — Vérification de résultats obtenus antérieurement par M. Bouquet, relativement aux familles représentées par une équation de la forme	

$$u = \varphi(x) + \psi(y) + \chi(z),$$

et par M. V. Puiseux, relativement à un système d'axes particulier. —
Forme nouvelle et irrationnelle sous laquelle on peut mettre l'équation
du troisième ordre, en introduisant les dérivées de la fonction H , dé-
finie par la relation

$$\frac{1}{H} = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

— Indications sommaires sur les *caractéristiques* d'une équation aux dérivées partielles ou d'un système d'équations aux dérivées partielles, dans le cas de trois variables indépendantes, et application au problème actuel. On peut toujours déterminer un système triple orthogonal par la condition que les surfaces (A), qui composent une de ses trois familles, coupent une surface (Σ) suivant des courbes données (C) et aient, suivant ces courbes, un contact du second ordre avec certaines surfaces (S), qui contiennent ces courbes, à moins que les courbes (C) ne soient des lignes de courbure des surfaces (S), ou que les surfaces (S) ne soient orthogonales à la surface (Σ). Dans ces deux cas d'exception, le problème devient impossible ou indéterminé.

CHAPITRE II.

Systèmes triples comprenant une famille de plans ou une famille de sphères.....

26

Recherche des systèmes triples orthogonaux qui comprennent une famille de plans. — On les obtient en traçant dans un plan deux familles de courbes rectangulaires et en faisant rouler ce plan sur une développable quelconque. — On peut aussi éviter toute considération de roulement et construire les systèmes sans aucune intégration. — Définition des coordonnées curvilignes. — Forme de l'élément linéaire de l'espace dans le système précédent. — Équations qui permettent de définir ce système, débarrassées de tout signe de quadrature. — Si la famille de plans est donnée *a priori*, la détermination des trajectoires orthogonales et, par suite, celle des systèmes triples correspondants dépendent de trois quadratures. — Systèmes orthogonaux comprenant une famille de sphères. — Définition des familles similaires de sphères; ce sont celles pour lesquelles le problème des trajectoires orthogonales conduit aux mêmes équations différentielles. — Quand on connaît une famille de sphères on peut, sans aucune intégration, construire les familles similaires. Parmi les familles ainsi déterminées, il y en a une infinité composées de sphères passant par un point fixe; une simple quadrature permet de construire ces familles particulières si l'on connaît une trajectoire orthogonale des sphères primitives. — Grâce aux théorèmes précédents on peut, sans aucune intégration, passer des systèmes triples contenant une famille de plans à ceux qui contiennent une famille de sphères. — Propriété particulière des courbes sphériques: l'intégrale $\int \frac{ds}{r}$ peut être explicitement calculée. — Détermination des trajectoires orthogonales d'une famille donnée de sphères; elle se ramène à l'intégration de deux équations de Riccati dont chaque trajec-

toire fournit une solution particulière. — Construction des systèmes triples qui comprennent une famille de sphères. — Extension des résultats précédents à l'espace à n dimensions. En donnant une forme convenable aux fonctions a_1, a_2, \dots, a_n et r , on peut, sous forme réelle et sans aucun signe de quadrature, assigner les intégrales générales du système

$$\frac{dx_1}{x_1 - a_1} = \frac{dx_2}{x_2 - a_2} = \dots = \frac{dx_n}{x_n - a_n},$$

a_1, \dots, a_n, r étant des fonctions d'un paramètre t liées à x_1, \dots, x_n par la relation

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 = r^2.$$

Rappel des résultats déjà obtenus sur ce sujet par MM. J.-A. Serret et O. Bonnet.

CHAPITRE III.

Étude d'une intégrale particulière de l'équation du troisième ordre... 51

L'équation aux dérivées partielles du troisième ordre qui détermine les familles de Lamé admet des solutions particulières définies par l'équation du premier ordre

$$(a) \quad H = \varphi_0(u)(x^2 + y^2 + z^2) + \varphi_1(u)x + \varphi_2(u)y + \varphi_3(u)z + \varphi_4(u).$$

Le Chapitre actuel est consacré à l'étude de ces solutions. — L'équation précédente comprend d'abord, comme cas particuliers, celle qui caractérise les surfaces parallèles et aussi celle qui caractérise les familles dérivées par inversion d'une famille de surfaces parallèles. — Les trajectoires orthogonales des surfaces sont, dans le premier cas, des droites, et, dans le second cas, des cercles passant par un point fixe. — Pour éclairer la discussion du cas général, on commence par étudier celui où les rapports mutuels des cinq fonctions $\varphi_i(u)$ se réduisent à des constantes. — Les familles de Lamé correspondantes sont alors définies par la construction suivante : on construit les cercles normaux à une surface quelconque (Σ) et à une sphère fixe (S) ; tous ces cercles sont normaux aux surfaces (Σ') qui composent la famille cherchée. — On construit par points chaque surface (Σ'), en déterminant sur chaque cercle le point où il est normal à (Σ), les deux points où il est normal à (S), et en construisant le quatrième point qui forme, avec les précédents, pris toujours dans le même ordre, un rapport anharmonique constant. — Les deux autres familles qui complètent le système sont évidemment formées de surfaces à lignes de courbure circulaires dans un système. — En appliquant cette construction à une *cyclide de Dupin*, on obtient un système triple *exclusivement* composé de cyclides. — Étude géométrique du cas particulier signalé par M. W. Roberts, où les cyclides sont toutes du troisième degré. — La construction générale précédente donne une *transformation de contact des surfaces avec conservation des lignes de courbure*. Détermination de toutes les transformations de ce genre ; analytiquement elles équivalent à une substitution linéaire orthogonale effec-

tuée sur les six coordonnées d'une sphère. — Retour à l'étude de l'équation (α) dans le cas le plus général. — On peut en donner l'intégrale générale sans introduire aucun signe de quadrature. — Pour interpréter géométriquement la solution, on donne quelques propriétés fondamentales de la fonction H qui, multipliée par du , représente la plus courte distance de deux surfaces infiniment voisines, dans une famille quelconque. Il revient au même de se donner H en chaque point d'une surface, ou de se donner en ces points les cercles osculateurs des courbes trajectoires orthogonales de la famille. — Relation entre H et les cercles osculateurs. — Propriété caractéristique des familles étudiées dans ce Chapitre : les cercles osculateurs des trajectoires orthogonales aux points où elles rencontrent une des surfaces sont orthogonaux à une même sphère, qui varie d'ailleurs avec la surface. — Énoncé de la génération de ces familles à l'aide de transformations infinitésimales.

CHAPITRE IV.

Formes diverses de l'équation aux dérivées partielles du troisième ordre.

74

On peut obtenir l'équation aux dérivées partielles du troisième ordre en exprimant que la plus courte distance d'une surface de la famille à la surface infiniment voisine est une solution particulière de l'équation ponctuelle relative au système conjugué formé par les lignes de courbure. — Théorème de Ribaucour : les cercles osculateurs des trajectoires orthogonales aux points où elles rencontrent une surface déterminée de la famille forment un système cyclique. — Démonstration de la proposition réciproque. — Rappel des études antérieures sur les systèmes cycliques et étude de deux problèmes nouveaux : 1° détermination des familles de Lamé pour lesquelles les plans osculateurs des trajectoires orthogonales aux points où elles rencontrent l'une des surfaces de la famille concourent en un même point; 2° détermination des systèmes cycliques formés de cercles dont les plans enveloppent une développable. — Forme remarquable de l'équation du troisième ordre donnée par M. Maurice Lévy; on prend comme variables indépendantes le paramètre u de la famille et deux des coordonnées rectangulaires. — Application de cette équation à la détermination des surfaces invariables de forme qui peuvent, en se déplaçant, engendrer une famille de Lamé. — Quand le mouvement de la surface est unique et déterminé, il est nécessairement hélicoïdal. — Applications particulières. — Étude du cas où la surface peut, dans plusieurs mouvements différents, engendrer une famille de Lamé. — Indication de divers résultats. — M. J. Bertrand a montré, par la Géométrie, que, si ces mouvements comprennent toutes les translations, la surface est une sphère ou un cylindre. — M. Adam a établi, par l'analyse, que le résultat subsiste si les mouvements se réduisent à deux translations distinctes. — Interprétation géométrique élégante due à M. Petot. L'équation aux dérivées partielles qui caractérise la surface cherchée exprime la propriété suivante : la droite du plan tangent qui joint les centres de courbure géodésique des deux lignes de courbure appartient à un complexe linéaire. — Théorème de M. Cossérat. — Retour

à l'équation générale du troisième ordre. — Formation de cette équation quand la famille est déterminée par une équation implicite $\varphi(x, y, z, u) = 0$. Développement de l'équation en vue des applications ultérieures.

CHAPITRE V.

Les familles de Lamé formées avec des quadriques 95

On cherche d'abord la condition pour que des quadriques à centre unique, ayant les mêmes plans principaux, forment une famille de Lamé, et l'on est conduit, en appliquant la méthode générale du Chapitre précédent, à une relation différentielle entre les axes, qui a été obtenue dès 1867 par M. Maurice Lévy — On fait aussi connaître la méthode suivie par M. Maurice Lévy, ainsi que l'interprétation géométrique qu'il en a donnée : la relation différentielle exprime que l'une quelconque des lignes ombilicales, c'est-à-dire l'une quelconque des lignes normales par les ombilics, est normale aux surfaces qui composent la famille. — Il résulte de là que les familles de quadriques cherchées sont déterminées dès que l'on se donne *a priori* une ligne plane quelconque qui servira de ligne ombilicale. — C'est ce que permettent d'ailleurs d'établir quelques considérations de Géométrie pure relatives aux ombilics des quadriques. — Le cas particulier où l'une des lignes ombilicales se réduit à une droite a été rencontré par M. G. Humbert. Alors les onze autres lignes ombilicales sont des droites, et les surfaces qui composent la famille, tangentées à huit plans isotropes, font aussi partie d'un réseau ponctuel; on peut déterminer les deux autres familles qui complètent le système triple. — Cas où l'une des lignes ombilicales est un cercle, une conique, etc. — Revenant au problème général, on remarque qu'on peut encore le résoudre sans employer la ligne ombilicale et par une méthode directe qui peut se rattacher à un principe général. — Applications particulières de cette nouvelle méthode. — La proposition relative aux lignes ombilicales ne s'applique pas seulement aux familles composées de surfaces du second degré; on peut établir qu'elle est vraie pour des surfaces quelconques formant une famille de Lamé; la démonstration repose sur la considération de la forme des lignes de courbure dans le voisinage d'un ombilic. — Cette proposition générale, une fois établie, conduit à la conséquence suivante : si des quadriques à axes inégaux forment une famille de Lamé, les plans principaux de ces surfaces coïncident nécessairement; par suite, les recherches précédentes n'ont pas un caractère aussi particulier qu'on aurait pu le supposer, et elles font connaître toutes les familles de Lamé composées de quadriques à axes inégaux. — D'une manière générale, on peut énoncer la proposition suivante : si une famille de Lamé est composée de surfaces ayant chacune des plans de symétrie, les plans de symétrie de ces surfaces doivent coïncider, excepté dans certains cas particuliers qui sont nettement indiqués. — Démonstration de cette proposition générale; son application aux surfaces du second degré; son interprétation géométrique. Simple énoncé d'une proposition analogue relative aux surfaces anallagmatiques. — Le Chapitre se termine par l'étude

d'un problème qui doit conduire encore à des familles de Lamé formées de quadriques : on sait que les surfaces lieux des points tels que la somme ou la différence de leurs distances à deux surfaces fixes (A), (B) soit constante forment un système double orthogonal, c'est-à-dire se distribuent en deux familles distinctes de surfaces orthogonales; on demande dans quel cas on peut compléter le système et adjoindre aux deux familles différentes une troisième famille composée de surfaces coupant les précédentes à angle droit. — Mise en équation du problème; on démontre par la Géométrie que, si l'on néglige des solutions déjà étudiées, cette troisième famille doit être composée de surfaces du second degré dont les génératrices rectilignes seront les normales aux surfaces (A) et (B). — Les axes de ces quadriques doivent satisfaire à des équations différentielles qui se rencontrent dans la théorie des fonctions elliptiques et qui ont été, pour la première fois, intégrées par Halphen. — Intégration nouvelle de ces équations. — Cas particulier des surfaces dépourvues de centre, traité par une méthode directe; les fonctions elliptiques sont remplacées par des logarithmes, sauf dans un cas spécial où la solution devient algébrique et a déjà été donnée par M. J.-A. Serret. — Démonstration géométrique simple relative à ce cas spécial. — Indication d'un sujet de recherche relatif aux lignes de courbure de la surface lieu des points pour lesquels la somme ou la différence des distances à deux droites fixes est constante.

CHAPITRE VI.

Systèmes orthogonaux à n variables. Extension des méthodes précédentes.

119

Système des coordonnées elliptiques générales. — On peut de même généraliser le système des cyclides orthogonales et homofocales et employer, pour le cas de n dimensions, des variables analogues aux coordonnées pentasphériques. — Définition des systèmes complètement orthogonaux à n variables : puisqu'il existe de tels systèmes, l'objet de ce Chapitre sera d'appliquer à leur recherche la méthode déjà employée pour le cas de trois variables. — Problème fondamental : étant données n fonctions formant un système complètement orthogonal, éliminer toutes les fonctions moins une et former les équations aux dérivées partielles, à la fois nécessaires et suffisantes, auxquelles doit satisfaire cette dernière fonction. — Exposé de la méthode : une des fonctions u étant supposée connue, un premier groupe de $(n-1)^2$ équations permet de déterminer les rapports mutuels des dérivées premières des $n-1$ autres fonctions v, w, \dots . — Ce premier groupe d'équations est identique à celui que l'on rencontre lorsqu'on veut réduire à des sommes composées des mêmes carrés deux formes quadratiques à n variables, ces variables étant d'ailleurs liées par une relation linéaire. — Les équations que l'on obtient ainsi pour chacune des fonctions v, w, \dots , étant au nombre de $n-1$, donnent naissance à des conditions d'intégrabilité qui contiendront évidemment les dérivées de u jusqu'au troisième ordre. — En essayant de former de la manière la plus simple ces conditions, on

est conduit à deux groupes bien distincts d'équations du troisième ordre pour u . — Les premières, au nombre de $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, sont analogues à l'équation formée dans le cas de trois variables et jouissent, comme elle, de la propriété de s'écrire sous une forme simple à l'aide des dérivées secondes de la fonction

$$H = (u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Les secondes, au nombre de $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$, n'apparaissent que lorsque n est supérieur à 3. — Si l'on veut interpréter en langage géométrique les résultats précédents, on peut d'abord généraliser la notion de *normale à une surface*, ce qui conduit naturellement à l'extension de la définition des *directions principales* et des *lignes de courbure*. — Dans un espace à n dimensions, il y a $n-1$ directions principales, et par suite $n-1$ systèmes de lignes de courbure, pour chaque surface. — Deux directions principales différentes sont à la fois orthogonales et conjuguées. — Cette notion des lignes de courbure une fois introduite, le théorème de Dupin se généralise immédiatement : si une surface fait partie d'un système complètement orthogonal, les surfaces qui appartiennent aux autres familles admettent pour normales en chaque point de la surface considérée les directions principales de cette surface; par conséquent, prises $n-2$ à $n-2$, elles coupent cette surface suivant une de ses lignes de courbure. — Mais il faut prendre garde ici à une propriété tout à fait nouvelle : une surface quelconque prise dans l'espace à n dimensions, n étant supérieur à 3, ne saurait faire partie d'un système complètement orthogonal; pour qu'il en soit ainsi, il faut que ses lignes de courbure soient *coordonnées*. — On dit que les lignes de courbure sont coordonnées lorsqu'on peut choisir $n-1$ fonctions dont *une seule* varie sur chaque ligne de courbure de la surface. — Lorsque les lignes de courbure d'une surface sont coordonnées, la surface peut faire partie d'un système complètement orthogonal : on le reconnaît en généralisant la théorie des surfaces parallèles. — Application des résultats précédents aux surfaces définies par l'équation $X_1 + X_2 + \dots + X_n = 0$. — Condition pour que leurs lignes de courbure soient coordonnées. — Systèmes orthogonaux comprenant une famille définie par l'équation $u = X_1 + \dots + X_n$. — Généralisation des propositions de MM. Bouquet et J.-A. Serret. — Systèmes orthogonaux comprenant la famille $u = x_1^m \dots x_n^m$. — Détermination simple des autres familles. — Étude de différents systèmes orthogonaux, détermination des lignes de courbure de différentes surfaces, parmi lesquelles on peut signaler les surfaces tétraédrales de Lamé. — Les résultats obtenus dans ce Chapitre donnent notamment les lignes de courbure d'un grand nombre de surfaces du troisième ordre, dans l'espace à trois dimensions.

LIVRE II.

LES COORDONNÉES CURVILIGNES.

CHAPITRE I.

<i>Systèmes orthogonaux à n variables</i>	Pages. 157
--	---------------

On se propose de faire connaître les formules que Lamé a données dans ses *Leçons sur les coordonnées curvilignes* en appliquant et étendant sa méthode aux systèmes complètement orthogonaux à n variables. — Définition des éléments d'une substitution linéaire orthogonale par les formules $X_i^k = H_i \frac{\partial \rho_i}{\partial x_k}$. — Relations différentielles auxquelles ils donnent lieu. — Introduction de grandeurs nouvelles β_{ik} qui doivent vérifier deux systèmes différents d'équations aux dérivées partielles du premier ordre. — Indication sur la méthode de recherche d'un système orthogonal. — Généralisation d'un théorème de M. Combescure : « A tout système orthogonal on peut en rattacher une infinité d'autres qui dépendent de n fonctions arbitraires d'une variable ». — Application de la méthode générale de recherche à la solution d'un problème fondamental : résolution la plus générale de l'équation

$$dx_1^2 + \dots + dx_n^2 = \frac{1}{h^2} (d\rho_1^2 + \dots + d\rho_n^2).$$

Cette solution est toute semblable à celle qui est connue depuis longtemps pour le cas de trois variables, et elle est fournie par une inversion généralisée, suivie ou précédée d'un déplacement. — Cas spécial signalé par M. Cremona. — Indication de différentes méthodes qui permettent de faire dériver de tout système orthogonal à n variables d'autres systèmes orthogonaux contenant le même nombre ou un moindre nombre de variables. — C'est ainsi qu'au système des coordonnées elliptiques on peut faire correspondre une suite illimitée de systèmes orthogonaux algébriques. — Théorème de Géométrie qui donne une généralisation de la notion, due à Gauss, de représentation sphérique. — Application des résultats précédents à la recherche des surfaces de l'espace à n dimensions dont les lignes de courbure sont *coordonnées*. — Cette recherche exige en premier lieu la détermination de tous les systèmes complètement orthogonaux dans un espace à $n-1$ dimensions. — Cette détermination une fois effectuée, des méthodes analogues à celles que l'on suit dans la recherche des surfaces ayant une représentation sphérique donnée permettent d'achever la solution du problème. — Quelques propriétés des lignes de courbure des surfaces. — Équations d'Olinde Rodrigues. — Généralisation de la théorie des systèmes cycliques et son extension à l'espace à n dimensions.

CHAPITRE II.

<i>Le trièdre mobile</i>	Pages. 183
--------------------------------	---------------

Dans ce Chapitre, on étudie les propriétés des systèmes triples orthogonaux en les rattachant à la considération du déplacement du trièdre trirectangle (T) formé par les normales aux trois surfaces coordonnées qui se croisent en chaque point de l'espace. — Rappel des résultats déjà obtenus dans nos Leçons relativement aux divers mouvements d'un trièdre qui dépend de plusieurs paramètres. — Équations aux dérivées partielles qui relient les rotations et les translations. — Détermination d'un trièdre dont les rotations et les translations sont données *a priori*. — Système linéaire dont l'intégration fait connaître les cosinus-directeurs des axes de ce trièdre. — Formules générales qui déterminent le déplacement d'un point défini par ses coordonnées relatives au trièdre mobile. — Application de cette théorie générale aux coordonnées curvilignes orthogonales; on prend pour le trièdre mobile (T) celui dont les arêtes sont les normales aux trois surfaces coordonnées. — Trois des rotations sont nulles, les autres s'expriment en fonction des coefficients H, H_1, H_2 de l'élément linéaire et de leurs dérivées. — Introduction des quantités β_{ik} . — Double système de relations différentielles auxquelles doivent satisfaire ces six fonctions. — Démonstration nouvelle du théorème de Dupin. — Expression des rayons de courbure des surfaces coordonnées. — Système linéaire déterminant les cosinus-directeurs des normales aux surfaces coordonnées lorsqu'on connaît les β_{ik} . — Représentation sphérique, lignes asymptotiques de chacune de ces surfaces. — Lois de variation des six courbures principales découvertes par Lamé. — Définition du paramètre différentiel du premier ordre ΔU d'une fonction quelconque U ; son expression en coordonnées curvilignes; définition et expression de $\Delta(U, V)$. — Formule de Stokes et de C. Neumann; définition du paramètre différentiel ou invariant linéaire du second ordre; son expression en coordonnées curvilignes. — On peut rattacher l'introduction de cet invariant à l'étude de certaines propriétés des transformations ponctuelles les plus générales. — Pour toutes les transformations de ce genre, il y a en général trois éléments linéaires partant d'un point auquel correspondent des éléments parallèles. Si l'on veut que ces trois éléments linéaires forment toujours un trièdre trirectangle, il sera nécessaire et suffisant que la transformation soit définie par les formules

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z},$$

où U désigne une fonction quelconque de x, y, z . Il existe alors une équation du troisième degré faisant connaître les dilatations des éléments dont la direction n'est pas altérée, et les racines de cette équation sont des invariants. Le paramètre du second ordre de Lamé n'est autre que la somme des racines de cette équation. — Détermination des transformations de la nature précédente pour lesquelles les éléments dont la direction n'est pas changée en chaque point de l'espace sont

normaux à trois familles, qui détermineront nécessairement un système de coordonnées curvilignes triplement orthogonales. — Il y a une infinité de transformations de ce genre qui correspondent à un système triple orthogonal, donné *a priori*. — Leur détermination se ramène à l'intégration de trois équations linéaires aux dérivées partielles auxquelles doit satisfaire une même fonction. — On termine le Chapitre en donnant un complément à la théorie du déplacement d'un trièdre mobile. Si l'on considère le système le plus général de coordonnées curvilignes obliques, l'élément linéaire de l'espace prendra la forme

$$ds^2 = \sum \sum A_{ik} d\rho_i d\rho_k,$$

et l'on peut se proposer de trouver toutes les relations différentielles qui existent entre les quantités A_{ik} , relations différentielles analogues à celles que l'on doit à Lamé, pour le cas où les coordonnées sont orthogonales. — On pourrait résoudre cette question en prenant un trièdre (T) occupant une position particulière relativement aux plans tangents des surfaces coordonnées. — Il paraît plus élégant d'employer une méthode toute différente, qui repose sur la considération des différentes décompositions en carrés de la forme quadratique précédente $\sum \sum A_{ik} d\rho_i d\rho_k$ et qui conduit à six équations à la fois nécessaires et suffisantes. — Retour au trièdre mobile pour établir les équations aux dérivées partielles entre les rotations et les translations.

CHAPITRE III.

Recherche d'un système triple particulier 212

Avant de poursuivre la théorie, on veut indiquer des applications des équations fondamentales à la recherche d'un système triple particulier. — Dans ses *Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications*, Lamé a attaché une importance toute particulière aux systèmes composés de trois familles isothermes. — Définition d'une famille isotherme. — Condition d'isothermie; elle est vérifiée pour le système des ellipsoïdes homofocaux. — Il existe donc au moins un système triple, à la fois orthogonal et isotherme. — Lamé s'est proposé de déterminer tous les systèmes de ce genre. En mettant le problème en équation, on reconnaît que ces systèmes particuliers ont une première propriété signalée par M. J. Bertrand : les surfaces qui les composent sont isothermiques, c'est-à-dire sont divisibles en carrés infiniment petits par leurs lignes de courbure. Mais cette propriété n'est nullement caractéristique; elle appartient, par exemple, au système des cyclides homofocales, qui n'est pas isotherme. — Par suite, en se proposant la recherche de tous les systèmes triples composés de surfaces isothermiques, on est assuré d'obtenir non seulement tous les systèmes isothermes, comme le désirait Lamé, mais d'autres systèmes plus généraux. — Pour accroître encore l'intérêt qui s'attache à ce problème général, on remarque que l'on

sera encore conduit à le poser si l'on approfondit une belle découverte de Lamé. — L'illustre géomètre a montré que, si ρ , ρ_1 , ρ_2 désignent les coordonnées elliptiques d'un point de l'espace, l'équation de la chaleur admet une infinité de solutions de la forme suivante : $f(\rho) f_1(\rho_1) f_2(\rho_2)$. — Si l'on cherche tous les systèmes triples orthogonaux pour lesquels on peut formuler une proposition analogue, on reconnaît encore qu'ils doivent être composés de surfaces isothermiques. — Toutes ces remarques nous conduisent donc à entreprendre l'étude du problème le plus général : détermination des systèmes triples composés de surfaces isothermiques. — Mise en équation; forme des valeurs de H , H_1 , H_2 . — On exprime d'abord que ces valeurs satisfont au système (B), ce qui conduit à préciser leur forme. — On obtient ainsi trois types différents de solutions. — Pour étudier ces trois types et achever la solution, on exprime que les valeurs de H , H_1 , H_2 vérifient le système (B'). — Forme générale des équations qui en résultent. — Conditions pour qu'elles soient compatibles avec celles que l'on a déduites du système (B). — Application aux trois types précédemment obtenus. — Le premier type nous conduit à trois systèmes triples comprenant, soit une famille de plans parallèles et deux familles de cylindres isothermes; soit une famille de sphères concentriques et deux familles de cônes isothermes; soit une famille de plans passant par une droite et deux familles de révolution ayant cette droite pour axe, et dont les méridiens forment un système à la fois orthogonal et isotherme. D'une manière générale, il faut joindre à ces systèmes leurs transformés par inversion, qui jouissent évidemment de la même propriété. — Le second type ne fournit aucune solution du problème et doit être rejeté. — Quant au troisième, il sera étudié dans le Chapitre suivant.

CHAPITRE IV.

Recherche d'un système particulier (suite). Examen du troisième type de solution..... 242

Le troisième type de solution du problème que l'on a commencé à étudier dans le Chapitre précédent correspond aux valeurs suivantes

$$H = \frac{(\rho_1 - \rho)^{-h} (\rho - \rho_2)^{-h}}{M \sqrt{a}}$$

$$H_1 = \frac{(\rho_2 - \rho_1)^{-h} (\rho_1 - \rho)^{-h}}{M \sqrt{a_1}}$$

$$H_2 = \frac{(\rho - \rho_2)^{-h} (\rho_2 - \rho_1)^{-h}}{M \sqrt{a_2}}$$

de H , H_1 , H_2 . Dans ces formules, M désigne une fonction quelconque, h une constante, a_i une fonction de la seule variable ρ_i . En écrivant que les équations de condition données au Chapitre précédent sont vérifiées, on obtient les solutions suivantes. — Pour la première, on a $h = -\frac{1}{2}$; $a(\rho)$, $a_1(\rho)$, $a_2(\rho)$ sont des polynômes identiques du

5° degré; ces hypothèses correspondent au système formé par les cyclides homofocales et à ses variétés. — La seconde solution correspond à l'hypothèse $h = \frac{1}{2}$; $a(\rho)$, $a_1(\rho)$, $a_2(\rho)$ sont des polynômes identiques du 3° degré. — La troisième solution correspond à la valeur $h = 1$; $a(\rho)$, $a_1(\rho)$, $a_2(\rho)$ sont des polynômes du second degré qui doivent satisfaire à l'identité

$$a(\rho) + a_1(\rho) + a_2(\rho) = 0.$$

La quatrième solution correspond à la valeur $h = 2$; les fonctions a , a_1 , a_2 se réduisent alors à des constantes dont la somme est nulle. — Remarques générales sur la manière dont on pourra déterminer la valeur de M correspondant à chaque solution. — Étude détaillée du cas pour lequel on a $h = 1$. — Le système correspondant est exclusivement formé de *cyclides de Dupin*. — On démontre qu'il est identique à ceux qui ont été étudiés au Livre I^{er}, Ch. III. — Pour l'étude des systèmes qui correspondent aux valeurs $h = 2$, $h = \frac{1}{2}$ et qui n'apparaîtront pas, d'ailleurs, dans le Chapitre suivant, il est renvoyé à un Mémoire de l'auteur.

CHAPITRE V.

Recherche des systèmes isothermes et d'autres systèmes qui se présentent dans la théorie de la chaleur.....

264

On a vu que, parmi les systèmes déterminés dans les deux Chapitres précédents doivent se trouver : 1° les systèmes composés de trois familles isothermes; 2° ceux pour lesquels l'équation de la chaleur admet, dans des conditions précédemment définies, une infinité de solutions de la forme $P f(\rho) f_1(\rho_1) f_2(\rho_2)$. — L'objet du présent Chapitre est précisément la détermination de ces deux classes particulières, comprises dans celle que nous avons déterminée. — On commence par la recherche des systèmes isothermes en envisageant successivement les différentes solutions obtenues dans les deux Chapitres précédents. — On obtient d'abord des systèmes formés d'une famille de plans parallèles et de deux familles de cylindres isothermes, ou d'une famille de sphères concentriques et de deux familles de cônes isothermes, ou d'une famille de plans passant par une droite et de deux familles de quadriques homofocales de révolution. — On obtient aussi le système des quadriques homofocales et un autre système imaginaire qui a été signalé, mais non déterminé, par Combesure. — Bien que ce dernier système ne puisse jouer aucun rôle en Physique mathématique, il y a intérêt à le déterminer; on montre qu'il est formé avec des cyclides de Dupin qui sont imaginaires et du troisième degré. — Après avoir ainsi terminé la recherche des systèmes isothermes, on suit une méthode analogue pour la détermination de la seconde classe signalée plus haut. — On démontre d'abord un lemme fondamental de Lord Kelvin, relatif à l'inversion, puis on montre que les systèmes cherchés se réduisent en définitive au seul

système des cyclides homofocales et à ses variétés. — On retrouve cette propriété des cyclides homofocales par une démonstration directe où l'on emploie les coordonnées pentasphériques et une forme remarquable que prend, avec ce système de coordonnées, l'équation de la chaleur. — Le Chapitre se termine par une remarque qui permet d'étendre une partie des résultats précédents aux systèmes de coordonnées curvilignes les plus généraux.

CHAPITRE VI.

Les systèmes triples de M. Bianchi 294

Dans ce Chapitre, on se propose de donner une nouvelle application de la méthode générale de recherche en déterminant tous les systèmes triples orthogonaux pour lesquels une des familles est composée de surfaces à courbure totale constante. — Cette application, due à M. L. Bianchi, a son origine dans un théorème de M. Weingarten qui fait prévoir l'existence d'une classe étendue de ces systèmes. — Ce théorème peut s'énoncer comme il suit : Étant donnée une surface (S) à courbure totale constante $\frac{1}{k}$, si l'on porte sur la normale en chacun de ses points une longueur infiniment petite MM' proportionnelle à $\cos \frac{d}{\sqrt{k}}$, d désignant la distance géodésique de M à un point fixe A de (S), la surface (S') décrite par le point M, est, elle aussi, à courbure constante $\frac{1}{k}$ et elle fait partie avec (S) d'une famille de Lamé.

— Il permet évidemment de construire, de proche en proche, des surfaces à courbure constante et égale, qui dépendent de quatre fonctions arbitraires et forment une famille de Lamé. — Examen d'un problème auquel conduit naturellement la proposition de M. Weingarten; propriétés de certains systèmes cycliques se rattachant à une surface applicable sur une surface de révolution. — Exposé des recherches de M. Bianchi; ce géomètre s'est proposé de déterminer tous les systèmes triples pour lesquels une des familles est composée de surfaces à courbure totale constante; mais il a donné de l'extension aux recherches de M. Weingarten en supposant que la courbure totale puisse varier lorsqu'on change de surface. — Mise en équation du problème. — En écartant le cas spécial où les surfaces cherchées seraient de révolution, on obtient une forme élégante de l'élément linéaire; cette forme dépend d'une seule fonction ω qui doit satisfaire à trois équations aux dérivées partielles du deuxième et du troisième ordre. — Étude de ce système d'équations aux dérivées partielles; il est montré que son intégrale générale dépend de cinq fonctions arbitraires d'une variable. — Propriétés générales des systèmes triples auxquels on est conduit; M. Bianchi a fait voir qu'on peut leur appliquer la transformation de M. Bäcklund. Il suffit pour cela d'intégrer trois équations de Riccati auxquelles satisfait une même fonction. — Examen particulier des systèmes de Weingarten pour lesquels la courbure totale ne varie pas lorsqu'on passe de l'une des surfaces à toute autre de la même fa-

mille. — On vérifie les propriétés géométriques qui résultent de la proposition énoncée plus haut. — Recherche d'une classe particulière de systèmes de Weingarten. — En essayant de déterminer tous les systèmes triples pour lesquels les neuf quantités H_i, β_{ik} dépendent d'une seule variable α , on est conduit à un système exclusivement composé d'hélicoïdes à courbure totale constante.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME PREMIER.

